Alain Connes

Ultrapuissances et applications dans le cadre de l'analyse non standard

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 1 (1969-1970), exp. nº 8, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_1_A7_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
9e année, 1969/70, n° 8, 25 p.
8, 15 et 22 janvier 1970

ULTRAPUISSANCES ET APPLICATIONS DANS LE CADRE DE L'ANALYSE NON STANDARD

par Alain CONNES

Introduction

L'analyse non standard est un procédé de démonstration issu de la logique. On le présente, en général, en termes spécialisés, ce qui est un obstacle à son utilisation par les non-logiciens. Mais, étant très lié à la notion d'ultrafiltre connue de ces derniers, il se prête quand même à une description n'empruntant rien au vocabulaire de la logique. Il se présente, à première vue, comme le procédé de complétion de Cauchy, son utilisation est analogue.

A un ensemble X , le corps des réels par exemple, on associe un ensemble $^*X$ contenant X , muni lui aussi de lois telles que l'addition, etc. Un exemple d'un tel "complété" est l'ensemble $X^{(U,\mathcal{U})}$, où $\mathcal{U}$ désigne un ultrafiltre sur l'ensemble U ; $X^{(U,\mathcal{U})}$ est l'ensemble des germes d'applications de U dans X .

Nous étudions en détail ce procédé particulier. Nous l'appliquons ensuite à deux problèmes concrets :

1° Trouver un analogue du théorème de Hahn-Banach pour un corps ordonné quelconque ;

2° Construire une moyenne prolongeant une mesure donnée, et respectant les mêmes conditions d'invariance.

Pour conclure, nous donnons la définition générale d'un modèle non standard, et montrons un fait qui semble nouveau. Si l'on admet l'hypothèse du continu, il existe parmi tous les modèles de X , non réduits à X , des modèles minimaux. Ces modèles sont nécessairement de la forme $X^{(U,\mathcal{U})}$, et la classe d'ultrafiltres $\mathcal{U}$ correspondants coïncide avec celle des ultrafiltres absolus [3].

Première partie

Ultrapuissances

1. - Nous présentons, dans ce paragraphe introductif, un procédé de construction qui utilise l'existence d'ultrafiltres.

Nous choisissons un ensemble U muni d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$.

DÉFINITION 1. - On appelle ultrapuissance de l'ensemble A, l'ensemble ${}^*A$ des germes d'applications de U dans A, modulo $\mathcal{U}$.

[Le germe (a_u) est égal à (b_u), si $\{u \,;\, a_u = b_u\} \in \mathcal{U}$.]

PROPOSITION 2.

(a) Soient f une application de A dans B, $G(f) \subset A \times B$ son graphe ; ${}^*G(f) \subset {}^*A \times {}^*B$ est alors le graphe de l'application, notée ${}^*f$, de ${}^*A$ dans ${}^*B$, telle que $f(a_u)$ soit le germe $(f(a_u))$.
(b) ${}^*(\text{Domaine } f) = \text{Domaine } {}^*f$, ${}^*(\text{Image } f) = \text{Image } {}^*f$.
(c) ${}^*(f \circ g) = {}^*f \circ {}^*g$.
(d) ${}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$, A et B dans X, ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$, ...

Cette proposition précise les relations entre $*$ et la catégorie des ensembles sur laquelle elle est définie.

Soit $\mathfrak{F}$ une famille de parties d'un ensemble X. Si $\mathfrak{F}$ est considéré comme ensemble, ${}^*\mathfrak{F}$ est alors l'ensemble des germes (A_u), $A_u \in \mathfrak{F}$.

DÉFINITION 3. - On appelle ultraproduit d'une famille d'ensembles A_u, indexés par U, le quotient du produit par la relation $\{u \,;\, x_u = y_u\} \in \mathcal{U}$.

PROPOSITION 4. - Au germe (A_u) de ${}^*\mathcal{P}(X)$, associons la partie de ${}^*X$ formée des germes (x_u) tels que $\{u \,;\, x_u \in A_u\} \in \mathcal{U}$.

(a) A deux germes distincts correspondent deux parties distinctes de ${}^*X$.
(b) La partie obtenue s'identifie à l'ultraproduit des A_u selon $\mathcal{U}$.

Montrons (a). Si les deux germes A_u et B_u sont distincts, on peut supposer que $\{u \,;\, B_u \setminus A_u \neq \emptyset\} \in \mathcal{U}$. L'on choisit $x_u \in B_u \setminus A_u$, le germe (x_u) est dans (B_u), et non dans (A_u).

Il est clair que la proposition 4 donne une inclusion naturelle de ${}^*\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}({}^*X)$. On peut itérer, et inclure ${}^*\mathcal{P}\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}\mathcal{P}({}^*X)$, plus généralement.

DÉFINITION 5. - On appelle type, une assemblée finie de zéros et de parenthèses, construite à partir de 0 par la règle : $\tau_1, \ldots, \tau_n$ étant des types, $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ en est un.

A l'opération $X \to \mathcal{P}(X)$, nous associons $\tau \to (\tau)$, et à $X, Y \to X \times Y$, $\tau \to \tau_1, \tau_2$ (qui n'est pas un type tant que nous n'avons pas ajouté de parenthèses). En composant ces opérations, on obtient un ensemble dont les éléments s'écrivent $t = \tau_1, \dots, \tau_p$, où τ_i est un type.

Nous désignons par X_0 l'ensemble X, par X_τ l'ensemble obtenu par les règles ci-dessus.

PROPOSITION 6. - L'inclusion de ${}^*\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}({}^*X)$ et l'égalité ${}^*(X \times Y) = {}^*X \times {}^*Y$ fournissent une inclusion de

$$ {}^*(X_\tau) \text{ dans } ({}^*X)_\tau . $$

L'on notera que, si $\tau \neq 0$, X infini, $\mathcal{U}$ non trivial, l'inclusion ci-dessus est stricte en général (cf. théorème 10).

THÉORÈME 7. - Supposons qu'une assertion, écrite avec un nombre fini de quantificateurs $\forall$, $\exists$, de relations $r_1, \dots, r_q$ $(r_i \in X_{\tau_i})$ et de variables $x_1, \dots, x_q$, $(x_j \in X_{\tau_j})$, soit vraie dans X. Alors la même assertion, écrite avec les relations ${}^*r_i$ et les variables x_i, est vraie dans ${}^*X$ avec la restriction : Les variables x_i sont assujetties à varier dans ${}^*(X_{\tau_i})$, et non dans $({}^*X)_{\tau_i}$.

Démonstration. - Il y a un nombre fini de variables quantifiées par $\exists$, $\forall$; fixons les $\forall$; comme ils varient dans ${}^*(X_{\tau_i})$, on écrit la valeur de la variable comme germe $x_{i,u}$.

Fixant $U \in \mathcal{U}$ tel que, pour tout élément $u \in U$, l'assertion d'ordre u soit vraie, l'on peut choisir une valeur $x_{j,u}$ des variables quantifiées par $\exists$.

Remarques.

1° ${}^*(X_0) = ({}^*X)_0$, donc toutes les assertions, où les seules variables sont de type 0, sont valables sans restriction pour ${}^*X$.

2° Si la variable x_i est quantifiée par $\exists$, la restriction est profitable, elle assure l'existence d'un élément de ${}^*(X_\tau)$ et non $({}^*X)_\tau$; nous appellerons internes ces éléments.

2. - X s'identifie à un sous-ensemble de ${}^*X$, celui des germes constants.

DÉFINITION 8. - Un ultrafiltre $\mathcal{U}_1$ est dit plus fin que l'ultrafiltre $\mathcal{U}_2$, si $\mathcal{U}_2 = f(\mathcal{U}_1)$ pour au moins une application f (de U_1 dans U_2).

L'on vérifie que, plus l'ultrafiltre est fin, plus ${}^*X$ est grand. On peut de la même façon comparer deux filtres.

A chaque nombre cardinal v , nous associons un filtre de la manière suivante :

Soient Y un ensemble de cardinalité v , et $F(Y)$ l'ensemble des parties finies de Y , ordonné par inclusion. Nous désignons par V le filtre des sections finissantes sur $F(Y)$.

Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ est dit d'ordre v , si $\mathcal{U}$ est plus fin que le filtre V associé à v .

THÉORÈME 9. - Soient X un ensemble, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre d'ordre v . Toute partie A de X , de cardinal plus petit ou égal à v , est contenue dans une partie *finie de $^*X$.

Démonstration. - Une partie *finie de $^*X$ est un germe (F_u) de parties finies de X . Elle doit vérifier $A \subset (F_u)$, soit $\forall x \in A$, $\{u ; x \in F_u\} \in \mathcal{U}$. A s'identifie à une partie de v ; on peut donc supposer que $\mathcal{U}$ s'appuie sur l'ensemble des parties finies de A , l'on définit alors F_u comme la partie finie de A symbolisée par $\mathcal{U}$, ce qui donne le résultat.

Citons comme corollaire au théorème 9 l'existence d'élargissements au sens de ROBINSON, nous n'aurons pas à l'utiliser.

COROLLAIRE. - Un ensemble X étant donné, il existe un ensemble $^*X$ tel que :

(a) $^*X$ s'obtient à partir de X par ultrapuissance ; le théorème 7 est donc valable ;

(b) Pour toute relation binaire r de X de type (τ_1 , τ_2) , de domaine D , telle que, $\forall a_1 , \dots , a_n \in D$, $\exists b$ tel que $r(a_i , b)$ soit vraie $\forall i$, il existe $B \in {}^*(X_{\tau_2})$ tel que

$$r(a , B) \text{ soit vraie pour tout } a \in X_{\tau_1} .$$

Ce corollaire est immédiat, en prenant un ultrafiltre $\mathcal{U}$ d'ordre $\mathrm{Card}(\bigcup X_\tau)$.

L'avantage de ne pas se limiter à des ultrapuissances $^*X$ qui soient des élargissements, c'est-à-dire vérifient le corollaire, apparaîtra par exemple dans la deuxième partie.

Reprenons le théorème 9 dans le cas où v = Cardinal du dénombrable . Le théorème 10 est un raffinement de ce cas particulier ; la proposition 11 montre que la condition imposée à $\mathcal{U}$ sera presque toujours réalisée par un ultrafiltre non trivial.

THÉORÈME 10. - Supposons que $\mathcal{U}$ vérifie : $\exists\, U_n$ où $U_n \in \mathcal{U}$, $\forall\, n \in N$, tels que $\bigcap_1^\infty U_i \notin \mathcal{U}$. Alors X étant donné, toute partie dénombrable de ${}^*X$ (et non seulement de X) est contenue dans une partie *finie de ${}^*X$.

Démonstration. - Enumérons la partie dénombrable donnée, $a_1, \dots, a_n, \dots$, $n \in N$. Ses éléments a_i sont des germes $(a_{i,u})$, où $a_{i,u} \in X$. Une partie *finie de ${}^*X$ est un germe (F_u). La condition d'inclusion s'écrit : $\forall\, i \in N$, $\{u\ ;\ a_{i,u} \in F_u\} \in \mathcal{U}$. Nous choisissons les éléments de la partie F_u parmi les $a_{i,u}$.

Soit $U_n \in \mathcal{U}$ une suite décroissante telle que $\bigcap_1^\infty U_n = \emptyset$. Posons

$$\{u\ ;\ a_{n,u} \in F_u\} = U_n \quad .$$

L'on vérifie que cela suffit à définir F_u, que F_u est une partie finie, et que, pour tout $n \in N$,

$$\{u\ ;\ a_{n,u} \in F_u\} \in \mathcal{U} \quad .$$

PROPOSITION 11. - Les conditions suivantes sur $\mathcal{U}$ sont équivalentes, et sont réalisées dès que la cardinalité de U est majorée par $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\aleph_0}}}}}}$ (un nombre fini de termes) [et $\mathcal{U}$ non trivial].

(a) $\exists\, U_n \in \mathcal{U}$, $\bigcap_1 U_n = \emptyset$;

(b) ${}^*N$ contient N strictement ;

(c) ${}^*N$ contient un entier infiniment grand ;

(d) Pour tout ensemble infini X, et tout type $\tau \neq 0$, l'inclusion ${}^*X_\tau \supset {}^*(X_\tau)$ est stricte ;

(e) $\mathcal{U}$ est plus fin qu'un ultrafiltre non trivial de N.

En effet, si (a) est vrai, seul (d) n'est pas évident ; mais dans un ensemble infini, on peut injecter N, et dans ${}^*N$, l'ensemble des entiers infiniment grands est non vide et ne contient pas de premier élément, donc est externe.

Si (a) est faux, ${}^*N = N$, et même

$$^*(N_\tau) \subset ({}^*N)_\tau = N_\tau \ , \qquad \text{donc} \qquad {}^*(N_\tau) = N_\tau \quad .$$

Or, si $\mathcal{U}$ est porté par $\overbrace{\mathcal{P}\mathcal{P} \dots \mathcal{P}(N)}^{\text{fini}} = N_{((((0)))\dots)} = N_\tau = U$, l'on vérifie que le germe $(\mathcal{U}_u)$ est non trivial comme $\mathcal{U}$, donc que l'inclusion suivante est stricte :

$$^*U \supset U \quad .$$

En contradiction avec ${}^*(N_\tau) = N_\tau$.

Il est important, pour la suite, de noter que les conditions équivalentes de la proposition 11 (que nous notons (δ)) expriment exactement que $\mathcal{U}$ est d'ordre infini.

3. - Nous étudions deux procédés de réduction de ${}^*X$.

Premier procédé de réduction. - Nous supposons que l'ensemble X est doté d'une structure uniforme $\mathcal{E}$ ayant une base dénombrable d'entourages $\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_n \dots$. Prenons $\mathcal{U}$ vérifiant la condition (δ).

THÉORÈME 12.

(a) La famille filtrante ${}^*\mathcal{E}_i \subset {}^*X \times {}^*X$ définit une structure uniforme sur ${}^*X$.

(b) Le noyau $\mathcal{E} = \bigcap_1^\infty {}^*\mathcal{E}_i$ est une relation d'équivalence (externe) sur ${}^*X$, qui caractérise la structure uniforme $\mathcal{E}$ en ce sens que

$$V \subset X \times X \text{ est un entourage } \Longleftrightarrow {}^*V \supset \mathcal{E} \ .$$

(c) L'espace séparé ${}^*X/\mathcal{E}$ est un espace métrique complet.

(d) Le séparé de X est isomorphe (pour la structure uniforme) à une partie de ${}^*X/\mathcal{E}$.

Démonstration. - L'on vérifie que les sous-ensembles de ${}^*X \times {}^*X$ de la forme ${}^*\mathcal{E}_i$ constituent une base de filtres, contiennent la diagonale, sont symétriques, de plus : $\forall\ i\ ,\ \exists\ j\ ,\ \mathcal{E}_j \circ \mathcal{E}_j \subset \mathcal{E}_i$, donc ${}^*\mathcal{E}_j \circ {}^*\mathcal{E}_j \subset {}^*\mathcal{E}_i$.

Soit $V \subset X \times X$ tel que ${}^*V \supset \mathcal{E}$, prolongeons la suite $\mathcal{E}_i$ en une suite *finie $\mathcal{E}_i$, $i = 1 , 2 , \dots , \omega$, où $\mathcal{E}_i$ est un *entourage. Il est clair que $\mathcal{E}$ contient $\bigcap_1^\omega \mathcal{E}_i$ qui est un *entourage, donc que V contient un *entourage, et est un entourage.

Montrons que le séparé est complet. Notons ε l'application quotient

$${}^*X \xrightarrow{\varepsilon} \varepsilon\, {}^*X = {}^*X/\mathcal{E} \ .$$

Soit z_n une suite de Cauchy dans $\varepsilon\, {}^*X$, z'_n un représentant de z_n : $\varepsilon z'_n = z_n$. Prolongeons la suite z'_n en une suite *finie, l'on peut se limiter au cas où $d(z_n , z_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$, et cela aura lieu jusqu'à un certain entier infini ω ,

$$d(z'_n , z'_{n+1}) < \frac{1}{2^n} , \qquad n = 1 , 2 , \dots , \omega \ .$$

L'on vérifie alors que $\varepsilon(z'_\omega)$ est la limite de la suite z_n .

En utilisant le même procédé, l'on voit que :

PROPOSITION 13. - Si A est une partie interne de $^*X$ (i. e. $A \in {}^*(X_{(0)})$), son image $\varepsilon(A)$ dans $\varepsilon\,{}^*X$ est un fermé de cet espace métrique complet.

Remarquons que, si B est une partie de X , $\varepsilon\,{}^*B$ contient la fermeture de B :

$$\overline{B} = X \cap \varepsilon\,{}^*B \qquad (X \text{ séparé}) .$$

De plus, le complété de X est inclus dans $\varepsilon\,{}^*X$.

Deuxième procédé de réduction. - Le procédé précédent consistait en gros à identifier deux germes infiniment voisins ; nous cherchons maintenant à n'en considérer qu'une partie :

Nous supposons que l'ensemble X est doté d'une famille de bornés $\mathbb{S}$ (bornologie) :

A et B dans $\mathbb{S}$ entraîne $A \cup B$ dans $\mathbb{S}$ et $A' \subset A \in \mathbb{S} \Longrightarrow A' \in \mathbb{S}$.

Nous appelons base de $\mathbb{S}$, une famille A_i stable par union finie, telle que $A_i \in \mathbb{S}$ et $A \in \mathbb{S}$ entraîne $\exists\, i$, $A \subset A_i$.

THÉORÈME 14.

(a) La famille $^*A$, où A décrit $\mathbb{S}$, est une famille de bornés dans $^*X$; son support $S = \bigcup {}^*A$ la caractérise dès que $\mathcal{U}$ est d'ordre card I , en ce sens que

$$B \in \mathbb{S} \quad \text{si, et seulement si,} \quad {}^*B \subset S .$$

(b) Dans le cas I dénombrable, cela a lieu pour tout ultrafiltre vérifiant la condition (δ), de plus

$$C \text{ interne}, \quad C \subset S \quad \text{entraîne} \quad \exists\, A \in \mathbb{S},\ C \subset {}^*A .$$

(c) Supposons $\mathcal{U}$ d'ordre card I , où A_i , $i \in I$, est une base de $\mathbb{S}$. Alors S n'est interne que si la famille $\mathbb{S}$ est principale.

(d) Soit $\hat{X}$ l'ensemble des ultrafiltres sur X , muni de sa topologie compacte usuelle ; soit $\mathcal{C}$ l'application de $^*X$ dans $\hat{X}$ qui, à un germe associe l'ultrafiltre qu'il définit sur X . La condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie de $^*X$ soit le support S d'une famille $\mathbb{S}$, est qu'elle soit de la forme $\mathcal{C}^{-1}(V)$, V ouvert de $\hat{X}$.

Démonstration. - Montrons (b). Soient A_n , $n \in \mathbb{N}$, une base croissante de $\mathbb{S}$, C une partie interne $(C \in {}^*(X_{(0)}))$ telle que $C \subset \bigcup_1^\infty {}^*A_n$. Prolongeons la suite A_n en une suite *finie d'éléments de $^*\mathbb{S}$. On a $C \subset A_\omega$ pour tout ω infiniment grand, donc il existe, comme C est interne, un entier fini ayant cette propriété.

Montrons (c). Dans le cas où $\mathbb{S}$ admet une base dénombrable, il résulte de (b).

Dans le cas général, soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{S}$ de cardinalité minimale ; d'après l'hypothèse, il existe une partie *finie F , $\mathcal{B} \subset F \subset {}^*\mathcal{B}$. L'on en déduit, comme S est supposé interne, que l'ensemble des éléments de F , qui sont contenus dans S , est *fini et contient $\mathcal{B}$. Donc la réunion (*finie) des éléments de cet ensemble est égale à S , et se trouve dans ${}^*\mathcal{B}$.

Il ne reste plus qu'à prouver que l'on peut choisir deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \emptyset$. Construisons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ à partir de $\mathcal{A} = (A_i)$, $i \in I$, de cardinalité minimale ; comme ce cardinal est infini, il existe un ensemble bien ordonné I dans lequel tout segment $1 , 2 , \ldots , a$ est de cardinal strictement plus petit. Nous posons $B_1 = A_1$, et procédons ensuite par récurrence :

$B_1 , B_2 , \ldots , B_a ; B'_1 , \ldots , B'_a$ ayant été définis, cherchons B_{a+1} . La condition qu'il doit vérifier s'écrit :

$$B_{a+1} \cap \Big(\bigcap_{\text{finie}} B_j\Big) \neq \bigcap_{\text{finie}} B'_k \ .$$

Pour la réaliser, l'on note que l'ensemble des intersections finies d'éléments B'_k est de cardinal égal à $1 , 2 , \ldots , a$, donc strictement inférieur à card I . Donc cet ensemble ne peut constituer une base, il existe donc un élément A_q qui ne contient aucune de ces intersections finies. Si l'on prend $B_{a+1} = A_q$, la condition est donc réalisée.

Deuxième partie

Application simple du procédé de complétion :
Le théorème de Hahn-Banach pour un corps ordonné non archimédien.

Munissons l'espace vectoriel $\mathcal{Q}^2$ de la topologie produit ; soit $\Gamma \subset \mathcal{Q}^2$ un convexe fermé. Γ n'est, en général, pas l'intersection des demi-espaces rationnels fermés qui le contiennent. Mais, comme $\overline{\Gamma} \subset R^2$ est un convexe fermé, si $x \in \mathcal{Q}^2$, $x \notin \Gamma$, il existe une application linéaire ℓ de $\mathcal{Q}^2$ dans R , telle que

(H. B.) $$\ell(x) < a \leqslant \ell(\Gamma) \ .$$

Si k est ordonné, commutatif, non archimédien, désignons par $\hat{k}$ son complété pour la structure uniforme associée à l'ordre. Il existe nécessairement une partie décroissante ouverte de k qui n'est la trace d'aucun intervalle de $\hat{k}$, soit I . Le convexe Γ de $k \times k$, défini par

$$\Gamma = \{(x , y) \ ; \quad x/y \notin I \ \text{ si } \ y > 0 \ , \quad x/y \in I \ \text{ si } \ y < 0 \ , \text{ et } \ x \geqslant 0 \ \text{ si } \ y = 0\} \ ,$$

est un cône fermé ; on vérifie que ℓ ne peut exister. Ainsi, si k est non archimédien, le complété $\hat{k}$ ne convient pas pour énoncer (H. B.).

Nous montrons que l'on peut trouver k' dans tous les cas.

THÉORÈME 15. - Pour tout corps ordonné k, il existe un corps ordonné k', tel que :

(a) $k \subset k'$, $\hat{k} \subset k'$, $\text{card } k' \leq 2^{\text{card } k}$;

(b) $\forall E$, espace vectoriel de dimension finie sur k , en désignant par E' l'ensemble des applications k-linéaires de E dans k' , la topologie $\sigma(E, E')$ coïncide avec la topologie produit de E ;

(c) $\forall B$, convexe ouvert de E tel que $0 \notin B$, il existe $\ell \in E'$ tel que

$$\forall x \in B , \qquad \ell(x) > 0 .$$

Démonstration. - Nous démontrons le théorème en utilisant une ultrapuissance ${}^*k$ de k , où U est l'ensemble des parties finies de k , $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre associé à l'ordre de U . L'on voit, en appliquant le théorème 7, que ${}^*k$ est un corps ordonné contenant k .

Nous prenons pour k' le quotient de l'ensemble des éléments de ${}^*k$, majorés par un élément de k en module, par l'ensemble des éléments de ${}^*k$ plus petits, en module, que tous les éléments positifs de k .

L'on vérifie que ce procédé est une application des deux procédés de réduction décrits au § 3 de la première partie.

(a) Seule l'inclusion $\hat{k} \subset k'$ n'est pas immédiate, elle résultera de (c).

(b) Tout élément de k' est majoré par un élément de k , l'égalité des topologies en découle.

(c) Nous appelons CFG un convexe engendré par un nombre fini de points, et notons $C_k(A)$ l'enveloppe convexe d'une partie A de E .

LEMME 16. - Pour tout CFG ne contenant pas 0 , il existe une forme linéaire h de E dans k , telle que $h(x) > 0$, $\forall x \in \text{CFG}$.

Démonstration. - On fait une hypothèse de récurrence sur $n = \dim E$. Soit alors $\text{CFG} = C_k(x_1, \ldots, x_m)$, et soit C le cône engendré épointé. Parmi les m points x_i , l'un d'eux, x_1 , n'est pas combinaison positive des autres. La projection de C , selon x_1 , ne contient donc pas 0 . Cette projection est un cône convexe engendré par les projections des x_i , l'hypothèse de récurrence s'applique.

LEMME 17. - L'espace E' s'obtient à partir de l'espace F des applications k-linéaires de E dans k , comme k' à partir de k .

En effet, E' apparait comme le quotient de la partie de ${}^*F$ formée des éléments de norme finie, par l'ensemble des éléments de norme infiniment petite.

Passons alors à la démonstration ; soit B un convexe ouvert ne contenant pas 0. Le théorème 9 montre qu'il existe une partie *finie P de ${}^*E$,

$$B \subset P \subset {}^*B \quad .$$

L'on en déduit

$${}^*C_k(P) \subset {}^*C_k({}^*B) = {}^*(C_k(B)) \quad .$$

Or $0 \notin C_k(B)$, donc $0 \notin {}^*(C_k(B))$. Le lemme 2 montre alors l'existence de $L \in {}^*F$, telle que

$$L(x) > 0 \ , \qquad \forall\ x \in B \subset P \quad .$$

Divisons L par sa norme $|L|$, et soit ℓ l'image nécessairement non nulle de cet élément borné de ${}^*F$ dans E' (cf. lemme 3). L'on voit que

$$\forall\ x \in B \ , \qquad \ell(x) \geq 0 \quad .$$

Or B est ouvert, ℓ non nulle ne peut s'annuler sur B, donc

$$\forall\ x \in B \ , \qquad \ell(x) > 0 \quad .$$

Remarques.

(a) Si k est différent de R, et si E est de dimension $n > 1$ sur k, il existe dans E un fermé borné dont l'enveloppe convexe n'est pas fermée.

(b) La propriété (" K compact" entraîne " C(K) compact") d'un espace vectoriel sur R est remplacée par (" K compact" entraîne " C(K) fermé"). Pour la montrer, l'on peut par exemple utiliser (c).

(c) De la relation, valable dans un espace de dimension n :

$$C_k(x_1 \ , \ \ldots \ , \ x_m) = \bigcup_{i_1 \ldots i_{n+1}} C_k(x_{i_1} \ , \ \ldots \ , \ x_{i_{n+1}}) \quad ,$$

l'on déduit que l'opération ${}^*C_k$ est toujours égale à $C_{{}^*k}$ pour dim E finie.

Nous utilisons ici quelques résultats de la quatrième partie, en particulier le théorème 41.

Nous montrons que, si l'on choisit convenablement l'ultrafiltre qui intervient dans la démonstration du théorème 15, le procédé de complétion obtenu consiste, comme le procédé de complétion de Cauchy, à faire une relation d'équivalence sur une certaine classe d'ultrafiltres de k. Pour la notion d'ultrafiltre absolu, on se référera à CHOQUET [2], et au théorème 35.

THÉORÈME 18. - Soit k un corps ordonné dénombrable, non nécessairement archimédien. Soient $\mathfrak{a}$ un ultrafiltre absolu de N, $k^{(N,\mathfrak{a})}$ l'ensemble des germes d'applications de N dans k.

1° L'application qui, au germe $\varphi \in k^{(N,\mathfrak{a})}$ associe l'ultrafiltre $\varphi(\mathfrak{a})$ sur k, est injective. Elle permet d'identifier $k^{(N,\mathfrak{a})}$ à une partie $k_{\mathfrak{a}}$ de l'ensemble des ultrafiltres sur k.

2° Le quotient du sous-ensemble de $k_{\mathfrak{a}}$ formé des ultrafiltres bornés ($\mathfrak{U}$ est borné, si $\mathfrak{U}$ contient un intervalle $-a$, $+a$ de k), par l'ensemble des ultrafiltres convergeant vers 0, est un corps ordonné qui vérifie les propriétés (a), (b), (c), du théorème 17.

3° Ce quotient est complet pour la structure uniforme associée à son ordre.

4° Un élément du quotient est un élément du complété usuel de k, si, et seulement si, ses représentants sont des ultrafiltres de Cauchy.

Démonstration. - La première assertion est un cas particulier du théorème 41 de la quatrième partie ; on prend $X = k$. La deuxième est une conséquence de la démonstration du théorème 15. Le lecteur prouvera facilement les deux dernières, en utilisant l'énoncé (c) du théorème 12.

Troisième partie

Moyennes de Banach, groupes amenables.

Cette partie est consacrée à une utilisation non topologique de la notion d'entier infiniment grand. L'on notera qu'elle apparait comme étrangement proche de la notion intuitive des physiciens.

Ainsi nous définissons, pour deux entiers n et m de $^*N$, la condition " m négligeable devant n " $(\forall\, p \in N,\ pm < n)$ (cf. § 1).

Puis nous montrons que l'ensemble des entiers inférieurs à n, modulo la relation $n_1 \sim n_2$ quand $|n_1 - n_2|$ négligeable devant n, est isomorphe (cf. § 1) à l'intervalle compact $[0, 1]$, dès que n est infini.

Nous prouvons ensuite que, si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Boole, et P une fonction additive de $\mathfrak{a}$ dans $[0, 1]$, il existe une suite de n épreuves (n infini) telle que $P(A)$, $A \in \mathfrak{a}$, s'obtient en comptant le nombre d'épreuves réalisant A sans tenir compte d'un nombre négligeable d'épreuves.

Nous précisons ensuite le cas d'un espace de probabilité ; le lecteur ne manquera pas de traiter un cas intéressant (mais simple, grâce à la compacité faible de l'ensemble des mesures positives de masse 1), celui des mesures de Radon sur un compact.

Nous étudions, dans le dernier paragraphe, la possibilité de l'invariance de la suite de n épreuves par un automorphisme de $\mathfrak{a}$.

Cela nous conduit à une démonstration très simple de l'existence de moyennes de Banach (FØLNER). De plus, appliquant les résultats obtenus dans le cas des espaces de probabilité, nous montrons que toute mesure invariante par un groupe amenable se prolonge en une moyenne invariante. Le théorème 13 obtenu est une généralisation et une précision du "Main theorem" de l'article "Nonstandard measure theory" de A. R. BERNSTEIN et F. WATTENBERG [1].

1. - Nous faisons sur l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ l'hypothèse (δ), i. e. ${}^*N \neq N$. Pour deux éléments m et n de ${}^*N$, nous adoptons :

DÉFINITION 19. - m est dit négligeable devant n $(m \ll n)$, quand, pour tout entier $p \in N$, l'on a $pm < n$.

0 est le seul nombre négligeable devant un nombre fini, mais :

PROPOSITION 20.

(a) Le quotient de l'intervalle $1 , \ldots , n$ par la relation $|m - m'| \ll n$, muni de sa topologie de l'ordre, est un compact ; nous le notons I_n .

(b) Si n est fini, ce compact est l'intervalle $1 , \ldots , n$ discret.

(c) Si n est infini, il s'identifie à $[0 , 1]$, pour la topologie, l'ordre et l'addition (quand elle existe), par l'application φ :

$$m \xrightarrow{\varphi} \varphi(m) = \lim_{\mathcal{U}} \frac{m_u}{n_u} = \mathrm{st}\, \frac{m}{n} \in [0 , 1] \quad .$$

(d) Soit ψ une application de I_n dans $[0 , 1]$, telle que

$$\psi(m + m') = \psi(m) + \psi(m') \quad \text{si} \quad m + m' \leq n , \qquad \text{et} \qquad \psi(n) = 1 \quad .$$

Alors $\psi(m) = \mathrm{st}\, \frac{m}{n}$.

Nous notons st l'application de ${}^*[0 , 1]$ dans $[0 , 1]$ qui, à un germe (a_u) associe sa limite. L'on vérifie la surjectivité de l'application $m \to \mathrm{st}\, \frac{m}{n}$ dans $[0 , 1]$, pour n infini, en prenant la valeur approchée d'un réel à $\frac{1}{n}$ près.

Soit alors $\mathfrak{a}$ une algèbre de Boole ; si l'on se donne un nombre fini d'épreuves $e_1 , \ldots , e_n$, on définit naturellement un poids p sur $\mathfrak{a}$ en associant à un évènement $A \in \mathfrak{a}$ le nombre d'épreuves qui le réalisent. Il est immédiat que la donnée d'une suite *finie $e_1 , \ldots , e_n$ (n infini) d'épreuves définit elle aussi un poids à valeur dans I_n , donc dans $[0 , 1]$:

$$p(A) = \mathrm{st}\,\frac{\text{nombre d'épreuves qui réalisent } A}{\text{nombre total d'épreuves}} \ .$$

Le fait intéressant est, qu'inversement, tout poids p sur $\mathfrak{A}$ se représente ainsi.

Nous appelons poids sur $\mathfrak{A}$, une application de $\mathfrak{A}$ dans $[0 , 1]$, telle que $A \cap B = \emptyset \implies p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

PROPOSITION 21.

(a) ${}^*\mathfrak{A}$ est une algèbre de Boole contenant $\mathfrak{A}$.

(b) Soient Ω un ensemble d'épreuves sur $\mathfrak{A}$; ${}^*\Omega$ est un ensemble d'épreuves sur ${}^*\mathfrak{A}$, qui restreintes à $\mathfrak{A}$, sont des épreuves sur $\mathfrak{A}$.

Tout cela résulte de ce que ${}^*(Z/2) = Z/2$, car $Z/2$ est fini.

Soient alors $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathfrak{A}$, Ω un ensemble d'épreuves sur $\mathfrak{A}$. Pour une épreuve e de ${}^*\Omega$:

- Ou bien on a : $\exists A \in \mathfrak{I} \implies e(A) = 0$. Cas dans lequel elle passe au quotient, dans $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.
- Ou bien il existe A tel que $e(A) = 1$, donc e est dans la réunion des ${}^*(A')$, où A' est l'ensemble des épreuves qui réalisent A . Dans ce cas, e est dans le support de la famille $\mathfrak{I}'$ (cf. théorème 14).

PROPOSITION 22. - Soit $\mathfrak{A}'$ une algèbre de parties d'un ensemble Ω , munie d'un poids p . Soit $\mathfrak{I}' = \{A \ ; \ p(A) = 0\}$, et soit I' le support de $\mathfrak{I}'$ dans ${}^*\Omega$.

(a) Si $\mathcal{U}$ est d'ordre card $\mathfrak{I}'$, l'ensemble I'^c des épreuves qui passent au quotient est non vide, et contient un ensemble interne P tel que ${}^*p(P) = 1$.

(b) Si $\mathfrak{A}'$ est une tribu, p une mesure diffuse, et si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur N , l'ensemble I'^c est vide.

Pour abréger, disons qu'une épreuve $e \in {}^*\Omega$ est probable, si elle est dans I'^c .

(a) est clair, puisqu'une réunion *finie d'éléments de ${}^*\mathfrak{I}'$ est dans ${}^*\mathfrak{I}'$.

Montrons (b). Soit $e \in {}^*\Omega$; e s'écrit comme un germe $e_1 \ldots e_n \ldots$ selon $\mathcal{U}$, mais en désignant par A l'ensemble $e_1 , \ldots , e_n , \ldots$, comme p est diffuse, $p(A) = 0$; d'autre part,

$$e \in {}^*A \ .$$

Notons qu'une épreuve probable est un germe e_u qui ne s'appuie sur aucun ensemble de poids nul.

THÉORÈME 23. - Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre de Boole munie d'un poids p. Soit Ω un ensemble d'épreuves sur $\mathfrak{A}$ qui séparent deux évènements A et B tels que $p(A \Delta B) \neq 0$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre d'ordre au moins égal au cardinal d'une base de $\mathfrak{J}'$ et au cardinal du quotient $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$.

Il existe alors une suite *finie $e_1, \ldots, e_n$ de $^*\Omega$, formée uniquement d'épreuves probables, telle que

$$\forall A \in \mathfrak{A}, \qquad p(A) = \mathrm{st}\,\frac{\text{nombre d'épreuves réalisant } A}{\text{nombre total d'épreuves}} .$$

Démonstration. - On sait que $\mathcal{U}$ est d'ordre card $\mathfrak{B}$, où $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$; il existe donc une partie *finie entre $\mathfrak{B}$ et $^*\mathfrak{B}$, donc une algèbre de Boole *finie entre $\mathfrak{B}$ et $^*\mathfrak{B}$, soit $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ étant *finie, a un nombre *fini d'atomes $a_1, \ldots, a_m$.

Pour tout représentant A_1 de a_1 dans Ω, l'on a $p(A_1) \neq 0$, donc, en utilisant la deuxième hypothèse de finesse de $\mathcal{U}$ et la proposition 4 (a), il existe dans A_1 une épreuve probable e_1'. Désignons alors par α_i le poids $p(a_i)$, soit ε un réel positif infiniment petit ; il existe un entier infini n, et m entiers infinis n_i, tels que $\sum_1^m n_i = n$ et $\left|\frac{n_i}{n} - \alpha_i\right| < \varepsilon$, puisque cette propriété est vraie quand m est fini, α_i réels. Nous construisons la suite e_i en prenant n_1 fois e_1', puis n_2 fois e_2', etc. Cette construction existe, car elle existe dans le cas fini. L'on vérifie que le choix de ε, tel que $2^m \varepsilon$ soit infiniment petit, suffit à donner la conclusion.

2. - Nous précisons le théorème 5 dans le cas d'un espace de probabilité. Soit Ω, μ un espace mesurable, $\mu \geqslant 0$, $\mu(\Omega) = 1$. Nous désignons par v le sup du cardinal de l'ensemble des classes $A \sim B$ si $\mu(A \Delta B) = 0$, et du cardinal d'une base (de cardinalité minimale) pour les ensembles de mesure nulle.

Le théorème 5 assure l'existence, si $\mathcal{U}$ est d'ordre v, d'une suite *finie $x_1, \ldots, x_\omega$ telle que

$$\int_\Omega f\, d\mu = \mathrm{st}\,\frac{1}{\omega}\sum f(x_i) \quad ,$$

dès que f est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable. Nous montrons que cette égalité se prolonge nécessairement à $L^\infty(\Omega)$, et que, sans changer l'hypothèse sur $\mathcal{U}$, on peut choisir la suite assez bien pour qu'elle se prolonge à $L^1(\Omega)$.

PROPOSITION 24. - Si f est mesurable bornée, l'égalité ci-dessus a lieu.

Cela est clair, puisque f peut être approchée à moins de ε par une fonction simple.

THÉORÈME 25. - Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre d'ordre ν. Il existe une suite *finie de points probables de $^*\Omega$ telle que :

(a) La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f, mesurable, soit sommable, est que $\frac{1}{\omega}\sum_1^\omega |f(x_i)|$ soit fini ;

(b) Pour toute fonction mesurable sommable, l'on ait

$$\int f\, d\mu = \frac{1}{\omega}\sum f(x_i) \quad .$$

Démonstration. - Si l'ensemble des classes résiduelles $A \sim B$ si $\mu(A \Delta B) = 0$ est fini, l'on a $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)$, donc le théorème est clair.

Sinon, cet ensemble a au moins la puissance du continu, il en résulte que $L^1(\Omega)$ a même cardinal.

Prenons ensuite un nombre fini d'éléments de $\mathcal{L}_1(\mu)$, $f_1, \ldots, f_{n'}$, et un nombre fini d'ensembles de mesure nulle $E_1, \ldots, E_n$, et $\varepsilon > 0$. Il existe alors un nombre $M > 0$ et un ensemble E tels que

$$\int_E |f_i|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \sup_{E^c} |f_i| \leqslant M \quad .$$

En effet, les fonctions choisies sont sommables. Les fonctions f_i étant bornées sur E^c, il existe une suite finie $x_1, \ldots, x_m$ à valeurs dans

$$E' = \Omega \setminus E \cup E_1 \cup \ldots \cup E_n \quad ,$$

telle que

$$\left|\int_{E^c} f_i\, d\mu - \frac{1}{m}\sum_1^m f_i(x_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n'$$

(même raisonnement que dans le théorème 5). Il existe donc une suite finie $x_1, \ldots, x_m$, telle que :

1° $x_i \notin E_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$;

2° $\left|\int_\Omega f_i\, d\mu - \frac{1}{m}\sum_1^m f_i(x_j)\right| < \varepsilon$.

Pour terminer la démonstration, choisissons pour chaque élément de $L^1(\mu)$ un représentant dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, prenons une partie *finie de $^*\mathcal{L}^1(\mu)$ contenant $\mathcal{L}^1$, image de $L^1(\mu)$. Prenons ensuite une suite *finie d'ensembles de mesure nulle, contenant la base choisie. Enfin choisissons ε infiniment petit. L'on a, d'après la construction ci-dessus :

1° $x_i \notin E_j$, donc x_i probable ;

2° $\left|\int_\Omega f\,d\mu - \frac{1}{m}\sum_1^m f(x_j)\right| < \varepsilon$, donc infinitesimal, pour $f \in L^1(\mu)$.

3. - Soient X un ensemble, et G un groupe de transformations de X . Soient $a, b, \dots, \ell$ une suite finie d'éléments de l'ensemble X , et T un élément de G . La suite $a, b, \dots, \ell, Ta, Tb, \dots, T^2 a, \dots, T^p \ell$ a alors la propriété que tous ses éléments, sauf une proportion $1/p$, sont de la forme $u = Tv$. Prenons deux éléments S et T de G , et cherchons une suite ayant la propriété ci-dessus à la fois pour S et T . Si S et T commutent, il suffit d'appliquer $S, S^2, \dots, S^p$ à la suite construite pour T , sinon les éléments commençant par S (et ils sont en proportion $\frac{p-1}{p}$), ne seront en général pas de la forme $u = Tv$.

Aussi, nous faisons sur le groupe G l'hypothèse moins restrictive que la commutativité :

($\mathfrak{M}$) Pour toute partie finie $A \subset G$, tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A' \subset G$, telle que

$$\forall a \in A , \qquad \|A' \setminus aA'\| \leqslant \varepsilon\|A'\|$$

(nous désignons par $\|A\|$ le nombre d'éléments de A).

DÉFINITION 26. - Une application x_i d'un ensemble *fini $\{1, \dots, \omega\}$ dans X est dite quasi-invariante par $S \in G$, s'il existe deux sous-ensembles internes de $\{1, \dots, \omega\}$, D et R , et une bijection interne de D dans R , tels que :

(a) Le nombre d'éléments de D^c et de R^c est négligeable devant ω ;

(b) $x_{\varphi(i)} = Sx_i$.

PROPOSITION 27. - L'ensemble des éléments de G par lesquels x_i est quasi-invariante est un sous-groupe de G .

Il suffit de constater que, si φ est définie sur D , et ψ sur D' , $\varphi \circ \psi^{-1}$ est définie sur $\psi(D \cap D')$.

L'on déduit de l'hypothèse ($\mathfrak{M}$) sur G :

THÉORÈME 28. - Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre d'ordre au moins le cardinal de G . Il existe alors une suite *finie $S_1, \dots, S_\omega$ de $^*G$, telle que, pour toute suite *finie $x_1, \dots, x_{\omega'}$ de $^*X$, la suite *finie double $S_i x_j$ soit quasi-invariante par G .

Nous étudions deux applications de ce théorème :

THÉORÈME 29. - Pour tout groupe G vérifiant la condition $(\mathfrak{M})$, il existe une moyenne de Banach, c'est-à-dire une fonctionnelle M définie sur l'ensemble des fonctions bornées de G dans R, telle que

$$M(1) = 1 , \qquad M(f_x) = M(f) , \qquad M \geqslant 0$$

(notation : $f_x(y) = f(xy)$).

Ce théorème et sa généralisation immédiate au cas où G opère sur un ensemble X se montre ainsi :

Soit x un point de X ; appliquons le théorème 10 à la suite $x_1 = x$, et le lemme suivant :

LEMME 30. - Si une application x_i d'un ensemble *fini $\{1 , \ldots , \omega\}$ dans X est quasi-invariante par G , la fonctionnelle

$$f \rightarrow st \frac{1}{\omega} \sum_1^{\omega} f(x_i)$$

est invariante par G .

L'on vérifie en effet que

$$\left|\frac{1}{\omega} \sum_1^{\omega} f(x_i) - \frac{1}{\omega} \sum_1^{\omega} (f \circ S)(x_i)\right| ,$$

qui est infiniment voisin de

$$\left|\frac{1}{\omega} \sum_{i\in R} f(x_i) - \frac{1}{\omega} \sum_{i\in D} f(x_{\varphi(i)})\right| = 0 ,$$

est infinitésimal.

Notons enfin, dans le cas où G opère sur lui-même, que l'existence d'une moyenne invariante à gauche entraîne celle d'une moyenne invariante des deux côtés :

On prend $f \rightarrow f'$, $f'(x) = f(x^{-1})$, $M'(f) = M(f')$, et l'on considère la moyenne double $M(M'(f_x))$.

L'application qui suit est moins évidente :

THÉORÈME 31. - Soit G un groupe vérifiant la condition $(\mathfrak{M})$, de transformations de l'espace mesuré Ω , μ $(\mu(\Omega) = 1 , \mu \geqslant 0)$, tel que μ soit invariante par les éléments de G . Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre dont l'ordre vérifie la condition du théorème 7, et est supérieur ou égal au cardinal de G .

1° Il existe une suite *finie de points probables $x_1 , \dots , x_\omega$ de $^*\Omega$, telle que :

(a) x_i est quasi-invariante par G ;

(b) Une fonction mesurable f est sommable, si, et seulement si, $\frac{1}{\omega}\sum_1^\omega |f(x_i)|$ est fini ;

(c) Si f vérifie la condition ci-dessus, $\int_\Omega f \, d\mu = \mathrm{st}\, \frac{1}{\omega}\sum_1^\omega f(x_i)$.

2° L'on en déduit l'existence d'une forme linéaire positive φ , définie sur l'ensemble des fonctions bornées de Ω dans R , telle que :

(a) $\varphi(f_s) = \varphi(f)$, $\forall\, s \in G$ (notation : $f_s(x) = f(sx)$) ;

(b) f mesurable est sommable, si, et seulement si, $\sup_{g \text{ bornée}, 0 \leqslant g \leqslant |f|} \varphi(g)$ est fini ;

(c) L'on a alors, pour f positive, $\int_\Omega f \, d\mu = \sup_{0 \leqslant g \leqslant |f|} \varphi(g)$.

Démonstration. – L'idée première est de prendre une suite *finie $x'_1 , \dots , x'_{\omega'}$, comme en fournit le théorème 7, puis de la rendre quasi-invariante par G , grâce au théorème 10 ; cependant, on n'est pas assuré que les $s_i\, x'_j$ seront probables, ni que l'intégrale de la fonction interne, mais non standard, f_{s_i} , sera la moyenne des valeurs prises en x'_j . C'est dans l'ordre inverse que nous procédons :

Nous appliquons d'abord le théorème 10, notons $s_1 , \dots , s_r$ la suite *finie qu'il fournit. Choisissons ensuite un représentant de chaque fonction de $L^1(\mu)$ dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, et prenons une partie *finie de $^*\mathcal{L}^1(\mu)$ contenant l'image de $L^1(\mu)$, soit $f'_1 , \dots , f'_{n''}$ cette partie. Soit alors $f_1 , \dots , f_{n'}$ la suite *finie des fonctions (de $^*\mathcal{L}^1(\mu)$) de la forme f'_{i,s_j} (notation : $f'_{i,s_j}(x) = f'_i(s_j\, x)$). Soit $E'_1 , \dots , E'_p$ une suite *finie d'ensembles de mesure nulle, contenant une base pour la famille des ensembles de mesure nulle. Notons $E_1 , \dots , E_n$ la suite *finie des ensembles de mesure nulle de la forme $s_j^{-1}(E'_i)$, soit ε un infiniment petit positif. D'après la construction du théorème 7, il existe une suite *finie $x'_1 , \dots , x'_m$, telle que :

1° $x'_i \notin E_j$, $j = 1 , 2 , \dots , n$;

2° $\left|\int_\Omega f_i \, d\mu - \frac{1}{m}\sum_1^m f_i(x'_j)\right| < \varepsilon$, $i = 1 , 2 , \dots , n'$.

Montrons alors que la suite *finie double $s_k\, x'_q$, $k = 1 , \dots , r$; $q = 1 , \dots , m$, que nous notons $x_1 , \dots , x_\omega$ $(\omega = mr)$, convient. Comme elle est quasi-invariante par G , d'après le théorème 10, il nous reste à montrer que, pour toute $f \in L^1(\mu)$,

$$\left|\int_\Omega f\, d\mu - \frac{1}{mr}\sum_k \sum_q f(s_k\, x'_q)\right| < \varepsilon \quad .$$

D'après 1°, tous les points $s_k\, x'_q$ sont probables, donc il suffit de prouver cette égalité pour un représentant f'_{i_1} de la fonction f. Mais f'_{i_1, s_k} est l'une des f_i, donc, tenant compte de

$$\int_\Omega g_s\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu \quad ,$$

$$\left|\int_\Omega f'_{i_1}\, d\mu - \frac{1}{m}\sum_1^m f'_{i_1, s_k}(x'_j)\right| < \varepsilon \quad .$$

Ensuite $f'_{i_1, s_k}(x'_j) = f'_{i_1}(s_k\, x'_j)$, et l'on fait la moyenne des r inégalités obtenues.

Quatrième partie

Existence et détermination des modèles minimaux.

Soit X un ensemble ; nous notons $\hat{X} = \cup X_\tau$ la réunion disjointe des ensembles X_τ, quand τ décrit l'ensemble des types (cf. définition 5).

Soit F une phrase, écrite avec les symboles usuels $\vee$, $\wedge$, $\neg$ et les crochets $[\ .\ ]$ de la logique, les symboles $=$, $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subset$, $(.)$ de la théorie des ensembles, un nombre fini de lettres (les variables) précédées de l'un des signes $\forall$, $\exists$ et suivies de $\in$, et un nombre fini d'éléments de $\hat{X}$ (les constantes). Si F a un sens dans $\hat{X}$, selon l'interprétation naïve, et si F est vraie dans $\hat{X}$, nous dirons que F est une formule de $\hat{X}$.

Soient X et Y deux ensembles, $A \to A'$ une application de $\hat{X}$ dans $\hat{Y}$, F une formule de $\hat{X}$; par F', nous désignons la phrase obtenue en remplaçant chaque constante A figurant dans F par A'.

DÉFINITION 32. - Un modèle non standard de X est la donnée d'un ensemble Y et d'une application $A \to A'$ de $\hat{X}$ dans $\hat{Y}$, telle que $X' = Y$ quand X est considéré comme élément de $X_{(0)}$, et que :

Pour toute formule F de $\hat{X}$, F' est une formule de $\hat{Y}$.

Le théorème 7 montre que l'ultrapuissance $X^{(U,\mathfrak{U})}$ est un exemple de modèle non standard de X.

L'application $A \to A'$ est nécessairement injective ; en effet, si A_1 et A_2

sont distincts, $A_1 \neq A_2$ est une formule de $\hat{X}$, la correspondante est $A'_1 \neq A'_2$.

Si A est dans X_τ, A' est dans Y_τ ; car cela a lieu pour X, élément de $X_{(0)}$, donc si $x \in X$, $x' \in X' = Y$, donc x' est de type 0 comme x ; l'on procède ensuite par récurrence sur le type τ.

Les éléments de $\hat{Y}$, images d'un élément de $\hat{X}$, c'est-à-dire de la forme A', $A \in \hat{X}$, sont dits standards. Ceux qui interviennent dans la vérification d'une formule F' (c'est-à-dire qui peuvent prendre la place d'une variable), sont dits internes.

Tout élément z de Y vérifie $z \in X'$, donc est interne, de plus :

LEMME 33. - Si l'ensemble Y ne contient que des éléments standards, en identifiant Y à X par l'application bijective $x \to x'$, l'on obtient

$$\forall A \in \hat{X}, \qquad A' = A .$$

Un tel modèle de X sera dit trivial par la suite.

Prouvons le lemme par récurrence sur le type τ de A, nous l'amorçons :

Si $\tau = 0$, $x' = x$ par convention, $\tau = (0)$; soit $A \in X_{(0)}$ une partie de X, et soit x un élément de A ; $x \in A$ est une formule qui devient $x' \in A'$, soit $x \in A'$, car $x' = x$; de même, si $y \notin A$, l'on a $y \notin A'$, donc la trace de A' sur X est A, mais $A' \subset X'$ et $X' = X$.

Soit Y un modèle non trivial de X, il existe des formules construites à partir de constantes internes de $\hat{Y}$, qui ne sont pas de la forme F', par exemple $z \in X'$, où z est non standard. Soient alors Z un ensemble, $A \to A_1$ une application de l'ensemble des éléments internes de $\hat{Y}$ dans $\hat{Z}$, telle que, pour chaque formule F construite à partir de constantes internes de $\hat{Y}$, F_1 soit une formule de $\hat{Z}$, et $Y_1 = Z$. En composant les applications $A \to A'$ de $\hat{X}$ dans $\hat{Y}$, et $A \to A_1$ d'une partie de $\hat{Y}$ dans $\hat{Z}$, on obtient une application $A \to A''$ qui fait clairement de Z un modèle non standard de X.

DÉFINITION 34. - Nous dirons que Y, modèle non standard de X, est un sous-modèle de Z, s'il existe une application $A \to A_1$ ayant les propriétés ci-dessus.

L'on remarque qu'une telle application est injective.

THÉORÈME 35.

(a) Si $\mathfrak{a}$ est un ultrafiltre absolu sur N, et X un ensemble infini, $X^{(N,\mathfrak{a})}$ est un modèle non standard de X, minimal, c'est-à-dire non trivial, et sans sous-modèle non trivial autre que lui-même. L'hypothèse du continu assure ainsi l'existence d'un modèle minimal.

(b) Si le cardinal de X est modéré (i. e. si toute mesure à deux valeurs sur $\mathfrak{P}(X)$ est triviale), et si Y est un modèle non standard minimal de X, il existe sur N un ultrafiltre absolu $\mathcal{A}$ tel que Y soit le modèle $X^{(N,\mathcal{A})}$.

Démonstration. - Tout modèle non standard de X ne s'écrit pas sous la forme $X^{(U,\mathcal{U})}$, ne serait-ce que parce qu'une limite inductive de modèles est encore un modèle (voir proposition 40).

Cependant, tout modèle non standard non trivial contient un modèle non trivial de cette forme, ce que montrent les deux lemmes suivants :

LEMME 36. - Notons $A \to A'$ un modèle non standard Y de X, soit z un élément non standard de l'ensemble Y ; l'ensemble des parties A de X telles que $z \in A'$ est un ultrafiltre $\mathcal{U}$ non trivial sur X.

En effet, comme $(A \cap B)' = A' \cap B'$, puisque $A \cap B = C$ est une formule de $\hat{X}$, $\mathcal{U}$ est stable par intersection, il est héréditaire.

On montre de même que $\emptyset' = \emptyset$, donc $\mathcal{U}$ est un filtre.

Soient A une partie quelconque de X, B sa complémentaire ; l'on montre que A' et B' sont complémentaires, donc A' ou B' contient z, et $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre.

Si $\mathcal{U}$ était trivial, il existerait x, élément de X tel que $z \in \{x\}'$. Or la phrase : $\forall\, y \in X$, $y \in \{x\} \implies y = x$, est une formule de $\hat{X}$, qui donne : $\forall\, y \in X'$, $y \in \{x\}' \implies y = x'$, donc $\{x\}' = \{x'\}$. Ainsi $z \in \{x\}' \implies z = x'$, donc z est standard.

Il est clair que le modèle non standard $X^{(X,\mathcal{U})}$ obtenu est non trivial, comme $\mathcal{U}$.

LEMME 37. - $X^{(X,\mathcal{U})}$ est un sous-modèle de Y.

Construisons d'abord l'application $A \to A_1$ de l'ensemble des éléments internes de $X^{(X,\mathcal{U})}$ dans $\hat{Y}$. Un élément interne A de type τ de $X^{(X,\mathcal{U})}$ est un germe $x \to A_x$, où $A_x \in X_\tau$ pour tout $x \in X$.

Soit φ, application de X dans X_τ, un représentant de ce germe. Le graphe de φ, partie de $X \times X_\tau$, est un élément de $\hat{X}$, de type $(0, \tau)$.

Montrons que φ' est le graphe d'une application.

$$\forall\, x \in X , \qquad \exists : y \in X_\tau , \qquad (x , y) \in \varphi ,$$

formule de $\hat{X}$, devient

$$\forall\, x \in X' , \qquad \exists : y \in (X_\tau)' , \quad (x , y)' \in \varphi' .$$

On vérifie que $(x , y)' = (x' , y')$, cela prouve que φ' est le graphe d'une application (notée φ') de X' dans $(X_\tau)'$.

Nous posons, si A désigne le germe $x \to A_x = \varphi(x)$, $A_1 = \varphi'(z)$. Cela ne dépend pas du choix du représentant φ du germe ; en effet, si $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ sur le sous-ensemble U de X , et si $U \in \mathcal{U}$, en traduisant la formule : $\forall\, x \in U$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, l'on obtient : $\forall\, x \in U'$, $\varphi_1'(x) = \varphi_2'(x)$, donc, comme $z \in U'$, $\varphi_1'(z) = \varphi_2'(z)$.

L'on vérifiera directement que deux germes distincts ont des images distinctes.

Soit maintenant F une phrase construite avec des constantes internes de $X^{(X,\mathcal{U})}$, vraie dans $X^{(X,\mathcal{U})}$. Nous allons construire une famille F_x de phrases de $\hat{X}$, paramétrées par $x \in X$. Soient $C_1 , \dots , C_n$ les constantes internes qui figurent dans F , $\varphi_1 , \dots , \varphi_n$ des applications de X dans X_{τ_i} représentant ces constantes ; soit $x \in X$. Partout où C_i figure dans F , nous la remplaçons par $\varphi_i(x)$ qui est de type τ_i comme C_i . La phrase obtenue F_x est une phrase de $\hat{X}$, puis, comme chaque C_i a été remplacée par une constante de même type, elle a un sens dans $\hat{X}$, puisque F avait un sens dans $X^{(X,\mathcal{U})}$. Donc, pour tout x , ou bien F_x est une formule de $\hat{X}$, ou bien $\rceil\, F_x$, sa négation, est une formule de $\hat{X}$.

Soit U le sous-ensemble de X des x tels que F_x soit une formule ; si U n'était pas dans $\mathcal{U}$, $V = U^c$, l'ensemble des x tels que $\rceil\, F_x$ soit une formule, serait dans $\mathcal{U}$, donc

$$\forall\, x \in V , \quad \rceil\, F_x \qquad \text{serait une formule de } \hat{X} .$$

La traduction de cette formule dans le modèle $X^{(X,\mathcal{U})}$, assure que, si l'on note $*$ l'application associée au modèle,

$$\forall\, x \in {}^*V , \qquad \rceil\, {}^*F_x ,$$

où dans ${}^*F_x$ l'on remplace simplement $\varphi_i(x)$ par ${}^*\varphi_i(x)$; en appliquant cette formule à l'élément de ${}^*V$, qu'est le germe g , $x \to x = g(x)$, l'on trouve ${}^*\varphi_i(g) = C_i$, donc $\rceil\, F$, ce qui est une contradiction.

Ainsi $U \in \mathcal{U}$, et la formule : $\forall\, x \in U$, F_x , traduite cette fois dans le modèle Y et appliquée au cas particulier $x = z$, ce qui est possible car $z \in U'$, donne une phrase vraie dans Y , puisque Y est un modèle. Or cette phrase est obtenue précisément en remplaçant chaque C_i par $\varphi_i'(z)$, donc n'est autre que F_1 selon nos notations.

Les applications $*$ et 1 composées, donnent $'$ comme on le vérifie, cela achève la démonstration.

LEMME 38. - <u>Si l'ultrafiltre</u> $\mathcal{U}_1$ <u>est moins fin que</u> $\mathcal{U}_2$, <u>et si</u> X <u>est un ensemble, le modèle</u> $X^{(U_1,\mathcal{U}_1)}$ <u>est un sous-modèle de</u> $X^{(U_2,\mathcal{U}_2)}$.

Soit, en effet, f une application de U_2 dans U_1 , telle que $f(\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}_1$. Si $(A^1_{u_1})$ est un représentant du germe A_1 de $X^{(U_1,\mathcal{U}_1)}$, nous lui associons le germe A_2 de $X^{(U_2,\mathcal{U}_2)}$, où $A^2_{u_2} = A^1_{f(u_2)}$. Le lecteur vérifiera que cette application fait de $X^{(U_1,\mathcal{U}_1)}$ un sous-modèle de $X^{(U_2,\mathcal{U}_2)}$.

Nous démontrons maintenant la partie (a) du théorème 35. G. CHOQUET a montré que l'hypothèse du continu assure l'existence d'un ultrafiltre $\mathfrak{a}$ sur N non trivial, dit absolu, tel que : Pour toute application φ de N dans un ensemble X , telle que $\varphi(\mathfrak{a})$ soit non trivial, il existe $U \in \mathfrak{a}$ tel que φ soit injective sur U .

Si X est infini, le modèle $X^{(N,\mathfrak{a})}$ est non trivial ; soit Y un sous-modèle de $X^{(N,\mathfrak{a})}$ (on note $'$, 1 et $*$ les applications associées, cette fois $* = 1 \circ '$). Soient z un élément de Y , non standard, A un élément interne du modèle $X^{(N,\mathfrak{a})}$; montrons qu'il existe une application φ de X dans X_τ (si A est de type τ), telle que $^*\varphi(z_1) = A$. z_1 est un élément non standard de $X^{(N,\mathfrak{a})}$; l'ultrafiltre qu'il définit (lemme 36) étant non trivial, on peut le supposer défini par un germe ψ , application de N dans X , injectif, car $\mathfrak{a}$ est absolu. On peut alors prolonger l'application $x \to A_{\psi^{-1}(x)}$ de $\psi\{N\}$ dans X_τ en une application φ de X dans X_τ , qui donne le résultat. L'application $A \to A_1$ est donc surjective, le modèle Y est identique à $X^{(N,\mathfrak{a})}$, donc celui-ci est minimal.

Nous utilisons maintenant les lemmes 36, 37, 38 pour prouver la partie (b). Par hypothèse, nous supposons que X a un cardinal inférieur au premier cardinal inaccessible ; nous n'utiliserons en fait que la conséquence suivante, due à S. ULAM [6], de cette hypothèse : Tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ non trivial sur X a une image non triviale dans N . Soit alors Y un modèle minimal de X ; comme Y est non trivial, le lemme 33 donne l'existence d'un $z \in Y$, non standard. Les lemmes 36, 37, montrent que le modèle $X^{(X,\mathcal{U})}$ est un sous-modèle non trivial de Y , donc Y est nécessairement identique à $X^{(X,\mathcal{U})}$. $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur X , et a donc une image non triviale sur N ; le lemme 38 montre la nécessité de l'égalité entre Y et un certain $X^{(N,\mathcal{U}_1)}$, où $\mathcal{U}_1$ est l'ultrafiltre image de $\mathcal{U}$, sur N . Enfin $\mathcal{U}_1$ est nécessairement absolu, cela apparait comme conséquence du lemme 38 et du résultat suivant que nous réutiliserons, dû à G. CHOQUET [3].

LEMME 39. - <u>Si</u> E <u>est un ensemble,</u> $\mathcal{U}$ <u>un ultrafiltre,</u> f <u>une application de</u> E <u>dans</u> E <u>telle que</u> $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, <u>il existe un</u> $U \in \mathcal{U}$ <u>tel que</u> f_0 = identité .

L'on en déduit, dans la situation ci-dessus, que si $\mathcal{U}_2$ est une image non triviale de $\mathcal{U}_1$ par une application $f_{1,2}$, comme le modèle $Y = X^{(N,\mathcal{U}_1)}$ est minimal, il existe une application $f_{2,1}$ qui envoie $\mathcal{U}_2$ dans $\mathcal{U}_1$, alors $f_{2,1} \circ f_{1,2}$ transforme $\mathcal{U}_1$ en $\mathcal{U}_1$, donc $f_{2,1}$ est l'inverse de $f_{1,2}$, et cette dernière est injective, donc $\mathcal{U}_1$ absolu.

Remarque. - Une conséquence des lemmes 36, 37.

Soit I un ensemble ordonné filtrant ; pour tout $i \in I$, soit Z_i un modèle de X. L'application associée, de $\hat{X}$ dans $\hat{Z}_i$, est notée φ_i (définition 32).

Soit $\varphi_{i,j}$ un système d'applications, tel que :

- $\varphi_{i,j}$ fait de Z_i un sous-modèle de Z_j, pour $i < j$ (définition 34) ;
- $\varphi_{j,k} \circ \varphi_{i,j} = \varphi_{i,k}$, si $i < j < k$.

La "limite inductive" d'un tel système est le modèle Z de X ainsi construit :

L'ensemble Z est la limite inductive ensembliste du système Z_i, $\overline{\varphi_{ij}}$, où $\overline{\varphi_{ij}}$ est la restriction de φ_{ij} aux éléments de type 0.

L'application φ de $\hat{X}$ dans $\hat{Z}$ est celle qui associe à $A \in X_\tau$, $\tau \neq 0$, $\tau = (\tau_1 \ldots \tau_n)$, la réunion des sous-ensembles $\varphi_i(A)$ de $Z_{\tau_1} \times \ldots \times Z_{\tau_n}$.

Un cas particulier intéressant est, si Y est un modèle de X, la famille obtenue en posant $I = \{\text{parties finies de } Y\}$, $Z_{(z_1,\ldots,z_n)}$ défini grâce au lemme 36 appliqué au point $(z_1, \ldots, z_n)$ de $(X \times \ldots \times X)' = Y^n$, qui donne un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $X \times \ldots \times X$, donc un modèle $X^{(X^n,\mathcal{U})}$. La projection naturelle de $X^{\{z_1,\ldots,z_n,\ldots,z_m\}}$ dans $X^{\{z_1,\ldots,z_n\}}$ fait de cette famille un système inductif.

Enfin, une démonstration analogue à celle du lemme 37 montre que chacun de ces modèles est un sous-modèle de Y, l'on obtient :

PROPOSITION 40. - Pour tout modèle Y de X, il existe un sous-modèle Z de la forme "limite inductive de modèles en ultrapuissance", et tel que tout élément de type 0 de Y soit un élément de Z.

Le lemme 40 permet de donner une représentation plus concrète des modèles minimaux.

Un tel modèle s'identifie à un sous-ensemble de l'ensemble des ultrafiltres sur X, cette identification respecte les structures respectives : par exemple, si f est une application de X dans X, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur X, $f(\mathcal{U})$ a un sens, et $f(\mathcal{U})$, en tant qu'élément de l'ensemble des ultrafiltres, coïncide avec ${}^*f(\mathcal{U})$, élément du modèle.

THÉORÈME 41. - Soient X un ensemble, $Y = X^{(N,\mathfrak{a})}$ un modèle minimal de X. On obtient une bijection entre Y et l'ensemble des ultrafiltres sur X, images de $\mathfrak{a}$, en associant à $\varphi \in X^{(N,\mathfrak{a})}$ l'ultrafiltre $\varphi(\mathfrak{a})$ que ce point de Y définit sur X (lemme 36).

Problèmes.

(a) Tout modèle non trivial d'un ensemble X de cardinal accessible, contient-il un modèle minimal ?

Ce problème est équivalent au suivant : Tout ultrafiltre non trivial sur N a-t-il une image absolue ?

(b) Le théorème 41 est-il caractéristique des modèles minimaux ?

Ce problème est équivalent au problème 3 posé par G. CHOQUET dans [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (A. R.) and WATTENBERG (F.). - Nonstandard measure theory, Applications of model theory of algebra, analysis and probability, Edited by W. A. J. Luxemburg ; p. 171-185. - New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[2] CHOQUET (Gustave). - Deux classes remarquables d'ultrafiltres sur $\underline{N}$, Bull. Sc. math., 2e série, t. 92, 1968, p. 143-153.

[3] CHOQUET (Gustave). - Une propriété des germes suivant un ultrafiltre, Bull. Sc. math., 2e série

[4] LUXEMBURG (W. A. J.). - A general theory of monads, Applications of model theory of algebra, analysis and probability, Edited by W. A. J. Luxemburg ; p. 18-86. - New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[5] ROBINSON (A.) and ZAKON (E.). - A set-theoretical characterization of enlargements, Applications of model theory of algebra, analysis and probability, Edited by W. A. J. Luxemburg ; p. 109-122. - New York, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[6] ULAM (Stanisław). - Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, Fund. Math., Warszawa, t. 16, 1930, p. 140-150.

(Texte reçu le 21 octobre 1970)

Alain CONNES
139 rue du Faubourg St-Honoré
75 - PARIS 08