NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

ALGÈBRE. — *Sur une généralisation de la notion de corps ordonné.* Note (*) de M. Alain Connes, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Nous avons cherché à obtenir les résultats de la théorie analytique des zéros de polynomes, en considérant un polynome non comme une fonction analytique particulière, mais comme définissant une extension finie du corps de base. Cela nous a conduit à élargir la notion usuelle de corps ordonné.

Nous lions, par exemple, l'étude de la position dans le plan complexe des zéros d'un polynome p irréductible du corps Q des rationnels, à celle des ordres *faibles* du corps $Q[x]/p$.

Dans cette Note, k désigne un corps ordonné (au sens usuel) et K une extension de k.

Définition 1. — On appelle k-ordre faible de K, un ordre partiel ω sur l'ensemble K [noté $a > b(\omega)$] qui vérifie les conditions :

(1) ω est compatible avec la structure vectorielle de K sur k, c'est-à-dire est caractérisé par sa partie positive (*que nous noterons* $\omega = \{x, x > 0\}$ qui est un k-cône convexe saillant, et par la relation $y > x$ quand $y - x > 0$;

(2) ω est compatible avec l'opération $x \to 1/x$, en ce sens que $\omega' = \{x, 1/x > 0(\omega)\}$ est aussi convexe, ce qui s'écrit :

$$(x > 0, y > 0) \quad \text{entraîne} \quad \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} > 0\right).$$

Existence. — Il existe sur K un k-ordre faible *total.*

Par exemple, l'ordre induit sur K, par le $\bar{k}$ ordre faible total $z = a + bi$, $z > 0$ quand $a > 0$ ou $a = 0$, $b > 0$, d'une clôture algébrique $\overline{K} = \bar{k}(i)$ ($\bar{k}$ réel maximal contenant la clôture réelle de k).

Lemme 2. — *Dans* K *l'application* $(x, y) \to xy$ *est déterminée à partir des applications* $(x, y) \to x + y$ *et* $x \to 1/x$ *par les formules*

$$\text{A} : \quad x \neq 0, \quad x \neq 1, \quad x^2 = x - \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}};$$

$$\text{B} : \quad 2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2.$$

On en déduit que si ω est un k-ordre faible sur K, l'ensemble $(\omega - \omega)/(\omega - \omega) = \text{K}' = \textit{support}\ \omega$ est un sous-corps de K.

Soit $k(x_1, \ldots, x_n)$ le corps des fractions des variables x_i, à coefficients dans k et $\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ le k-ordre faible de ce corps ainsi défini :

DÉFINITION 3. — $F \in \Omega(x_1, \ldots, x_n)$, qui se lit F *est une fraction k-faiblement positive des* x_i, si et seulement si elle est obtenue à partir de $x_1, \ldots, x_n$ par un nombre fini de multiplications par $\lambda > 0$, $\lambda \in k$, d'additions et de moyennes harmoniques

$$F'' = \frac{2}{\frac{1}{F} + \frac{1}{F'}},$$

$\Omega(x_1, \ldots, x_n)$ est clairement le k-ordre faible engendré par les x_i. Son support $(\omega - \omega)/(\omega - \omega)$ est l'ensemble des fractions homogènes de degré 0.

THÉORÈME 4. — *a. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation algébrique irréductible à coefficients dans k*

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \textit{avec} \quad P \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

soit impossible en nombres k-faiblement positifs, est qu'il existe une fraction k-faiblement positive $F \in \Omega(x_1, \ldots, x_n)$ *dont* P *divise le numérateur sans diviser le dénominateur.*

b. Soit K *une extension de k, et* $v_1, \ldots, v_n$, *des points de* K. *S'il n'existe aucun k-ordre faible tel que* $v_i > 0$, *il existe une fraction* $F \in \Omega(x_1, \ldots, x_n)$ *telle que* $F(v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Soit maintenant K une *extension finie* de k; deux lemmes simplifient l'étude d'un k-ordre faible quelconque ω de K.

LEMME 5. — *a. Soit* $v \in \omega - \omega$ *et* $v \neq 0$; *alors* $\omega - \omega = v K'$, *où* $K' =$ support ω.

b. Supposons ω *total sur* K, *considérons ses classes d'Archimède sur k (i. e. la classe de x est inférieure ou égale à celle de y s'il existe* $\lambda \in k$, $\lambda > 0$ *tel que* $x < \lambda y$).

Ce sont des k-ordres faibles en nombre fini, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$. *Leurs supports forment une chaîne strictement décroissante de sous-corps de* K.

COROLLAIRE. — *La dimension du sous-espace* $\omega - \omega$ *divise le degré de l'extension* K. *Pour que tout ordre k-linéaire de* K *soit faible, il faut et il suffit que* $K = k(\sqrt{-d})$, $d \geq 0$.

Soit K_1 un corps muni d'une topologie τ telle que :

(α) Le groupe additif de K_1 est topologique séparé non discret;

(β) L'application $x \to 1/x$ est continue en x_0 si $x_0 \neq 0$;

(γ) K_1 est localement borné (i. e. tout point admet un voisinage borné B, c'est-à-dire tel que pour tout voisinage V de 0, il existe W voisinage de 0 tel que $W \times B \subset V$).

Les formules A et B du lemme 2 montrent que le produit est alors bicontinu.

LEMME 6. — *Soit k un corps ordonné muni d'une* (α), (β), (γ) *topologie telle que* $\{x, x > 0\}$ *soit ouvert.*

Soit $p \in k[x]$ *un polynome séparé (i. e. le résultant de* p *et* p' *est différent de* o), $p = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_s$ *une décomposition de* p *en facteurs irréductibles.*

Soit $A = k[x]/p$ *l'anneau* $k_1 \times k_2 \times \ldots \times k_s$, *où* $k_i = k[x]/p_i$, *et soit* n *le degré de* p.

Tout k*-ordre faible de l'anneau* A, *ouvert pour la topologie* τ^n, *admet une projection* $\pi_r(\omega) = \omega_r$ *sur l'un des facteurs* k_r, *qui est un* k*-ordre faible ouvert.*

Le lecteur étendra la définition 1 à un anneau.

L'énoncé du théorème 8 nécessite une dernière définition :

Définition 7. — On appelle k-conjugaison de K un k-automorphisme σ, $\sigma^2 = 1$ et un ordre fort k-linéaire sur son corps fixe K^σ, tels que

$$\forall u \in K, \quad u\sigma(u) \geqq 0.$$

Soit alors $x_0 \notin K^\sigma$, la condition $[\sigma(x) - x]/[\sigma(x_0) - x_0] > 0$ définit un ordre faible $\omega(\sigma)$ qui ne dépend de x_0 que par son signe.

Théorème 8. — *Soit* k *un* corps de constantes, *c'est-à-dire un corps ordonné dense dans une clôture réelle* $\bar{k}$.

a. Tout k*-ordre faible d'une extension finie* K *se prolonge en un* k*-ordre faible total de* K.

b. Soit ω *un* k*-ordre faible total de rang* 1 *sur* K.

Si ω *n'est pas un ordre fort (ou son opposé), il existe un plongement* Δ *de* K *dans* $\bar{k}(i)$ *(autour de* k*) et un ordre* $\bar{k}$ *linéaire* θ *de* $\bar{k}(i)$, *tels que* $\omega = \Delta^{-1}(\theta)$ *[il y a unicité du couple* Δ, θ, *à la conjugaison* $(a + bi) \to (a - bi)$ *près, si l'on suppose* θ *ouvert].*

c. Si l'extension finie K *est normale et si* ω *est un* k*-ordre faible total de rang* r, *en désignant par* $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *ses classes d'Archimède, de supports* $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_r$, *il existe* $(r-1)$ k*-conjugaisons* $\sigma_1 \ldots \sigma_{r-1}$ *telles que pour tout* $\lambda \in K_r$, $\lambda \neq 0$:

Si $i = 1, 2, \ldots, r-1$, ω_i *est l'un des deux* k*-ordres faibles* $\lambda\omega(\sigma_i)$ *ou* $-\lambda\omega(\sigma_i)$ *restreint au corps fixe* K_i *de* $\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}$; *si* $i = r$, ω_r/λ *est un* k*-ordre faible total, de rang* 1, *sur son support* K_r, *corps fixe de* $\sigma_1 \ldots \sigma_{r-1}$.

C'est une conséquence des lemmes 5 et 6. En raison de ce théorème, nous dirons que ω total sur K est *rationnel* si ω_r est un ordre fort (au signe près), que la partie irrationnelle ω_r d'un ordre non rationnel est *transcendante*, s'il n'existe aucune extension K′, Ω de K_r, ω_r (K′ finie sur K, $\omega \cap K_r = \omega_r$) telle que Ω soit rationnel. [$\omega_r = \Delta^{-1}(\theta)$ est algébrique si et seulement si la coupure $\operatorname{tg}\theta$ que θ définit sur la droite $1 + ik$ de $\bar{k}(i)$ est algébrique.]

Dans cette partie, k désigne un corps de constantes.

Nous avons traité le cas d'une extension finie de k; le cas d'une *extension algébrique* est une généralisation facile qui a son intérêt propre.

Soit K une extension algébrique de k, et ω un k-ordre faible de K. Si $v \in \omega - \omega$ et $v \neq 0$, alors $\omega - \omega = v\mathrm{K}'$, où $\mathrm{K}' =$ support ω.

Les classes d'Archimède d'un ordre *total* ω gardent un sens; ce sont des k-ordres faibles indexés par un ensemble totalement ordonné S.

Si K est une extension imaginaire de k, c'est-à-dire s'il existe une relation non triviale $\Sigma\lambda_i a_i^2 = 0$, $\lambda_i \in k$, $\lambda_i > 0$ et $a_i \in \mathrm{K}$, pour tout k-ordre faible *total* ω de K, l'ensemble ordonné S *admet un plus grand élément.*

Théorème 9. — *a. Sur une extension algébrique quelconque* K *de* k, *les résultats a et b du théorème* 8 *restent valables sans changement (on énoncera c avec les modifications nécessaires).*

b. Un élément z de K *est dans la partie positive* $\overline{\omega}$ *de l'intersection des* k*-ordres faibles totaux de* K *contenant* ω, *si et seulement si il vérifie une équation* $\mathrm{F}(-z, u_1, \ldots, u_n) = 0$, *où* F *est une fraction* k*-faiblement positive et* $u_i \in \omega$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$.

c. Soit K *une extension imaginaire de* k, *munie d'un* k*-ordre faible total* ω, *de rang* 1, *transcendant.*

D'après a, l'on identifie K, ω *à un sous-corps de* $\overline{k}(i)$, θ. *Une équation irréductible* $p(x) = 0$, $p \in \mathrm{K}[x]$, *admet autant de racines positives dans* $\overline{k}(i)$, θ *qu'il y a d'extensions de* ω *en un* k*-ordre faible total du corps* $\mathrm{K}[x]/p$, *telles que* $x > 0$.

Nous citons trois applications immédiates des théorèmes 4, 8, 9.

Corollaire 10. — *La forme générale, rationnelle, de l'équation en z, à coefficients dans k dont toutes les racines sont réelles et négatives* [*dans* $\overline{k}(i)$] *est* $\mathrm{F}(z, 1) = 0$ *quand* F *décrit* $\Omega(x_1, x_2)$.

Corollaire 11. — *La forme générale de l'équation en z, dont les racines sont de partie réelle négative est* $\mathrm{F}(\alpha, 1/\alpha, 1) = 0$, $\mathrm{F} \in \Omega(x_1, x_2, x_3)$.

Corollaire 12. — K, ω *désignant un sous-corps de* $\overline{k}(i)$, θ *comme dans le théorème* 9, *c, l'équation générale dont toutes les racines dans* $\overline{k}(i)$, θ *sont négatives, est* $\mathrm{F}(z, a_1, \ldots, a_n) = 0$, *où* F *est* k*-faiblement positive et* $a_i \in \omega$.

(*) Séance du 11 août 1969.

(1) Van der Warden, *Modern algebra.*

(Ecole Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75-Paris, 5e.)