Interprétation géométrique du modèle standard de la physique des particules et structure fine de l'espace-temps

Alain CONNES
Membre de l'Académie

Nous montrons que la géométrie non commutative permet d'interpréter le modèle standard de la physique des particules comme le témoin de la texture à très courte échelle ($\sim 10^{-16}$ cm) de l'espace-temps. La structure fine ainsi obtenue n'est ni continue ni discrète, mais elle est le produit d'un continu de dimension quatre par un espace discret fini, de taille donnée par l'inverse des masses des fermions élémentaires.

C'est la théorie de Maxwell de l'électromagnétisme qui a conduit graduellement par les étapes que l'on connaît (Lorentz, Michelson-Morley, Poincaré, Einstein) à la détermination de la structure locale de l'espace-temps sous la forme de l'espace de Minkowski. La théorie de Maxwell, ou mieux le lagrangien de Maxwell-Dirac de l'électrodynamique quantique, rend parfaitement compte des phénomènes de la physique des particules qui n'impliquent que l'interaction électromagnétique. Cependant cette seule interaction ne suffit pas pour rendre compte des phénomènes expérimentaux tels que la radioactivité, les interactions nucléaires, etc., et le lagrangien du *modèle standard* que les physiciens des particules utilisent et testent quotidiennement est nettement plus élaboré que le lagrangien de Maxwell-Dirac. Mon but est de montrer quelle modification de la structure géométrique fine de l'espace-temps, à des échelles de l'ordre de 10^{-16}cm, est nécessaire et suffisante pour que le lagrangien du modèle standard redevienne celui de Maxwell-Dirac, mais pour cet espace géométrique plus complexe. Il faut insister dès le départ et préciser qu'il *est faux* que tout modèle lagrangien de théorie des champs puisse se mettre sous une telle forme, et il est remarquable que le modèle standard soit aussi géométrique.

Pour interpréter le lagrangien standard il est nécessaire que le discret et le continu soient mis sur le même plan dans la notion d'espace géométrique, ce qui n'est pas le cas

La Vie des Sciences, *Comptes rendus*, série générale, tome 10, 1993, n° 3, p. 223-234

dans la géométrie de Riemann. Il se fait cependant que ce but est atteint comme cas particulier (commutatif) de la notion d'espace géométrique en géométrie non commutative, notion que je vais d'abord exposer brièvement.

L'aspect métrique en géométrie non commutative

Dans un espace de Riemann (M, g) où M est une variété et g une métrique riemannienne, la métrique (géodésique) est donnée par la formule

$$d(p, q) = \mathrm{Inf}\{\text{Longueur d'un chemin } \gamma \text{ de } p \text{ à } q\}$$

où la longueur L d'un chemin γ est l'intégrale le long du chemin de la racine carrée d'une forme quadratique de la différentielle de γ

$$\mathrm{L}(\gamma) = \int_p^q (g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu)^{1/2}.$$

(voir par exemple la figure 1 dans le cas d'une sphère).

Ces espaces géométriques forment une classe privilégiée d'espaces métriques pour autant que :

– ils sont assez généraux pour inclure de très nombreux exemples, allant des géométries non euclidiennes aux hypersurfaces de genre espace en relativité générale;

– ils sont suffisamment particuliers pour mériter le nom de géométrie, car leur détermination est locale et on dispose pour les traiter des outils du calcul différentiel et intégral.

En géométrie non commutative, un espace est analysé grâce à l'algèbre, non nécessairement commutative, $\mathscr{A}$ des coordonnées (ou fonctions) sur cet espace. Nous désignerons par f, g, a, b, des éléments de cette algèbre. La structure d'algèbre permet de les additionner, de les multiplier par un nombre complexe et de les multiplier entre eux. La non commutativité du produit fg signifie qu'en général $fg \neq gf$. Nous supposerons également que l'adjoint $f^* \in \mathscr{A}$ de tout élément de $\mathscr{A}$ est bien défini, avec $(fg)^* = g^* f^*$. Un espace géométrique est donné par une algèbre (involutive sur $\mathbb{C}$) et une *représentation* de cette algèbre dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ muni d'un opérateur non borné autoadjoint D à spectre discret [$(1 + \mathrm{D}^2)^{-1}$ est compact].

Pour nous familiariser avec ce passage du point de vue « ensembliste » (l'espace M est un ensemble) au point de vue « algébrique », commençons par spécifier l'algèbre $\mathscr{A}$ et la représentation ($\mathscr{H}$, D) dans le cas riemannien usuel.

Nous donnerons ensuite quatre formules qui permettent, à partir de la donnée algébrique (ou opératorielle) ($\mathscr{A}$, $\mathscr{H}$, D), de retrouver :

– l'espace métrique (M, d),

– la forme volume dv sur M,

– l'espace des potentiels de jauge,

– l'action de Yang-Mills (ou de Maxwell-Dirac).

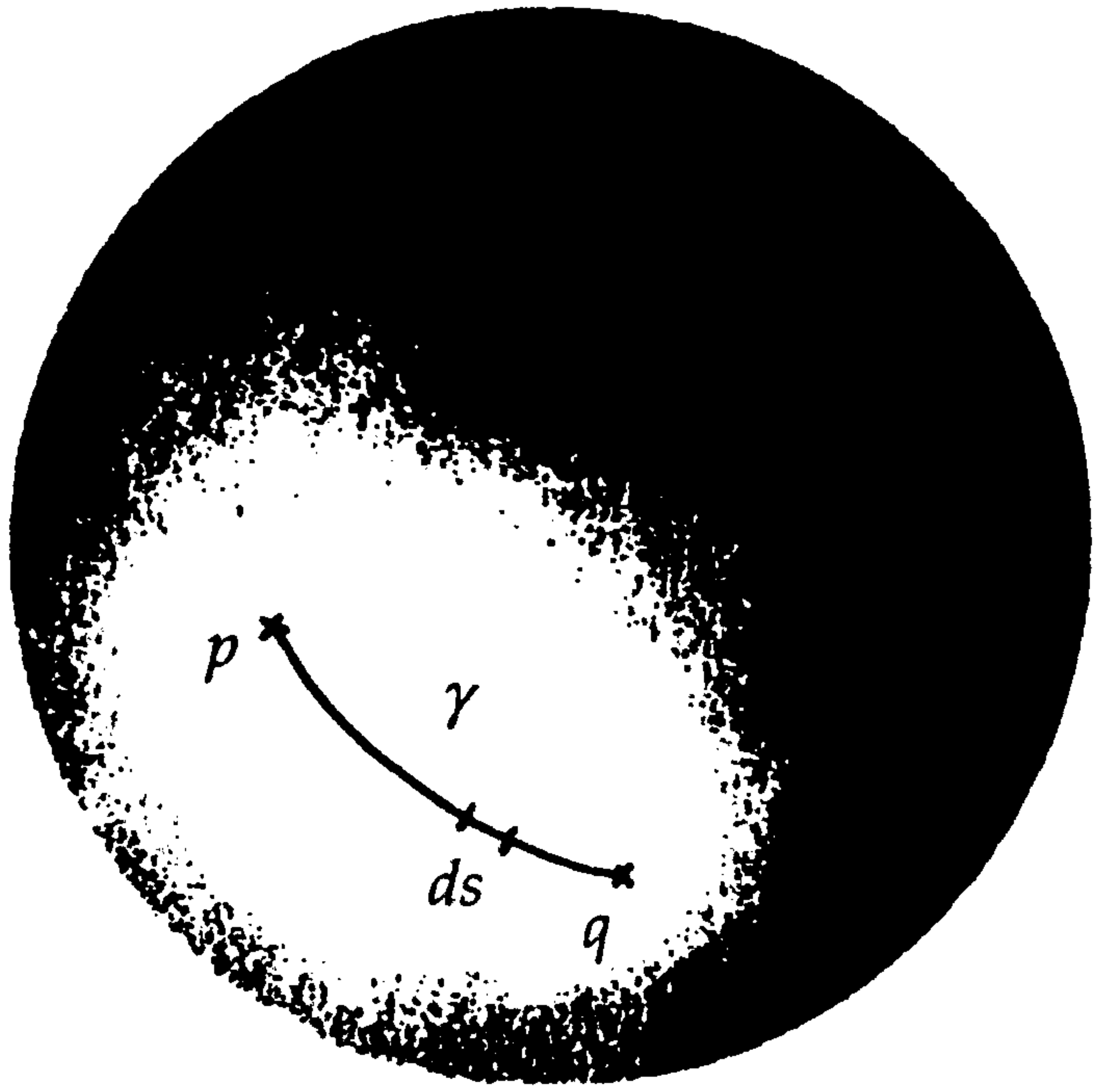

Fig. 1. – La distance entre deux points sur une surface non plane (ici une sphère) est donnée par la longueur du plus petit parcours γ entre deux points de positions respectives p et q : $d(p, q) = \mathrm{Inf}\,\{\text{longueur } \gamma\}$. La distance infinitésimale ds est donnée par la relation

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

où $g_{\mu\nu}$ est la métrique, liée à la géométrie de l'espace. (En coordonnées cartésiennes habituelles, on retrouve la relation familière : $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.)

Le point essentiel est que ces formules garderont un sens non trivial dans le cas commutatif discret et dans le cas non commutatif.

Si M est une variété riemannienne, supposée compacte et Spin^c pour simplifier la discussion, l'algèbre $\mathscr{A}$ associée est celle des fonctions mesurables bornées sur M, l'espace de Hilbert est celui des spineurs L^2 [*i. e.*, $\mathscr{H} = L^2(M, S)$ est l'espace des sections de carré intégrable du fibré des spineurs] dans lequel $\mathscr{A}$ agit par multiplication

$$(f\xi)(p) = f(p)\,\xi(p), \qquad \forall\, f \in \mathscr{A}, \in \mathscr{H}, \quad p \in M,$$

et l'opérateur D est l'opérateur de Dirac. Il n'est pas nécessaire ici de donner une connaissance détaillée de ces objets.

L'espace métrique (M, d)

Commençons par montrer comment récupérer l'espace métrique (M, d) à partir du triplet ($\mathscr{A}$, $\mathscr{H}$, D) ou module de Fredholm. L'espace M est le *spectre* ou espace des caractères (des états purs dans le cas non commutatif) de l'algèbre $\mathscr{A}_L$ déterminée par la condition $\mathscr{A}_L = \{ a \in \mathscr{A}, [D, a] \text{ borné} \}$ (comme opérateur).

Ainsi un point p de M apparaît comme le caractère

$$f \in \mathscr{A}_L \mapsto f(p) \in \mathbb{C}.$$

La distance géodésique $d(p, q)$ entre deux points de M est donné par la formule suivante:

$$d(p, q) = \operatorname{Sup} \{ | a(p) - a(q) |;\ a \in \mathscr{A},\ \| [D, a] \| \leq 1 \}. \tag{A}$$

Il n'est pas difficile de montrer que cette formule redonne la distance géodésique dans le cas riemannien usuel, car l'opérateur [D, a] est donné par la multiplication de Clifford par le gradient de a, et a donc pour norme Supp Ess$\| da \|$ qui est égal à la norme lipschitzienne de a.

Elle est en quelque sorte *duale* de la formule de l'inf des longueurs des chemins, et elle utilise les fonctions sur M, $f: M \to \mathbb{C}$ à la place des arcs : $[0, 1] \to M$.

Il est clair qu'elle garde un sens, que nous verrons être non trivial, pour des espaces commutatifs *non connexes* tels les espaces discrets, et également, en remplaçant les caractères par les états purs, pour des espaces non commutatifs.

La formule volume dV *sur* M

Pour le moment nous n'avons fait que retrouver l'espace métrique (M, d) mais nous avons besoin d'outils de géométrie riemannienne tels que l'intégration par rapport à la forme volume, la différentiation etc. L'intégrale

$$f \to \int f\, dv, \qquad \text{où} \quad dv = [\det(g_{\mu\nu})]^{1/2} \, | dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n |$$

est donnée par notre deuxième formule (B), qui est ici une conséquence directe du théorème d'Herman Weyl sur le comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien. Mais pour que cette formule ait un sens en général, il fallait un outil nouveau, la trace de Dixmier, Tr_ω, que nous discutons en appendice. On a

$$\int_M f\, dv = \operatorname{Tr}_\omega (f | D |^{-n}) \tag{B}$$

où $n = \dim M$.

Les potentiels-vecteurs

L'opérateur D dans $\mathscr{H}$ n'est pas invariant par l'action du groupe unitaire $U=\{u\in\mathscr{A};\ uu^*=u^*u=1\}$ dans $\mathscr{H}$, *i.e.* on n'a pas $uDu^*=D$. Cependant l'égalité

$$uDu^*=D+u[D,u^*]$$

montre que ce groupe unitaire agit de manière affine sur l'espace des potentiels vecteurs ainsi défini : un potentiel-vecteur V est un opérateur autoadjoint dans $\mathscr{H}$ de la forme $V=\sum a_j[D,b_j]$ où $a_j,\ b_j\in\mathscr{A}$. Il est immédiat de vérifier que l'on obtient la notion usuelle si l'on part du module de Fredholm associé à l'opérateur de Dirac sur une variété riemannienne. (D'ailleurs, si l'on remplace alors $\mathscr{A}$ par $M_n(\mathscr{A})$ on obtient la théorie de jauge associée au groupe $U(n)$; par exemple le groupe de jauge de deuxième espèce est égal à :

$$U(M_n(\mathscr{A}))=\{\text{Application de M dans } U(n)\}).$$

La *courbure* d'un potentiel-vecteur V est définie par la formule $\theta=dV+V^2$, où V^2 est le carré de V comme opérateur dans $\mathscr{H}$ et où

$$dV=\sum[D,a_j][D,b_j]. \tag{C}$$

On démontre (*cf.* [1]) que tout cela a un sens et redonne l'expression classique de la courbure [non triviale quand on utilise M_n et $U(n)$ comme ci-dessus] dans le cas riemannien, et que de plus la courbure est covariante : si l'on agit par $u\in U$ sur V, *i.e.*, on transforme V en $u[D,u^*]+uVu^*$, la nouvelle courbure est $u\theta u^*$.

Il faut bien noter que tout cela garde un sens quand l'algèbre $\mathscr{A}$ n'est pas commutative [en particulier quand $\mathscr{A}=M_n(C^\infty(M))$, avec M riemannienne], et que le terme non linéaire V^2 est automatique dans cette généralité. (On ne peut séparer le lagrangien de Maxwell de celui de Yang-Mills dans cette généralité.)

L'action de Yang-Mills

Comme la courbure $\theta=dV+V^2$ d'un potentiel vecteur V est un opérateur dans $\mathscr{H}$, on peut lui appliquer la trace de Dixmier Tr_ω, ce qui permet de mesurer sa taille par la fonctionnelle d'action suivante, qui dans le cas riemannien coïncide avec l'action de Yang-Mills

$$YM(V)=\mathrm{Tr}_\omega(\theta^2|D|^{-n}) \tag{D}$$

où n est la dimension du module de Fredholm $(\mathscr{H}, D)$. Comme θ est homogène de degré 2 en D, θ^2 est homogène de degré 4, et l'on ne peut espérer de signification topologique au terme de droite que pour $n=4$. C'est le cas, en toute généralité, grâce à l'inégalité entre l'analogue de l'intégrale de la 2ᵉ classe de Chern d'un fibré et la valeur de $YM(V)$ pour tout V (*cf.* [1]). Il est nécessaire pour cela d'avoir étendu (D) au cas des potentiels-vecteurs à coefficients dans un module projectif de type fini sur $\mathscr{A}$. L'analogue non commutatif de l'action de Maxwell-Dirac de l'électrodynamique est alors la somme

$$YM(V)+\langle\psi,(D+V)\psi\rangle$$

où V est un potentiel vecteur et ψ un vecteur dans $\mathscr{H}$. Le groupe de jauge de deuxième espèce (ou global) est le groupe unitaire U de l'algèbre $\mathscr{A}$, et la covariance de la courbure θ montre que cette action est invariante de jauge.

Le modèle standard et son origine physique

Le lagrangien du modèle standard a été lentement élaboré à partir d'une multitude de découvertes expérimentales et théoriques qu'il est impossible de résumer en quelques lignes. Comme c'est surtout sur la partie «électrofaible» de ce lagrangien que se porte mon intérêt, je me contenterai de rappeler quelques dates essentielles dans la physique des interactions faibles :

– 1896 : le 1er mars, H. Becquerel découvre à Paris la radioactivité ;

– 1898 : Marie Curie démontre que la radioactivité est une propriété intrinsèque de l'atome ;

– 1901 : Rutherford démontre l'inhomogénéité des rayons uraniques et isole le rayonnement β ;

– 1902 : Kaufman montre que les rayons β sont formés d'électrons ;

– 1907-1914 : le spectre continu des électrons β est mis en évidence (Chadwick, 1914) ;

– 1930 : W. Pauli introduit le neutrino pour expliquer le spectre continu des rayons β ;

– 1932 : W. Heisenberg introduit le concept d'isospin (dans le contexte différent des interactions fortes) ;

– 1934 : Fermi donne une théorie des interactions faibles ;

– 1935 : Yukawa introduit l'idée de particules massives médiant les forces à courte portée.

Parmi les étapes suivantes, citons la découverte de la forme vectorielle des courants faibles, l'hypothèse des bosons intermédiaires qui remplace l'interaction à 4 fermions de la théorie de Fermi par une interaction renormalisable, mais exige une masse considérable pour le boson médiateur, si l'on veut une unification possible de l'interaction électromagnétique avec l'interaction faible. Il y avait là une difficulté majeure, car un champ de jauge de type Yang-Mills non abélien est nécessairement de masse nulle. Cette difficulté a été complètement résolue par la découverte (théorique) du mécanisme de Higgs qui, grâce au phénomène de brisure spontanée de symétrie, engendre les masses des bosons médiateurs et des fermions. Le champ de Higgs ainsi introduit apparaît dans trois des cinq termes du lagrangien du modèle standard que nous explicitons maintenant (écrit dans sa version euclidienne, c'est-à-dire à temps imaginaire pur) :

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{G}+\mathscr{L}_{f}+\mathscr{L}_{\varphi}+\mathscr{L}_{Y}+\mathscr{L}_{V}$$

– Le terme de jauge pure $\mathscr{L}_G$

$$\mathscr{L}_{G}=\left(\frac{1}{4}G_{\mu\nu a}G_{a}^{\mu\nu}\right)+\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})+\frac{1}{4}(H_{\mu\nu b}H_{b}^{\mu\nu})$$

TABLEAU I. — *Hypercharges des fermions et des bosons.*

	e, μ, r	$\nu_e \nu_\mu \nu_r$	u, c, t	d, s, b
Y_L	-1	-1	1/3	1/3
Y_R	-2		4/3	$-2/3$

où $G_{\mu\nu a}$ est le champ de forces du champ de jauge $W_{\mu a}$ de groupe SU(2); $F_{\mu\nu}$ celui du champ de jauge B_μ de groupe U(1) et $H_{\mu\nu b}$ celui du champ $V_{\mu b}$ de groupe SU(3).

— Le terme cinétique des fermions : $\mathscr{L}_f$

$$\mathscr{L}_f - \sum_f \left[\bar{f}_L \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig\frac{t_a}{2} W_{\mu a} + ig\frac{Y_L}{2} B_\mu + ig\lambda_b V_{\mu b} \right) f_L + \bar{f}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig\frac{Y_R}{2} B_\mu + ig\lambda_b V_{\mu b} \right) f_R \right]$$

où les hypercharges qui spécifient le couplage avec le champ de jauge B_ν sont données de manière *ad hoc* par le tableau I (ci-dessus) de telle sorte que les charges électromagnétiques soient correctes expérimentalement pour chaque famille de quarks et de leptons (voir le tableau II).

— Le terme cinétique des champs de Higgs : $\mathscr{L}_\varphi$

$$\mathscr{L}_\varphi = - \left| \left(\partial_\mu + ig\frac{t_a}{2} W_{\mu a} + i\frac{g}{2} B_\mu \right) \varphi \right|^2$$

où $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ est un doublet [de SU (2)] de champs scalaires complexes.

— Le couplage de Yukawa Higgs-fermion : $\mathscr{L}_Y$

$$\mathscr{L}_Y = - \sum_{f, f'} [H_{f, f'} (\bar{f}_L \cdot \varphi) f'_R + H_{f, f'} \bar{f}'_R (\bar{\varphi} \cdot f_L)]$$

TABLEAU II. — *Fermions et bosons.*
Selon la chromodynamique quantique, les particules qui composent le noyau atomique (protons, neutrons) sont constitués de particules élémentaires appelées *quarks.* La théorie prévoit l'existence de six « espèces » différentes : *u* (*up*), *b* (*bottom*), *c* (*charmed*), *s* (*strange*), *t* (*top*) et *b* (*bottom*). Les électrons, eux, font partie d'une famille de six particules « légères » (leptons), avec les muons (μ), les tau (τ), et leurs neutrinos associés. Leurs interactions respectives (forte et électrofaible) se font par échange de « bosons médiateurs ». On recherche encore les manifestations du quark *top*, mais son existence est pratiquement certaine. En revanche, la découverte du « boson de Higgs », particule hypothétique très massive, est cruciale et constitue actuellement l'un des enjeux majeurs de la physique des particules.

Fermions élémentaires	1	2	3	*Charge électrique*	*Bosons médiateurs :* Interaction forte	Interaction électrofaible
Quarks	u	c	t	2/3		γ (photon)
	d	s	b	$-1/3$	8 gluons	W^+, W^-, Z^0
Leptons	ν_e	ν_μ	ν_τ	0		H^0 (Higgs)
	e	μ	τ	-1		

qui utilise le doublet $\bar{\varphi} = J\,\varphi^*$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui a le même isospin mais l'hypercharge opposée de celle de φ, en ce qui concerne le couplage avec les quarks tels u_R.

– L'auto-interaction des bosons de Higgs : $\mathscr{L}_V$

$$\mathscr{L}_V = \mu^2\,\varphi^+\,\varphi - \frac{1}{2}\lambda\,(\varphi^+\,\varphi)^2$$

qui est à la base du mécanisme de brisure spontanée de symétrie.

Parmi ces cinq termes du lagrangien, les deux premiers sont parfaitement géométriques, la seule critique au deuxième étant les valeurs *ad hoc* des hypercharges. Ces deux premiers termes sont des généralisations directes des deux termes du lagrangien de Maxwell-Dirac de l'électrodynamique. Il n'en va pas du tout de même des trois derniers termes : $\mathscr{L}_\varphi$, $\mathscr{L}_Y$, $\mathscr{L}_V$, qui tous trois impliquent le champ de Higgs. Je vais maintenant expliquer comment résoudre, grâce aux outils développés ci-dessus de géométrie non commutative, le problème de la signification géométrique de ces trois termes.

Interprétation géométrique du modèle standard

Notre but ici est de montrer que le lagrangien $\mathscr{L}$ du modèle standard redevient celui de Maxwell-Dirac à condition de modifier la structure géométrique fine de l'espace-temps.

La structure que nous obtenons est déterminée de manière unique par le lagrangien standard et correspond à un espace qui n'est ni contenu ni discret, mais qui est le *produit* d'un continu ordinaire de dimension 4 par un espace discret *fini*. Dans le cadre de la géométrie non commutative décrit plus haut), le produit de deux espaces décrits par les modules $(\mathscr{A}_j, \mathscr{H}_j, D_j)$ est donné par l'algèbre $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$ agissant dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ avec pour opérateur D l'opérateur

$$D = D_1 \otimes 1 + \gamma_1 \otimes D_2$$

où la $\mathbb{Z}/2$-graduation γ_1 anticommute avec D_1 et commute avec $\mathscr{A}_1$.

Commençons donc par montrer que dans notre cadre on peut faire de la géométrie sur un ensemble fini F. Prenons le cas le plus simple, à savoir celui d'un espace F ayant deux points a et b. L'algèbre $\mathscr{A}$ est alors l'algèbre des fonctions sur F, une telle fonction est caractérisée par les 2 nombres complexes $f(a)$ et $f(b) \in \mathbb{C}$. Le module de Fredholm $(\mathscr{H}, D)$ sur $\mathscr{A}$ est donné par un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ de dimension finie, où l'action de $\mathscr{A}$ peut toujours être diagonalisée sous la forme :

$$f \mapsto \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix}$$

en utilisant une décomposition $\mathscr{H} = \mathscr{H}_a \oplus \mathscr{H}_b$ de $\mathscr{H}$ en somme directe de deux sous-espaces. On peut montrer que l'opérateur D se ramène alors à la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}$$

où M est une matrice. Il anticommute avec la $\mathbb{Z}/2$ graduation $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons alors la distance des points a et b dans notre espace géométrique F. On a (formule A)

$$d(a, b) = \sup \{ |f(a) - f(b)|, \|[\mathrm{D}, f]\| \leq 1 \}.$$

Un calcul très simple montre que le commutateur $[\mathrm{D}, f]$ vaut

$$(f(b) - f(a)) \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{M}^* \\ -\mathrm{M} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité

$$d(a, b) = 1/\lambda, \ \lambda = \text{plus grande valeur caractéristique de M.}$$

(Bien entendu une formule comme Inf {Longueur des arcs} aurait donné un résultat ∞.)

Un calcul simple détermine l'espace des potentiels-vecteurs [on utilise la formule (C)], un tel potentiel V est donné avec $\varphi \in \mathbb{C}$ variable, par

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi}\mathrm{M}^* \\ \varphi\mathrm{M} & 0 \end{pmatrix}.$$

La courbure $\theta = d\mathrm{V} + \mathrm{V}^2$ est donnée par

$$\theta = -(\varphi + \bar{\varphi} + \varphi\bar{\varphi}) \begin{pmatrix} \mathrm{M}^*\mathrm{M} & 0 \\ 0 & \mathrm{M}\mathrm{M}^* \end{pmatrix}$$

et l'action de Maxwell-Dirac Trace $(\theta^2) + \langle \psi, (\mathrm{D} + \mathrm{V})\psi \rangle$ donne

$$2(|\varphi + 1|^2 - 1)^2 \operatorname{Trace}((\mathrm{M}^*\mathrm{M})^2) + \bar{\psi} \begin{pmatrix} 0 & (1 + \bar{\varphi})\mathrm{M}^* \\ (1 + \varphi)\mathrm{M} & 0 \end{pmatrix} \psi.$$

Le premier terme, quartique, a une ressemblance évidente avec la self interaction quartique des champs de Higgs et le deuxième avec le couplage de Yukawa : Higgs $\leftrightarrow$ Fermions.

Bien entendu, comme l'espace F est fini, on n'a pas affaire à des champs mais simplement à des nombres, mais cet exemple suggère fortement que si l'on fait le produit de F par le continu ordinaire de dimension 4 on verra apparaître des termes $\mathscr{L}_{\mathrm{V}}$ et $\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}$ dans le lagrangien de Maxwell-Dirac de l'espace produit.

Il est remarquable que quand on effectue ce produit (M_4 = continu ordinaire) $\times$ (Espace fini à deux points F) et que l'on calcule le lagrangien de Maxwell-Dirac, on obtient non seulement les termes $\mathscr{L}_{\mathrm{V}}$ et $\mathscr{L}_{\mathrm{Y}}$ requis, mais également le terme $\mathscr{L}_{\varphi}$ de couplage minimal. Cette constatation presque accidentelle a été le point de départ de mon travail (*cf.* [1]) sur le modèle électrofaible, poursuivi avec J. Lott pour le modèle standard.

Quand on calcule la différentielle $[\mathrm{D}, f]$ dans l'espace produit $\mathrm{M}_4 \times \mathrm{F} = \mathrm{U}$, d'une fonction f sur U on obtient en effet 3 termes :

– la différentielle ordinaire df de f sur $\mathrm{M} \times \{a\}$,

– la différentielle ordinaire df de f sur $\mathrm{M} \times \{b\}$,

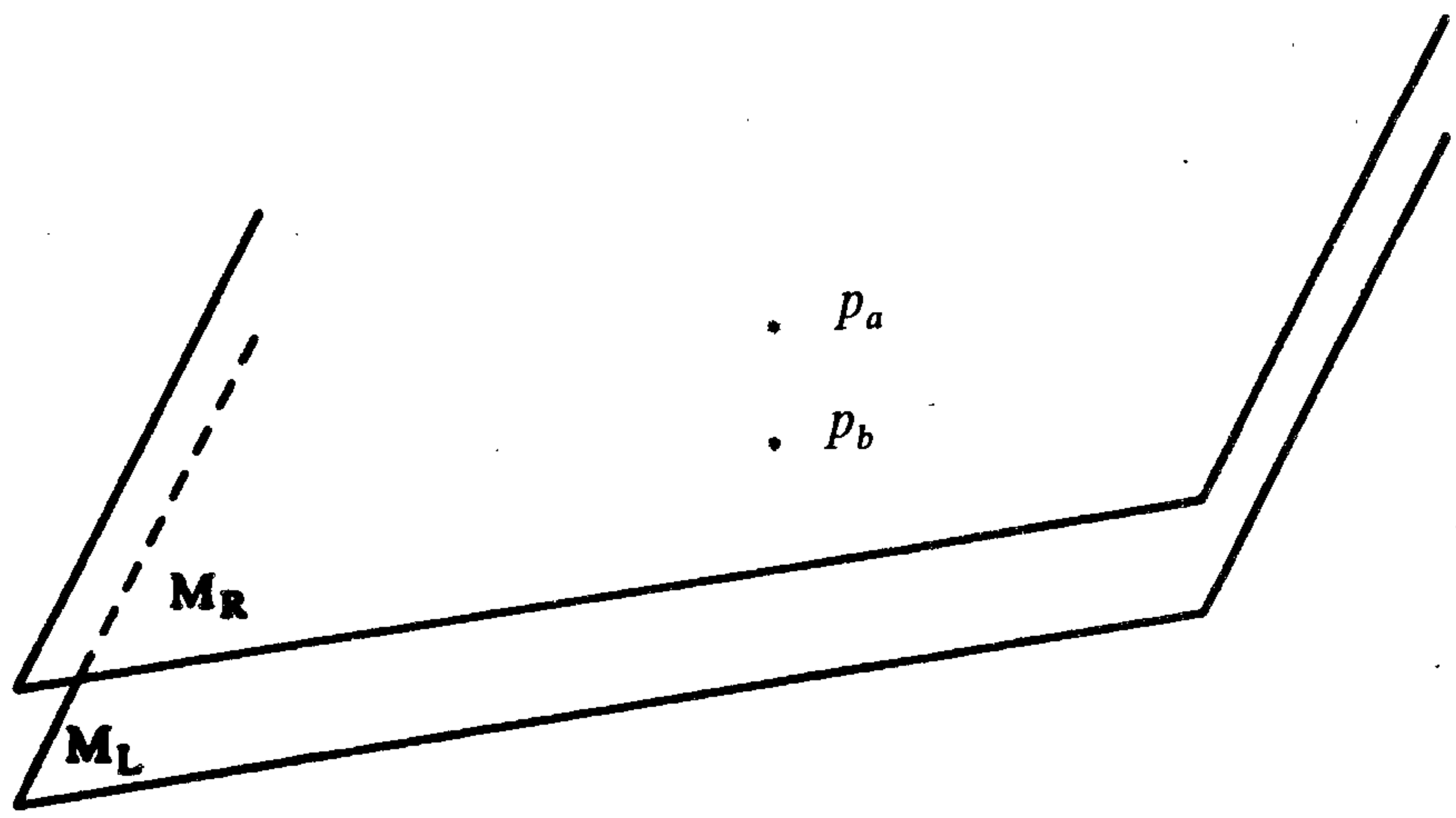

Fig. 2. – *L'espace* $M_4 \times F$ *et deux points* p_a *et* p_b *correspondants.* On a dist $(p_a, p_b) \simeq 10^{-16}$ cm.

– la différence finie $\Delta f = f(p_a) - f(p_b)$ des valeurs de f en les points p_a et p_b correspondants.

Le calcul de la métrique donne sur $U = M_4 \times F$ la métrique produit de la distance ordinaire dans M_4 par la distance $d(a, b) = 1/\lambda$, λ étant la plus grande valeur caractéristique de la matrice M. Cette matrice a les dimensions d'une masse, et c'est celle du couplage de Yukawa, les masses impliquées sont celles des fermions. On peut donc qualitativement affirmer que $1/\lambda \sim 10^{-16}$ cm. Cela donne l'image géométrique de deux copies que nous appellerons désormais M_L et M_R de l'espace continu ordinaire, mais presque collées l'une à l'autre à la distance $\sim 10^{-16}$ cm (cf. *fig.* 2).

En général, les formes différentielles de degré plus élevé sur $U = M \times F$ ont une bigraduation (degré différentiel, degré différence finie), et par exemple les 2-formes, telles que la courbure θ, se décomposent en :

type (2,0) (différentielle usuelle)

type (1,1) (différentielle-différence finie)

type (0,2) (différence finie).

Quand on calcule la contribution de chacun de ces termes à $\mathrm{Tr}_\omega(\theta^2 D^{-4})$, on obtient exactement les termes de la forme $\mathscr{L}_G$, $\mathscr{L}_\varphi$ et $\mathscr{L}_V$ du lagrangien standard.

Les termes $\mathscr{L}_Y$ et $\mathscr{L}_f$ apparaissent tout deux à partir de $\langle \psi,(D+V)\psi \rangle$.

On obtient ainsi un lagrangien, qui, à condition d'utiliser sur l'espace F à 2 points le fibré *non trivial* de fibre $\mathbb{C}^2$ en $a = L$, et $\mathbb{C}$ en $b = R$, et celui du modèle de Glashow-Weinberg-Salam de l'unification électrofaible pour les leptons. Pour attraper le lagrangien du modèle standard, il faut résoudre trois questions difficiles, ce que nous avons fait avec J. Lott, et expliquer :

a) les nouveaux couplages de Yukawa : quarks $_R \leftrightarrow$ Higgs,

b) l'apparition du groupe de couleurs, *c*) les valeurs 1/3, 4/3, $-2/3$ des hypercharges.

La réponse à *a*) dicte ce que doit être l'algèbre $\mathscr{A}$ qui décrit les coordonnées sur l'espace fini F, et l'on obtient

$$\mathscr{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{H}$$

où l'algèbre $\mathbb{C}$ correspond au point R et l'algèbre $\mathbb{H}$, les quaternions de Hamilton, correspond au point L. (Bien sûr R correspond à Right et L à Left, les particules *gauches*, tel le neutrino, ne vivent que sur la copie $M_L \subset U$.)

La réponse à *b*) est très intéressante et implique la dualité de Poincaré en K-homologie qui précise ce qu'est une *variété* dans le cadre général de la géométrie non commutative. Il est troublant de constater que les propriétés de jauge des quarks (u_L, d_L) conduisent automatiquement à cette notion qui avait été introduite par Kasparov, ainsi que dans mon travail sur les feuilletages avec G. Skandalis, pour des raisons strictement mathématiques. Le secteur de couleurs apparaît ainsi comme *dual* du secteur électrofaible.

La réponse à *c*) apparaît alors comme corollaire d'un critère d'unimodularité (*cf.* [2]), et l'on retrouve de manière conceptuelle le tableau empirique des hypercharges des quarks et leptons.

On obtient ainsi une interprétation géométrique du modèle standard, comme étant celui de Maxwell-Dirac sur un espace-temps dont la structure fine est plus subtile (ni continue, ni discrète) que le continu ordinaire, mais est la conséquence naturelle des informations expérimentales amassées au cours des années. L'opérateur de Dirac D_F sur l'espace fini est donné par une matrice finie qui contient pour information exactement les masses des quarks et leptons, et les angles de mélange de Kobayashi-Maskawa.

Pour faire de cette *interprétation* du modèle standard une théorie prédictive, il suffirait de résoudre l'un des trois problèmes suivants :

1) déterminer un groupe quantique fini non trivial de symétries de l'espace fini F (un tel « groupe » est donné par une algèbre de Hopf de dimension finie);

2) déterminer la présentation de l'algèbre de Clifford (qui n'est plus quadratique) pour l'espace F, donnée par une application linéaire

$$\omega \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \to \mathrm{End}(E)$$

où E est l'espace de Hilbert de dimension finie dans lequel agit l'opérateur de Dirac D_F pour l'espace fini F (*cf.* [2]);

3) déterminer l'analogue du lagrangien d'Einstein de la relativité générale pour des espaces continu × discret dont la structure géométrique n'est plus une structure produit.

ANNEXE

Intégrale et trace de Dixmier

Décrivons brièvement ce qui remplace le calcul différentiel et intégral dans le cadre de la géométrie non commutative. Une variable complexe (resp. réelle) est remplacée par un opérateur borné (resp. autoadjoint) dans l'espace de Hilbert. (Le spectre de l'opérateur est l'ensemble des valeurs de la variable.) Le rôle des *infinitésimaux* du calcul différentiel est tenu par l'idéal bilatère k des *opérateurs compacts.* Rappelons que si T est un opérateur compact il en est de même de $|T|=\sqrt{T^*T}$ et que les valeurs propres μ_n de $|T|$ rangées par ordre décroissant forment une suite tendant vers 0. Soit $\alpha>0$. Le rôle des infinitésimaux d'ordre α est tenu par l'idéal bilatère des opérateurs compacts T tels que

$$\mu_n(T)=0(n^{-\alpha}) \quad qd \ n\to\infty.$$

Les règles usuelles sur l'ordre d'une somme ou d'un produit restent valables. Nous renvoyons à [1] pour la définition de la différentielle d'une variable réelle ou complexe par un commutateur: $df=[F,f]$. Nous nous contenterons ici d'expliquer ce qui joue le rôle de l'intégrale: la trace de Dixmier.

Il s'agit d'une trace Tr_ω définie sur les infinitésimaux d'ordre 1, *i.e.* sur l'idéal

$$\left\{T,\ \mu_n(T)=0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

et qui *annule* tous les infinitésimaux d'ordre >1, *i.e.* en fait l'idéal

$$\left\{T,\ \mu_n(T)=0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

La définition de $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ pour $T>0$ s'obtient à partir d'une limite convenable des sommes partielles:

$$\frac{1}{\log N}\sum_1^N \mu_n(T).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Connes A., 1990, *Géométrie non commutative*, Interéditions, Paris.
[2] Connes A., 1991, *The metric aspect in non commutative geometry*, Preprint.