Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Alain Connes

Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 12 (1970-1971), exp. n° 18, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1970-1971__12__A12_0>

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
12e année, 1970/71, n° 18, 11 p.

29 mars 1971

ORDRES FAIBLES ET LOCALISATION DE ZÉROS DE POLYNÔMES

par Alain CONNES

Il se peut que le développement qui suit ait de l'intérêt pour résoudre des problèmes du type suivant :

Donner une forme générale simple de l'équation rationnelle dont les racines vérifient une certaine condition de localisation dans le plan complexe.

Commençons par un exemple très simple ; la condition est : Toutes les racines sont en dehors du disque unité. Le critère de Schur-Cohn montre que cette condition équivaut à la positivité d'un certain nombre de déterminants construits à partir des coefficients et leurs conjugués. Nous montrons que cette condition peut en fait être remplacée par la suivante, $p(x) = 0$ étant l'équation :

$p(x)$ admet un multiple de la forme

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n , \qquad \text{où} \quad |a_0| > \sum_{i=1}^{n} |a_i| .$$

En effet, si p n'a que des zéros de module > 1, il n'existe, sur l'algèbre $\mathbb{C}[x]/p$, aucune semi-norme sous-multiplicative $\| \ \|$, telle que $\|x\| \leqslant 1$ et $\|1\| = 1$. Donc, si $\|x\| \leqslant 1$, c'est que $\|1\| < 1$, l'on applique cette conclusion au cas de la semi-norme

$$\|y\| = \inf \sum_{0}^{n} |a_i| , \qquad y = \sum_{0}^{n} a_i x^i ,$$

ce qui démontre le résultat ci-dessus.

La méthode que nous illustrons par plusieurs exemples (théorèmes 1, 1', et applications du théorème 3) peut se décrire ainsi : Soit à prouver qu'une équation, dont les racines vérifient une condition de localisation A, se met sous une certaine forme ; pour le faire, on étudie l'extension $\mathbb{Q}[x]/p$ du corps des rationnels qu'elle définit, et l'on cherche à trouver dans ce corps la traduction des données géométriques du plan complexe qui interviennent dans A.

La traduction du disque unité est immédiate, nous considérons comme essentielle sa stabilité par les invariants

$$(x , y) \to \alpha x + (1 - \alpha) y \qquad \text{(convexité)} ,$$

$$(x , y) \to xy .$$

La traduction de la notion de demi-espace, nous a conduit à une notion qui semble avoir son intérêt propre, les invariants que nous considérons sont

$$(x , y) \to \lambda_1 x + \lambda_2 y , \qquad (x , y) \to \frac{xy}{x + y}$$

(la note à la fin de l'exposé justifie ce choix).

Dans un corps K de caractéristique nulle, un demi-espace apparaît alors comme la partie positive d'un ordre total linéaire tel que deux couples (ab) , (cd) , (a , b , c , d) tels que $a < b < c < d$, ne puissent être en division harmonique. Le théorème 3 est une généralisation de cette propriété, et se réduit au classique théorème de Grace dans le cas des demi-plans de $\mathbb{C}$.

THÉORÈME 1. - Soient θ un nombre algébrique, θ_i , $i = 2 , 3 , \ldots , p$, ses conjugués ; on suppose $|\theta| < 1$, $|\theta_i| > 1$, $i = 2 , 3 , \ldots , p$. Alors il existe $a_0 , a_1 , \ldots , a_n \in Q$, tels que $\sum|a_i| < 1$, et que θ vérifie l'équation

$$\theta = \sum_0^n a_i \theta^i .$$

On peut choisir les a_i de manière que $a_1 = 0$ et que p seulement d'entre eux soient non nuls.

Application. - Le nombre algébrique de module inférieur à 1 , à conjugués de modules supérieurs à 1 , le plus général, est l'unique solution de module inférieur à 1 de l'équation

$$\theta = \sum_0^n a_i \theta^i ,$$

quand $\sum|a_i| < 1$, obtenue en itérant la transformation $x \to F(x) = \sum_0^n a_i x^i$ de l'intervalle $[- 1 , 1]$; la convergence des itérés est géométrique et uniforme.

En effet, le théorème de Rouché assure l'unicité de la solution de module inférieur à 1 , notons-la θ , et soit H une homographie telle que $H(0) = \theta$ et préservant le disque unité ; la fonction $G = H^{-1} FH$ vérifie $G(0) = 0$, et le lemme de Schwartz montre que, pour un certain $\lambda < 1$, $|G(z)| \leqslant \lambda|z|$ dès que $|z| \leqslant 1$, donc $|G(G(z))| \leqslant \lambda^2|z|$, ... , d'où la convergence géométrique de $F(F(\ldots F(z)))$ vers θ .

Démonstration du théorème 1. - Soient θ un nombre algébrique quelconque, $q(\alpha) = 0$ l'équation irréductible qu'il vérifie ; nous rangeons les racines θ_i de cette équation de manière que $\theta_1 , \ldots , \theta_{r_1}$ soient réelles de module inférieur ou égal à 1 , θ_{r_1+1} , ... , θ_r réelles, module plus grand que 1 , θ_{r+1} , θ_{r+2} , ... , θ_{r+2c_1-1} , θ_{r+2c_1} couples de complexes conjugués de module inférieur ou égal à 1 , θ_{r+2c_1+1} , ... , θ_{r+2c} les autres.

Le corps K , quotient de l'anneau $Q[\alpha]$ par l'idéal engendré par q , est une extension finie de Q , de degré $p = r + 2c$.

Comme le polynôme q se décompose en $q = q_1 \dots q_r \, q^1 \dots q^c$, sur $\mathbb{R}$, le quotient de $\mathbb{R}[\alpha]$ par q s'écrit $\mathbb{R}^r \, \mathbb{C}^c$, car les q_i sont premiers entre eux.

Ce quotient A est le complété de l'espace vectoriel K sur Q . Nous adoptons les notations ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & A \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
 & \mathbb{R} \\
 & \times \\
 & \vdots \\
 & \times \\
K \arrow[uuuuur, "\Delta"] \arrow[uuuur, "\delta_1"] \arrow[r, "\delta_r"] \arrow[ddr, "\delta^1"] \arrow[ddddddr, "\delta^c"] & \mathbb{R} \\
 & \times \\
 & \mathbb{C} \\
 & \times \\
 & \vdots \\
 & \times \\
 & \mathbb{C}
\end{tikzcd} .$$

Soit p un représentant modulo q de l'élément x de K , alors

$$\delta_i(x) = p(\theta_i) \; , \qquad \delta^j(x) = p(\theta_{r+2j}) \quad .$$

Soit B l'ensemble des $x \in K$, de la forme $x = \sum_0^n a_i \, \alpha^i$ avec $\sum |a_i| \leqslant 1$. B est un convexe (sur Q) équilibré, absorbant, stable par produit.

Nous posons, pour $x \in K$, $\|x\| = \inf_{\mathbb{R}_+} \lambda$, $\lambda \in Q_+$, $x \in \lambda B$. L'on vérifie que $\| \; \|$ est une semi-norme (dont la boule unité est $\bar{B}$, fermeture de B dans l'espace vectoriel K). Nous notons également $\| \; \|$, la semi-norme obtenue sur l'anneau A complété de K pour sa structure vectorielle sur Q .

LEMME. - <u>Soit</u> $y \in A = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^c$, <u>de composantes</u> $y_1 \dots y_r \, y^1 \dots y^c$; <u>pour que</u> $\|y\| = 0$, <u>il faut et il suffit que</u>

$$y_1 = 0 \; , \; \dots \; , \; y_{r_1} = 0 \; , \; y^1 \; , \; \dots \; , \; y^{c_1} = 0 \quad .$$

En effet, $\| \ \|$ est une semi-norme <u>d'algèbre</u> : $\|y_1 \ y_2\| < \|y_1\| \ \|y_2\|$ sur A , donc l'ensemble des éléments y , $\|y\| = 0$, est un idéal. En tant qu'idéal d'un produit $\underset{\sim}{R}^r \times \underset{\sim}{C}^c$, il est caractérisé par l'annulation d'un certain nombre de composantes $y_{i_1} \ldots y^{j_k}$. Pour repérer quelles sont ces composantes, notons que, pour qu'une forme linéaire s'annule sur tous les éléments de semi-norme nulle, il faut et il suffit que l'image de la boule unité soit bornée. Or l'image de la boule par la composante d'indice inférieur i est l'ensemble des $\sum a_j \theta_i^j$, $\sum |a_j| \leqslant 1$, et n'est bornée que si, et seulement si, $|\theta_i| \leqslant 1$, donc $i = 1 , 2 , \ldots , r_1$; l'on opère de même pour les racines complexes, ce qui achève la démonstration du lemme.

Dans le cas $r_1 = 1$, $c_1 = 0$, ce lemme montre que $\|y\|$ ne dépend que de la composante y_1 , donc $\|y\| = k|y_1|$ pour un certain k positif non nul. Ensuite, $1 \in B$, donc $\|1\| \leqslant 1$, donc $\|1\| = 1$, sans quoi $\|y\| = 0$, $\forall \ y$, donc $k = 1$. L'on en conclut que, $\forall \ x \in K$, $\|x\| = |\delta_1(x)|$. En particulier, $\|\alpha\| = |\delta_1(\alpha)| = |\theta_1|$. Ainsi, si $|\theta_1| < 1$, il existe $\lambda \in Q_+$, $\lambda < 1$, tel que $\alpha \in \lambda B$, soit

$$\alpha = \lambda \sum_0^n a_i \ \alpha^i \ , \qquad \text{où} \ \sum_0^n |a_i| \leqslant 1 \ .$$

Cela démontre le théorème.

Comme on est dans l'espace vectoriel K de dimension p sur Q , α , qui se trouve dans l'enveloppe convexe des points

$$\lambda\varepsilon\alpha^i \ , \qquad \varepsilon = \pm 1 \ , \quad i = 0 \ , 1 \ , 2 \ , \ldots \ , n \ ,$$

se trouve dans l'enveloppe convexe de $p + 1$ seulement de ces points. Enfin, pour un certain $\lambda' \geqslant 1$, $\lambda'\alpha$ sort de l'enveloppe convexe de ces $p + 1$ points, et se trouve ainsi dans l'enveloppe de p d'entre eux.

L'on en conclut que l'on peut choisir les coefficients a_i de manière que p seulement d'entre eux soient différents de 0 .

Si nous cherchons un résultat analogue pour les nombres algébriques positifs à conjugués de parties réelles négatives, il semble clair qu'une transformation homographique échangeant le disque unité et le demi-plan Π , $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, permette de traduire le théorème 1.

L'inconvénient irréductible de cette méthode est la complexité des résultats traduits ; en fait, les invariants

$$(x \ , y) \ \to \ \lambda x + (1 - \lambda)y \ , \qquad (x \ , y) \ \to \ xy \ ,$$

de la boule, qui ont été utilisés, se transforment, par exemple par $\frac{1 - z}{1 + z} = Z$, en

$$(x , y) \rightarrow \frac{xy + \lambda x + (1 - \lambda)y}{1 + (1 - \lambda)x + \lambda y} , \qquad (x , y) \rightarrow \frac{x + y}{1 + xy} .$$

Nous montrons cependant que les invariants très simples

$$(x , y) \rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y , \qquad \lambda_1 \in Q_+ , \quad \lambda_2 \in Q_+ , \quad x \rightarrow \frac{1}{x} ,$$

du demi-plan Π , suffisent à conduire les mêmes raisonnements que dans le cas de $|z| < 1$:

THÉORÈME 1'. - Soit θ un nombre algébrique positif, dont tous les conjugués sont de parties réelles négatives ; alors il existe une fraction rationnelle F telle que :

(a) F est obtenue à partir de x et 1 par itération des opérations F_i $(i = 1 , 2) \rightarrow \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$, $\lambda_i \in Q_+$, $F_1 \rightarrow 1/F_1$;

(b) $F(\Pi)$ relativement compact dans Π ;

(c) $\theta = F(\theta)$.

Application. - Une transformation $x \rightarrow F(x)$, vérifiant (b), s'itère de manière très simple ; par exemple,

$$F(x) = a + 1/(b + 1/x + 1/(c + x))$$

donne

$$a + 1/(b + 1/(a + 1/\ldots) + 1/(c + a + 1/\ldots)) ,$$

ce qui permet de caractériser les nombres algébriques θ du théorème 1', par l'existence d'un développement en fraction continue multiple du type ci-dessus.

Le théorème 1' découlera des considérations plus générales qui vont suivrent ; nous introduisons la traduction suivante des demi-plans de $\underset{\sim}{C}$:

DÉFINITION 2. - Nous dirons qu'un ordre ω sur un corps K de caractéristique nulle est faiblement compatible avec la structure de corps de K , lorsque :

1° ω est compatible avec la structure vectorielle de K sur Q , c'est-à-dire est caractérisé par l'ensemble ω des éléments plus grands que 0 , ω est un cône convexe saillant ;

2° ω est compatible avec l'opération "prise de l'inverse" $x \rightarrow 1/x$, en ce sens que la condition $1/x > 0$ définit aussi un cône convexe saillant : soit $x > 0$, $y > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{1/x + 1/y} > 0$.

Dans le corps $Q(x_1 , \ldots , x_n)$ des fractions rationnelles à n variables sur Q , nous notons $\Omega(x_1 , \ldots , x_n)$ le plus petit ordre faible tel que $x_i > 0$, c'est-à-dire que $F(x_1 , \ldots , x_n)$ est positive si, et seulement si, elle est obtenue à partir des x_i par un nombre fini d'opérations

$$F_1 , F_2 \to \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 , \quad \lambda_i \in Q_i , \qquad \text{et} \qquad F_1 , F_2 \to \frac{1}{1/F_1 + 1/F_2} .$$

Dans le cas où le corps K est algébrique sur Q , la situation est simple ; elle est décrite par le théorème suivant, où, pour la commodité de l'énoncé, nous nous limitons au cas d'une extension finie.

THÉORÈME 3. - Soit K une extension finie de Q .

Tout ordre faible partiel de K se prolonge en un ordre faible total.

Tout ordre faible total est déterminé par une condition lexicographique du type suivant :

$\delta^1 , \ldots , \delta^k$ sont des plongements de K dans $\mathbb{C}$, avec $\delta^i \neq \bar{\delta}^j$, $\forall\, i , j$;

$\theta_1 , \ldots , \theta_k$ sont des réels modulo 2π , δ_1 est un plongement de K dans R , et ε vaut ± 1 .

$x \in K$ est positif si, et seulement si,

$$\mathrm{Im}(e^{i\theta_1} \delta^1(x)) > 0 ,$$

ou

$$\mathrm{Im}(e^{i\theta_1} \delta^1(x)) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(e^{i\theta_2} \delta_2(x)) > 0 ,$$

ou

$$\mathrm{Im}(e^{i\theta_j} \delta^j(x)) = 0 , \quad j = 1 , 2 , \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(e^{i\theta_3} \delta_3(x)) > 0 ,$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\theta_j} \delta^j(x)) = 0 , \quad j = 1 , 2 , 3 , \ldots , k , \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\delta_1(x) > 0 .$$

Soit ω un ordre faible partiel de K , tel qu'il n'existe qu'un seul plongement δ (on ne distingue pas δ de $\bar{\delta}$) de K dans $\mathbb{C}$, dont l'image $\delta(\omega)$ soit contenue dans un demi-plan ; alors :

Si δ est réel, ω est un ordre usuel au signe $\varepsilon = \pm 1$ près, c'est-à-dire $x \in \omega$ si, et seulement si, $\varepsilon\delta(x) > 0$;

Si δ est complexe, il existe θ_1 et θ_2 tels que

$$x \in \omega \qquad \text{entraîne} \qquad \mathrm{Im}(e^{i\theta_j} \delta(x)) \geqslant 0 \quad (j = 1 , 2) ,$$

$$\mathrm{Im}(e^{i\theta_j} \delta(x)) > 0 \quad (j = 1 , 2) \qquad \text{entraîne} \qquad x \in \omega .$$

Applications du théorème. - Dans la suite, $u_1, \dots, u_n$ désignent n nombres algébriques ; nous désignons par $u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p$ tout système qui s'en déduit par un automorphisme au-dessus de Q, il n'y en a au total qu'un nombre fini.

1° Pour qu'il existe $F \in \Omega(x_1, \dots, x_n)$ telle que $F(u_1, \dots, u_n) = 0$, il faut et il suffit que, pour tout système déduit $u_1^p, \dots, u_n^p$, le point 0 soit dans l'enveloppe convexe réelle des u_i^p, $i = 1, 2, \dots, n$.

La nécessité est facile, montrons la suffisance ; en supposant que, $\forall F \in \Omega(x_1, \dots, x_n)$, l'on ait $F(u_1, \dots, u_n) \neq 0$, l'on en déduit l'existence d'un ordre faible partiel sur $Q(u_1, \dots, u_n)$ tel que $u_i > 0$; puis, d'après le théorème, l'existence d'un demi-espace ouvert de $\underset{\sim}{C}$ contenant les $\delta^1(u_i)$, où δ^1 plonge $Q(u_1, \dots, u_n)$ dans $\underset{\sim}{C}$, donc $\delta^1(u_i) = u_i^p$ pour un certain p. Or, par hypothèse, 0 est dans l'enveloppe convexe réelle des u_i^p, d'où la contradiction.

L'on en déduit facilement que, lorsque F décrit Ω, $F(x, 1) = 0$, $F(x, 1/x, 1) = 0$, décrivent respectivement l'ensemble des équations dont toutes les racines sont réelles et négatives, de parties réelles négatives. De même, soit $P_1 \dots P_k$ un polygone convexe dans $\underset{\sim}{C}$, à coordonnées $P_k = A_k + iB_k$ avec A_k et B_k rationnels. Soit alors z vérifiant une équation à coefficients $a + b_i$, $a \in Q$, $b \in Q$, dont toutes les racines sont dans le polygone $P_1 \dots P_k$; alors il existe $F \in \Omega(x_1, \dots, x_n)$ telle que $F(z - P_1, z - P_2, \dots, z - P_k) = 0$, et réciproquement.

2° Supposons que tous les u_i soient dans un même demi-espace, mais que cela n'arrive pour aucun des systèmes u_i^p déduits, autres que $\overline{u}_i$. Alors tout nombre de la forme $G(u_1, \dots, u_n)$, où G est une fraction rationnelle homogène de degré 1, situé dans l'angle de sommet 0 engendré par les u_i, s'écrit $F(u_1, \dots, u_n)$, où $F \in \Omega(x_1, \dots, x_n)$. (Par angle de sommet 0 engendré, nous entendons l'ensemble des $\sum \lambda_i u_i$ quand $\lambda_i > 0$, $\lambda_i \in R$.)

En effet, l'on applique la deuxième partie du théorème à l'ordre faible engendré par $1, u_2/u_1, u_3/u_1, \dots, u_n/u_1$ dans $Q(1, u_2/u_1, u_3/u_1, \dots, u_n/u_1)$. Le théorème 2 se démontre alors facilement, en notant que, si θ est algébrique positif à conjugués de partie réelle négative, le système

$$\theta , 1 , 1/\theta$$

a la propriété mentionnée ci-dessus ; écrivons $\theta = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + u}$, où λ_i sont rationnels et positifs, et u positif. u est une fonction rationnelle homogène de degré 1, de θ et 1, donc, comme u est positif, $u = F(\theta, 1/\theta, 1)$ où

$F \in \Omega(x_1, x_2, x_3)$, d'où

$$\theta = \lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2 + F(\theta, 1/\theta, 1)} .$$

Enfin, il est clair que la fonction qui figure au second membre est obtenue par itérations de $F_i \to \sum_1^2 \lambda_i' F_i$, $F_1 \to 1/F_1$, à partir de θ et 1, et que l'image de Π est contenue dans le cercle de diamètre

$$\lambda_1 , \lambda_1 + 1/\lambda_2 .$$

Un raisonnement analogue montre que, si θ est un nombre algébrique positif dont tous les conjugués sont réels et négatifs, il se développe sous la forme $\theta = F(\theta, 1)$ où $F \in \Omega(x_1, x_2)$.

<u>Démonstration du théorème</u>. - Soit ω un ordre faible sur K, soit $L = \omega - \omega$ le sous-espace vectoriel engendré, et soit $z \in \omega$ un élément intérieur à ω pour la topologie produit sur L, par exemple $\sum z_i$, où les $z_i \in \omega$ engendrent L vectoriellement. Alors, $\forall x \in \omega$, il existe $\lambda \in Q_+$ tel que $x < \lambda z$; nous allons en déduire qu'il existe un sous-corps K' de K, tel que $L = zK'$: il suffit de considérer le cas $z = 1$, c'est-à-dire, en supposant que, $\forall x \in \omega$, il existe $\lambda \in Q_+$ tel que $x < \lambda$, démontrer que L est un sous-corps.

Cela résulte de la formule $x^2 = x - \frac{1}{1/x + 1/(1 - x)}$, appliquée à un homothétique x/λ de x ; elle montre que le carré d'un $x > 0$ est dans L, mais alors $2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2$ aussi. Ainsi, l'étude d'un ordre faible partiel se ramène au cas $\omega - \omega = K$.

Nous faisons cette hypothèse, nous complétons K pour sa structure produit sur Q, ce qui donne un anneau $A = \underset{\sim}{R}^r \underset{\sim}{C}^c$, nous notons Δ le plongement de K dans A. Le fait important est que le cône convexe complété de ω, Γ (avec précision, on prend pour Γ l'intérieur de la fermeture de ω dans A), a les mêmes propriétés de stabilité que ω, et détermine l'intérieur $\mathring{\omega}$ de ω par la formule $\mathring{\omega} = \Delta^{-1}(\Gamma)$. Comme $\omega - \omega = K$, $\mathring{\omega}$ est non vide, et $\omega \subset \overline{\mathring{\omega}}$. Cela permet de se limiter, pour achever la démonstration du théorème, à démontrer qu'un cône convexe ouvert de l'anneau $\underset{\sim}{R}^r \underset{\sim}{C}^c$, stable par $x, y \to \frac{xy}{x + y}$ (où x et y sont tels que $1/x$, $1/y$, $1/(x + y)$ existent), est indépendant de ses projections Γ_i (resp. Γ^j) sur $\underset{\sim}{R}$ (resp. $\underset{\sim}{C}$) qui ne sont pas contenues dans un demi-plan.

LEMME. - <u>Soient</u> $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{r_1}$ (<u>resp.</u> $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^{c_1}$) <u>les projections non saillantes de</u> Γ ; <u>alors</u> $(x_1, \ldots, x_r, x^1, \ldots, x^c) \in \Gamma$ <u>entraîne</u>

$$(x'_1 , \dots , x'_{r_1} , x_{r_1+1} , \dots , x_r , x'^1 , \dots , x'^{c_1} , x^{c_1+1} , \dots , x^c) \in \Gamma ,$$
$$\forall\ x'_1 , \dots , x'_{r_1} , x'^1 , \dots , x'^{c_1} .$$

Pour prouver cela, il suffit de montrer que, si l'on considère un cône Γ , sur un produit $A_1 \times A_2$ de deux anneaux $\underset{\sim}{R}^{r'_1} \times \underset{\sim}{C}^{c'_1}$ et $\underset{\sim}{R}^{r'_2} \times \underset{\sim}{C}^{c'_2}$, et que l'on suppose que Γ contient deux éléments à premières composantes opposées $z = (u_1 , u_2) \in \Gamma$, $z' = (- u_1 , u'_2) \in \Gamma$, alors $(u_1 , 0) \in \overline{\Gamma}$.

Comme Γ est ouvert, et que l'ensemble des éléments inversibles de A_i est un ouvert dense, on peut supposer que $1/u_1$, $1/u_2$, $1/u'_2$, $1/(u_2 + u'_2)$ existent. L'on note ensuite que, pour ε assez petit, positif réel, l'expression $\dfrac{1}{(1 + \varepsilon)/z + (1 - \varepsilon)/z'}$ a un sens et est dans Γ . Enfin, quand $\varepsilon \to 0$, $\dfrac{2\varepsilon}{(1 + \varepsilon)/z + (1 - \varepsilon)/z'} \to (u_1 , 0)$, qui est donc dans $\overline{\Gamma}$.

Le théorème 3 montre que, si K est algébrique sur Q , tout ordre faible partiel se prolonge en un ordre faible total. Si K est un corps de caractéristique nulle, l'on vérifie facilement que, pour qu'un ordre total, linéaire sur Q , soit un ordre faible, il faut et il suffit que

$$a < b < c < d \quad \text{entraîne} \quad \text{birapport } (a , b , c , d) \neq - 1 .$$

Nous démontrons maintenant que, si K est un corps algébriquement clos, totalement faiblement ordonné, on peut énoncer un théorème qui généralise le fait ci-dessus, et n'est autre que le classique théorème d'apolarité de Grace, quand $K = \underset{\sim}{C}$, ordonné par un demi-espace.

Partons de K algébriquement clos, caractéristique nulle ; soient $K^{(n)}$, $n \in N$, les produits symétriques n-uples, c'est-à-dire $K^{(n)}$ est égal au quotient de K^n par la relation $(z_1 , \dots , z_n) = (z_{1'} , \dots , z_{n'})$, quand

$$(1 , \dots , n) \to (1' , \dots , n')$$

est une permutation de $\{1 , \dots , n\}$. Un élément Z de $K^{(n)}$ est caractérisé par le polynôme $\Pi(z - z_i)$. Les fonctions symétriques usuelles et leurs combinaisons linéaires sont les seules fonctions de $K^{(n)}$ dans K qui dépendent de manière affine de chaque z_i . Nous notons alors qu'il existe sur $K^{(n)}$ une seule loi de composition affine (i. e. toute fonction affine de $L(Z , Z')$ est une fonction affine de Z et de Z'), qui se réduise à l'addition usuelle sur la diagonale $z_i = z_j$ de $K^{(n)}$. Aux deux polynômes

$$P_Z(z) = \Pi(z - z_i) = z^n - c'_n \sigma_1 z^{n-1} + \dots + (- 1)^n \sigma_n \qquad \text{et} \qquad P_{Z'}(z) ,$$

elle associe le polynôme $P_{Z''}(z)$, où

$$\sigma''_i = \sum_0^i c_i^j \sigma_j \sigma'_{i-j} \quad .$$

De plus, $K^{(n)}$, muni de cette loi, est un groupe (isomorphe à K^n).

THÉORÈME 4. - Soit ω un ordre total sur K , linéaire sur Q . Pour que la condition $z_i \geqslant 0$, $i = 1 , 2 , \ldots , n$, soit additive sur $K^{(n)}$, il faut et il suffit que ω soit un ordre faible. Les groupes $K^{(n)}$ sont alors ordonnés par la condition $Z' \geqslant Z$ quand $Z' - Z \geqslant 0$, et $Z \geqslant 0$ quand $z_i \geqslant 0$.

La suffisance exprime que, sur un corps tel que K , ω , si P_Z et $P_{Z'}$ sont deux polynômes dont tous les zéros sont positifs, le polynôme $P_{Z''}$ a lui aussi tous ses zéros positifs. Pour la démontrer, il suffit de montrer que, si $z_i > 0$ et $z'_j > 0$, $i = 1 , 2 , \ldots , n$, $j = 1 , 2 , \ldots , n$, l'on a $P_{Z''}(0) \neq 0$, ce qui rejoint l'énoncé classique de Grace.

Or, dans la démonstration classique du théorème de Grace, tout repose sur l'impossibilité entre nombres complexes d'un même demi-espace de la relation

$$\frac{n}{z - z'} = \sum \frac{1}{z_i + z} \quad .$$

Le théorème 4 est alors une conséquence du lemme suivant :

LEMME. - Si ω est un ordre faible total, et si λ_i , $i = 1 , \ldots , q$, sont des rationnels positifs de somme 1 ,

$$\alpha_i \geqslant \alpha > 0 \quad \underline{\text{entraîne}} \quad 1/(\sum \lambda_i/\alpha_i) \geqslant \alpha \quad .$$

Note. - Pour terminer, citons sans démonstration le résultat suivant, qui montre que les seuls invariants, à deux variables $F(x , y)$ des demi-espaces de $\underset{\sim}{C}$, sont ceux obtenus par itération de

$$(x , y) \rightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y \, , \qquad (x , y) \rightarrow \frac{xy}{x + y} \quad .$$

Résultat. - Pour que $F \in Q(x , y)$ soit telle que, $\forall$ x , y dans $\underset{\sim}{C}$, le complexe $F(x , y)$ soit dans l'angle $\widehat{xOy}$, il faut et il suffit que $F \in \Omega(x , y)$.

Tout élément F de $\Omega(x , y)$ admet une écriture unique sous la forme

$$F = \alpha x + \beta y + \frac{1}{\alpha'/x + \beta'/y + 1/(\alpha'' x + \beta'' y + \ldots) + \ldots} + \ldots + \frac{1}{\ldots} \quad ,$$

où le nombre d'opérations est fini (le nombre de α et de β est $n_x + n_y$, où

n_x est le degré en x du numérateur de F), où chaque opération $+$ s'effectue sur des fractions non proportionnelles, et chaque opération $\frac{1}{\cdots}$ sur une fraction à numérateur irréductible.

(Texte reçu le 26 avril 1971)

Alain CONNES
1 avenue Mathilde
95 - SAINT-GRATIEN