

NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS
ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

ALGÈBRE. — *Ordres faibles et localisation des zéros de polynomes.* Note (*)
de M. ALAIN CONNES, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Nous avons introduit dans la Note précédente la notion d'ordre faible sur un corps (la condition « $x > 0, y > 0$ entraîne $xy > 0$ » est remplacée par $x > 0, y > 0$ entraîne $1/[(1/x) + (1/y)] > 0$).

Nous déterminons d'abord les conditions exactes dans lesquelles elle rejoint la notion usuelle.

Puis pour un corps algébriquement clos faiblement ordonné K , ω quelconque, nous énonçons une généralisation d'un théorème, dit d'apolarité, que Grace avait démontré pour un demi-plan du plan complexe.

EXTENSIONS FORTEMENT RÉELLES. — Soit k un corps ordonné, on vérifie d'abord ceci :

Pour que tout polynome p séparé (i. e. le résultant de p et p' est différent de 0) admette autant de zéros dans la clôture réelle \bar{k} de k que de changements de signes dans k , il faut et il suffit que k soit dense au sens de l'ordre dans \bar{k} , c'est-à-dire que k soit un corps de constantes.

Ainsi si k n'est pas un corps de constantes, la condition « p a tous ses zéros dans \bar{k} » (ce qui s'écrit par des inégalités rationnelles sur ses coefficients) n'entraîne même pas que p change de signe dans k .

Nous étudions le problème suivant : Déterminer les extensions K de k (que nous appellerons *fortement réelles*) telles que tout k -ordre faible se prolonge en un ordre fort (au signe près).

Si k est un corps de constantes, dire que $K = k[x]/p$ est fortement réelle équivaut à dire que p a tous ses zéros dans k .

Si k est un corps de fonctions à m variables sur un corps de constantes, il faut renforcer la condition « p a tous ses zéros dans \bar{k} » par des conditions de ramification de l'extension $K = k[x]/p$ pour exprimer qu'elle est fortement réelle; plus précisément :

THÉORÈME 1. — *a. Pour qu'une extension K de k soit fortement réelle, il faut et il suffit qu'elle soit algébrique et que ses sous-extensions finies soient fortement réelles.*

b. Si k est un corps de constantes (dense dans \bar{k}), l'extension $K = k[x]/p$ est fortement réelle si et seulement si le polynome p a tous ses zéros dans \bar{k} .

c. Soit k un corps de fonctions à m variables, c'est-à-dire un corps ordonné muni d'une valuation discrète v , de rang m , telle que l'égalité

$$v(x + y) = \inf(v(x), v(y))$$

ait lieu dès que x et y sont positifs, et que le corps ordonné résiduel $\text{Res } k$ soit un corps de constantes.

Soit $\nu = \nu_m \subset \nu_{m-1} \subset \dots \subset \nu_1 \subset \nu_0 = k$ la chaîne des différentes composantes de ν , ν_i la composante de rang i .

L'extension $K = k[x]/p$ de k est fortement réelle si et seulement si :

(α) p a tous ses zéros dans une clôture réelle \bar{k} de k ;

(β) quelle que soit l'extension $\hat{\nu}_i$ de ν_i à K , les indices usuels e et f de $\hat{\nu}_i$ sur ν_i vérifient : $e = 1$, f quelconque; ou $e = 2$, $f = 1$.

La nécessité des conditions a et c est une conséquence de la construction suivante :

Soit k un corps ordonné, muni d'une valuation ν à valeurs dans le groupe ordonné H , et telle que

$$\nu(x + y) = \inf(\nu(x), \nu(y))$$

quand x et y sont positifs; soit φ la place associée, à valeurs dans le corps ordonné résiduel $\text{Res } k$.

Soient K , $\hat{\nu}$, \hat{H} , $\hat{\varphi}$, $\text{Res } K$ des extensions respectives de k , ν , H , φ et $\text{Res } k$.

Soit G le groupe quotient \hat{H}/H , $g \rightarrow \varepsilon_g$ une application de G dans K telle que $\hat{\nu}(\varepsilon_g) \equiv g$ modulo H .

Toute application $g \rightarrow \omega(g)$ de G dans l'ensemble des $\text{Res } k$ -ordres faibles de $\text{Res } K$, définit un k -ordre faible ω de K par la condition : $x \in \omega$ quand il existe $\lambda \in k$, $\lambda > 0$ tel que si $\hat{\nu}(x) \equiv g$ modulo H , l'on ait : $\varphi(\lambda x / \varepsilon_g) \in \omega(g)$.

La conclusion b se déduit du théorème 8 de la Note précédente (¹).

LOCALISATION DES ZÉROS DE POLYNOMES. — Nous montrons l'intérêt d'un ordre faible total sur un corps algébriquement clos K extension de \mathbb{Q} corps des rationnels.

Soit p un polynôme de degré n , à coefficients dans K .

Nous considérons l'ensemble des zéros de p , comme un sous-ensemble avec répétition de K .

Nous écrirons $z \in Z$ pour dire que z est un zéro de p et nous considérerons Z comme un élément du produit symétrique n -uple $K^{(n)}$ ainsi défini :

$K^{(n)}$ est le quotient du produit K^n par la relation

$$(z_1, \dots, z_n) = (z'_1, \dots, z'_n)$$

quand il existe une permutation $i \rightarrow i'$ de $1, \dots, n$ telle que $z_i = z'_i$.

Nous dirons qu'une fonction définie sur $K^{(n)}$ à valeurs dans K est affine (resp. algébrique) si $f(Z) = f(z_1, \dots, z_n)$ est affine (resp. algébrique) par rapport à chacune des variables z_i .

Les fonctions symétriques usuelles $\Sigma_i = \Sigma_{z_1 z_2 \dots z_i}$, comme les fonctions symétriques pondérées $\sigma_i = \Sigma_i / C_n^i$, sont des fonctions affines sur $K^{(n)}$.

THÉORÈME 2. — *a. La loi de composition sur $K^{(n)}$, notée $+$, qui associe à deux éléments Z et Z' dont les fonctions symétriques pondérées sont σ_i , σ'_i l'élément $Z'' = Z + Z'$, tel que $\sigma_i'' = \sum_0^i C_i^j \sigma_j \sigma'_{i-j}$, est la seule qui vérifie les conditions :*

(α) *Pour toute fonction affine f sur $K^{(n)}$, la fonction de Z , $f(Z + Z')$ est affine;*

(β) *Soit $Z = (z_1, \dots, z_n)$ et $Z' = (z, \dots, z)$, alors*

$$Z + Z' = (z_1 + z, \dots, z_n + z);$$

(γ) *Soient Z, Z', Z'' d'éléments z_i, z'_i, z''_i tels que $Z + Z' = Z''$: quel que soit $\lambda \in K$,*

$$(\lambda z_i) + (\lambda z'_i) = (\lambda z''_i).$$

b. Cette loi fait de $K^{(n)}$ un groupe, isomorphe au groupe additif de K^n par l'intermédiaire d'une application algébrique.

c. Soit ω un Q-ordre faible total de K , la condition

$$Z' \geq Z \quad \text{quand} \quad Z' - Z \geq 0,$$

$$Z \geq 0 \quad \text{quand} \quad Z = (z_1, \dots, z_n), \quad \text{avec} \quad z_i \geq 0(\omega) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

fait de $K^{(n)}$ un groupe ordonné.

Remarques. — 1° Si dans la condition (α) on remplace le mot affine par algébrique, et si l'on cherche les lois commutatives et associatives de $K^{(n)}$ vérifiant (α), (β), (γ), on obtient :

— pour $n = 1, 2, 3$ la loi est unique et coïncide avec la loi ci-dessus;

— pour $n > 3$, la loi générale dépend de $(p(n) - n)$ paramètres indépendants de K , et vérifie b [$p(n)$ nombre de partitions de n éléments].

2° Pour qu'un ordre total Q-linéaire de K vérifie la condition c il faut que ce soit un ordre faible.

3° L'application D qui à l'élément Z de $K^{(n)}$, représentant les zéros du polynome p , associe l'élément DZ de $K^{(n-1)}$ qui représente les zéros du polynome dérivé p' est un homomorphisme croissant.

Le contenu du théorème 5 est à peu près le suivant : Sur une clôture algébrique K , ω du corps des rationnels, munie d'un ordre faible total, on sait composer entre eux rationnellement les polynomes de degré n , de manière que si p et q ont tous leurs zéros positifs, le polynome composé vérifie la même propriété.

Considérons la clôture algébrique de Q , c'est-à-dire la plus petite de ses clôtures algébriques.

Le théorème 9 de la Note précédente ⁽¹⁾ permet de caractériser les Q-ordres faibles intersections de Q-ordres faibles totaux.

Ceci donne de l'intérêt au corollaire suivant du théorème 5.

COROLLAIRE 3. — *Soit ω un Q-ordre faible de la clôture algébrique de Q, intersection d'ordres faibles totaux.*

Soit K' son support [$K' = (\omega - \omega)/\nu$ avec $\nu \neq 0$, $\nu \in \omega - \omega$].

Alors $K'^{(n)}$ est stable par la loi induite par le groupe $K^{(n)}$.

Parmi les Q-ordres faibles totaux de la clôture algébrique de Q, les ordres transcendants ont une propriété caractéristique :

Dans les groupes ordonnés associés $K^{(n)}$, pour $n \neq 1$ tout élément positif est une somme finie d'éléments positifs irréductibles ($Z > 0$ est irréductible si une égalité $Z = Z' + Z''$ avec $Z' > 0$, $Z'' > 0$ est impossible).

THÉORÈME 4. — *a. Soit ω un Q-ordre faible total sur une clôture algébrique K de Q. Pour qu'un élément positif $Z = (z_1, \dots, z_n)$ de $K^{(n)}$ soit irréductible, il faut que l'un des z_i soit nul.*

Tout élément $(0, z_2, \dots, z_n)$ positif, de $K^{(n)}$ est une somme finie d'éléments positifs irréductibles.

La décomposition n'est pas unique, mais il n'y en a en tout qu'un nombre fini.

b. Si ω est un Q-ordre faible total archimédien, tout élément positif est somme finie d'éléments positifs irréductibles.

c. Soit ω un Q-ordre faible de la clôture algébrique de Q. Pour que la conclusion de b ait lieu, il faut et il suffit que ω soit transcendant.

(*) Séance du 11 août 1969.

(1) *Comptes rendus*, 269, série A, 1969, p. 337.

(2) DIEUDONNÉ, *Théorie analytique des polynomes d'une variable*.