

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

ALAIN CONNES

Un théorème de décomposition d'applications mesurables

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 10, n° 1 (1970-1971), exp. n° 12, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SC_1970-1971__10_1_A8_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION D'APPLICATIONS MESURABLES

par Alain CONNES

Introduction. - L'origine de cet exposé est le théorème suivant, dû à KATETOV :

"Soient φ une application d'un ensemble E dans lui-même, \mathcal{U} un ultrafiltre sur E tel que $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$; il existe alors $F \in \mathcal{U}$, $F \subset E$, $\varphi(x) = x$, $\forall x \in F$ ".

Nous démontrons une généralisation de ce théorème dans laquelle X est mesurable, et \mathcal{U} est un élément du spectre de l'algèbre $L^\infty(X)$ (cf. Terminologie). Signalons les points suivants :

La principale difficulté est dans la non-injectivité de l'application φ . Alors que, dans le cas discret (étudié par KATETOV), l'on peut se ramener à l'hypothèse φ injective, en construisant un diagramme commutatif où φ' est injective.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ E' & \xrightarrow{\varphi'} & E' \end{array}$$

Par contre, dans le cas non discret, il existe un espace X et une application φ tels que tout diagramme ci-dessus, où φ' est injective, soit trivial.

Comme application du théorème généralisé, nous donnons une condition nécessaire pour qu'une application commute avec un relèvement de L^∞ (cf. corollaire 2). En particulier, signalons la conséquence suivante : Soit ρ un relèvement de $L^\infty(\mathbb{R})$ qui commute avec les translations ; alors toute application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui commute avec ρ est une translation. Ce résultat utilise, de manière essentielle, la connexité de \mathbb{R} .

Nous avons également étendu le théorème de décomposition, écrit sous la forme $\exists X_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\varphi_{X_0} = \text{identité}$, $\varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset$, $\cup X_i = X$, au cas d'un espace topologique polonais et d'une application continue ouverte, les X_i sont ouverts, et $\overline{\cup X_i} = X$. Nous citons ce résultat sans démonstration, n'en ayant pas obtenu d'application.

Terminologie. - Dans la suite, X, \mathcal{M}, μ désigne un espace mesurable, muni d'une mesure positive.

$L^\infty(X)$ désigne l'algèbre complexe des classes de fonctions mesurables essentiellement bornées.

Un élément \mathcal{U} du spectre S de cette algèbre est caractérisé par la sous-famille filtrante de \mathfrak{M} , des ensembles E tels que

Image par \mathcal{U} de la fonction caractéristique de E égale 1 .

Toute famille filtrante d'ensembles mesurables, non négligeables, est contenue dans une telle famille maximale, qui est un élément de S . La propriété de maximalité, vérifiée par les familles $\mathcal{U} \in S$, s'écrit

$$A \in \mathfrak{M} \implies A \text{ ou } A^c \in \mathcal{U} .$$

Soit φ une application mesurable de X dans X , telle que

$$\mu(A) = 0 \implies \mu(\varphi^{-1}(A)) = 0 .$$

Alors, pour tout $\mathcal{U} \in S$, la famille des $A \in \mathfrak{M}$ tels que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{U}$ est une famille du type \mathcal{U} , donc un élément $\varphi(\mathcal{U}) \in S$.

X est dit strictement localisable, quand il est somme d'espaces de mesure finie non nulle. L'algèbre des classes d'ensembles mesurables est alors une algèbre de Boole complète; nous notons \bigvee et \bigwedge les lois qui correspondent à l'intersection et à la réunion.

Une application mesurable φ de X dans X est dite normale, quand, pour toute famille filtrante A_α , l'on a

$$\varphi^{-1}(\bigwedge A_\alpha) = \bigwedge \varphi^{-1}(A_\alpha) .$$

Notre but est de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME 1. - Soient X, μ un espace strictement localisable, et φ une application mesurable normale de X dans X .

1° Si $\mathcal{U} \in S$ et $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, il existe $X_0 \in \mathcal{U}$ tel que $\varphi|_{X_0} = \text{identité}$ (i. e. $\forall B \subset X_0, \varphi^{-1}(B) \cap X_0 = B$ p. s.).

2° Il existe quatre sous-ensembles mesurables $X_i, i = 0, 1, 2, 3$, tels que $\varphi|_{X_0} = \text{identité}$, et $\varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset, i = 1, 2, 3$, et $\bigcup_{i=0}^3 X_i = X$ p. s.

3° Il existe deux sous-ensembles mesurables X_0 et E , tels que $\varphi|_{X_0} = \text{identité}$, $\varphi(E) \cap E = \emptyset, \forall x, \exists n, \varphi^n(x) \in X_0$ ou $\varphi^n(x) \in E$.

COROLLAIRE 2.

(a) Soient ρ un relèvement de $L^\infty(X, \mu)$, et φ une application mesurable de X dans X qui commute avec ρ ; alors, si $F = \{x; \varphi(x) = x\}$, l'on a $\rho(F) = F$.

(b) Soient G un groupe compact connexe (ou localement compact, connexe et localement connexe), et ρ un relèvement de $L^\infty(dm)$, où dm est la mesure de Haar à gauche, et ρ commute avec les translations à gauche. Toute application continue de G dans G qui commute avec ρ est une translation à gauche.

Remarque pour la démonstration du théorème 1. - Nous allons nous limiter, pour la démonstration, au cas $X_0 = \emptyset$ p. s. Cela est possible, car, d'une part X_0 est déterminé (modulo les négligeables) comme étant le plus grand mesurable A tel que $\varphi/A = \text{identité}$, d'autre part, si l'on enlève à X l'ensemble des x tels que $\varphi^n(x) \in X_0$ au bout de $n \geq n_0$, l'on obtient un ensemble invariant par φ avec $X_0 = \emptyset$. Le lemme ci-dessous précise les relations entre les propriétés 1°, 2°, 3° de l'énoncé.

LEMME 3. - Soit φ une application mesurable non singulière de X , μ dans lui-même ; les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- (A) Pour tout $u \in S$, $\varphi(u) \neq u$;
- (B) Il existe un entier k , et k sous-ensembles mesurables X_i , tels que $\varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset$ et $\cup X_i = X$ p. s. ;
- (C) Il existe un sous-ensemble mesurable E , tel que $\varphi(E) \cap E = \emptyset$, et $\forall x$, $\exists n$, $\varphi^n(x) \in E$ p. s. ;
- (B₂) Il existe trois sous-ensembles mesurables X_i vérifiant (B).

Démonstration.

(A) \implies (B). Supposons (B) fautive, alors la famille \mathfrak{F} des ensembles mesurables de la forme $(\cup_1^k X_i)^c$, où X_i vérifie $\varphi(X_i) \cap X_i = \emptyset$, est une famille filtrante d'ensembles non négligeables.

Soit \mathcal{U} une famille maximale la contenant, montrons que $\varphi(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Si $\varphi(\mathcal{U}) \neq \mathcal{U}$, il existe $A \in \mathcal{U}$, $A \notin \varphi(\mathcal{U})$. Or cela signifie que $B = A \cap \varphi^{-1}(A^c)$ est dans \mathcal{U} , mais, comme $\varphi(B) \cap B = \emptyset$, c'est que $B^c \in \mathfrak{F}$, donc $B^c \in \mathcal{U}$; contradiction.

(B) \implies (C). Supposons que, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe X_i vérifiant (B), soit $Z = (\cup X_i)^c$, alors Z est négligeable, de même $Z' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n}(Z)$.

A chaque $x \notin Z'$ est associée une suite de nombres $1, 2, \dots, k$, définie par $\varphi^n(x) \in X_{a_n}$, $n = 0, 1, \dots$ (on suppose $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$). Soit $E = \{x ; a_0 > a_1 < a_2\}$. Si $x \in E$, $\varphi(x)$ a une suite qui commence par $a_1 < a_2$, donc $\varphi(x) \notin E$. Pour tout $x \notin Z'$, la suite associée a_i vérifie $a_{i+1} \neq a_i$, $\forall i$, donc présente un minimum relatif $a_p > a_{p+1} < a_{p+2}$. Ainsi, $\forall x \notin Z'$, $\exists p$, $\varphi^p(x) \in E$.

(C) \implies (B₃). A E, tel que $E \cap \varphi(E) = \emptyset$, nous associons les ensembles mesurables suivants :

$$E_1 = \{x ; \exists q \text{ impair tel que}$$

$$x \notin E, \varphi(x) \notin E, \dots, \varphi^{q-1}(x) \notin E, \varphi^q(x) \in E\},$$

$$E_2 = \{x ; \exists q \text{ pair non nul tel que}$$

$$x \notin E, \varphi(x) \notin E, \dots, \varphi^{q-1}(x) \notin E, \varphi^q(x) \in E\}.$$

L'on vérifie que $\varphi(E_i) \cap E_i = \emptyset$, et que la réunion des E_i est l'ensemble des x tels qu'il existe p , $\varphi^p(x) \in E$.

(B₃) \implies (A). Si φ vérifie (B₃), et si \mathcal{U} est donné, comme \mathcal{U} est maximal, l'un des X_i , $i = 1, 2, 3$, est dans \mathcal{U} , mettons $X_1 \in \mathcal{U}$. Montrons que $X_1 \notin \varphi(\mathcal{U})$; en effet $X_1 \subset \varphi^{-1}(X_1^c)$, donc $X_1^c \in \varphi(\mathcal{U})$.

Le cas d'une mesure σ -finie. - Soit X, \mathfrak{M}, μ un espace mesurable, muni d'une mesure σ -finie.

PROPOSITION 4. - Soit φ une application mesurable de X dans X , telle que :

$$\mu(\varphi(A)) = 0 \implies \mu(A) = 0,$$

$$\forall A \text{ non négligeable, } \exists B \subset A, \varphi^{-1}(B) \cap A \neq B \text{ p. s.}$$

Alors φ vérifie les propriétés équivalentes du lemme 3.

Démonstration. - Nous démontrons que, dans les conditions de l'énoncé, φ vérifie la propriété (B _{∞}) suivante :

(B _{∞}) Il existe une suite A_i de non-négligeables tels que

$$\varphi(A_i) \cap A_i = \emptyset, \quad \cup A_i = X \text{ p. s. .}$$

Puis un lemme achève la démonstration :

Soit $\{A_\alpha\}$ une famille maximale de mesurables deux à deux disjoints, non négligeables, tels que $\varphi(A_\alpha) \cap A_\alpha = \emptyset$. Comme μ est σ -finie, l'ensemble d'indices est \mathbb{N} , $\alpha \in \mathbb{N}$.

Soit A le complémentaire de $\cup A_i$, montrons que $\mu(A) = 0$. Si $\mu(A) \neq 0$, il existe, par hypothèse, $B \subset A$ tel que

$$\varphi^{-1}(B) \cap A \neq B \text{ p. s. .}$$

Dans les deux cas possibles, la maximalité de la famille $\{A_\alpha\}$ est mise en défaut :

(a) $\exists B' \neq \emptyset$ p. s., $B' \subset \varphi^{-1}(B) \cap A$, $B' \cap B = \emptyset$, alors $\varphi(B') \cap B' = \emptyset$ et $B' \subset A$;

(b) $\exists B'' \neq \emptyset$ p. s., $B'' \subset B$, $B'' \cap (\varphi^{-1}(B) \cap A) = \emptyset$, alors $\varphi(B'') \cap B'' = \emptyset$.

LEMME 5. - $(B_\infty) \implies (B_6)$.

Nous nous donnons une suite A_i d'ensembles mesurables tels que $\bigcup A_i = X$ p. s., $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et $\varphi(A_i) \cap A_i = \emptyset$. Nous privons X de l'ensemble $Z = \bigcup_0^\infty \varphi^{-k}((\bigcup A_i)^c)$, qui est de mesure nulle, car φ est non singulière. A tout élément x de $X \setminus Z$ est associée une suite d'entiers (a_n) , $n = 0, 1, \dots$, déterminée par la condition

$$\varphi^n(x) \in X_{a_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Nous écrivons $X \setminus Z = Y \cup Y^c$, où Y est l'ensemble des x dont la suite associée est constamment croissante, et nous construisons Y_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, avec $\bigcup_1^3 Y_i = Y$, $\bigcup_4^6 Y_i = Y^c$, et $\varphi(Y_i) \cap Y_i = \emptyset$.

(a) $i = 1, 2, 3$. Soit $Y_{n,k} = \{x; x \in Y, a_k \geq n\}$, où a_k est le k -ième terme de la suite associée à x . Il est clair que $\bigcap_n Y_{n,k} = \emptyset$, $1 \leq n < \infty$, ceci $\forall k$; comme ces ensembles sont une suite décroissante d'ensembles mesurables, l'on peut trouver une suite d'entiers n_k , avec $n_0 = 1$, telle que

$$N = \bigcap_1^\infty Y_{n_k, k} \text{ négligeable} \quad \text{et} \quad n_{k+1} > n_k, \quad \forall k.$$

Soit alors $E = \{x; \exists k, n_k \leq a_0 < a_1 < n_{k+1} \leq a_2\}$, où a_i est la suite associée à x , et où $x \in Y$. L'on vérifie que E est mesurable, et $\varphi(E) \cap E = \emptyset$; montrons que, pour tout $x \notin N$, $x \in Y$, il existe un entier p tel que $\varphi^p(x) \in E$. Comme $x \notin Z$, $\exists k$ tel que $a_k < n_k$; ainsi, comme les segments $[n_0, n_1[$, \dots , $[n_{k-1}, n_k[$ sont au nombre de k , et que leur réunion contient les $k+1$ points $a_0 a_1 \dots a_k$, il existe un segment $[n_r, n_{r+1}[$ qui en contient au moins deux, soit alors a_p l'avant-dernier des a_i dans ce segment :

$$n_r \leq a_p < a_{p+1} < n_{r+1} \leq a_{p+2}.$$

Il est clair que $\varphi^p(x) \in E$. La construction (C) $\implies (B_3)$ du lemme 3 détermine Y_1, Y_2, Y_3 .

(b) $i = 4, 5, 6$. L'ensemble Y^c des x , dont la suite associée n'est pas constamment croissante, n'est pas stable par φ ; mais, si nous construisons E' tel que $\varphi(E') \cap E' = \emptyset$ et, $\forall x \in Y^c$, $\exists p'$, $\varphi^{p'}(x) \in E'$, en utilisant la construction (C) $\implies (B_3)$, nous obtiendrons les ensembles Y_i , $i = 3, 4, 5$. Posons $E' = \{x; a_0 > a_1 < a_2\}$; comme $\varphi(E') \cap E' = \emptyset$, il reste à prouver que, si une suite a_n , telle que $a_{n+1} \neq a_n$, $\forall n$, n'est pas constamment croissante, elle admet un minimum relatif $a_{p'} > a_{p'+1} < a_{p'+2}$, ce qui est clair.

Le cas général. - Soit X, μ un espace strictement localisable, et soit \mathcal{C} une partition de X en ensembles non négligeables de mesure finie, K , tels que $\bigvee_{\mathcal{C}} K = X$, où \bigvee dénote le sup dans l'espace complètement réticulé $L^\infty(X)$, ou dans l'algèbre de Boole complète des mesurables modulo les négligeables.

Deux lemmes simples permettent de démontrer que, si φ est une application mesurable de X dans X , telle que :

- 1° $\varphi^{-1}(\bigwedge A_\alpha) = \bigwedge \varphi^{-1}(A_\alpha)$,
- 2° φ n'est l'identité sur aucun non-négligeable,

elle vérifie (B_3) .

LEMME 6. - Soit K un ensemble de mesure finie ; φ vérifiant le 1°, il existe un ensemble de mesure σ -finie K' , invariant par φ , tel que $K \subset K'$ p. s.

Démonstration. - L'ensemble $\varphi(K)$ n'est, ni nécessairement mesurable, ni de mesure σ -finie ; soit cependant K_1 un ensemble mesurable minimal (modulo les négligeables) tel que $\varphi^{-1}(K_1) \supset K$ p. s. Montrons que K_1 est de mesure σ -finie ; soit \mathcal{C}_1 la sous-famille de \mathcal{C} des K' tels que $K' \cap K_1 \neq \emptyset$ p. s., et supposons \mathcal{C}_1 non dénombrable ; comme $\varphi^{-1}(K') \cap K \neq \emptyset$ p. s., $\forall K' \in \mathcal{C}_1$, l'on met en contradiction $\mu(K) < \infty$. L'hypothèse φ vérifie le 1° est nécessaire pour l'existence de K_1 . Comme $\varphi^{-1}(K_1) \supset K$ p. s., l'on a

$$\forall x \in K, \quad \varphi(x) \in K_1 \quad \text{p. s.}$$

En appliquant la même construction à φ^n , on obtient K_n avec

$$\forall x \in K, \quad \varphi^n(x) \in K_n \quad \text{p. s.}$$

La réunion K'' des K_i , $i = 0, 1, \dots$, est de mesure σ -finie, donc l'ensemble K' des $x \in K''$, tels que $\varphi^n(x) \in K''$, $\forall n \geq 0$, est un ensemble invariant par φ de mesure σ -finie, tel que, comme

$$\forall x \in K, \quad \varphi^n(x) \in K'' \quad \text{p. s.},$$

l'on ait $K' \supset K$ p. s.

En appliquant la proposition 4 à l'application φ , restreinte à l'ensemble de mesure σ -finie K' , l'on construit une famille de sous-ensembles mesurables Q_α (où l'ensemble d'indice est le même que pour $K \in \mathcal{C}$), telle que :

- (a) Q_α est invariant par φ et par φ^{-1} ,
- (b) $\forall \alpha, \exists Q_{\alpha,i}, i = 1, 2, 3, \cup Q_{\alpha,i} = Q_\alpha$ p. s., $\varphi(Q_{\alpha,i}) \cap Q_{\alpha,i} = \emptyset$,
- (c) $\bigvee Q_\alpha = X$.

La seule difficulté est de rendre les ensembles K' invariants par φ^{-1} , sans enlever la condition (b), c'est-à-dire le fait que φ/K' vérifie (B_3) . Or on sait que φ/K' vérifie la propriété (C), et il est clair que φ , restreinte à l'ensemble $\bigcup_0^\infty \varphi^{-k}(K')$, la vérifie aussi, donc vérifie (B_3) . Le lemme suivant achève la démonstration du théorème.

LEMME 7. - Soit Q_α une famille d'ensembles vérifiant les propriétés (a) et (b); alors $\bigvee Q_\alpha$ les vérifie aussi.

L'on vérifie facilement que $\bigvee Q_\alpha$ est invariant par φ et φ^{-1} p. s., car φ^{-1} commute avec \bigvee et \bigwedge .

De plus, si Q vérifie (a), (b), et si Q' vérifie (a), $Q \setminus Q'$ vérifie (a) et (b); cela permet de se restreindre au cas où

$$\alpha \neq \beta \implies Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset \text{ p. s.}$$

Posons alors $Q_1 = \bigvee Q_{\alpha,1}$, $Q_2 = \bigvee Q_{\alpha,2}$, $Q_3 = \bigvee Q_{\alpha,3}$. Il est clair que $\bigcup_{i=1}^3 Q_i = X$ p. s., où $X = \bigvee Q_\alpha$.

Il reste à prouver que $\varphi(Q_i) \cap Q_i = \emptyset$ p. s. Or $\varphi^{-1}(Q_1) = \bigvee \varphi^{-1}(Q_{\alpha,1})$, donc comme, pour α et β quelconques,

$$\varphi^{-1}(Q_{\alpha,1}) \cap Q_{\beta,1} = \emptyset \text{ p. s. ,}$$

l'on a $\varphi^{-1}(Q_1) \cap Q_1 = \emptyset$ p. s. Ainsi, si $Q'_1 = Q_1 \setminus \varphi^{-1}(Q_1)$, l'on voit que $Q'_1 = Q_1$ p. s. et que $\varphi(Q'_1) \cap Q'_1 = \emptyset$.

(Texte reçu le 18 juin 1971)

Alain CONNES
1 avenue Mathilde
95 - SAINT-GRATIEN
