ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Transgression du caractère de Chern et cohomologie cyclique.* Note de **Alain Connes** et **Henri Moscovici,** présentée par Alain Connes, Membre de l'Académie.

Nous établissons le lien entre le caractère de Chern en K-homologie [3] et la version du caractère de Chern usuel et de sa transgression, développée par D. Quillen [5] et J.-M. Bismut [2].

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Cyclic cohomology and the transgression of the Chern character.

We establish the link between the Chern character in K*-homology* [3] *and the version of the standard Chern character and of its transgression developed by D. Quillen* [5] *and J.-M. Bismut* [2].

1. Caractère de Chern d'un module de Fredholm p-sommable. — Soit h un espace de Hilbert, $\mathscr{L}(h)$ désigne l'algèbre involutive des opérateurs bornés dans h et pour $p\in[1, \infty]$, $\mathscr{L}^p(h)$ désigne l'idéal bilatère formé par les opérateurs compacts p-sommables [7]. Soit $\mathscr{A}$ une algèbre involutive, un module de Fredholm non borné sur $\mathscr{A}$ est donné par :

(1) Un espace de Hilbert h et un homomorphisme involutif de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}(h)$.

(2) Un opérateur non borné autoadjoint D dans h, inversible et d'inverse compact, tel que le commutateur $[D, a]$ soit borné pour tout $a\in\mathscr{A}$.

On dit que le module (h, D) est p-sommable si $D^{-1}\in\mathscr{L}^p(h)$. Un module de Fredholm non borné *pair* est donné par un couple (h, D) vérifiant (1) et (2) et une $\mathbb{Z}/2$ graduation de h, $\varepsilon\in\mathscr{L}(h)$, $\varepsilon^2=1$, $\varepsilon=\varepsilon^*$ telle que $\varepsilon a=a\varepsilon$, $\forall a\in\mathscr{A}$ et $D\varepsilon=-\varepsilon D$. Pour tout entier impair (resp. pair) $n>p-1$, le caractère de dimension n d'un module p-sommable (h, D) [resp. (h, D, ε)] est le n-cocycle cyclique τ_n sur $\mathscr{A}$ donné par l'égalité :

$$\tau_n(a^0, \ldots, a^n)=(-1)^{(n-1)/2}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\ldots\frac{1}{2}\operatorname{Trace}(P[P, a^0]\ldots[P, a^n]),$$
$$\forall a^i\in\mathscr{A}$$

où

$$P=D|D|^{-1}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty D(D^2+\mu^2)^{-1}\,d\mu$$

est la phase de D [resp. $\tau_n(a^0, \ldots, a^n)=(n/2)!\operatorname{Trace}(\varepsilon P[P, a^0]\ldots[P, a^n])$].

2. Potentiels vecteurs et action du groupe de jauge. — Soit (h, D) un module de Fredholm non borné p-sommable sur l'algèbre involutive $\mathscr{A}$. On appelle potentiel vecteur tout élément autoadjoint A de $\mathscr{L}(h)$ qui est une combinaison linéaire finie de produits $a[D, b]$; $a, b\in\mathscr{A}$. Soit $\mathscr{V}$ l'espace vectoriel réel des potentiels vecteurs. Le groupe unitaire $\mathscr{U}$ de $\mathscr{A}$ ou groupe de jauge, agit par transformations affines sur $\mathscr{V}$ en posant :

$$\gamma_u(A)=u[D, u^*]+uAu^*,\qquad \forall u\in\mathscr{U},\quad A\in\mathscr{V}.$$

Lemme 1. — (1) *Pour tout* $A\in\mathscr{V}$, *l'opérateur* $D_A=D+A$ *est autoadjoint et son noyau est de dimension finie.*

(2) *On a* $D_{\gamma_u(A)}=uD_Au^*$ *pour* $u\in\mathscr{U}$, $A\in\mathscr{V}$.

(3) *Si* D_A *est injectif, il est inversible et* $D_A^{-1}\in\mathscr{L}^p(h)$.

Démonstration. — (1) résulte de [6], (2) est immédiat, (3) résulte des égalités $(1+D^{-1}A)^*=1+AD^{-1}$ et $D_A^{-1}=(1+D^{-1}A)^{-1}D^{-1}$. □

0249-6291/86/03030913 $ 2.00 © Académie des Sciences

3. LES VARIÉTÉS $\mathscr{V}$ ET $\mathscr{V}^{-1}$. — Soit (h, D) un module de Fredholm non borné p-sommable sur l'algèbre involutive $\mathscr{A}$. Munissons $\mathscr{V}$ de la norme des opérateurs dans h et soit $\mathscr{V}$ la variété sous-jacente à cet espace normé. Explicitons l'algèbre de De Rham $(\Omega(\mathscr{V}), d)$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, soit $\mathrm{L}_a^r(\mathscr{V}, \mathbb{C})$ [resp. $\mathrm{L}_a^r(\mathscr{V}, h)$], l'espace de Banach des applications r-multilinéaires alternées de $\mathscr{V}$ dans $\mathbb{C}$ (resp. dans h) qui sont continues en norme. Identifions $\Omega^r(\mathscr{V})$ à l'espace des applications de classe C^∞ de $\mathscr{V}$ dans $\mathrm{L}_a^r(\mathscr{V}, \mathbb{C})$; on a alors :

$$(1) \qquad (d\omega)_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}^0, \ldots, \mathrm{X}^r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \omega_{\mathrm{A}+t\mathrm{X}^i}(\mathrm{X}^0, \ldots, \check{\mathrm{X}}^i, \ldots, \mathrm{X}^r)$$

pour $\omega \in \Omega^r(\mathscr{V})$, $\mathrm{A} \in \mathscr{V}$, $\mathrm{X}^i \in \mathscr{V}$.

Posons $\mathscr{V}^{-1} = \{\mathrm{A} \in \mathscr{V};\ \mathrm{D}_{\mathrm{A}} \text{ inversible}\}$, c'est un ouvert de $\mathscr{V}$. On a $\mathrm{A} \in \mathscr{V}^{-1}$ ssi $\det_n(1+\mathrm{D}^{-1}\mathrm{A}) \neq 0$ où $n \geq p$ et $\det_n$ est le déterminant modifié [7].

4. LE FIBRÉ $(\mathscr{H}, \mathscr{D})$ SUR $\mathscr{V}$. — Soit $(h, \mathrm{D}, \varepsilon)$ un module de Fredholm non borné, p sommable, pair sur $\mathscr{A}$. Munissons le fibré trivial $\mathscr{H} = h \times \mathscr{V}$ sur $\mathscr{V}$ de la connexion $\mathbb{Z}/2$ graduée plate donnée par :

$$(\nabla_{\mathrm{X}} \xi)_{\mathrm{A}} = \varepsilon \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \xi_{\mathrm{A}+t\mathrm{X}}, \qquad \forall \xi \in \Gamma(\mathscr{H}), \quad \mathrm{A} \in \mathscr{V}, \quad \mathrm{X} \in \mathscr{V}.$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, soient $\Omega^r(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ l'espace des applications de classe C^∞ de $\mathscr{V}$ dans $\mathrm{L}_a^r(\mathscr{V}, h)$ et $\Omega(\mathscr{V}, \mathscr{H}) = \oplus \Omega^r(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ considéré comme un $\Omega(\mathscr{V})$ module à droite. La connexion ∇ se prolonge à $\Omega(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ par l'égalité :

$$(1') \qquad \begin{cases} (\nabla \omega)_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}^0, \ldots, \mathrm{X}^r) = \varepsilon \displaystyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} \omega_{\mathrm{A}+t\mathrm{X}^i}(\mathrm{X}^0, \ldots, \check{\mathrm{X}}^i, \ldots, \mathrm{X}^r), \\ \qquad \forall \mathrm{A} \in \mathscr{V}, \quad \omega \in \Omega^r(\mathscr{V}, \mathscr{H}) \quad \text{et} \quad \mathrm{X}^0, \ldots, \mathrm{X}^r \in \mathscr{V}. \end{cases}$$

Soit $\mathscr{D}$ l'endomorphisme non borné du fibré $\mathscr{H}$ donné en $\mathrm{A} \in \mathscr{V}$ par l'opérateur $\mathrm{D}_{\mathrm{A}} = \mathrm{D} + \mathrm{A}$, agissant sur la fibre $\mathscr{H}_{\mathrm{A}} = h$. Il se prolonge de manière évidente à $\Omega(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ et on a :

LEMME 2. — *La dérivée covariante $\mathscr{D}' = \nabla \mathscr{D} + \mathscr{D} \nabla$ de $\mathscr{D}$ est l'endomorphisme de $\Omega(\mathscr{V}, \mathscr{H})$ donné par l'égalité :*

$$(\mathscr{D}' \omega)_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}^0, \ldots, \mathrm{X}^r) = \varepsilon \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \mathrm{X}^i \omega_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}^0, \ldots, \check{\mathrm{X}}^i, \ldots, X^r)$$

$$\forall \omega \in \Omega^r(\mathscr{V}, \mathscr{H}), \qquad \mathrm{X}^j \in \mathscr{V} \subset \mathscr{L}(h).$$

5. LE CARACTÈRE DE CHERN DE $(\mathscr{H}, \mathscr{D})$. — Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z^2 > 0$ la forme différentielle $\omega_z = \operatorname{Trace}(\varepsilon \exp -(\nabla + z\mathscr{D})^2) \in \Omega(\mathscr{V})$ représente le caractère de Chern de $(\mathscr{H}, \mathscr{D})$ (*cf.* [5], [2]). Plus précisément, $\exp -(\nabla + z\mathscr{D})^2$ est un endomorphisme Ω_z du module $\Omega(\mathscr{V}, \mathscr{H})$, dont la composante $\Omega_z^{(n)}$ de degré n est donnée en appliquant la formule de Duhamel [1] et l'égalité

$$(\nabla + z\mathscr{D})^2 = \nabla^2 + z\mathscr{D}' + z^2\mathscr{D}^2 = z\mathscr{D}' + z^2\mathscr{D}^2,$$

d'où

$$(2) \qquad \Omega_z^{(n)} = z^n \int_{0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq 1} \exp(-s_1 z^2 \mathscr{D}^2)\, \mathscr{D}' (\exp(s_1 - s_2) z^2 \mathscr{D}^2)\, \mathscr{D}' \times \ldots$$
$$\times \exp((s_{n-1} - s_n) z^2 \mathscr{D}^2)\, \mathscr{D}' (\exp(s_n - 1) z^2 \mathscr{D}^2)\, ds_1 \ldots ds_n.$$

p-sommable, pair sur $\mathcal{A}_q$ et pour tout $A \in \mathcal{V}^{-1}$, $X^j \in \mathcal{V}$, $a^j \in M_q(\mathbb{C})$, $j=1, \ldots, m$ on a :

$$\theta^{(m)}_{A\otimes 1}(X^1 \otimes a^1, \ldots, X^m \otimes a^m) = -\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)^{-1} \sum \operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\left(\int_0^\infty \operatorname{Trace}(\varepsilon D_A (D_A^2+\mu^2)^{-1} X^{\sigma(1)} \ldots (D_A^2+\mu^2)^{-1} X^{\sigma(m)} (D_A^2+\mu^2)^{-1} \mu^m \, d\mu\right)$$
$$\times \operatorname{Trace}(a^{\sigma(1)} \ldots a^{\sigma(m)}).$$

Remarque 2. — Le cas d'un module de Fredholm impair (h, D) se ramène au cas pair pour une algèbre $\mathbb{Z}/2$ graduée comme dans [3], section 7, et donne la formule suivante : (m pair)

$$(12)\quad \theta^{(m)}_A(X^1, \ldots, X^m) = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)^{-1} \Sigma_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \int_0^\infty \operatorname{Tr}(D_A (D_A^2+\mu^2)^{-1} X^{\sigma(1)} \times \ldots$$
$$\times (D_A^2+\mu^2)^{-1} X^{\sigma(m)} (D_A^2+\mu^2)^{-1}) \mu^m \, d\mu.$$

Remarque 3. — L'inégalité de Hölder montre que les intégrales (11) et (12) restent finies pour $m=p$.

Remarque 4. — La construction ci-dessus marche encore sous l'hypothèse suivante sur (h, D) : Il existe $p_1, p_2 \geqq 1$, $(1/p_1)+(1/p_2)=1/p$ avec :

$$(a)\quad D^{-1} \in \mathcal{L}^{p_1}(h), \qquad (b)\quad [D, a] \in \mathcal{L}^{p_2}(h), \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

7. L'isomorphisme de Loday-Quillen en cohomologie. — Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach involutive sur $\mathbb{C}$. D'après [4] et [8] nous décrivons l'isomorphisme naturel entre la cohomologie cyclique continue de $\mathcal{A}$ et la partie primitive de la cohomologie continue de l'algèbre de Lie des matrices $M_\infty(\mathcal{A}) = \varinjlim M_q(\mathcal{A})$. Soient $\mathcal{U}_\infty$ la limite inductive $\mathcal{U}_\infty = \lim \mathcal{U}_q$ des groupes unitaires $\mathcal{U}_q$ de $M_q(\mathcal{A})$ et U_∞ le sous-groupe limite inductive des groupes unitaires de $M_q(\mathbb{C}) \subset M_q(\mathcal{A})$. L'algèbre de Lie complexifiée de $\mathcal{U}_\infty$ s'identifie à $M_\infty(\mathcal{A})$ et nous la munissons de la topologie limite inductive. Une forme n-multilinéaire alternée, continue, α sur $M_\infty(\mathcal{A})$ est dite

(1) *Invariante* si elle est invariante par l'action adjointe de U_∞;

(2) *Primitive* si pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ on a $\Delta^* \alpha = i_1^* \alpha + i_2^* \alpha$ où Δ, i_1 et i_2 sont les homomorphismes d'algèbres de Lie de $M_p(\mathcal{A}) \times M_q(\mathcal{A})$ dans $M_{p+q}(\mathcal{A})$ donnés par :

$$\Delta(a, b) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \qquad i_1(a, b) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad i_2(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix},$$
$$\forall a \in M_p(\mathcal{A}), \qquad b \in M_q(\mathcal{A}).$$

Soit $(P^*(\mathcal{A}), d)$ le complexe de cochaînes des formes continues invariantes et primitives. Soit $(C^*_\lambda(\mathcal{A}), b)$ le complexe de cochaînes décrivant la cohomologie cyclique continue de $\mathcal{A}$ [3].

Proposition 6 [4]. — *L'application* $\Phi : C^*_\lambda \to P^{*+1}$ *donnée par*

$$\Phi(\tau)(X^0, \ldots, X^m) = (-1)^m \Sigma_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)(\tau \# \operatorname{Tr})(X^{\sigma(0)}, \ldots, X^{\sigma(m)})$$

est un isomorphisme de complexes.

8. Restriction de $\operatorname{Tch}(\mathcal{H}, \mathcal{D})$ aux orbites du groupe unitaire. — Soit (h, D) un module de Fredholm non borné sur l'algèbre involutive $\mathcal{A}$, on munit $\mathcal{A}$ de la norme $\|a\| = \|a\|_\infty + \|[D, a]\|_\infty$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

THÉORÈME 7. — *Soit* $(h, \mathrm{D}, \varepsilon)$ [*resp.* (h, D)] *un module de Fredholm non borné, p sommable, pair (resp. impair) sur* $\mathscr{A}$ *et* $n>p-1$ *un entier pair (resp. impair).*

(1) *L'égalité suivante définit un n-cocycle cyclique sur* $\mathscr{A}$:

$$\tau_{\mathrm{D}}(x^0, \ldots, x^n)=\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{-1} \sum_{\lambda\in\Gamma} \operatorname{sgn}(\lambda) \int_0^{\infty} \operatorname{Tr}_s(\mathrm{D}(\mathrm{D}^2+\mu^2)^{-1}[\mathrm{D}, x^{\lambda(0)}]$$
$$\times(\mathrm{D}^2+\mu^2)^{-1}\ldots[\mathrm{D}, x^{\lambda(n)}](\mathrm{D}^2+\mu^2)^{-1}\mu^{n+1}\,d\mu$$

où Γ *désigne le groupe des permutations cycliques de* $\{0, 1, \ldots, n\}$ *et pour* $\mathrm{T}\in\mathscr{L}^1(h)$, $\operatorname{Tr}_s(\mathrm{T})=\operatorname{Trace}(\varepsilon\mathrm{T})$ *dans le cas pair et* $\operatorname{Tr}_s(\mathrm{T})=\operatorname{Trace}(\mathrm{T})$ *dans le cas impair.*

(2) *Pour tout* $\mathrm{A}\in\mathscr{V}^{-1}$ *la restriction* θ_∞ *à l'orbite de* $\mathrm{A}\otimes 1$ *dans* $\mathscr{V}_\infty^{-1}$ *sous l'action de* $\mathscr{U}_\infty$ *de la forme* $\operatorname{Tch}(\mathscr{H}, \mathscr{D})^{(n+1)}$ *est la forme primitive et invariante* $\Phi(\tau_{\mathrm{D_A}})$.

Ce théorème résulte de la proposition 6, et des remarques 1, 2 et 4. Il reste à relier le cocycle cyclique τ_{D} au caractère de Chern en K-homologie (section 1). Pour cela nous utiliserons l'homotopie suivante entre D et $\mathrm{P}=\mathrm{D}|\mathrm{D}|^{-1}$.

LEMME 8. — *Pour* $\alpha\in[0, 1]$, *soit* $\mathrm{D}_\alpha=\mathrm{D}|\mathrm{D}|^{-\alpha}$. *Si* $p'>p$ *on a* $[\mathrm{D}_\alpha, a]\in\mathscr{L}^{p'/\alpha}$ *pour tout* $a\in\mathscr{A}$, *avec* $\|[\mathrm{D}_\alpha, a]\|_{p'/\alpha}\leq \mathrm{C}''\|[\mathrm{D}, a]\|_\infty(1+\|\mathrm{D}^{-1}\|_p^2)$ *où* C″ *est un nombre fini ne dépendant que de p et p′.*

L'homotopie $(\mathrm{D}_\alpha)_{\alpha\in[0,\,1]}$ et la remarque 4 montrent que :

THÉORÈME 9. — *Soient* (h, D) [*resp.* $(h, \mathrm{D}, \varepsilon)$] *un module de Fredholm non borné p-sommable impair (resp. pair) et n un entier impair (resp. pair)* $n>p-1$. *Pour tout* $\mathrm{A}\in\mathscr{V}^{-1}$ *soient* $\operatorname{Ch}_n(h, \mathrm{D_A})\in\mathrm{H}_\lambda^n(\mathscr{A})$ *le caractère de dimension n de ce module* (cf. section 1) *et* $\tau_{\mathrm{D_A}}$ *le n cocycle défini par le théorème 7.*

(1) *On a* $\tau_{\mathrm{D_A}}=(n!)^{-1}\operatorname{Ch}_n(h, \mathrm{D_A})$ *dans* $\mathrm{H}_\lambda^n(\mathscr{A})$.

(2) *La restriction de* $\operatorname{Tch}^{(n+1)}(\mathscr{H}, \mathscr{D})$ *à l'orbite de* $\mathrm{A}\otimes 1$ *par* $\mathscr{U}_\infty$ *est cohomologue à* $(n!)^{-1}\Phi\operatorname{Ch}_n(h, \mathrm{D_A})$.

COROLLAIRE 10. — *Pour* $n>p-1$ *on a* $\tau_{\mathrm{D_A}}^{n+2}=(n+1)(n+2)^{-1}\mathrm{S}\,\tau_{\mathrm{D_A}}^n$ *où* S *est l'opérateur de périodicité en cohomologie cyclique.*

Reçue le 6 octobre 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. ARAKI, Expansional in Banach algebras, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 6, 1973, p. 67-84.

[2] J.-M. BISMUT, The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs, *Inventiones math.*, 83, 1986, p. 91-152.

[3] A. CONNES, Non-commutative differential geometry, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 62, 1986, p. 41-144.

[4] J.-L. LODAY et D. QUILLEN, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, *Comment. Math. Helvetici*, 59, 1984, p. 565-591.

[5] D. QUILLEN, Superconnections and the Chern character, *Topology*, 24, 1985, p. 89-95.

[6] M. REED et B. SIMON, *Fourier Analysis, self-adjointness*, New York, Academic Press, 1975.

[7] B. SIMON, Trace ideals and their applications, *London Math. Soc. Lecture Notes*, n° 35, Cambridge Univ. Press, 1979.

[8] B. L. TSIGAN, Homology of matrix Lie algebras over rings and Hochschild homology, *Uspekhi Math. Nauk*, 38, 1983, p. 217-218.

Institut des Hautes Études Scientifiques, 91440 *Bures-sur-Yvette.*