ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Théorème de l'indice pour les feuilletages*. Note (*) de **Alain Connes**, Correspondant de l'Académie et **Georges Skandalis**.

On donne une formule topologique pour l'indice analytique $\text{Ind}_a(D) \in K^*(V/F)$ d'un opérateur différentiel D elliptique le long des feuilles d'un feuilletage (V, F) . Elle implique le théorème de l'indice pour les feuilletages mesurés.

We give a topological formula for the analytical index $\text{Ind}_a(D) \in K^(V/F)$ of a differential operator D elliptic along the leaves of the foliation (V, F) . It implies the index theorem for measured foliations.*

Dans [4] la méthode de l'équation de la chaleur [1] est utilisée pour calculer, par une formule topologique, l'indice analytique : $\dim_\Lambda(\text{Ker } D) - \dim_\Lambda(\text{Ker } D^*)$ d'un opérateur elliptique le long des feuilles, pour un feuilletage mesuré (V, F) . Dans le cas général, le feuilletage (V, F) n'a pas de mesure transverse $\Lambda \neq 0$, mais l'indice analytique d'un tel opérateur D a un sens comme élément du groupe $K^*(V/F)$ de K -théorie de l'espace des feuilles de (V, F) [ce groupe est le groupe de K -théorie de la C^* algèbre $C^*(V, F)$ associée au feuilletage]. Le but de cette Note est d'obtenir une formule topologique pour l'indice analytique $\text{Ind}_a(D) \in K^*(V/F)$. La formule est celle de [5] où sa validité était formulée comme un problème. Avant d'énoncer le théorème (§ 3) nous montrons comment dans le cas classique le théorème de l'indice est un cas particulier de l'existence d'un foncteur $f \rightarrow f!$ qui à toute application, de classe C^∞ , K -orientée d'une variété X dans Y associe un élément $f!$ du groupe de K -théorie bivariante $KK(X, Y)$ introduit analytiquement par Kasparov [7]. Dans le deuxième paragraphe nous donnons une interprétation topologique du groupe $KK(X, Y)$.

I. CONSTRUCTION DE $f!$. — Soit E un fibré euclidien sur l'espace localement compact X . On note $Cl(E)$ la C^* algèbre $\mathbb{Z}/2$ -graduée des sections continues nulles à l'infini du fibré sur X dont la fibre en $x \in X$ est l'algèbre de Clifford complexifiée de l'espace euclidien E_x . La donnée d'une structure 'spinorielle sur E équivaut à celle d'une orientation de E et d'un fibré hermitien S sur X dont chaque fibre S_x est un module $\mathbb{Z}/2$ gradué irréductible sur $Cl(E_x)$.

Soient X et Y des variétés de classe C^∞ et f une application continue de X dans Y ; nous appellerons K -orientation de f la donnée d'une structure 'spinorielle sur le fibré $E = TX \oplus f^*TY$. On a muni X et Y d'une structure riemannienne et E de la structure euclidienne associée. Soit U un voisinage ouvert de la section 0 dans TY , tel que la restriction à U de l'application exponentielle $TY \rightarrow Y \times Y ((y, \xi) \rightarrow (y, \exp_y \xi))$ soit un difféomorphisme de U sur un ouvert V de $Y \times Y$. On notera L le difféomorphisme inverse :

$$L(y_1, y_2) = \exp_{y_1}^{-1}(y_2) \in T_{y_1}(Y) \quad (y_1, y_2) \in V.$$

Pour $y \in Y$, $X_y = \{x \in X, (f(x), y) \in V\}$ est un ouvert de X , et posant $H_y = L^2(X_y, S)$ (où S est le fibré hermitien sur X associé à la K -orientation de f) on obtient un champ continu d'espaces hilbertiens ($\mathbb{Z}/2$ -gradués) sur Y . Chaque fibre H_y est par construction un $C(X)$ module, l'espace des sections continues de H nulles à l'infini sur Y est donc un bimodule $\mathbb{Z}/2$ -gradué. L'élément $f!$ de $KK(X, Y)$ est donné par une famille continue $(F_y)_{y \in Y}$, $F_y \in \mathcal{L}(H_y)$, F_y est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0, elliptique, de S dans S sur X_y , qui est, localement dans X , trivial à l'infini dans X_y , au sens de [6], p. 133. Pour spécifier le symbole principal σ_y de F_y , on choisit une application M de classe C^∞ de $Y \times Y$ dans $[0, 1]$, de support contenu dans V , égale à 1 dans un voisinage de la diagonale. Soient alors $x \in X_y$, $\xi \in T_x(X)$,

$\|\xi\| = 1$, $\sigma_y(x, \xi) \in \text{End } S_x$ est donné par la multiplication de Clifford par l'élément de $E_x = T_x(X) \oplus T_{f(x)}(Y)$ de composantes :

$$M^{1/2}(f(x), y)\xi \quad \text{et} \quad (1-M)^{1/2}(f(x), y)L(f(x), y)/\|L(f(x), y)\|.$$

THÉORÈME 1. - (a) La construction ci-dessus définit un élément $f!$ de $KK^j(X, Y)$ où $j = \dim X + \dim Y$ modulo 2, indépendant des structures riemanniennes choisies sur X et Y .

(b) Soient f, g des applications C^∞ , K -orientées, $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ alors $g \circ f$ est K -orientée et on a :

$$(g \circ f)! = f! \times_Y g!$$

Ici $\times_Y$ désigne le produit de Kasparov (cf. [7]).

Pour démontrer le théorème 1, on construit une homotopie explicite entre $(g \circ f)!$ et $f! \times_Y g!$, basée sur les calculs de Hörmander [6]. Par construction, $f!$ ne dépend que de la classe d'homotopie K orientée $(^1)$ de f et se simplifie notablement quand f , supposé C^∞ , est une immersion ou une submersion.

Soit $f: X \rightarrow Y$ une immersion, le choix d'une K -orientation de f équivaut à celui d'une structure 'spinorielle sur le fibré normal $N_x = f_*(T_x(X))^\perp$ à f . Soit S le fibré correspondant, S_x étant un module sur $Cl(N_x)$ pour tout $x \in X$. Soient $\tilde{S}$ l'image inverse de S sur N et $\tilde{f}$ un prolongement de f en une application étale de N dans Y .

Pour tout $y \in Y$ on pose $H_y = l^2(\tilde{f}^{-1}(y), \tilde{S})$, on obtient ainsi un champ continu d'espaces hilbertiens sur Y , chaque fibre H_y est un $C(X)$ module et l'opérateur F_y est diagonal dans $l^2(\tilde{f}^{-1}(y), \tilde{S})$, en $(x, \xi) \in \tilde{f}^{-1}(y)$ il est donné par la multiplication de Clifford par $\xi \text{Sup}(1, \|\xi\|)^{-1}$.

Soit $f: X \rightarrow Y$ une submersion, la donnée d'une K -orientation de f équivaut au choix d'une structure 'spinorielle sur le sous-fibré $F = \text{Ker } f_*$ de TX , notons S le $Cl(F)$ module associé. L'élément $f!$ est donné par la famille F_y , $y \in Y$ d'opérateurs de Dirac le long des feuilles $f^{-1}\{y\}$, on pose $H_y = L^2(f^{-1}\{y\}, S)$, c'est par construction un $C(X)$ module et F_y est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 sur $f^{-1}\{y\}$ de symbole principal la multiplication de Clifford par $\xi/\|\xi\|$ pour $\xi \in T(f^{-1}\{y\}) = F_x$.

Pour situer la propriété (b) du théorème 1, notons qu'elle a pour corollaire immédiat le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour X variété 'spinorielle de dimension paire : en effet, soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ un plongement C^∞ , et soit $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow pt$, l'égalité $(g \circ f)! = f! \times g!$ montre que pour tout fibré vectoriel complexe E sur X , on a en notant $[E]$ sa classe dans $K^*(X) = KK(pt, X)$ l'égalité :

$$[E] \times_X (g \circ f)! = ([E] \times_X f!) \times g! \in KK(pt, pt) = \mathbb{Z}.$$

Comme $g \circ f$ est l'application K -orientée : $X \rightarrow pt$, le terme de gauche est par construction l'indice analytique $\text{Ind}_a(D_E)$ de l'opérateur de Dirac à coefficients dans E . Comme $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ est un plongement, l'élément $[E] \times_X f!$ de $K^*(\mathbb{R}^{2n})$ est l'image directe $f!(E)$ [2] obtenue grâce à l'isomorphisme de Thom appliqué à un voisinage tubulaire de $f(X)$ dans $\mathbb{R}^{2n}$. Ainsi, comme pour $[F] \in K^*(\mathbb{R}^{2n})$, $[F] \times g! \in \mathbb{Z}$ est égal à $\psi^{-1}[F]$ où ψ est l'isomorphisme de périodicité, on voit que le terme de droite est par construction l'indice topologique $\text{Ind}_t(D_E)$, de sorte que comme $K^*(TX)$ est engendré par les symboles σ_{D_E} , $[E] \in K^*(X)$, l'égalité ci-dessus montre que pour tout opérateur pseudodifférentiel elliptique P sur X on a :

$$\text{Ind}_a(P) = \text{Ind}_t(P).$$

De plus l'égalité (b) du théorème 1 montre que $K^*(X) = KK^*(pt, X)$ et $K_*(X) = KK^*(X, pt)$ sont invariants, pour X variété C^∞ (non compacte) par équivalence d'homotopie $f: X \rightarrow Y$, K -orientée non nécessairement propre. En effet $[E] \rightarrow [E] \times f!$ (resp. $[P] \rightarrow f! \times [P]$) est alors un isomorphisme de degré $\dim X + \dim Y$ modulo 2.

II. INTERPRÉTATION TOPOLOGIQUE DE $KK(X, Y)$. — Soient X un complexe simplicial localement fini et Y une variété de classe C^∞ . Bien que $KK^*(X, Y)$ se calcule simplement ([7], [8]), [si X est une variété compacte K -orientée, on a $KK^*(X, Y) = K^*(X \times Y)$, si Y est compacte et K -orientée on a $KK^*(X, Y) = K_*(X \times Y)$], l'interprétation topologique suivante de l'élément générique de $KK^*(X, Y)$ est très utile pour les calculs explicites de produits intersection (celui-ci s'interprétant topologiquement) et en particulier pour la démonstration de la dualité de Poincaré dans le cadre analytique.

Généralisant la construction de P. Baum et R. Douglas [3], nous définissons le groupe topologique $KK_t^*(X, Y)$ de la façon suivante : les objets sont des quadruplets (M, E, f_X, f_Y) où M est une variété de classe C^∞ , E un fibré vectoriel complexe sur M , f_X une application continue propre de M dans X et f_Y une application K -orientée de M dans Y . La somme de deux tels éléments est donnée par la réunion disjointe. On pose $-(M, E, f_X, f_Y) = (M, E, f_X, -f_Y)$ où $-f_Y$ est l'application f_Y munie de la K -orientation opposée. On introduit les trois relations suivantes :

1° Bordisme : si M est une variété à bord ∂M , et (M, E, f_X, f_Y) est comme ci-dessus, on pose : $(\partial M, E/\partial M, f_X/\partial M, f_Y/\partial M) = 0$.

2° $(M, E_1 \oplus E_2, f_X, f_Y) = (M, E_1, f_X, f_Y) + (M, E_2, f_X, f_Y)$.

3° Soient F un fibré vectoriel réel sur M , de dimension paire, muni d'une structure ϵ spinorielle, $M_1 \xrightarrow{p} M$ l'espace fibré de base M dont l'espace total M_1 est le fibré en sphères de $F \oplus 1_M$, et E_1 le fibré vectoriel complexe sur M_1 canoniquement associé à E (cf. [3]) tel que $p!(E_1) = E$. On pose alors :

$$(M, E, f_X, f_Y) = (M_1, E_1, f_X \circ p, f_Y \circ p).$$

Soit E un fibré vectoriel complexe sur M , nous noterons E sa classe dans $KK(M, M)$.

THÉORÈME 2. — L'application $(M, E, f_X, f_Y) \rightarrow f_{X*}([E] \times_M f_Y!)$ définit un isomorphisme de $KK_t(X, Y)$ sur $KK(X, Y)$.

Le produit intersection [7] s'interprète alors directement dans KK_t . On peut supposer pour le calculer que les applications f_X et f_Y sont de classe C^∞ . Soient V, V_1, V_2 des variétés de classe C^∞ , et $(M_1, E_1, f_1, g_1) \in KK_t(V_1, V)$, $(M_2, E_2, g_2, f_2) \in KK_t(V, V_2)$. Le problème est alors de trouver $(W, E, p_1, p_2) \in KK_t(V_1, V_2)$ tel que :

$$\begin{aligned} p_{1*}([E] \times_W p_2!) &= f_{1*}([E_1] \times_{M_1} g_1!) \times_{V} g_{2*}([E_2] \times_{M_2} f_2!) \\ &= f_{1*}([E_1] \times_{M_1} g_1! \times_{V} g_{2*}([E_2]) \times_{M_2} f_2!). \end{aligned}$$

Par functorialité, ceci est équivalent à trouver un $(W, E, h_1, h_2) \in KK_t(M_1, M_2)$ tel que :

$$h_{1*}([E] \times_W h_2!) = ([E_1] \times_{M_1} g_1!) \times_{V} g_{2*}([E_2]).$$

Nous supposons que g_1 et g_2 sont transverses, i. e. que pour $x_i \in M_i$, $g_1(x_1) = g_2(x_2)$ on a : $dg_1(T_{x_1} M_1) + dg_2(T_{x_2} M_2) = T_{g_1(x_1)}(V)$. On prend alors pour W le produit fibré de M_1 et M_2 :

$$W = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 / g_1(x_1) = g_2(x_2)\}.$$

Si h_i désigne l'application naturelle de W dans M_i , on voit que h_1 est propre car g_2 est propre, et que h_2 est K -orientée car g_1 est K -orientée. On pose $E = h_1^*(E_1) \otimes h_2^*(E_2)$.

THÉORÈME 3. — Avec les notations ci-dessus, on a :

$$h_{1*}([E] \times_w h_2!) = [E_1] \times_{M_1} g_{1!} \times_{V} g_{2*}([E_2]).$$

Nous allons appliquer ce théorème pour démontrer la dualité de Poincaré dans le cadre analytique :

Soit $\sigma_V \in KK_t(pt, V \times TV)$ donné par le quadruplet : $(V, 1_V, u, d)$ où 1_V est le fibré trivial de dimension 1 sur V , $u : V \rightarrow pt$ est propre (V étant compacte) et $d : V \rightarrow V \times TV$ $d(x) = (x, (x, 0))$ est K -orientée par la structure presque complexe de TV .

Soit $\mathcal{P}_V \in KK_t(TV \times V, pt)$ associé au quadruplet $(TV, 1_{TV}, p, du)$ où $p : TV \rightarrow TV \times V$, $p(x, X) = ((x, X), x)$ est propre.

Les notations σ (symbole) et $\mathcal{P}$ (opérateur pseudo-différentiel) se justifient de la manière suivante : Soient P un opérateur pseudo-différentiel elliptique sur V , $[P]$ sa classe dans $K_*(V)$, σ_P son symbole principal et $[\sigma_P]$ sa classe dans $K^*(TV)$. Alors :

$$[\sigma_P] = \sigma_V \times_V [P] \quad \text{et} \quad [P] = [\sigma_P] \times_{TV} \mathcal{P}.$$

Comme application immédiate du théorème, on a :

COROLLAIRE 4. — (a) On a $\sigma_V \times_V \mathcal{P}_V = 1_{TV}$, $\sigma_V \times_{TV} \mathcal{P}_V = 1_V$.

(b) Soient V et W des variétés compactes et $f : V \rightarrow W$ une application de classe C^∞ , alors :

$$1^\circ \quad \sigma_V \times_{TV} (df)! = f^*(\sigma_W);$$

$$2^\circ \quad df! \times_{TW} \mathcal{P}_W = f_*(\mathcal{P}_V);$$

$$3^\circ \quad \sigma_V \times_{TV} (df)! \times_{TW} \mathcal{P}_W = f^*(1_W);$$

$$4^\circ \quad df! = \sigma_W \times_W f_*(\mathcal{P}_V).$$

Le (a) est une forme forte de la dualité de Poincaré dans le cadre analytique et montre que si A et B sont des C^* algèbres (A séparable et B avec unité approchée dénombrable) on a :

$$KK^j(A \otimes C_0(TV), B) \approx KK^j(A, B \otimes C(V)),$$

$$KK^j(A, B \otimes C_0(TV)) \approx KK^j(A \otimes C(V), B).$$

Il montre aussi que, comme tout élément $\alpha \in K^*(TV)$ est représenté par le symbole σ_P d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique P , tout élément de $K^*(V)$ est de la forme $[P]$.

Le (b) montre la naturalité en V des isomorphismes ci-dessus, et que $(df)! \in KK(TV, TW)$ est duale de Poincaré de $f^*(1_W) = f_*(1_V) \in KK(W, V)$.

De plus, le théorème 3 implique la forme générale du théorème de l'indice, en effet si $i : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion et u, π sont les applications de V et $\mathbb{R}^n$ vers $\{pt\}$, l'indice topologique d'un opérateur pseudo-différentiel elliptique P sur V est par construction égal à :

$$\text{Ind}_t(P) = ([\sigma_P] \times_{TV} (di)!) \times_{\mathbb{R}^n} (d\pi)!$$

$$= [\sigma_P] \times_{TV} (du)! = (\sigma_V \times_V [P]) \times_{TV} (du)! = u_*[P] = \text{Ind}_a(P).$$

En fait, le théorème 3 implique le théorème de l'indice à valeurs dans $K_*(V)$ dû à P. Baum et R. Douglas [3].

Théorème de l'indice pour les feuilletages. — Soit B une C^* algèbre, on appelle quasi-isomorphisme sur B , la donnée d'un couple $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1$ de C^* modules sur B et d'un morphisme $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1)$, inversible modulo les endomorphismes compacts de $\mathcal{E}^i$. La classe d'homotopie stable d'un tel quasi-isomorphisme définit un élément $[T]$ de $K_*(B)$ [7]. Soient V une variété compacte, F un feuilletage de V et $B = C^*(V, F)$ la C^* algèbre associée. Tout C^* module $\mathcal{E}$ sur B est donné par un champ continu (cf. [5]) $(H_L)_{L \in V/F}$ d'espaces hilbertiens, paramétré par les feuilles L de (V, F) . Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev $W_s(\tilde{L})$ du revêtement d'holonomie $\tilde{L}$ de la feuille L définit un tel champ continu. Soit alors D un opérateur différentiel sur V , elliptique le long des feuilles (cf. [4]), d'ordre n . A chaque $s \in \mathbb{R}$ correspond un quasi-isomorphisme D_s sur $B = C^*(V, F)$, obtenu en considérant la restriction de D à la feuille L comme un opérateur borné de $W_s(\tilde{L})$ dans $W_{s-n}(\tilde{L})$ [en général si D n'est pas scalaire mais agit d'un fibré E^0 sur V dans E^1 , on remplace $W_s(\tilde{L})$ par $W_s(\tilde{L}, E^i)$].

LEMME 5. — *La classe d'homotopie stable $[D_s] \in K_*(B) = K^*(V/F)$ ne dépend pas du choix de $s \in \mathbb{R}$.*

On définit ainsi l'indice analytique $\text{Ind}_a(D) = [D_s] \in K^*(V/F)$. Si Λ est une mesure transverse invariante par holonomie pour (V, F) elle définit une trace sur $C^*(V, F)$ d'où une application additive dim_Λ de $K^*(V/F)$ dans $\mathbb{R}$. L'image $\text{dim}_\Lambda \text{Ind}_a(D) \in \mathbb{R}$ a été calculée dans [4] par la formule $\langle \varepsilon \text{ch } D \text{ Td } F, [C] \rangle$ où C est le courant de Ruelle-Sullivan associé à Λ . En général (V, F) peut n'avoir aucune mesure transverse invariante non nulle, de sorte que la formule ci-dessus ne détermine pas $\text{Ind}_a(D)$. Dans [5] un élément $f!([E])$ du groupe $K^*(V/F)$ est associé à tout cycle géométrique (M, E, f) pour l'espace des feuilles V/F (où M est une variété compacte de classe C^∞ , E un fibré vectoriel complexe sur M et f une application C^∞ et K -orientée de M dans V/F , cf. [5]). Dans le cas particulier où $M = V$ et où $f(x)$ pour $x \in V$ est la feuille passant par x (une K -orientation de f est alors une structure 'spinorielle sur le fibré F sur V) la construction de $f!([E])$ s'explique très simplement à partir d'un plongement $j : V \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soient en effet ν le fibré de base V tel que $\nu_x = (j_*(F_x))^\perp, \forall x \in V$, et $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $L \in V/F$ l'application $\tilde{j} : (x, \eta) \rightarrow j(x) + \eta$ de

$$N_L = \{(x, \eta) \in \nu, x \in L, \|\eta\| < \varepsilon\}$$

dans $\mathbb{R}^n$ soit étale. Par construction

$$N = \cup N_L = \{(x, \eta) \in \nu, \|\eta\| < \varepsilon\}$$

est alors une *transversale ouverte* pour le feuilletage (V^n, F^n) où $V^n = V \times \mathbb{R}^n$ et $F_{(x, \eta)}^n = F_x + \{0\}$, d'où une application de $K^*(N) = K^*(V)$ (isomorphisme de Thom) dans $K^*(V^n/F^n) = K^*(V/F)$ (périodicité de Bott).

Pour simplifier nous énoncerons le théorème de l'indice pour le feuilletage (V, F) en supposant que F est muni d'une structure 'spinorielle :

THÉORÈME 6. — *Soient E un fibré sur V , D_E l'opérateur de Dirac le long des feuilles à coefficients dans E , alors :*

$$\text{Ind}_a(D_E) = f!([E]).$$

(¹) Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, une K -orientation de f détermine canoniquement une K -orientation de g pour laquelle f et g sont dans la même classe d'homotopie K -orientée car $f^*TY \approx g^*TY$.

(*) Remise le 4 mai 1981.

- [1] M. F. ATIYAH, R. BOTT et V. K. PATODI, *Invent. Math.*, 19, 1973, p. 279-330.
- [2] M. F. ATIYAH et I. M. SINGER, *Ann. Math.*, 87, 1968, p. 484-530.
- [3] P. BAUM et R. C. DOUGLAS, *Notes for the Proceedings of the Kingston Conference*.
- [4] A. CONNES, *Sur la théorie non commutative de l'intégration (Lecture Notes in Math., 725, Springer, 1979, p. 19-143)*.
- [5] A. CONNES, *A Survey of Foliations and Operator Algebras (Proceedings of the Kingston Conference)*.
- [6] L. HORMANDER, *On the index of pseudodifferential operators (Elliptische Differentialgleichungen, II, Koll, 1969, Berlin)*.
- [7] G. G. KASPAROV, *Izv. Akad. Nauk, U.S.S.R., sec. Mat.*, 44, 1980, p. 571-636 (en russe).
- [8] J. ROSENBERG et C. SCHOCHET, *The Classification of Extensions of C^* Algebras (Bull. Amer. Math. Soc., N.S., 4, 1981)*.

Pavillon 2, Résidence l'Ormaille, 91440 Bures-sur-Yvette.