A. CONNES

Indice des sous facteurs, algèbres de Hecke et théorie des noeuds

Séminaire N. Bourbaki, 1984-1985, exp. nº 647, p. 289-308

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__289_0>

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 647 Juin 1985

INDICE DES SOUS FACTEURS, ALGÈBRES DE HECKE ET THÉORIE DES NOEUDS

[D'après Vaughan JONES]

par A. CONNES

INTRODUCTION

V. JONES a commencé par résoudre complètement le problème suivant d'apparence anodine : quel est le sous ensemble Σ de $\mathbb{R}_+$ formé par les valeurs de l'indice $[M:N]$ d'un sous facteur N d'un facteur M de type II_1. Il a montré que

$$\Sigma = \{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N} \; , \; n \geq 3\} \cup [4, +\infty].$$

Dans sa démonstration on voit apparaître de manière naturelle la suite croissante $H_m(q)$, $m \in \mathbb{N}$, des algèbres de Hecke associées aux systèmes de Coxeter des groupes symétriques et à la variable $q \in \mathbb{C}$. Il en a ensuite déduit l'existence de traces remarquables sur $H_\infty(q) = \bigcup_m H_m(q)$. Combinant ces traces avec la description des noeuds dans $\mathbb{R}^3$ à partir des groupes de tresses B_n , due à Artin, Alexander et Markov, il en a déduit un nouvel invariant polynomial pour les noeuds [21]. Cet invariant a ensuite été généralisé par P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millett et A. Ocneanu en un invariant polynomial à deux variables, qui contient également le polynôme d'Alexander comme cas particulier [15].

Dans cet exposé nous suivrons assez fidèlement le chemin parcouru par V. Jones en y rajoutant un résultat remarquable de A. Ocneanu sur la classification des traces positives sur $H_\infty(q)$.

I - *INDICE D'UN SOUS FACTEUR D'UN FACTEUR DE TYPE II_1*

Soient M un facteur de type II_1 et Tr_M l'unique trace sur M telle que $Tr_M(1) = 1$. Soit $L^2(M)$ l'espace de Hilbert complété de l'espace préhilbertien séparé M muni du produit scalaire $< >$; $<x,y> = Tr_M(y^* x) \quad \forall x,y \in M$. Soit λ la représentation régulière gauche de M dans $L^2(M)$,

$$\lambda(x)y = x\, y \qquad \forall x \in M \; , \; y \in M \; .$$

Pour toute représentation normale π de M dans un espace de Hilbert $\mathfrak{h}$ les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Le commutant $\pi(M)'$ de $\pi(M)$ est un facteur de type II_1.

b) π est équivalente à une sous représentation d'une somme finie de copies de λ .

On dit alors que $(\mathfrak{h},\pi)$ est de multiplicité finie. La multiplicité $\dim_M(\mathfrak{h},\pi)$ (ou plus brièvement $\dim_M(\mathfrak{h})$) vérifie les propriétés générales suivantes [23] :

1) $\dim_M(\mathfrak{h},\pi) \in [0, +\infty[$, $\dim_M(L^2(M),\lambda) = 1$;

2) $\dim_M(\mathfrak{h},\pi) = \dim_M(\mathfrak{h}',\pi')$ si et seulement si les représentations π et π' sont équivalentes.

3) $\dim_M(\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}}(\mathfrak{h}_n,\pi_n)) = \sum_1^\infty \dim_M(\mathfrak{h}_n,\pi_n)$ (si la somme directe $\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}}(\mathfrak{h}_n,\pi_n)$ est de multiplicité finie).

4) Soient $e \in \pi(M)'$ un projecteur et π_e la restriction de π à l'espace $e\mathfrak{h}$, on a :

$$\dim_M(e\mathfrak{h}, \pi_e) = \mathrm{Tr}_{\pi(M)'}(e) . \dim_M(\mathfrak{h},\pi)$$

5) $\dim_M(\mathfrak{h},\pi) . \dim_{M'}(\mathfrak{h}) = 1$, où M' est le commutant de $\pi(M)$.

Soit alors $N \subset M$ un sous facteur de type II_1 de M . On dit que N est *d'indice fini* dans M si la restriction à N de la représentation régulière gauche λ de M dans $L^2(M)$ est de multiplicité finie, c'est-à-dire si le commutant $\lambda(N')$ est un facteur de type II_1 .

Définition 1 - L'indice $[M:N]$ de N dans M est la multiplicité $\dim_N(L^2(M),\lambda)$.

Proposition 2 - a) Soit N un sous facteur d'indice fini de M. Pour toute représentation $(\mathfrak{h},\pi)$ de multiplicité finie de M la restriction π_N de π à N est de multiplicité finie et l'on a :

$$\dim_N(\mathfrak{h},\pi_N) = [M:N] . \dim_M(\mathfrak{h},\pi).$$

b) Soient N et M comme dans a) et P un sous facteur d'indice fini de N. Alors P est un sous facteur d'indice fini de M et : $|M:P| = |M:N||N:P|$.

c) Soient $N,M,\mathfrak{h},\pi$ comme dans a), alors le commutant $\pi(M)'$ est un sous facteur d'indice fini de $\pi(N)'$ et l'on a :

$$[\pi(N)' : \pi(M)'] = [M:N] .$$

La propriété a) est immédiate, b) résulte de a), et c) résulte de la propriété 5) de la fonction dimension, $\dim_M$.

Exemples α) Soit Γ un groupe discret et considérons le commutant M_Γ de la représentation régulière droite de Γ dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$. Pour que M_Γ soit un facteur il faut et il suffit que toute classe de conjugaison non triviale de Γ soit de cardinalité infinie. De plus M_Γ est alors un facteur de type II_1. En tant qu'algèbre de von Neumann M_Γ est engendrée par l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma$ du groupe Γ agissant par convolution à gauche dans $\ell^2(\Gamma)$. Pour tout sous groupe $\Gamma_1 \subset \Gamma$ d'indice fini, la sous algèbre de von Neumann N de M_Γ engendrée par $\mathbb{C}\Gamma_1 \subset \mathbb{C}\Gamma$ est un sous facteur de M_Γ , isomorphe à M_{Γ_1} , d'indice fini avec :

$$[M_\Gamma : N] = [\Gamma:\Gamma_1]$$

β) Soient M un facteur de type II_1 et $e \in M$ un projecteur. On notera M_e le facteur $M_e = \{x \in M \; ; \; xe = ex = x\}$. Pour que M_e soit isomorphe à M_{1-e} il faut et il suffit que le nombre réel positif $\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}$, où $\lambda_0 = Tr_M(e)$, appartienne au groupe fondamental de M. ([41]). Soit alors θ un isomorphisme $\theta : M_e \to M_{1-e}$ et posons

$$N = \{x + \theta(x) \; ; \; x \in M_e\}$$

Par construction N est un sous facteur de M et un calcul immédiat de $\dim_N(L^2(M),\lambda)$ montre que

$$[M:N] \quad \lambda_0^{-1} + (1-\lambda_0) \; .$$

Le groupe fondamental du facteur hyperfini R ([ ]) est égal à $\mathbb{R}_+^*$, on obtient donc, grâce à la construction ci-dessus, l'existence pour tout nombre réel $\alpha \geq 4$, d'un sous facteur N de R avec $[R:N] = \alpha$.
Avec les notations de l'introduction on voit en combinant les exemples α) et β) que :

$$\{1,2,3\} \cup [4, +\infty[\subset \Sigma \; .$$

De plus un résultat de Goldman [18] suggérait que $\Sigma \cap [1,2] = \{1,2\}$ et il restait à déterminer $\Sigma \cap [2,4]$, point de départ du travail de V. Jones.

II - *LA CONSTRUCTION DE V. JONES.*

Soient $M, L^2(M)$, Tr_M et λ comme ci-dessus. Considérons l'involution isométrique J de $L^2(M)$ dans $L^2(M)$ telle que $J(x) = x^*$ $\forall x \in M$.
Pour $x \in M$ soit $\lambda'(x)$ l'opérateur dans $L^2(M)$ de multiplication à droite par x, $\lambda'(x)y = yx$ $\forall y \in M$.
On a $J\lambda(x)^*J = \lambda'(x)$ $\forall x \in M$. De plus $\lambda'(M)$ est égal au commutant de $\lambda(M)$ dans $L^2(M)$ ([14]) on a donc :

$$\lambda(M)' = \lambda'(M) = J\lambda(M)J$$

Soient N une sous algèbre de M et e_N l'opérateur dans $L^2(M)$ qui est la projection orthogonale sur l'adhérence de N dans $L^2(M)$. On a l'égalité $Je_NJ = e_N$ par construction, de plus ([47]) on a la :

Proposition 3 - a) La restriction E_N de e_N au sous espace $M \subset L^2(M)$ est une projection de l'algèbre de von Neumann M sur la sous algèbre N.

b) Pour tous $a, b \in N$, et $x \in M$ on a :

$$E_N(a\,x\,b) = a\,E_N(x)\,b$$

c) Pour tout $x \in M^+$ on a $E_N(x) \in N^+$.

On dit que l'application $E_N : M \to N$ est l'espérance conditionnelle normale associée au couple (M,N). L'opérateur e_N est un projecteur et b) montre que :

$$(*) \qquad e_N\lambda(a) = \lambda(a)e_N \qquad \forall a \in N$$

$$(**) \qquad e_N\lambda(x)e_N = \lambda(E_N(x)) \qquad \forall x \in M$$

En particulier on a $e_N \in \lambda(N)'$; en fait :

Proposition 4 - $\lambda(N)'$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\lambda(M)'$ et e_N.

Le théorème du bicommutant de von Neumann montre qu'il suffit de vérifier que $\lambda(M) \cap \{e_N\}' = \lambda(N)$. Or si $x \in M$ et si $\lambda(x)e_N = e_N\lambda(x)$ on a :

$$\lambda(x)1 = (\lambda(x)e_N)1 = (e_N\lambda(x))1 = e_N(x) = \lambda(E_N(x))1$$

d'où $x = E_N(x)$ et $x \in N$.

Posons $M_1 = J\,\lambda(N)'J$. La proposition 4 montre que M_1 est l'algèbre de von Neumann dans $L^2(M)$ engendrée par $\lambda(M)$ et e_N.

Proposition 5 - On suppose que N est un sous facteur d'indice fini de M.

a) M_1 est un facteur de type II_1, $\lambda(M)$ est d'indice fini dans M_1 avec $[M_1 : \lambda(M)] = [M:N]$.

b) $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) = [M:N]^{-1}$

c) Soit E_M l'espérance conditionnelle normale canonique de M_1 sur $\lambda(M)$, alors $E_M(e_N) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\,1$.

d) Le sous espace vectoriel de M_1 engendré par $\lambda(M)$ et $\lambda(M)e_N\lambda(M)$ est une sous algèbre involutive faiblement dense de M_1.

e) L'homomorphisme $x \in N \to e_N\,\lambda(x) \in M_1$ est un isomorphisme de N sur l'algèbre de von Neumann réduite

$$(M_1)_{e_N} = \{z \in M_1 \;;\; e_N z = z e_N = z\}$$

Le d) résulte facilement des égalités (*) et (**) ci-dessus. Pour montrer e) on utilise (*) pour vérifier que l'on a un homomorphisme et d) pour montrer qu'il est surjectif. L'injectivité est automatique car tout facteur de type II_1 est une algèbre simple. L'égalité a) résulte de :

$$[M_1 ; \lambda(M)] = [J\lambda(N)'J : \lambda(M)] = [(N)' : \lambda(M)'] = [M:N]$$

(proposition 2c))

Démontrons l'égalité b) - Comme $Je_NJ = e_N$ on a

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N) = \mathrm{Tr}_{\lambda(N)'}(e_N)$$

La propriété 4 de la multiplicité $\dim_N$ montre que

$$\mathrm{Tr}_{\lambda(N)'}(e_N) = \dim_N(e_N\, L^2(M)) \,.\, \dim_N(L^2(M))^{-1} = [M:N]^{-1} .$$

Démontrons c) - D'après e) et l'unicité de la trace Tr_N sur N on a $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N z) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)\, \mathrm{Tr}_N(z)$ pour tout $z \in N$. Ainsi pour tout $y \in M$ on a :

$$\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N E_N(y)) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N).\mathrm{Tr}_N(E_N(y)) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N).\mathrm{Tr}_M(y) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N).\mathrm{Tr}_{M_1}(y).$$

L'égalité (**) montre donc que pour tout $y \in M$ on a $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N y) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N y e_N) =$ $= \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N E_N(y)) = \mathrm{Tr}_{M_1}(e_N).\mathrm{Tr}_{M_1}(y)$, c'est-à-dire que $\mathrm{Tr}_{M_1}(e_N)1$ est la projection $E_M(e_N)$. ∎

L'idée fondamentale de V. Jones consiste à itérer la construction effectuée ci-dessus du couple $M \subset M_1$ à partir du couple $N \subset M$. On obtient ainsi une suite croissante $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de facteurs de type II_1 et une suite $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de projecteurs, $e_m \in M_m$ dont les propriétés se déduisent facilement de la proposition 5. On notera P le facteur de type II_1 limite inductive de la suite croissante $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et Tr_P la trace normalisée sur P. On a alors [23] :

J_1 : Pour tout m, M_m est d'indice fini dans M_{m+1} avec $[M_{m+1} : M_m] = [M:N]$

J_2 : $e_m \in M_m$, $e_m = e_m^* = e_m^2$.

J_3 : $e_m x = x e_m \quad \forall x \in M_{m-1}$.

J_4 : M_{m+1} est l'algèbre de von Neumann engendrée par M_m et e_{m+1} .

J_5 : Soit E_m l'espérance conditionnelle de M_{m+1} sur M_m on a $E_{m-1}(x)\, e_{m+1} =$ $= e_{m+1}\, x e_{m+1} \quad \forall x \in M_m$.

J_6 : Avec $\tau = [M:N]^{-1}$, on a

$$E_{m-1}(e_m) = \tau ,$$

J_7 : $e_{m+1}\, e_m\, e_{m+1} - \tau e_{m+1} = 0$

J_8 : $e_m\, e_{m+1}\, e_m - \tau e_m = 0$

J_9 : $e_i\, e_j = e_j\, e_i$ si $|i - j| \geqq 2$

J_{10} : La sous algèbre A_m de P engendrée par $e_i,..,e_m$ et 1 est de dimension finie et $E_m(A_{m+1}) \subset A_m$.

J_{11} : L'application $x \to xe_{m+1}$ de A_{m-1} dans l'algèbre réduite $(A_{m+1})_{e_{m+1}} = \{z \in A_{m+1} ; ze_{m+1} = e_{m+1} z = z\}$ est un isomorphisme.

J_{12} : Pour tout $x \in A_m$ on a $Tr_p(xe_{m+1}) = \tau tr_p(x)$.

III - *LE THÉORÈME DE V. JONES*

Théorème 6 – Soit Σ le sous ensemble de $\mathbb{R}^+$ formé par les valeurs de l'indice $[M:N]$ où M et N sont des facteurs de type II_1 , $N \subset M$. Alors

$$\Sigma = \{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} ; n \in \mathbb{N} , n \geq 3\} \cup [4, +\infty[$$

Pour montrer que $\Sigma \cap [1,4] \subset \{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} ; n \in \mathbb{N} , n \geq 3\}$ il faut analyser plus précisément les sous algèbres A_n de P (avec les notations de la section II). Pour tout projecteur $e \in P$ on a $Tr_p \in [0,1]$, de plus si e et f sont des projecteurs et $e \leq f$ on a $Tr_p(e) \leq Tr_p(f)$ avec égalité si et seulement si $e = f$. On note $e \vee f$ (resp $e \wedge f$) le plus petit projecteur de P qui majore e et f (resp. le plus grand qui minore e et f). Les projecteurs $e \vee f$ et $e \wedge f$ appartiennent à l'algèbre de von Neumann engendrée par e et f et on a l'égalité fondamentale [46] :

$$(*) \quad Tr_p(e \vee f) + Tr_p(e \wedge f) = Tr_p(e) + Tr_p(f).$$

Reprenons les notations de la section II et posons

$$q_n = e_1 \dots e_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

On a $q_n \leq q_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = q_n \vee e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $q_m \in A_m$ par construction. De plus, comme A_m est engendrée par 1 et $e_1,..,e_m$, le projecteur q_m est dans le centre de A_m et on a :

$$A_m = \mathbb{C}(1-q_m) + (A_m)_{q_m}$$

On va maintenant calculer par récurrence sur m la valeur de $Tr_p(q_m)$. Le lemme crucial est le suivant :

Lemme 7 : Si $q_m \neq 1$ on a $q_m \wedge e_{m+1} = e_{m+1}\, q_{m-1}$

Dem : Comme q_{m-1} commute avec $e_{m+1}(J_3)$ on a $e_{m+1}\, q_{m-1} \leq q_m \wedge e_{m+1}$. De plus $q_m \wedge e_{m+1} \leq e_{m+1}\, q_m\, e_{m+1} = E_{m-1}(q_m)\, e_{m+1}$. Ainsi en utilisant J_{11} on voit que $q_{m-1} \leq E_{m-1}(q_m)$. Comme $E_{m-1}(q_m) \in A_{m-1} = \mathbb{C}(1-q_{m-1}) + (A_{m-1})_{q_{m-1}}$ on a $E_{m-1}(q_m) = \lambda(1-q_{m-1}) + z$ avec

$$z \in (A_{m-1})_{q_{m-1}} \quad \text{et} \quad q_{m-1} \leq z \leq 1 \qquad \text{(proposition 3c))}$$

d'où $z = q_{m-1}$. La proposition 3c) montre que $0 \leq \lambda \leq 1$ et par hypothèse $Tr_p(q_m) < 1$ d'où $\lambda < 1$. Comme $q_m \wedge e_{m+1}$ est le projecteur spectral de $e_{m+1}\, q_m\, e_{m+1}$ associé à la valeur propre 1, on a $q_m \wedge e_{m+1} = e_{m+1}\, q_{m-1}$ ∎

La propriété J_{12} montre que $Tr_p(e_{m+1}\, q_{m-1}) = \tau\, tr_p(q_{m-1})$ et l'égalité (*) montre donc que, si $q_m \neq 1$, on a :

$$Tr_p(q_{m+1}) + \tau\, Tr_p(q_{m-1}) = Tr_p(q_m) + Tr_p(e_{m+1}) = Tr_p(q_m) + \tau\ .$$

Soit alors $\alpha_m = 1 - Tr_p(q_m)$. On a $\alpha_m \in [0,1]$ $\forall m$ et $\alpha_{m+1} \leq \alpha_m$. De plus $\alpha_m \neq 0$ si et seulement si $q_m \neq 1$. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, déterminée par les conditions :

$$P_0 = 0\ ,\ P_1 = 1, \ldots\ P_{n+1}(\tau) = P_n(\tau) - \tau\, P_{n-1}(\tau)$$

Lemme 8 – a) Soit $n_0 \in \{1,2,\ldots,\ \}$ tel que $\alpha_n > 0$ pour tout $n < n_0$ et $\alpha_n = 0$ pour tout $n \geq n_0$. On a $\alpha_n = P_n(\tau)$ pour tout $n \leq n_0$.

b) Si $\tau > \frac{1}{4}$ on a $n_0 < \infty$, $\tau = (4 \cos^2 \frac{\pi}{n_0})^{-1}$.

Dem : Le a) résulte de la discussion ci-dessus. Vérifions

b)- Soit $\beta \in \mathbb{C}$ avec $\beta^2 = 1 - 4\tau$. On vérifie que (si $\beta \neq 0$) $P_n(\tau) = ((\frac{1+\beta}{2})^n - (\frac{1-\beta}{2})^n)\ .\ \beta^{-1}$. Si $\tau > \frac{1}{4}$ on a $\beta \in i\mathbb{R}$ et $P_n(\tau) = \frac{\sigma^n - \bar{\sigma}^n}{\sigma - \bar{\sigma}}$ où

$\sigma = \frac{1+\beta}{2}$ et on ne peut avoir $P_n(\tau) > 0$ pour tout n , en fait,

$$P_n(\tau) = |\sigma|^{n-1} \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \quad \text{où } \theta = \operatorname{Arg} \sigma \ ;$$

On a donc $n_o < \infty$ et comme $P_{n_o}(\tau) = 0$ on a $\theta = \frac{\pi}{n_o}$, $\sqrt{4\tau-1} = \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{n_o})$
et $4\tau = 1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\pi}{n_o}) = \frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{n_o}}$

Le lemme 8 achève la démonstration de l'inclusion

$$\Sigma \subset \{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \ ; n \in \mathbb{N} \ , n \geq 3\} \cup [4, +\infty]$$

Pour démontrer que Σ contient les valeurs $4\cos^2 \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 3$, V. Jones utilise sa construction (section II) appliquée à un couple $N \subset M$ d'algèbres de von Neumann de dimension finie ([23]).

IV - *LES ALGÈBRES DE HECKE* $\mathcal{H}_n(q)$ [19] [8]

Soient $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments et n un entier non nul. Considérons le groupe $G = SL_n(\mathbb{F}_q)$ des matrices d'ordre n , à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, et de déterminant 1 . Soit $B \subset G$ le sous groupe de Borel formé par les matrices triangulaires supérieures. Nous noterons $\mathcal{H}_n(q)$ l'algèbre pour la convolution dans G , formée par les fonctions $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient :

$$f(bgb') = f(g) \qquad \forall b,b' \in B \qquad \forall g \in G \ .$$

Soit X le G-espace $X = G/B$ formé par les drapeaux linéaires dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{F}_q^n$. Un élément F de X est donné par une suite croissante $(F_i)_{i = 0,..,n}$ de sous espaces linéaires de E , tels que

$$\dim F_i = i \qquad \forall i = 0,1,...,n \ .$$

Soit L l'espace vectoriel complexe $L = \mathbb{C}^X$, c'est un G module en utilisant l'action de G sur l'ensemble X . Pour tout $f \in \mathcal{H}_n(q)$ soit $\pi(f) \in \operatorname{End}(L)$ défini par la matrice $\quad \pi(f)_{g_1,g_2} = f(g_1^{-1}g_2) \qquad \forall g_1,g_2 \in G/B$

En ayant pris soin de normaliser la mesure de Haar μ sur G de telle sorte que $\mu(B) = 1$ on vérifie que π est une représentation fidèle de $\mathcal{H}_n(q)$ qui a pour image l'algèbre des opérateurs G invariants dans L. Ainsi π est un isomorphisme :

$$\pi : \mathcal{H}_n(q) \to \mathrm{End}_G(L)$$

A la décomposition de Bruhat $G = \bigcup_{w \in S_n} BwB$ de G où S_n est le groupe des permutations, correspond une base naturelle $(t_w)_{w \in S_n}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{H}_n(q)$,

$$t_w(g) = 1 \quad \text{si } g \in BwB, \quad t_w(g) = 0 \quad \text{si} \quad g \in BwB$$

On a donc $\dim_{\mathbb{C}} (\mathcal{H}_n(q)) = n\,!$. De plus on vérifie que $\pi(t_w) = T_w \in \mathrm{End}_G(L)$ est donné par la *correspondance* sur l'ensemble X qui a un drapeau F associe l'ensemble des drapeaux F' tels que :

$$\dim(F_i \cap F'_j) = \text{Cardinalité } (\{1,\ldots,j\} \cap w\{1,\ldots,i\})$$
$\forall i,j = 0,1,\ldots,n.$

Pour $i = 1,\ldots,n-1$, soit s_i la transposition $(i,i+1)$; on a $s_i \in S_n$ et on notera simplement $T_i = T_{s_i}$. Il n'est pas difficile de calculer la composition des correspondances T_w et d'obtenir la présentation suivante de l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$:

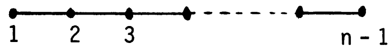
Proposition 9 – L'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ est engendrée par les t_i, $i = 1,\ldots,n-1$ et admet pour présentation les relations suivantes :

a) $(t_i + 1)(t_i - q) = 0 \qquad i = 1,..,n-1$

b) $t_i t_j = t_j t_i \qquad \forall i,j, \quad |i - j| > 1$

c) $t_{i+1}\, t_i\, t_{i+1} = t_i\, t_{i+1}\, t_i \qquad \forall i = 1,\ldots,n-2$

Cette présentation de $\mathcal{H}_n(q)$ correspond à la présentation du groupe symétrique S_n comme groupe de Coxeter à partir des symétries $(s_i)_{i=1,..,n-1}$ et du graphe de Coxeter de type A_{n-1} :



Plus généralement (cf. [19] et [8] exercice 23, p. 55) on associe canoniquement une algèbre à tout système de Coxeter (W,S) et toute application $f : S \to \mathbb{C}$ qui est constante sur les classes de conjugaison de S dans W. Dans le cas qui nous intéresse tous les s_i sont conjugués dans $W = S_n$ et une telle fonction f est constante. La construction générale revient donc ici à autoriser une valeur arbitraire de q dans $\mathbb{C}$.

Définition 10 – Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ et $q \in \mathbb{C}$. On notera $\mathcal{H}_n(q)$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ engendrée par $(t_i)_{i=1,\dots,n-1}$ avec la présentation suivante :

$(t_i + 1)(t_i - q) = 0 \qquad \forall i = 1,.,n-1$

$t_i t_j = t_j t_i \qquad \forall i,j\ ,\ |i - j| \geq 2$

$t_{i+1}\, t_i\, t_{i+1} = t_i\, t_{i+1}\, t_i \qquad \forall i = 1,\dots,n-2$

Pour $q = 1$, l'algèbre $\mathcal{H}_n(q)$ est l'algèbre $\mathbb{C}S_n$ du groupe symétrique. Pour $q^n \neq 1$, $q \neq 0$, $\mathcal{H}_n(q)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}S_n$ ([ ]). Pour $q \neq 1$, $q^n = 1$ ou $q = 0$, $\mathcal{H}_n(q)$ n'est pas une algèbre semi simple.

Par construction les $\mathcal{H}_n(q)$, $n \in \mathbb{N}$, forment un système inductif d'algèbres en utilisant l'unique homomorphisme $\rho_{n,m} : \mathcal{H}_n(q) \to \mathcal{H}_m(q) \qquad n < m$ tel que $\rho_{n,m}(t_{j,n}) = t_{j,m} \quad \forall j = 1,\dots,n-1$.

Définition 11 – On note $\mathcal{H}_\infty(q)$ la limite inductive de la suite $\mathcal{H}_n(q)$.

Par construction $\mathcal{H}_\infty(q)$ est engendrée par les t_j, $j \in \mathbb{N}^*$ et admet une présentation évidente,

Lemme 12 – a) Supposons $q \neq -1$. Posons $e_j = \frac{1}{q+1}(t_{i+1})$; alors les e_j, $j \in \mathbb{N}^*$ engendrent $\mathcal{H}_\infty(q)$ et $\mathcal{H}_\infty(q)$ admet la présentation suivante, avec $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$

$$e_j^2 = e_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^* \ ; \quad e_i e_j = e_j e_i \quad \forall i,j,\ |i-j| > 1\ ;$$

$$e_{i+1}\, e_i\, e_{i+1} - \tau e_{i+1} = e_i\, e_{i+1}\, e_i - \tau e_i \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*\ .$$

b) Si $\tau \in \mathbb{R}$ il existe un unique antiautomorphisme antilinéaire involutif $x \to x^*$ de $H_\infty(q)$ tel que $e_j^* = e_j \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$.

Le a) résulte d'un calcul immédiat et le b) de l'invariance de la présentation a).

La construction et le théorème de V. Jones entraînent le résultat suivant :

Théorème 13 [24].- Soient $q \in [1,+\infty[\cup \{e^{i\frac{2\pi}{m}} \; ; \; m = 3,4,\ldots,\}$, $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$, et $H_\infty(q)$ l'algèbre ci-dessus, munie de l'involution $x \to x^*$ du lemme 12b).

1) Il existe une unique trace ϕ sur $H_\infty(q)$ telle que $\phi(1) = 1$ et que $\phi(x\, e_{i+1}) = \tau\, \phi(x) \quad \forall x \in H_i(q)$, $\quad \forall i \in \mathbb{N}$

2) La trace ϕ est positive (i.e. $\phi(x^*x) \geq 0 \quad \forall x \in H_\infty(q)$) et la représentation régulière gauche de $H_\infty(q)$ dans l'espace de Hilbert associé à ϕ engendre le facteur hyperfini de type II_1, M.

3) La sous algèbre de von Neumann de M engendrée par $(e_i)_{i \geq 2}$ est un sous facteur N de M et $[M:N] = \tau$.

Il suffit en effet de comparer la présentation de $H_\infty(q)$ du lemme 12 avec les relations J_2, J_7, J_8, J_9 vérifiées par les projecteurs e_j de la construction de V. Jones. On obtient ainsi un homomorphisme involutif ρ de $H_\infty(q)$ dans P et il suffit de poser $\phi = \mathrm{Tr}\; p \circ \rho$. L'unicité de ϕ vérifiant 1) est immédiate.
Nous énoncerons maintenant deux résultats remarquables de A. Ocneanu.

Théorème 14 – ([42][15]). Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $q \neq -1$, $q+q^{-1} \in \mathbb{R}$. Posons $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$; Pour qu'il existe une représentation involutive non triviale de l'algèbre involutive $(H_\infty(q), *)$ dans un espace Hilbertien il faut et il suffit que q appartienne à l'ensemble

$$\{e^{i\frac{2\pi}{m}} \; ; \; m \in \mathbb{N}\;,\; m \geq 3\} \cup [1, +\infty[$$

(Par représentation triviale on entend toute représentation π telle que $\pi(e_j) \in \{0,1\} \quad \forall j \in \mathbb{N}$).

Théorème 15 [42].- a) Soient $q, z \in \mathbb{C}$, $q \neq -1$. Il existe une unique trace $\phi_{q,z}$ sur $\mathcal{H}_\infty(q)$ telle que

$$\phi(x\, e_{n+1}) = z\,\phi(x) \qquad \forall x \in \mathcal{H}_n(q)$$

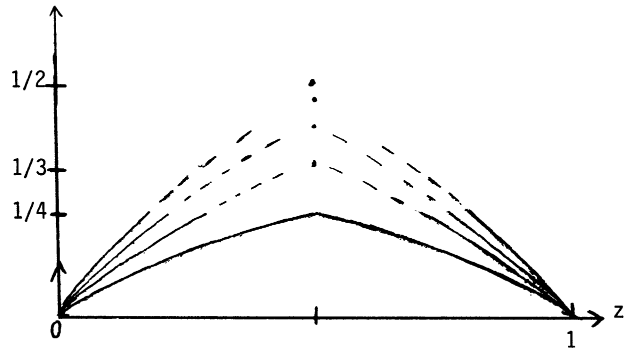
b) Soient $q \in \{e^{i\frac{2\pi}{m}}\ ;\ m \in \mathbb{N}\ ,\ m \geq 3\} \cup [1,\infty[$ et $\tau = (2+q+q^{-1})^{-1}$, $z \in \mathbb{C}$. Pour que $\phi_{q,z}$ soit une trace positive sur l'algèbre involutive $(\mathcal{H}_\infty(q), *)$ il faut et il suffit que $z \in [0,1]$ et que le couple (q,z) vérifie l'une des conditions suivantes :

1) $q \geq 1$, $(1+q)^{-1} \leq z \leq q(1+q)^{-1}$

2) $q \geq 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $z = \dfrac{1-q^{k+1}}{(1+q)(1-q^k)}$

3) $q = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$, $|k| < m-1$, $k \neq 0$ avec $z = \dfrac{1-q^{k+1}}{(1+q)(1-q^k)}$

$(2+q+q^{-1})^{-1} = \tau$.



Comme dans le théorème 13 , 3) on obtient pour chaque valeur de (q,z) un sous facteur N du facteur hyperfini. L'indice de ces sous facteurs a été calculé en fonction de q et z par H. Wenzl [50] .

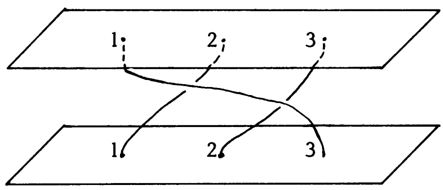
V - GROUPES DE TRESSES, NOEUDS ET THÉORÈMES D'ALEXANDER ET MARKOV

Soient $n \in \mathbb{N}$ et Y_n l'ensemble des sous ensembles de $\mathbb{C}$ de cardinalité n . On munit Y_n de la topologie obtenue en l'identifiant au quotient par le groupe des permutations, de l'ouvert $\Omega_n \subset \mathbb{C}^n$,

$$\Omega_n = \{(z_i)_{i=1,\dots,n}\ ;\ z_i \neq z_j \quad \forall i \neq j\}$$

Par définition, le groupe $B_n = \pi_1(Y_n)$. En considérant de manière évidente $\mathbb{C} \times [0,1]$ comme une partie de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, et en fixant un point base p dans Y_n , disons $p = \{1,2,\dots,n\} \subset \mathbb{C}$, on représente visuellement un lacet $\phi \in C(S^1, Y_n)$, $\phi(0) = p$, par une tresse dans $\mathbb{R}^3$, notée $\hat{\phi}$:

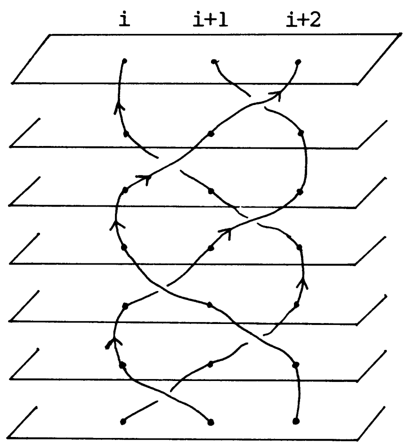
$$\hat{\phi} = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times [0,1] \; ; \; z \in \phi(t)\}$$



La loi de composition dans $B_n = \pi_1(Y_n)$ correspond géométriquement à la mise bout à bout des deux tresses. Pour tout $j = 1,\dots,n-1$ soit $g_j \in B_n$ l'élément de $\pi_1(Y_n,p)$ qui est la classe du lacet ϕ_j ,

$$\phi_j(t) = \{k \; ; \; k \neq j,j+1\} \cup \{j + \tfrac{1}{2}\,(1 \pm e^{\pi i t})\} \quad , \; t \in [0,1].$$

Le lacet suivant montre que pour tout i on a : $g_i\, g_{i+1}\, g_i = g_{i+1}\, g_i\, g_{i+1}$.



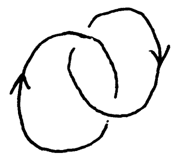
Théorème 16 (Artin) [3].- Pour tout n le groupe B_n est engendré par $g_1,\dots,g_{n-1}$ et admet la présentation suivante :

a) $g_i\, g_j = g_j\, g_i \qquad \forall i,j \quad |i-j| > 1$

b) $g_{i+1}\, g_i\, g_{i+1} = g_i\, g_{i+1}\, g_i \qquad \forall i = 1,\dots,n-2$.

On appellera *entrelac* dans $\mathbb{R}^3$ toute sous variété compacte *orientée* de classe C^∞, de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. On appellera *noeud* tout entrelac connexe. Pour tout noeud L il existe un plongement ℓ de classe C^∞ de S^1 dans $\mathbb{R}^3$ qui est un diffeomorphisme, préservant l'orientation, de S^1 sur L. Le problème principal de la théorie des noeuds est la classification à isotopie près des plongements de S^1 dans $\mathbb{R}^3$. On représente un entrelac par sa projection sur un plan, en indiquant cette projection comme réunion de courbes qui se coupent transversalement, et en précisant de manière évidente laquelle passe au-dessus de l'autre :


Noeud


Entrelac

Soient $g \in B_n$ et $\varepsilon(g)$ la permutation correspondante de l'ensemble $p = \{1,2,\ldots,n\}$. Choisissons un représentant ϕ de g tel que $\phi \in C^\infty(S^1, Y_n)$ et que $\phi(t) \subset \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ pour tout $t \in S^1$. Considérons la droite $\Delta = \{(0,s,0)\ ;\ s \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^3$ et soit R_θ, $\theta \in S^1$, la rotation d'axe Δ et d'angle θ. Identifions $\mathbb{C}^+ \times S^1$ à l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ complémentaire de Δ par l'application ρ,

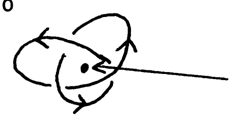
$$\rho(z,\theta) = R_\theta\,(x,y,0) \qquad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\ ,\ \theta \in S^1$$

La sous variété $\rho(Z)$, où $Z = \{(z,\theta) \in \mathbb{C}^+ \times S^1\ ;\ z \in \phi(\theta)\}$ est un entrelac, muni de l'orientation qui provient de la projection sur S^1. Les composantes connexes de Z sont paramètrées par les cycles de la permutation $\varepsilon(g)$. Par construction la classe d'isotopie de l'entrelac $\rho(Z)$ ne dépend que de $g \in B_n$ et non du choix de ϕ. On obtient ainsi une application $g \to \hat{g}$ de B_n dans l'ensemble $\mathcal{L}$ des classes d'isotopie d'entrelacs dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 17 – (Alexander) [2].- L'application $g \to \hat{g}$ de la réunion disjointe $\coprod_1^\infty B_n$ dans $\mathcal{L}$ est *surjective*.

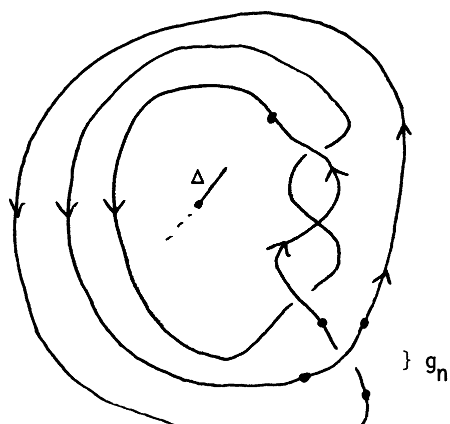
Pour trouver g tel que $\hat{g} = L$ il suffit de trouver une droite Δ dans $\mathbb{R}^3$ ne rencontrant pas L et telle que l'angle déterminé par le plan $P(x)$ contenant Δ et $x \in L$ et un plan fixe P_0, $\Delta \subset P_0$ soit une fonction croissante de x.

Exemple

$L =$  a

on prend pour Δ un axe perpendiculaire au plan de projection et passant par a. On obtient ainsi $L = \hat{g}$ où g désigne la tresse :

Il est évident que $\hat{g}$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g dans B_n. De plus, en considérant l'inclusion naturelle de B_n dans B_{n+1} ($g_i^n \to g_i^{n+1}$) on vérifie que $(g\, g_n^{\pm 1})^\wedge = g \qquad \forall g \in B_n$:



Théorème 18 – Markov [34] Birman [6]

La relation d'équivalence $g_1 \sim g_2$ si $\hat{g}_1 = \hat{g}_2 \in \mathcal{L}$ sur $\coprod_n B_n$ est la relation d'équivalence la moins fine telle que

a) Si $g_1, g_2 \in B_n$ sont conjugués dans B_n on a $g_1 \sim g_2$

b) Si $g \in B_n$, on a $g g_n^{\pm 1} \sim g$.

Ainsi toute application Ψ de $\coprod_n B_n$ dans un ensemble qui vérifie $\Psi(aga^{-1})=\Psi(g)^n$, $\Psi(gg_n^{\pm 1}) = \Psi(g)$ définit un invariant d'isotopie pour les entrelacs dans $\mathbb{R}^3$. La présentation (Définition 10) de l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ comparée à la présentation de Artin (théorème 16) du groupe de tresses B_n , montre que pour tout $\lambda \ \mathbb{C}^*$ il existe un homomorphisme unique π_n^λ de B_n dans $H_n(q)$ tel que :

$$\pi_n^\lambda(g_i) = \lambda t_i \qquad i = 1,2,\dots,n-1$$

Toute trace μ_n sur $H_n(q)$ définit alors, par composition avec π_n^λ , une application Ψ de B_n dans $\mathbb{C}$ qui est constante sur les classes de conjugaison. Posons $\mu_n = \alpha_n \phi$ où $\alpha_n \in \mathbb{C}$ et ϕ est la trace définie par V. Jones (théorème 13). On obtient alors, en utilisant 13 1°,

$$\phi(\pi^\lambda(gg_n)) = \lambda \left(\frac{-1}{1+q}\right) \phi(\pi^\lambda(g)) \qquad \forall g \in B_n$$

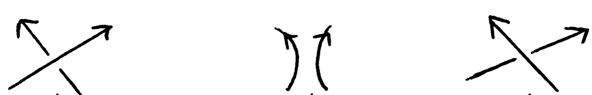
$$\phi(\pi^\lambda(gg_n^{-1})) = \lambda^{-1} \frac{-q}{1+q} \phi(\pi^\lambda(g)) \qquad \forall g \in B_n$$

Ainsi, si $\lambda^2 = q$ et $\alpha_{n+1} = \frac{-\lambda}{1+q} \alpha_n$ on a $\mu_{n+1} (\pi_{n+1}^\lambda(gg_n^{\pm 1})) = \mu_n(\pi_n^\lambda(g))$ pour tout $g \in B_n$. On obtient donc :

Théorème 19 [21].- Soient L un entrelac dans $\mathbb{R}^3$, n un entier et $g \in B_n$ tels que $\hat{g} = L$. Il existe un unique polynome de Laurent en $\sqrt{q}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, tel que

$$V_L(q) = \left(\frac{-\sqrt{q}}{1+q}\right)^{n-1} \cdot \phi(\pi_n^{\sqrt{q}}(g))$$

Le polynome V_L ne dépend que de la classe d'isotopie de L . De plus V_L est un polynome de Laurent en q si L a un nombre impair de composantes connexes. On utilisera les symboles L_+ , L_0 , L_- pour noter des entrelacs dont les projections sur un même plan coincident en dehors d'un petit disque, et sont dans ce disque représentées par les dessins suivants :



L_+ L_0 L_-

Conway a montré que le polynome d'Alexander Δ_L vérifie la relation :

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\,\Delta_{L_0}(t) = 0$$

De même le polynome de V. Jones vérifie la relation :

$$tV_{L_+}(t) - t^{-1}\,V_{L_-}(t) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\,V_{L_0}(t) = 0$$

Le résultat suivant a été obtenu simultanément par P. FREYD, D. YETTER, J. HOSTE, W. LICKORISH, K. MILLETT et A. OCNEANU [15] .

Théorème 20 [15].- Il existe une unique application P de l'ensemble des classes d'isotopie d'entrelacs dans $\mathbb{R}^3$ dans l'ensemble des polynomes de Laurent homogènes de degré 0 , en x, y, z telle que

1) $x\,P_{L_+}(x,y,z) + y\,P_{L_-}(x,y,z) + P_{L_0}(x,y,z) = 0$

2) $P_L(x, y, z) = 1$ si L est un noeud trivial.

Le polynome P_L vérifie les propriétés suivantes,

1) Le polynome d'Alexander-Conway est donné par

$$\Delta_L(q) = P_L(1, -1, q^{1/2} - q^{-1/2})$$

2) Le polynome de V. Jones est donné par

$$V_L(q) = P_L(q, -q^{-1}\,, q^{1/2} - q^{-1/2})$$

3) Si on change simultanément l'orientation de toutes les composantes connexes de L , P_L est inchangé.

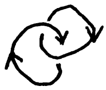
4) Si on change l'orientation de $\mathbb{R}^3$ on a

$$P_{\tilde{L}}(x, y, z) = P_L(y, x, z)$$

5) Si L est une somme connexe de L_1 et L_2 on a

$$P_L = P_{L_1}\,P_{L_2}$$

Exemples

a) $L =$  $P_L = yz^{-1} + x^{-1}\, y^2\, z^{-1} - x^{-1}\, z$

b) $L =$  $P_L = x^{-2}\, z^2 - 2x^{-1}\, y - x^{-2}y^2$

c) $L =$  $P_L = y^{-2}z^2 - 2xy^{-1} - x^2y^{-2}$

d) $L =$  $P_L = x^{-1}\, y^{-1}\, z^2 - x\, y^{-1} - x^{-1}y - 1$

En particulier P_L (et aussi V_L) distingue le noeud de trèfle de son image dans un miroir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.W. ALEXANDER - *A lemma on systems of knotted curves,* Proc. Nat. Acad. 9(1923), p. 93-95.

[2] J.W. ALEXANDER - *Topological invariants of knots and links,* Trans. Amer. Math. Soc. 30(1928), p. 275-306.

[3] E. ARTIN - *Theorie der Zopfe,* Hamburg, Abh 9, p. 47-72.

[4] R.J. BAXTER - *Exactly solved models in statistical mechanics,* Acad. Press, London (1982).

[5] D. BENNEQUIN - *Entrelacements et structures de contact,* Thèse, Paris (1982).

[6] J. BIRMAN - *Braids, links and mapping class groups,* Ann. Math. Studies, 82(1974).

[7] J. BIRMAN - *On the Jones polynomial of the closed 3 braids,* (Preprint).

[8] N. BOURBAKI - *Groupes et Algèbres de Lie,* Chap. 4, 5, 6, n° 1337, Hermann, Paris, 1960-1972.

[9] O. BRATELLI - *Inductive limits of finite dimensional* C^* *algebras,* Trans. AMS 171(1972), p. 195-234.

[10] E. BRIESKORN - *Sur les groupes de tresses,* Sém. Bourbaki n° 401, 1971-1972.

[11] F. BRUHAT et J. TITS - *Groupes réductifs sur un corps local,* Ch. 1, Publ. IHES, Vol. 41 (1972).

[12] W. BURAU - *Über Zopfgruppen und gleichsinning verdrillte verkettunger,* Abh. Math. Sem. Hanischen Univ. 11(1936), p. 171-178.

[13] J.H. CONWAY - *An enumeration of knots and links, computational problems in*

Abstract Algebra, Pergamon, N.Y. (1970), p. 329-358.

[14] J. DIXMIER - *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*, Deuxième édition, Gauthier Villars (1969).

[15] P. FREYD, D. YETTER, J. HOSTE, W.B.R. LICKORISH, K. MILLETT and A. OCNEANU - *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. A.M.S., Vol. 12, n° 2 (April 1985).

[16] P. FREYD and D. YETTER - *A new invariant for knots and links*, Preprint (Sept. 1985).

[17] F. GARSIDE - *The braid group and other groups*, Quart. J. Math., Oxford 20 (1969), p. 235-254.

[18] M. GOLDMAN - *On subfactors of type* II_1 - Mich. Math. J. 7(1960), p. 167-172.

[19] N. IWAHORI and H. MATSUMOTO - *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of* p*-adic Chevalley groups*, Public. IHES, Vol. 25 (1965), p. 5-48.

[20] V. JONES - *L'indice des sous-facteurs de type* II_1, C.R. Ac. Sci. Paris, t. 286(1977), p. 597-598.

[21] V. JONES - *A polynomial invariant for knots via von Neumann Algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 12(1985), p. 103-112.

[22] V. JONES - *Groupes de tresses, algèbres de Hecke et facteurs de type* II_1, C.R. Ac. Sci. Paris, t. 298, Sér. I, n° 20 (1984).

[23] V. JONES - *Index for subfactors*, Invent. Math. 72(1983), p. 1-25.

[24] V. JONES - *Braid groups, Hecke algebras and type* II_1 *factors*, Proc. Japan-US Conf. (1983), (Preprint).

[25] V. JONES - *Sur la conjugaison des sous-facteurs des facteurs de type* II_1, C.R. Ac. Sc. Paris, t. 286(1977), p. 597-598.

[26] L.H. KAUFFMAN - *A geometric interpretation of the generalized polynomial*, Preprint (1985).

[27] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. 53(1979), p. 165-184.

[28] D. KAZHDAN and G. LUSZTIG - *Schubert varieties and Poincaré duality*, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 36(1980).

[29] H. KOSAKI - *Extension of Jones' theory of index to arbitrary factors*, Preprint MSRI, Berkeley, 1985.

[30] J. LANNES - *Sur l'invariant de Kervaire pour les noeuds classiques*, Preprint, Ecole Polytechnique (1984).

[31] W.B.R. LICKORISH and K.C. MILLETT - *A polynomial invariant of oriented links*, Preprint (January 1985).

[32] W.B.R. LICKORISH - *Prime knots and tangles*, Trans. Amer. Math. Soc. 267(1981).

[33] H.N.V. TEMPERCEY and E.H. LIEB - Proc. Royal Soc., London, (1971), p. 251-280.

[34] A.A. MARKOV - *Über die freie Aequivalenz geschlossener Zopfe*, Mat. Sb 1 (1935), p. 73-78.

[35] H. MATSUMOTO - *Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine*, Lecture Notes in Math., Springer, Vol. 590(1977).

[36] H.R. MORTON - *The Jones polynomial for unoriented links*, Preprint, University of Liverpool (1985).

[37] H.R. MORTON - *Threading knot diagrams*, Preprint, University of Liverpool.

[38] H.R. MORTON - *Closed braids representatives for a link and its Jones-Conway polynomial*, Preprint (1985).

[39] K. MURASUGI - *Jones polynomials of special alternating knots*, (Preprint).

[40] F. MURRAY and J. von NEUMANN - *On rings of operators* II, Trans. A.M.S. 41 (1937), p. 208-248.

[41] F. MURRAY and J. von NEUMANN - *On rings of operators* IV, Ann. Math. 44(1943), p. 716-808.

[42] A. OCNEANU - *A polynomial invariant for knots. A combinatorial and an algebraic approach*, Preprint MSRI (1984).

[43] M. PIMSNER and S. POPA - *Entropy and index for subfactors*, Preprint INCREST, Bucharest (1983).

[44] J.H. PRZYTYCKI and P. TRACZYK - *Invariants of links of Conway type*, Preprint, (1985).

[45] B. SEIFERT - *The spherical traces for Hecke algebras associated to type* II_1 *factors*, Preprint IHES (1985).

[46] M. TAKESAKI - *Theory of operator algebras* I, Berlin, Heidelberg, New York, Springer (1979).

[47] H. UMEGAKI - *Conditional expectation in an operator algebra* I, Tohoku Math. J. 6, (1954), p. 358-362.

[48] J. VAN BUSKIRK - *A version of the generalized Jones polynomial which is positive for positive knots*, Preprint, University of Oregon (1985).

[49] A. WASSERMANN - *Automorphic actions of compact groups*, Thesis, University of Pennsylvania (1981).

[50] H. WENZL - *On sequences of projections*, Preprint, University of Pennsylvania (1984).

Alain CONNES

Collège de France
11 place Marcelin-Berthelot
F-75231 PARIS Cedex 05