ALAIN CONNES

Feuilletages et algèbres d'opérateurs

Séminaire N. Bourbaki, 1979-1980, exp. nº 551, p. 139-155
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1979-1980__22__139_0>

Séminaire BOURBAKI
32e année, 1979/80, n° 551

FEUILLETAGES ET ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

par Alain CONNES

La théorie des algèbres stellaires est une généralisation de celle des espaces localement compacts. La théorie de Gelfand établit une dualité entre algèbres stellaires commutatives et espaces localement compacts. A l'algèbre stellaire commutative A on associe son spectre $\mathrm{Sp}\, A$, espace localement compact des caractères de A, inversement, à l'espace localement compact S, on associe l'algèbre stellaire $C_o(S)$ des fonctions complexes continues nulles à l'infini dans S.

L'étude de l'espace localement compact S du point de vue de la théorie de la mesure, de la K-théorie, ou de la géométrie différentielle se formule de manière très naturelle en termes algébriques, i. e. en utilisant $A = C_o(S)$ au lieu de S. Ainsi, si S est compact, une mesure de Radon sur S est exactement une forme linéaire positive sur A (1), et cette théorie de la mesure donne une classification des représentations de A dans un espace hilbertien. De même, toujours avec S compact, un fibré vectoriel complexe sur S est exactement un module projectif de type fini sur A, et $K^o(S)$ est égal à l'invariant $K_o(A)$ de la K-théorie algébrique (voir [16]). De plus le groupe $K^1(S)$ n'est autre que $\pi_o(GL(A))$ groupe des composantes connexes de $GL(A) = \cup\, GL_n(A)$, (où $GL_n(A)$ est le groupe des éléments inversibles de $M_n(A)$), et la démonstration du théorème de périodicité de Bott est ici dans son cadre naturel, (elle utilise une identité matricielle et le calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach), de sorte que ce théorème reste vrai pour des algèbres stellaires non commutatives, associant en particulier à toute suite exacte $0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ d'algèbres, une suite exacte hexagonale : (2)

$$\begin{tikzcd} & K_o(J) \arrow[r] & K_o(A) \arrow[dr] & \\ K_1(B) \arrow[ur] & & & K_o(B) \arrow[dl] \\ & K_1(A) \arrow[ul] & K_1(J) \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

(1) Si A est une algèbre stellaire on dit qu'une forme linéaire $\varphi \in A^*$ est positive quand $\varphi(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in A$.

(2) On définit K_o comme dans [16] et K_1 par $\pi_o(GL(A))$, la périodicité de Bott s'écrit $K_o(A) \approx \pi_1(GL(A))$.

Enfin le théorème de l'indice d'Atiyah Singer est ici aussi dans son cadre naturel ; si V est une variété compacte de classe C^∞, l'algèbre filtrée des opérateurs pseudo-différentiels donne une suite exacte d'algèbres stellaires :

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\sigma} C(S^*V) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{E}$ est l'adhérence normique (dans $L^2(V)$) de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 , σ est le symbole principal (et S^*V l'espace des demi-droites $\mathbb{R}_+\xi$, $\xi \in T^*(V)$, $\xi \neq 0$) et k est l'adhérence normique de l'algèbre des noyaux régularisants. Ici k est <u>la</u> C^*-<u>algèbre élémentaire</u>, i. e. k est isomorphe à l'algèbre des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert (c'est la seule algèbre stellaire (de dimension infinie) qui n'ait à équivalence près qu'une représentation irréductible dans l'espace de Hilbert).

On a $K_0(k) = \mathbb{Z}$ et la flèche, de $K_1(C(S^*V)) = K^1(S^*V)$ dans $K_0(k) = \mathbb{Z}$, correspondante est l'<u>indice analytique</u>.

Le rôle de la théorie des algèbres stellaires n'est pas de reformuler en termes algébriques des idées géométriques, mais de pouvoir étudier des espaces qui échappent à l'intuition géométrique. Pour être précis, soit Γ un groupe discret (infini) opérant proprement et librement sur l'espace localement compact X , alors le quotient $\Gamma\backslash X$ est un espace localement compact et l'algèbre stellaire $C_0(\Gamma\backslash X)$ est <u>stablement isomorphe</u>(1) à l'algèbre stellaire <u>produit croisé</u> de $C_0(X)$ par l'action de Γ (2).

Si l'action de Γ sur X est impropre (prenons par exemple $SL(2,\mathbb{Z})$ agissant sur $P_1(\mathbb{R})$, ou $\mathbb{Z}$ agissant par translations (par des multiples de $\theta \notin \mathbb{Q}$) dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$), le théorème ci-dessus n'est plus vrai, (dans les exemples, $C_0(\Gamma\backslash X) = \mathbb{C}$ et le produit croisé n'est pas isomorphe à k) l'espace quotient $\Gamma\backslash X$ a une topologie très grossière, par contre l'algèbre stellaire produit croisé $C_0(X) \times \Gamma$ est parfaitement raisonnable. Le but de cet exposé est d'appliquer la théorie des algèbres stellaires à l'étude des feuilletages. Soient en effet X une variété de classe C^∞ , Y un feuilletage (de classe C^∞) de X (F.R.V. § 9, n° 2). Quand Y est défini par une submersion $p : X \longrightarrow B$, la relation R sur X : " x et y appartiennent à une même feuille connexe" est une relation d'équivalence régulière, de sorte que l'espace des feuilles(3) $X/_R$ s'identifie à B . Même pour les feuilletages les plus simples (comme le feuilletage de Kronecker de $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ défini par l'équation $dx_1 = \theta dx_2$, $\theta \notin \mathbb{Q}$) la relation R n'est pas régulière et l'espace topologique $X/_R$ ne joue que très grossièrement le rôle d'espace de paramètres pour la feuille(3) générique f de Y

---

(1) On dit que A et B sont stablement isomorphes quand $A \otimes k$ est isomorphe à $B \otimes k$, où k est la C^*-algèbre élémentaire.

(2) Complétion convenable de l'algèbre engendrée par $C_0(X)$ et une représentation unitaire $g \longrightarrow U(g)$ de Γ avec $U(g)FU(g)^* = F_g \quad \forall\, F \in C_0(X)$.

(3) Nous dirons feuille pour feuille connexe maximale.

A un feuilletage Y de X nous associons une algèbre stellaire $C^*(X,Y)$ qui se réduit (à isomorphisme stable près) à $C_o(B)$ quand Y est défini par une submersion $p : X \longrightarrow B$. (Voir appendice 1 pour la construction de $C^*(X,Y)$).

La théorie classique des feuilletages introduit la notion de mesure transverse Λ (voir appendice 2), de plus la version algébrique de la théorie non commutative de l'intégration est basée sur la notion de trace[(1)] sur une algèbre stellaire. A chaque feuille f de Y est associée (appendice 1) une représentation π_f de $C^*(X,Y)$ dans l'espace $L^2(\tilde{f})$ où $\tilde{f}$ est le revêtement d'holonomie de f et l'égalité :

$$\mathrm{Trace}_\Lambda(T) = \int \mathrm{Trace}\ \pi_g(T)\, d\Lambda(f) \qquad \forall\ T \in C^*(X,Y)^+$$

(voir appendice 3 pour la définition de cette intégrale) associe une trace sur $C^*(X,Y)$ à la mesure transverse Λ . Supposons maintenant que X soit une variété compacte.

Soit[(2)] C le courant de Ruelle et Sullivan associé à Λ (cf. appendice 2) alors C est fermé et sa classe d'homologie, $[C] \in H_p(X,\mathbb{R})$ joue le rôle de cycle fondamental. Soit alors $e \in H^p(X,\mathbb{R})$ la classe d'Euler[(2)] du fibré TY tangent au feuilletage. Le scalaire $< e,[C] >$ s'interprète, de même que la caractéristique d'Euler d'une variété, soit en comptant (transversalement à l'aide de Λ) les zéros d'un champ de vecteurs de classe C^∞ sur X tangent à Y , soit (en supposant par exemple que $\dim Y = 2$) comme intégrale, par rapport à Λ , de la courbure intrinsèque des feuilles (pour une structure riemannienne sur Y). Ces interprétations résultent immédiatement de la théorie générale [17] des classes caractéristiques, mais il manque l'interprétation de $< e,[C] >$ comme $\Sigma(-1)^j \beta_j$ où les β_j sont des "nombres de Betti". Si le feuilletage (X,Y) est défini par une submersion $p : X \longrightarrow B$, la donnée de Λ équivaut à celle d'une mesure de Radon sur B , les feuilles $p^{-1}\{b\} = f$ sont des variétés compactes et $< e,[C] > = \Sigma(-1)^j \beta_j$ où $\beta_j = \int_B \beta_j(b)\, d\Lambda(b)$, $\beta_j(b) = \dim H^j(p^{-1}\{b\},\mathbb{R})$.

En général les feuilles f ne sont pas compactes, de sorte que l'espace $H^j(f)$ des formes harmoniques de degré j de carré intégrable sur f [(3)] est de dimension infinie. La théorie singulière de l'intégration (appendice 3) n'exclut cependant pas que $\int \dim H^j(f)\, d\Lambda(f)$ soit finie (voir la prop. 3 ci-dessous pour une interprétation de cette intégrale) on a :

THÉORÈME 1.- a) Le scalaire $\int \dim H^j(\tilde{f})\, d\Lambda(f) = \beta_j$ est fini et indépendant du choix de structure riemannienne sur Y .

b) On a $\Sigma(-1)^j \beta_j = < e,[C] >$.

Bien entendu $\beta_j \geq 0$ $\forall\, j$, de plus $\beta_o = \int \dim H^o(\tilde{f})\, d\Lambda(f)$ est nul sauf si $\tilde{f}$

---

(1) Nous dirons trace pour trace semi-finie semi-continue.

(2) En supposant Y orienté.

(3) Pour une structure riemannienne sur Y (dont le fibré H^j ne dépend pas).

(revêtement d'holonomie de f) est compact pour un ensemble non négligeable de feuilles, ainsi si le feuilletage Y est de dimension 2 et l'intégrale $< e,[C]>$ de la courbure intrinsèque des feuilles est > 0 , Y possède alors des feuilles compactes stables (i. e. les feuilles voisines sont compactes) résultat démontré par D. Sullivan dans le cas particulier où la croissance des feuilles est polynômiale.

Le théorème 1 est un cas particulier du théorème de l'indice pour les feuilletages mesurés.

THÉORÈME 2.- Soit D un opérateur différentiel elliptique sur Y (1) alors :

a) $\int \dim(\mathrm{Ker}\ D_f)d\Lambda(f) < \infty$ (où $D_f = D$ restreint à $\widetilde{f}$),

b) $\int \dim(\mathrm{Ker}\ D_f)d\Lambda(f) - \int \dim(\mathrm{Ker}\ D_f^*)d\Lambda(f) = < \mathrm{ch}\ \sigma_D.\mathrm{Td}X,[C]>$.

Ici σ_D désigne le symbole principal de D et le caractère de Chern $\mathrm{ch}\ \sigma_D$ est calculé comme dans le cas classique en remplaçant TX par TY , on a $\mathrm{ch}\ \sigma_D \in H^*(X,\mathbb{Q})$, de plus $\mathrm{Td}(X) \in H^*(X,\mathbb{Q})$ est la classe de Todd usuelle de X .

La démonstration du théorème 2 s'appuie sur la théorie de Breuer (qui est l'analogue pour les algèbres de von Neumann semi-finies de la théorie de Fredholm pour l'algèbre de von Neumann des opérateurs dans l'espace hilbertien) appliquée à l'algèbre de von Neumann associée à $C^*(X,Y)$ et à la trace : Trace_Λ . Le fait remarquable dans cette théorie est que l'indice est une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la topologie discrète, i. e. localement constante.

Prenons par exemple pour X un tore complexe $\mathbb{C}/_{\Gamma_1} \times \mathbb{C}/_{\Gamma_2}$ où Γ_1 , Γ_2 sont des réseaux dans $\mathbb{C}$, pour Y le feuilletage diagonal (quotient par $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ du feuilletage de $\mathbb{C}^2$ par les droites complexes parallèles à la diagonale) et soit Λ la mesure transverse associée au courant $C = d(x_1 - x_2)\wedge d(y_1 - y_2)$, où $z_j = x_j + iy_j$. Soit P_j , $j = 1,2$ le fibré holomorphe sur $\mathbb{C}/_{\Gamma_j}$ associé à 0 comme pôle simple et soit $P = P_1 \otimes P_2^*$ sur X .

En appliquant le théorème 2 à l'opérateur $\bar{\partial}$ (sur la variété feuille Y qui ici est complexe) agissant sur les sections de la restriction de P à Y , on obtient l'indice = densité Γ_1 - densité Γ_2 et donc si densité $\Gamma_1 >$ densité Γ_2 un résultat d'existence de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ n'ayant de pôles qu'aux points de Γ_1 (et simples) et s'annulant en tous les points d'un translate de Γ_2 , tout en étant de carré sommable (comme section de P).

Ainsi le théorème 2 sert de remplacement au théorème de l'indice quand l'espace étudié n'est pas compact (voir [24] et [2] pour des résultats antérieurs dans cette direction et [3], [18] pour le cas des espaces homogènes d'un groupe de Lie) un décompte tel que "nombre de pôles - nombre de zéros" étant remplacé par "densité des pôles - densité des zéros". Pour préciser la signification d'un scalaire

(1) On suppose les coefficients de D de classe C^∞ sur X .

tel que $\int \dim(\mathrm{Ker}\ D_f)d\Lambda(f)$, notons :

PROPOSITION 3.- Avec les notations du théorème 2, il existe une transversale T et une famille mesurable (U_f) d'isomorphismes

$$U_f : \mathrm{Ker}\ D_f \longrightarrow \ell^2(T \cap \tilde{f})$$

La mesure transverse $\Lambda(T)$ est uniquement déterminée par l'existence de U (et égale à $\int \dim(\mathrm{Ker}\ D_f)d\Lambda(f)$).

Si par exemple $Y = X$ la proposition 3 signifie que l'espace $\mathrm{Ker}\ D_f$ (qui est de dimension finie) est isomorphe à un $\ell^2(T)$ où T est un sous-ensemble fini de X dont la cardinalité est bien déterminée, en général on fait donc un décompte du nombre $\Lambda(T)$ de paramètres dont dépend un élément de $\mathrm{Ker}\ D_f$ en utilisant une transversale T pour effectuer ce paramétrage.

Le théorème 2 montre que le sous-groupe de $\mathbb{R}$ formé par les indices d'opérateurs elliptiques est dénombrable (il peut, bien entendu, être dense et de rang > 1 même quand Λ est ergodique, par exemple avec Γ_1 , Γ_2 comme ci-dessus et il est de rang ≥ 2 si densité Γ_1 / densité $\Gamma_2 \notin \mathbb{Q}$) car $\mathrm{ch}\ \sigma_D \mathrm{Td} V \in H^*(V,\mathbb{Q})$. Si le feuilletage (X,Y) était défini par une filtration $p : X \longrightarrow B$, on pourrait appliquer le théorème de l'indice avec paramètres d'Atiyah Singer [1] qui donne l'égalité entre indices analytiques et topologiques, tout deux éléments de $K^0(B)$, beaucoup précis que la donnée de $\int \mathrm{Indice}\ D_b d\Lambda(d)$ (qui dépend d'ailleurs d'un choix arbitraire de Λ). Or ici le groupe $K_0(C^*(X,Y))$ (de la K-théorie algébrique, voir l'introduction) est dénombrable (et se réduit à $K^0(B)$ dans le cas d'une filtration) et l'algèbre filtrée des opérateurs pseudo-différentiels sur Y (1) donne une suite exacte d'algèbres stellaires :

$$0 \longmapsto C^*(X,Y) \longmapsto \mathcal{E} \overset{\sigma}{\longmapsto} C(S^*_Y X) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{E}$ est l'adhérence normique de l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 , σ le symbole principal, et $S^*_Y X$ l'espace compact des demi-droites dans le fibré TY (de classe C^∞ sur X). On en déduit une flèche, l'indice analytique, de $K^1(S^*_Y(X))$ dans $K_0(C^*(X,Y))$. Pour simplifier les notations, posons $K^0(X,Y) = K_0(C^*(X,Y))$, toute mesure transverse Λ sur le feuilletage détermine, grâce à la trace_Λ , un homomorphisme de $K^0(X,Y)$ dans $\mathbb{R}$, noté $\dim_\Lambda$, et le théorème 2 détermine

$$\dim_\Lambda \circ \mathrm{Ind} : K^1(S^*_Y(X)) \longmapsto \mathbb{R}$$

Le groupe $K^0(X,Y)$ est important même indépendamment de son rôle en théorie de l'indice, on a par exemple :

PROPOSITION 4.- a) Toute sous-variété V de X , compacte, transverse à Y , avec $\dim V = \mathrm{codim}\ Y$ détermine canoniquement un module projectif de type fini $[V] \in K_0(X,Y)$ (2).

---

(1) avec des conditions de continuité dans le sens transverse à Y .

(2) Et pour toute mesure transverse Λ on a $\dim_\Lambda[V] = \Lambda(V)$.

b) Si Y est défini par l'action libre sur X d'un groupe de Lie G, toute représentation intégrable π de G détermine canoniquement un module projectif de type fini $[\pi] \in K_o(X,Y)$.

Voir appendice 1 pour la construction du module a).

Le travail remarquable de M. Pimsner et D. Voiculescu [19] (voir aussi [9], [20]) permet de calculer la K-théorie d'un produit croisé $A \times_\theta \mathbb{Z}$ si on connait la K-théorie de l'algèbre stellaire A, en particulier on obtient :

THÉORÈME 5 (Pimsner,Voiculescu).- Soient $\theta \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, Y_θ le feuilletage de Kronecker ($dx_1 = \theta dx_2$) du tore $X = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$, Λ la mesure transverse de courant $|dx_1 - \theta dx_2|$, alors $\dim_\Lambda$ est un isomorphisme de $K^o(X,Y_\theta)$ sur $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

On a de plus dans ce cas une description très simple [8](1) de la classe des modules de dimension $|p - q^\theta|$, en effet la géodésique $t \longrightarrow (pt,qt)$ est transverse à Y, et le module associé par la proposition 4 a) a pour dimension la mesure transverse de la géodésique, i. e. $\int_o^1 |p - \theta q| dt = |p - \theta q|$. On déduit facilement de 5 que les algèbres stellaires $C^*(X,Y_{\theta_j})$ $j = 1,2$ sont isomorphes ssi θ_2 se déduit de θ_1 par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ (sur $P_1(\mathbb{R})$).

On est encore loin du compte en ce qui concerne le calcul de $K_o(X,Y)$ en général et celui de la flèche Ind, cependant si Y provient d'une action libre de $\mathbb{R}^n$ sur X on définit de manière canonique un isomorphisme Ψ_X, qui généralise l'isomorphisme de Thom, de $K^n(X)$ (2) sur $K^o(X,Y)$ (cf. [7]) et on a :

THÉORÈME 6 ([8]).- Soient D un opérateur différentiel(3) σ_D son symbole principal, $[\sigma_D] \in K(X)$ sa classe de K-théorie (on identifie $K(X)$ et $K(T^*Y)$ car $T^*Y = X \times \mathbb{R}^n$) alors $\operatorname{Ind} D = \Psi_X([\sigma_D])$.

COROLLAIRE 7.- Dans les hypothèses 6, pour toute mesure transverse Λ, l'image de $K^o(X,Y)$ par $\dim_\Lambda$ est égale à : $\{ < \operatorname{ch} E,[C] > \ , \ E \in K^n(X)\}$ où C est le courant associé à Λ.

En particulier si on prend un difféomorphisme minimal φ de S^3 ([11]) et que l'on considère le feuilletage (X,Y) quotient du feuilletage de $S^3 \times \mathbb{R}$ (défini par la projection $S^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^3$) par le difféomorphisme $\varphi \times$ translation, pour toute mesure transverse Λ on obtient :

$$\dim_\Lambda K^o(X,Y) = \mathbb{Z}\alpha \ , \quad \alpha = \Lambda(S^3)$$

Comme φ est minimal l'algèbre stellaire $A = C(S^3) \times_\varphi \mathbb{Z}$ est simple, [23], toute mesure de probabilité φ-invariante sur S^3 (il en existe car $\mathbb{Z}$ est moyennable) définit une trace fidèle sur A et le calcul ci-dessus montre que la trace de

(1) cf. [20] pour la description en termes d'idempotents.

(2) i. e. K^o si n est pair et K^1 si n est impair.

(3) L'énoncé reste valable pour un opérateur pseudo-différentiel.

tout orthoprojecteur $e \in A$ est un entier, donc que A ne contient pas d'orthoprojecteurs autres que 0 et 1. (Problème de Kaplansky, voir [4] et aussi [7]).

Passons maintenant à l'<u>utilisation de la structure</u> C^∞ <u>dans le sens transverse</u> au feuilletage, pour cela considérons l'exemple du feuilletage de Kronecker $dx_1 = \theta dx_2$ sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. L'algèbre stellaire correspondante est alors stablement isomorphe à l'algèbre stellaire A_θ engendrée par deux unitaires U_1, U_2 tels que $U_1U_2 = \exp i2\pi\theta U_2U_1$, et la structure C^∞ transverse au feuilletage de Kronecker se traduit par l'existence de deux dérivations δ_1, δ_2 de A_θ avec $\delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1$, $\delta_k(U_k) = 2\pi i U_k$ et $\delta_k(U_\ell) = 0$ si $k \neq \ell$. L'algèbre involutive $A_\theta^\infty = \Pi$ Domaine δ^j où $\delta^j = \delta_1^{j_1}\delta_2^{j_2}$ coïncide avec l'<u>espace nucléaire</u> des suites à décroissance rapide, $a = (a_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$, l'élément correspondant de A_θ étant $\Sigma\, a_{n,m}U_1^nU_2^m$. C'est une sous-algèbre dense de A_θ^∞, de plus pour tout module projectif de type fini $\mathcal{E}$ sur A_θ il existe un module projectif de type fini $\mathcal{E}^\infty$ sur A_θ^∞ (unique à isomorphisme près) tel que $\mathcal{E} = \mathcal{E}^\infty \otimes_{A_\theta^\infty} A_\theta$. Etant donné un module projectif de type fini $\mathcal{E}^\infty$ sur A_θ^∞ on appelle connexion sur $\mathcal{E}^\infty$, la donnée de deux applications ∇_1, ∇_2 de $\mathcal{E}^\infty$ dans $\mathcal{E}^\infty$ telles que

$$\nabla_j(\xi a) = (\nabla_j\xi)a + \xi\delta_j(a) , \quad \forall\, \xi \in \mathcal{E}^\infty , \quad \forall\, a \in A_\theta^\infty$$

(où l'on a écrit $\mathcal{E}^\infty$ comme module à droite), tout module projectif de type fini $\mathcal{E}^\infty$ possède une connexion.

Soient p, q deux entiers premiers entre eux, $W_1, W_2 \in M_q(\mathbb{C})$ deux matrices unitaires telles que $W_1W_2 = \exp(i2\pi p/_q)W_2W_1$, et faisons de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$ (1) un A_θ^∞-module en posant, pour $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$

$$(U_1.\xi)(s) = W_1\xi(s-\varepsilon) \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ , où } \varepsilon = p/_q - \theta$$
$$(U_2.\xi)(s) = \exp i2\pi s\, W_2\xi(s) \quad \forall\, s \in \mathbb{R} .$$

THÉORÈME 8.- <u>Le module</u> $\mathcal{E}^\infty_{p,q}$ <u>ainsi défini est projectif de type fini de dimension</u> $|p - q\theta|$, <u>les égalités</u> $(\nabla_1\xi)(s) = \frac{d}{ds}\xi(s)$ <u>et</u> $(\nabla_2\xi)(s) = \frac{2\pi i s}{\varepsilon}\xi(s)$ <u>définissent une connexion sur</u> $\mathcal{E}^\infty_{p,q}$, <u>de courbure constante</u> $\nabla_1\nabla_2 - \nabla_2\nabla_1 = \frac{2\pi i}{\varepsilon}$.

Ici la notion de dimension est relative à l'unique trace normalisée τ sur A_θ avec $\tau(\Sigma\, a_{n,m}U_1^nU_2^m) = a_{o,o}$. Cette trace est invariante par l'action de $\mathbb{R}^2$ sur A_θ, par automorphismes, définie par les dérivations δ_1, δ_2. Dans le cadre général d'une action d'un groupe de Lie G sur une algèbre stellaire A avec trace invariante τ, on construit l'analogue du caractère de Chern en géométrie différentielle en définissant un morphisme ch_τ de $K(A)$ dans la cohomologie $H^*_{\mathbb{R}}(G)$ des formes différentielles invariantes à gauche sur G. [8]. Dans le cas ci-dessus $G = \mathbb{R}^2$, $H^*_{\mathbb{R}}(G) = \Lambda\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$ et si $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$ on a :

---

(1) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz de $\mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}^q$ est considéré comme espace des sections du fibré trivial $\mathbb{C}^q$ sur $\mathbb{R}$.

$$\mathrm{ch}_\tau(\mathcal{E}_{p,q}) = |p - q\theta| + c_1(\mathcal{E}_{p,q})\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2$$

où c_1 est égal, comme la courbure est constante, à $\frac{1}{\varepsilon} \times \dim \mathcal{E}_{p,q} = \frac{|p-q\theta|}{p/q - \theta} = \pm q \in \mathbb{Z}$. Cette propriété d'intégralité est due, comme dans le cas du calcul différentiel ordinaire, au théorème de l'indice. En effet pour la structure différentielle étudiée ici sur A_θ l'opérateur $(1+\Delta)^{-1} = (1-\delta_1^2-\delta_2^2)^{-1}$ de A_θ dans A_θ est compact au sens usuel, on a l'analogue du calcul pseudo-différentiel, un opérateur différentiel elliptique étant une expression $D = \sum_{|j|\leq n} a_j \delta_1^{j_1}\delta_2^{j_2}$ (1) telle que $\sigma(\xi) = i^n \sum_{|j|=n} a_j \xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}$ soit un élément inversible de A_θ, $\forall(\xi_1,\xi_2) \neq 0$, et l'analogue du théorème de l'indice invoque, comme dans le cas classique, le morphisme c_1 de $K_o(A_\theta)$ dans $\mathbb{R}$. [8].

On en déduit (cf. [8]) le calcul de l'indice pour des opérateurs sur $\mathbb{R}$ de la forme $\Sigma A_j \nabla_1^{j_1} \nabla_2^{j_2}$ où $\nabla_1 f = f'$, $(\nabla_2 f((s) = sf(s)$ et les A_j sont des opérateurs de la forme :

$$(Af)(s) = \Sigma\, \varphi_n(s) f(s-n)$$

avec φ_n de classe C^∞ périodique de période $\theta' \notin \mathbb{Q}$.

Ici aussi on est encore loin d'avoir, dans le cas général, l'analogue de la théorie décrite dans le cas du feuilletage de Kronecker. Nous renvoyons à l'appendice 4 pour la signification des facteurs de type III dans ce problème.

(1) où $a_j = a_{j_1 j_2} \in A_\theta^\infty \quad \forall j_1, j_2 \in \mathbb{N}$.

Appendice 1

L'algèbre stellaire d'un feuilletage

Soit G le quotient du groupoïde fondamental de la variété feuille Y par la relation d'équivalence "source γ = source γ' , but γ = but γ' et l'holonomie de $\gamma^{1-1} \circ \gamma$ est triviale". Le groupoïde G a une structure naturelle de variété de classe C^∞ , avec $\dim G = \dim X + \dim Y$. L'application $\psi = \psi(\gamma) = (\text{but } \gamma , \text{source } \gamma)$ de G dans $X \times X$ est une immersion qui a pour image la relation $R \subset X \times X$ (cf. Winkelnkemper [26]). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, le fibré des densités d'ordre α sur la variété feuille Y est la restriction à Y d'un fibré Ω_X^α de classe C^∞ sur X , posons $\Omega_G^\alpha = \psi^*(\Omega_X^\alpha \otimes \Omega_X^\alpha)$.

L'espace $C_c^\infty(\Omega_G^{1/2})$ (1) des sections de classe C^∞ à support compact du fibré $\Omega_G^{1/2}$ est une algèbre involutive avec :

$$(k_1 * k_2)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} k_1(\gamma_1) k_2(\gamma_2) \qquad k^*(\gamma) = \overline{k(\gamma^{-1})} \ .$$

Pour tout $x \in X$, l'application but, de $G_x = \{\gamma , \text{source } \gamma = x\}$ dans Y est le revêtement d'holonomie de la feuille de x et l'égalité suivante définit une représentation π_x de l'algèbre involutive ci-dessus dans $L^2(G_x)$ (2).

$$(\pi_x(k)\xi)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} k(\gamma_1)\xi(\gamma_2) \qquad \forall \gamma \in G_x \ .$$

Pour $x \sim y(R)$, les représentations π_x et π_y sont équivalentes. <u>L'algèbre stellaire</u> $C^*(X,Y)$ <u>est par définition la complétion de l'algèbre involutive</u> $C_c^\infty(\Omega_G^{1/2})$ <u>pour la norme</u> $\|k\| = \sup_X \|\pi_x(k)\|$.

Soit T une sous-variété compacte de classe C^∞ de X , de dimension $\dim T = \operatorname{codim} Y$, transverse à Y . Soient $G^T = \{\gamma \in G , \text{but } \gamma \in T\}$ et $\Omega_T^{1/2}$ le fibré sur G^T induit par $\Omega_X^{1/2}$ et l'application source, l'égalité suivante fait de $C_c^\infty(\Omega_T^{1/2})$ un module à droite sur

$$C_c^\infty(\Omega_G^{1/2}) \ : \ (\rho * k)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} \rho(\gamma_1) k(\gamma_2) \qquad \forall \gamma \in G^T \ .$$

On montre que ce module est projectif de type fini, il définit donc (par changement de l'anneau de base cf. [16]) un module projectif de type fini sur $C^*(X,Y)$.

(1) Nous supposons pour simplifier G séparée.

(2) Espace des densités d'ordre $\frac{1}{2}$ de carré sommable.

Appendice 2

Le courant de Ruelle et de Sullivan

Soient (X,Y) une variété feuilletée[1], $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ un recouvrement ouvert de X avec pour chaque i une submersion $p_i : U_i \longrightarrow S_i$ définissant le feuilletage induit. Une mesure transverse Λ pour (X,Y) est alors donnée par une mesure de Radon Λ_{S_i} sur chaque S_i, $i = 1,\dots,n$, invariante par le pseudo-groupe d'holonomie (pseudo-groupe agissant sur la réunion disjointe des S_i, $i = 1,\dots,n$). Soient $\rho \in C^\infty(\Omega_X)$, $\rho_i \in C^\infty(\Omega_X)$, Support $\rho_i \subset U_i$, $\Sigma\, \rho_i = \rho$, on pose $C(\rho) = \Sigma\, C(\rho_i)$, $C(\rho_i) = \int_{S_i} \left(\int_{p_i^{-1}\{s\}} \rho_{i/Y}\right) d\Lambda_{S_i}(s)$, où $\rho_{i/Y}$ est la densité d'ordre 1 sur Y définie par ρ_i. Supposons Y orientée, toute forme différentielle ω de classe C^∞ de degré $p = \dim Y$ définit, par restriction à Y, une densité $\omega/_Y \in C^\infty(\Omega_X)$ et l'égalité $C(\omega) = C(\omega/_Y)$ définit le <u>courant de Ruelle et Sullivan</u>. Il est fermé, de dimension p, et sa donnée équivaut à celle de Λ. (cf. [21], [25]).

Avec les notations de l'appendice 1, on a, pour $k \in C_c^\infty(\Omega_G^{1/2})$ l'égalité :

$\mathrm{Trace}_\Lambda(k) = C(k/_X)$ où $k/_X$ est la densité $x \longrightarrow k(x,x) \in \Omega_X^{1/2} \otimes \Omega_X^{1/2} = \Omega_X$.

(1) avec X compact pour simplifier.

Appendice 3

Intégration sur les espaces singuliers

La donnée de départ en théorie de l'intégration (cf. Rudin [22]) est celle d'un espace mesurable (S,B) , où B est une tribue de parties de S ; une mesure positive Λ étant une application dénombrablement additive Λ de l'espace des fonctions positives B-mesurables dans $[0,+\infty]$. Bien que la théorie soit développée dans cette généralité on l'applique surtout aux espaces mesurés réguliers, réunions d'un ensemble dénombrable et d'un espace de Lebesgue(1). Cette classe d'espaces est cependant instable par l'opération d'image d'une mesure par une application $\varphi : S \longrightarrow S'$, et elle ne contient pas, par exemple, l'espace Ω des géodésiques d'une surface de Riemann V de genre > 1 , ou l'espace des feuilles du feuilletage de Kronecker. Ces espaces sont des espaces mesurables singuliers, l'ergodicité du flot géodésique montre que toute fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est presque partout égale à une constante, et donc que pour étudier Ω la théorie usuelle de l'intégration est inefficace, les espaces L^p , par exemple, étant réduits aux scalaires. Bien entendu on peut ici se raccrocher à l'espace mesuré usuel S^*V des vecteurs tangents de longueur 1 sur V et dire que, comme Ω est l'espace des orbites du flot géodésique, l'étude de Ω est celle de ce flot. Mais cette désingularisation $\Omega' = S^*V/_{\mathbb{R}}$ de Ω (2) n'a rien de canonique, on peut par exemple, lui préférer la désingularisation $\Omega = (S^1 \times S^1)/_{\Gamma}$ où Γ est le groupe fondamental de V agissant sur le bord $S^1 = \partial\widetilde{V}$ du revêtement universel $\widetilde{V}$ de V identifié au disque de Poincaré ; au couple $x,y \in S^1$ on associe l'image dans V de la géodésique (x,y) de $\widetilde{V}$. On cherche donc à avoir une théorie de l'intégration <u>intrinsèque à</u> Ω , indépendante d'un choix auxiliaire de désingularisation, avec une notion de mesure Λ telle que :

1) Si $\Omega = X/_G$ où G est un groupe localement compact unimodulaire, la donnée de Λ sur Ω soit équivalente à celle d'une mesure G-invariante sur l'espace X .

2) Si Ω est l'espace des feuilles d'un feuilletage (X,Y) la donnée de Λ sur Ω soit équivalente à celle d'une mesure transverse (invariante par holonomie) pour le feuilletage.

3) Si Ω est le quotient $X/_R$ où R est une relation d'équivalence à orbites dénombrables, la donnée de Λ sur Ω soit équivalente à celle d'une mesure μ sur X invariante par le groupe plein $[R]$ (groupe des transformations bimesurables φ de X telles que Graphe $\varphi \subset R$) (cf. [10], [12], [13]).

Or la seule notion que nous aurons à modifier dans la théorie usuelle pour

---

(1) i.e. isomorphe à l'intervalle $[0,\alpha]$, $\alpha \in [0,+\infty]$, muni de le mesure de Lebesgue.

(2) On appelle désingularisation la donnée d'un espace régulier X et sur X d'une relation d'équivalence (de graphe mesurable) dont Ω est l'espace des classes d'équivalence.

obtenir une théorie entièrement satisfaisante, c'est la notion de variable aléatoire sur l'espace Ω .

Discutons d'abord la notion usuelle de variable aléatoire à valeurs entières, i.e. $x \longmapsto n(x)$ est une application mesurable de S dans $\{0,1,2,\ldots,+\infty\}$. Un entier $n \in \{0,1,\ldots,\infty\}$ est un nombre cardinal, de sorte que tout ensemble dénombrable Y définit un entier $\mathrm{Card}\, Y \in \{0,1,\ldots,\infty\}$ et que Y et Y' définissent le même entier ssi il existe une bijection de Y sur Y' . Considérons une variable aléatoire à valeurs entières $x \longmapsto n(x)$ comme destinée à mesurer la cardinalité $n(x) = \mathrm{Card}\, Y_x$ d'un ensemble aléatoire Y_x (dénombrable). L'axiome du choix montre que deux familles $(Y_x)_{x \in S}$, $(Y'_x)_{x \in S}$ définissent la même fonction n ssi il existe une bijection φ de $Y = \bigcup_{x \in S} Y_x$ sur $Y' = \bigcup_{x \in S} Y'_x$ telle que $p' \circ \varphi = p$ où p (resp. p') désigne la projection naturelle de Y (resp. Y') sur S . Mais, et c'est là le point essentiel, on applique ici l'axiome du choix avec, en général, un ensemble non dénombrable de choix à effectuer, obtenant ainsi, en général, une application φ non mesurable.

Pour être plus précis prenons pour S l'espace des géodésiques ℓ du tore plat $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$, soient C un arc de courbe tracé sur $\mathbb{T}^2$, $n(\ell) = \mathrm{Card}(Y_\ell)$ où $Y_\ell = \ell \cap C$ et munissons $Y = \bigcup_{\ell \in S} Y_\ell$ de la structure mesurable évidente[(1)]. Alors, si C' est un arc de courbe de longueur différente de celle de C il n'existe aucune bijection mesurable φ de Y sur Y' compatible avec les projections, bien que $n(\ell) = n'(\ell) = +\infty \quad \forall \ell \in S$.

Ainsi l'utilisation de l'axiome du choix, en faisant violence à la mesurabilité, identifie abusivement les variables aléatoires $\mathrm{Card}(Y \cap \ell)$ et $\mathrm{Card}(Y' \cap \ell)$, variables que la théorie de l'intégration devrait tenir pour distinctes. Définissons donc une variable aléatoire F à valeurs entières sur l'espace singulier S par la donnée d'un espace mesurable : Sous-graphe (F) et d'une application p : Sous-graphe$(F) \longmapsto S$, avec $F(s) = p^{-1}(s)$ dénombrable $\forall s \in S$ (pour définir la mesurabilité de F on utilise une désingularisation $S = X/_R$ en écrivant que les structures mesurables de Sous-graphe(F) et X sont compatibles). On définit de manière évidente la somme $\sum_1^\infty F_n$ de variables aléatoires à valeurs entières. Une mesure Λ sur l'espace singulier S est la donnée pour toute variable aléatoire mesurable F à valeurs entières d'un scalaire $\Lambda(F) \in [0,+\infty]$ avec :

a) Si F est équivalente à F' [(2)] on a $\Lambda(F) = \Lambda(F')$

---

(1) En identifiant Y avec $C \times S^1$, en associant à $(x,\alpha) \in C \times S^1$ le couple $(\ell,x) \in Y$ formé de la géodésique ℓ passant par x et faisant l'angle α avec l'un des axes, et du point $x \in C \cap \ell$.

(2) i.e. si il existe une bijection mesurable φ : Sous-graphe $F \longrightarrow$ Sous-graphe F' compatible avec les projections.

b) $\Lambda(\sum_1^{\infty} F_n) = \sum_1^{\infty} \Lambda(F_n)$.

On démontre alors que Λ permet d'intégrer les variables aléatoires réelles, où, pour définir une telle variable on traite un nombre réel α comme la mesure d'un espace de Lebesgue(1) de même que l'on traitait ci-dessus un entier comme la cardinalité d'un ensemble dénombrable. La théorie ainsi construite vérifie les conditions 1), 2), 3) ci-dessus. Elle donne un sens à une intégrale comme $\int \mathrm{Trace}\, \pi_f(T) d\Lambda(f)$ en considérant $\mathrm{Trace}(\pi_f(T))$ comme la variable aléatoire réelle, sur l'espace singulier des feuilles du feuilletage qui à f associe la masse totale $\sum_{\xi \in B_f} < \pi_f(T), \xi, \xi >$, où B_f est une base orthonormale de $L^2(\tilde{f})$ (2).

Bien entendu, l'intégrale $\int F d\Lambda$ d'une variable aléatoire peut être finie $\neq 0$ même si la valeur usuelle de $F(s)$ est $+\infty$ pour tout $s \in S$, par exemple dans le cas discuté ci-dessus de l'espace des géodésiques du tore, il existe une mesure Λ telle que $\int \mathrm{Card}(\ell \cap C) d\Lambda(\ell) = \text{longueur } C$ pour tout arc de courbe C .

La notion d'espace mesuré singulier ainsi obtenue formalise les idées de H. Dye [10] sur l'équivalence faible d'actions de groupes dénombrables Γ sur un espace de Lebesgue (X,μ) (3) et de G. Mackey [14], [15] sur les groupes virtuels. Comme H. Dye a montré que l'algèbre de von Neumann produit croisé de $L^{\infty}(X,\mu)$ par Γ (4) ne change pas quand on remplace l'action par une action faiblement équivalente, il n'est guère surprenant que la contrepartie algébrique d'un espace mesuré singulier soit une algèbre de von Neumann. En particulier si Λ est une mesure transverse pour le feuilletage (X,Y) l'algèbre de von Neumann correspondant à l'espace mesuré singulier des feuilles (cf. propriété 2) ci-dessus) est la même que celle obtenue à partir de l'algèbre stellaire $C^*(X,Y)$ et de la trace : Trace_{Λ} . Les algèbres de von Neumann construites à partir d'espaces mesurés singuliers (S,Λ) sont toutes de type II, le type I correspondant aux espaces mesurés usuels.

---

(1) On sait que deux espaces de Lebesgue sont isomorphes ssi ils ont la même masse totale.

(2) Et où B_f dépend mesurablement de f .

(3) On dit que l'action de Γ sur (X,μ) est faiblement équivalente à celle de Γ' sur (X',μ') ssi il existe une bijection bimesurable φ de X sur X' transformant μ en μ' et toute orbite de Γ en une orbite de Γ' .

(4) En supposant que Γ agit presque librement.

Appendice 4

Rôle du type III

La théorie usuelle de l'intégration est très simplifiée du fait que tous les fibrés sont mesurablement triviaux, par exemple si V est une variété de classe C^∞, ce n'est pas pour les fonctions que la notion d'intégrale est naturelle mais bien pour les densités, i.e. les sections d'un fibré Ω_V ; de même pour la théorie de Choquet de la représentation intégrale dans les cônes convexes il est naturel d'intégrer non des fonctions sur l'espace X des génératrices extremales, mais des sections du fibré Ω, la fibre Ω_g au dessus de la génératrice g étant l'espace (de dimension 1) des formes linéaires sur g. Bien entendu cela n'a guère d'importance dans ces deux cas, vu que ces fibrés Ω_V et Ω sont triviaux. Il n'en va pas de même pour les espaces singuliers, et la théorie générale de l'intégration sur les espaces singuliers consiste à donner 1) un fibré principal Ω^+ sur S de groupe structural $\mathbb{R}_+^*$ (1), 2) une intégrale $F \longrightarrow \Lambda(F)$ pour les sections généralisées de Ω^+. (cf. [6]).

Dans les conditions 1), 2), 3) ci-dessus, on remplace mesure invariante par mesure quasi-invariante et la théorie de H. Dye par celle de W. Krieger. L'exemple des feuilletages montre clairement la nécessité d'étendre ainsi la théorie de l'intégration sur les espaces singuliers.

La structure différentielle dans le sens transverse détermine en effet un fibré Ω sur l'espace S des feuilles du feuilletage (X,Y) de la manière suivante(2). Le long de chaque feuille f le fibré transverse $T(X)/_{T(Y)}$ a une connexion plate canonique de sorte que l'espace $T_f(S)$ des sections constantes de ce fibré le long de f joue le rôle d'espace tangent à S en f. Ici $\dim T_f(S) = \operatorname{codim} Y = q$; soit alors Ω_f l'espace des applications ρ de $\Lambda^q T_f(S)$ dans $\mathbb{R}$ avec $\rho(\lambda v) = |\lambda| \rho(v)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \Lambda^q$. Clairement Ω est un fibré sur S qui joue le rôle du fibré des densités d'ordre 1. Par exemple si Γ est un sous-groupe discret cocompact de $SL(2,\mathbb{R})$, $X = {}_\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$ et Y est le feuilletage provenant de l'action (à droite) du sous-groupe des matrices triangulaires inférieures, le fibré Ω est non trivial, et même son groupe structural ne peut être réduit (mesurablement) à aucun sous-groupe fermé $\not\subset \mathbb{R}_+^*$. C'est le "ratio set" de W. Krieger (cf. [13]) qui détermine la possibilité de réduire le groupe structural, et le travail de R. Bowen [5] le calcule pour les feuilletages d'Anosov, dont l'exemple

---

(1) Cela revient, si $S = X/_R$ est une désingularisation de S à donner une application $(y,x) \longrightarrow \delta(y,x)$ mesurable de la relation d'équivalence $R \subset X \times X$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\delta(z,y)\delta(y,x) = \delta(z,x)$ $\forall x \sim y \sim z$.

(2) On suppose que l'ensemble des feuilles ayant un groupe d'holonomie non trivial a une réunion négligeable dans X.

ci-dessus est le cas le plus simple. Mais revenons au rôle de l'intégration des sections généralisées de Ω . De même que pour une variété V de classe C^∞ , la classe de la mesure de Lebesgue détermine de manière unique l'algèbre de von Neumann $L^\infty(V)$ des classes, modulo l'égalité presque partout, de fonctions mesurables bornées, on a :

DÉFINITION 9.- Soit (X,Y) un feuilletage, comme ci-dessus; on appelle :

a) Opérateur aléatoire : la donnée d'une famille mesurable bornée $(T_f)_{f\in S}$ où T_f agit dans l'espace hilbertien $L^2(f)$.

b) Densité opératorielle : la donnée d'une famille mesurable $(H_{f,v})$ où $f \in S$, $v \in \Lambda^q T_f(S)$ d'opérateurs autoadjoints positifs[1] dans $L^2(f)$ avec $H_{f,\lambda v} = |\lambda| H_{f,v}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $(T_1 + T_2)_f = T_{1f} + T_{2f}$, $(T_1 T_2)_f = T_{1f} T_{2f}$, $T_f^* = (T_f)^*$ et $\|T\|_\infty = \text{Ess Sup} \|T_f\|$ (où on néglige tout ensemble de feuilles dont la réunion est Lebesgue négligeable dans X). Pour toute densité orératorielle H , l'expression $\text{Trace}(H)$ définit une section généralisée du fibré Ω et a donc une intégrale canonique $\int \text{Trace}(H) \in [0,+\infty]$. On a alors :

THÉORÈME 10.- a) L'algèbre des classes (modulo l'égalité presque partout) d'opérateurs aléatoires est une algèbre de von Neumann.

b) Pour toute densité opératorielle H , l'égalité $\varphi_H(T) = \int \text{Trace}(HT)$ définit un poids normal semi-fini φ_H sur l'algèbre de von Neumann a), et l'on obtient ainsi tous les poids sur cette algèbre.

c) Pour H et φ_H comme dans b), le groupe d'automorphismes modulaires de φ_H est donné par l'égalité :

$$(\sigma_t^{\varphi_H}(T))_f = H_v^{it} T_f H_v^{-it} \qquad \forall v \in \Lambda^q T_f(S) \ , \quad v \neq 0 \ .$$

Ainsi, bien que l'algèbre de von Neumann associée au feuilletage ne possède pas de trace (elle est de type III dans l'exemple de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$ décrit ci-dessus[2]), l'intégration $H \longmapsto \int \text{Trace}\, H$ des densités opératorielles remplace une trace, et satisfait par exemple $\int \text{Trace}(UHU^{-1}) = \int \text{Trace}(H)$ pour tout opérateur aléatoire unitaire U . Il reste à élaborer la théorie qui, par exemple dans le cas de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$ ci-dessus, remplacera l'utilisation de la structure C^∞ dans le sens transverse dans le cas du feuilletage de Kronecker.

(1) En général non bornés.

(2) On obtient dans ce cas là le facteur d'Araki Woods de type III_1 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. ATIYAH, I. SINGER - The index of elliptic operators IV, Annals of Math., 93(1971).

[2] M. F. ATIYAH - Elliptic operators, discrete groups, and von Neumann algebras, Astérisque, 32-33(1976), 43-72.

[3] M. F. ATIYAH, W. SCHMID - A geometric construction of the discrete series for semi simple Lie groups, Invent. Math., 42(1977), 1-62.

[4] B. BLACKADAR - A simple unital projectionless C*-algebra, preprint, University of Nevada, Reno.

[5] R. BOWEN - Anosov foliations are hyperfinite, Ann. of Math., 106(1977), 549-565.

[6] A. CONNES - Sur la théorie non commutative de l'intégration, Springer, Lecture notes in Math., 725(1979), 19-143.

[7] A. CONNES - An analogue of the Thom isomorphism for cross products of a C*-algebra by an action of $\mathbb{R}$, preprint.

[8] A. CONNES - C*-algebres et géométrie différentielle, preprint.

[9] J. CUNTZ - K-theory for certain C*-algebras, preprint.

[10] H. DYE - On groups of measure preserving transformations II (Amer. J. of Math., t. 85, p. 551-576).

[11] A. FATHI, M. HERMAN - Existence de difféomorphismes minimaux, preprint, Ecole Polytechnique, 1976.

[12] J. FELDMAN, C. MOORE - Ergodic equivalence relations, von Neumann algebras and cohomology, preprint.

[13] W. KRIEGER - On the Araki-Woods asymptotic ratio set and non singular transformations, Lecture notes, N° 160(1970), 158-177.

[14] G. MACKEY - Ergodic theory, group theory and differential geometry, Proc. Nat. Acad. Sciences U.S.A. (1963), 1184-1191.

[15] G. MACKEY - Ergodic theory and virtual groups, Math. Ann., 166(1966), 187-207.

[16] J. MILNOR - Introduction to algebraic K-theory, Annals of Math. Studies, N° 72, Princeton.

[17] J. MILNOR, J. STASHEFF - Characteristic classes, Ann. of Math. Studies, N° 76, Princeton.

[18] H. MOSCOVICI, A. CONNES - The L^2 index theorem for homogeneous spaces, Bull. A.M.S., Vol. 1 N° 4 (1979).

[19] M. PIMSNER, D. VOICULESCU - Exact sequence for K-groups and Ext groups of certain cross product C*-algebras, preprint.

[20] M. RIEFFEL - Irrational ratation C*-algebras, (Short communications I.C.M. 1978).

[21] D. RUELLE, D. SULLIVAN - Currents, flows and diffeomorphisms, Topology, 14(1975), 319-327.

[22] W. RUDIN - Real and Complex Analysis, Mc Graw Hill Series in Math.

[23] J. L. SAUVAGEOT - Idéaux primitifs induits dans les produits croisés, J. Funct. Analysis.

[24] I. SINGER - Some remarks on operator theory and index theory, Lecture notes in Math. Vol. 575(1977).

[25] D. SULLIVAN - Cycles and the dynamical study of foliated manifolds, Inv. Math., 36(1976), 225-255.

[26] H. E. WINKELNKEMPER - The graph of a foliation, preprint.

Alain CONNES

I.H.E.S.
35 route de Chartres
91440 BURES-SUR-YVETTE