NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

LOGIQUE. — *Détermination de modèles minimaux en analyse non standard et application.* Note (*) de M. **Alain Connes**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Si X est un ensemble modéré, nous caractérisons les modèles non standards de X n'ayant aucun sous-modèle strict autre que X, grâce à la notion d'ultrafiltre absolu étudiée par G. Choquet (1).

La classe obtenue est disjointe de celle des « enlargements » étudiée par A. Robinson (2) et W. A. J. Luxemburg (3).

Les modèles « minimaux » se décrivent de manière très simple comme partie de l'ensemble des ultrafiltres sur X.

Comme application, nous définissons un procédé de complétion d'un espace métrique, très analogue au procédé de Cauchy, mais qui s'avère plus efficace dans l'étude du théorème de Hahn-Banach sur un corps ordonné non Archimédien.

Dans la suite, X désigne un ensemble, τ une assemblée finie de zéros et de parenthèses.

La suite d'ensembles X_τ est construite par récurrence à partir de $X_0 = X$, en associant à $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ l'ensemble X_τ des parties de $X_{\tau_1} \times \ldots \times X_{\tau_n}$.

$\hat{X}$ est la réunion disjointe de cette suite d'ensembles, X en tant qu'élément de $X_{(0)}$ est désigné par X_e.

Un modèle non standard Y de X est la donnée d'un ensemble Y et d'une application $A \to A'$ de $\hat{X}$ dans $\hat{Y}$ telle que $X'_e = Y_e$ et que pour toute phrase F, écrite avec les symboles usuels de la théorie des ensembles, un nombre fini d'éléments de $\hat{X}$ et un nombre fini de variables, chacune étant précédée de $\forall$ ou $\exists$ et suivie de $\in$,

$$(\text{F vraie dans } \hat{X}) \quad \text{entraîne} \quad (\text{F}' \text{ vraie dans } \hat{Y}).$$

Un élément de $\hat{Y}$ de la forme A' est dit standard, un élément d'un élément standard est dit interne.

Théorème 1. — (*a*) *Si* $\mathfrak{A}$ *est un ultrafiltre absolu sur* N, *et* X *un ensemble infini, l'ultrapuissance* $X^N/\mathfrak{A}$ *est un modèle non standard de* X, *minimal, c'est-à-dire sans sous-modèle strict autre que* X.

(*b*) *Si la cardinalité de l'ensemble* X *est modérée et si* Y *est un modèle non standard minimal de* X, *il existe sur* N *un ultrafiltre absolu* $\mathfrak{A}$ *tel que* $Y = X^N/\mathfrak{A}$.

A propos de la partie (*a*), nous avons appris que les logiciens utilisaient déjà les ultrafiltres absolus, sous le nom d'ultrafiltres sélectifs pour obtenir des modèles intéressants en arithmétique. Nous ne démontrons que (*b*).

LEMME 2. — *Si* Y *est un modèle non standard de* X, *non réduit à* X, Y *a un sous-modèle de la forme* $X^X/\mathcal{U}$, *où* $\mathcal{U}$ *est un ultrafiltre non trivial sur* X.

L'hypothèse « Y non réduit à X » assure l'existence d'un élément z non standard dans Y_0.

L'ensemble $\mathcal{U}$ des parties de X défini par « $A \in \mathcal{U}$ quand $z \in A'$ » est alors un ultrafiltre non trivial sur X.

Le modèle non standard $Z = X^X/\mathcal{U}$, noté $A \to {}^*A$ est non réduit à X. Pour montrer que Z est un sous-modèle de Y l'on construit une application $A \to A_1$ de l'ensemble des éléments internes de $\hat{Z}$ dans $\hat{Y}$. Un élément interne A de Z_τ est représenté par une application φ de X dans X_τ; l'on prouve que (graphe φ)$'$ est le graphe d'une application φ' de Y_0 dans Y_τ, on pose $A_1 = \varphi'(z)$.

L'élément A_1 de Y_τ est interne, et ne dépend pas du représentant choisi φ de A.

Soit F une phrase construite à partir d'éléments internes de $\hat{Z}$, vraie dans $\hat{Z}$, il reste à montrer que F_1 est vraie dans $\hat{Y}$.

L'on choisit des représentants φ_i des éléments internes C_i, $i = 1, \ldots, n$ qui figurent dans F, et pour tout x on désigne par F_x la phrase obtenue en remplaçant C_i par $\varphi_i(x)$.

L'on montre alors que l'ensemble $U \subset X$, des x tels que F_x soit vraie dans $\hat{X}$ est dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

L'on traduit ensuite dans Y la phrase $\forall x \in U$, F_x, vraie dans $\hat{X}$. Le cas particulier $x = z$ donne le résultat : F_1 vraie dans $\hat{Y}$.

COROLLAIRE 3. — *Pour tout modèle non standard* Y *de* X, *il existe un modèle* Z *de* X *de la forme « limite inductive de modèles en ultrapuissance », sous-modèle de* Y *tel que tout élément de* Y_0 *soit dans* Z_0.

LEMME 4. — *Soit* $\mathcal{U}_1$ (*resp.* $\mathcal{U}_2$) *un ultrafiltre sur l'ensemble* U_1 (*resp.* U_2); *si* $\mathcal{U}_1$ *est image de* $\mathcal{U}_2$ *par l'application* f *dont aucune restriction* f_V *à* $V \in \mathcal{U}_2$ *n'est injective et si* X *est un ensemble infini* $X^{U_1}/\mathcal{U}_1$ *est un sous-modèle strict de* $X^{U_2}/\mathcal{U}_2$.

Ce lemme achève la démonstration de (*b*), si l'on note qu'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble X modéré a une image non triviale dans N et qu'un ultrafiltre sur N qui s'envoie injectivement sur toute image non triviale est absolu.

Il apparaît comme conséquence de la propriété suivante des germes selon un ultrafiltre, dont la démonstration m'a été donnée par G. Choquet.

LEMME 5. — *Soit* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltre sur l'ensemble* U, *si* $\mathcal{U}$ *est image de* $\mathcal{U}$ *par l'application* f, *il existe* $V \in \mathcal{U}$ *tel que* $f_V =$ identité.

Ce lemme permet de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *Soit* X *un ensemble modéré,* Y *un modèle minimal de* X.

(*a*) *L'application qui à* $z \in Y_0$ *associe l'ultrafiltre* $\mathcal{U}$ *que* z *définit sur* X (*voir* lemme 2) *est une bijection de* Y_0 *avec l'ensemble des ultrafiltres* $X_{\mathcal{A}}$ *sur* X *images d'un ultrafiltre absolu* $\mathcal{A}$ *de* N.

(*b*) *Si* A *est une partie de* X, A′ *coïncide avec la fermeture de* A *dans* $X_{\mathcal{A}}$ *muni de la topologie induite par l'ensemble des ultrafiltres sur* X.

(*c*) *Si f est une fonction de* X *dans* X, $f'(\mathcal{U})$ *pour* $\mathcal{U} \in X_{\mathcal{A}}$ *est l'image de l'ultrafiltre* $\mathcal{U}$ *par f.*

(*d*) *Si* $\mathcal{U}_1$ *et* $\mathcal{U}_2$ *sont deux points non standards de* $X_{\mathcal{A}}$ *il existe une seule transformation* φ *de* X (modulo $\mathcal{U}_1$) *telle que* $\varphi(\mathcal{U}_1) = \mathcal{U}_2$.

Soit alors E un ensemble, d une application de $E \times E$ dans $[0, 1]$ qui fait de E un espace métrique.

L'on prolonge d à $E_{\mathcal{A}} \times E_{\mathcal{A}}$ en posant $d(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = \lim_{\mathcal{U}_1} d(x, \varphi(x))$, où φ est la transformation de $X = E$ définie par (*d*).

L'on montre alors que la structure uniforme sur E associée à d est entièrement déterminée par la relation d'équivalence sur $E_{\mathcal{A}}$:

$$d(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = 0.$$

L'espace quotient $\hat{E}$ est un espace métrique complet, E est un sous-espace de $\hat{E}$, et le complété $\bar{E}$ de E est sa fermeture dans $\hat{E}$.

Si E n'est pas précompact, $\bar{E}$ est un sous-espace strict de $\hat{E}$; le théorème 7 est un exemple dans lequel le procédé de complétion obtenu donne des résultats que le procédé de Cauchy ne donne pas.

L'on observe cependant que les deux procédés consistent à faire le quotient d'une partie de l'ensemble des ultrafiltres par une relation d'équivalence.

THÉORÈME 7. — *Soit k un corps ordonné dénombrable, d une métrique sur k compatible avec la structure uniforme associée à l'ordre,* $\mathcal{A}$ *un ultrafiltre absolu de* N.

Soit $\hat{k}$ *le quotient de l'ensemble des ultrafiltres de k, bornés par un élément de k, et images de* $\mathcal{A}$, *par la relation* $d(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = 0$.

(*a*) $\hat{k}$ *est un corps ordonné, indépendant du choix de d, complet pour la structure uniforme associée à son ordre.*

(*b*) *La fermeture* $\bar{k}$ *de k dans* $\hat{k}$ *est le complété au sens de Cauchy du corps k.*

(*c*) *Un élément de* $\hat{k}$ *est dans* $\bar{k}$ *si et seulement si, un de ses représentants* $\mathcal{U}$ *est un ultrafiltre de Cauchy.*

(*d*) *Le corps* $\hat{k}$, *contrairement à* $\bar{k}$ *en général, permet d'énoncer le théorème de Hahn-Banach sur un espace vectoriel* E *de dimension finie sur k doté de la topologie produit :*

Si C *est un convexe fermé de* E *et* $x \in E \setminus C$, *il existe une application linéaire de* E *dans* $\hat{k}$ *telle que* $\varphi(C) \leq 0$ *et* $\varphi(x) > 0$.

(*) Séance du 9 novembre 1970.

(1) G. CHOQUET, *Bull. Sc. Math.*, 2e série, 92, 1968, p. 143-153.

(2) A. ROBINSON, *Non-standard Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1966.

(3) W. A. J. LUXEMBURG, *Applications of model theory to algebra, analysis and probability*, California Institute of Technology, 1969.

(139, *rue du Faubourg-Saint-Honoré, 75-Paris*, 8e.)