Commun. Math. Phys. 114, 515–526 (1988)

Communications in Mathematical Physics

Quasi homomorphismes, cohomologie cyclique et positivité

A. Connes et J. Cuntz*

Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 35, route de Chartres,
F-91440 Bures-sur-Yvette, France

Abstract. We show that cyclic cohomology of an algebra A is obtained from traces with suitable domains on the algebra qA of the second author. When A is a C^* algebra so is qA and the notion of positive trace makes sense. We hence get a notion of positivity for cyclic cocycles. We prove that a positive trace on qA defines a type I or II Fredholm module on A.

Introduction

La construction de [2] associe à tout module de Fredholm p-sommable pair $(\mathscr{h}, F, \varepsilon)$ sur une algèbre $\mathscr{A}$ et tout entier pair $n \geqq p-1$, un n-cocycle cyclique sur $\mathscr{A}$, le caractère de Chern de $(\mathscr{h}, F, \varepsilon)$. Soit $q\mathscr{A}$ l'algèbre universelle introduite dans [6]. Il résulte facilement de [6] qu'un module de Fredholm p-sommable pair est un homomorphisme de $q\mathscr{A}$ dans l'algèbre $\mathscr{L}^p(\mathscr{h}^+)$, idéal de Schatten des opérateurs p-sommables dans $\mathscr{h}^+ = \{\xi \in \mathscr{h}, \varepsilon\xi = \xi\}$. De manière équivalente c'est un quasi-homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans $J = \mathscr{L}^p(\mathscr{h}^+)$. La construction de [2] se prolonge facilement à tout homomorphisme de $q\mathscr{A}$ dans une algèbre J munie d'une trace de domaine J^n. Notre but est de montrer que réciproquement tout n-cocycle cyclique sur $\mathscr{A}$ est obtenu par cette construction. Nous abordons ensuite, quand $\mathscr{A}$ (et donc $q\mathscr{A}$) est une algèbre involutive sur $\mathbb{C}$, le problème de l'existence d'une trace positive sur $q\mathscr{A}$ de caractère de Chern donné. Cela nous conduit à la notion de cocycle positif $\tau \in \operatorname{Ker} b \cap \operatorname{Ker} B$, dont nous donnons de nombreux exemples.

I. Les algèbres $\Omega\mathscr{A}$ et $q\mathscr{A}$

Soient k un corps de caractéristique nulle et $\mathscr{A}$ une k-algèbre. Rappelons (cf. [6]) que $q\mathscr{A}$ désigne l'idéal engendré dans le produit libre $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ par les éléments de la forme:

$$q(x) = i(x) - \bar{i}(x), \qquad x \in \mathscr{A},$$

* Département de Mathématiques, Université de Luminy, Route L. Lachamp, F-13288 Marseille, France

où $i, \bar{i}$ sont les deux inclusions naturelles de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A} * \mathscr{A}$. On a, pour tous $x, y \in \mathscr{A}$ et en identifiant $\mathscr{A}$ avec $i(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A} * \mathscr{A}$ l'égalité:

$$q(xy) = q(x)y + xq(y) - q(x)\,q(y)\,. \tag{1}$$

On peut de manière équivalente définir $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ comme l'algèbre universelle engendrée par les symboles, x, $q(x)$, $x \in \mathscr{A}$ avec pour présentation la relation (1). L'idéal $q\mathscr{A}$ est formé par les combinaisons linéaires d'éléments de la forme $x^0 q(x^1) \dots q(x^n)$, et $q(x^1) \dots q(x^n)$ avec $x^i \in \mathscr{A}$, $n \geqq 1$.

De même, soit $\Omega\mathscr{A}$ l'algèbre différentielle universelle associée à $\mathscr{A}$ [1, 8, 2], engendrée par les symboles x, dx, $x \in \mathscr{A}$ avec pour présentation la relation

$$d(xy) = d(x)y + x\,d(y) \qquad \forall x, y \in \mathscr{A}\,. \tag{2}$$

Par construction $\Omega\mathscr{A}$ est l'algèbre graduée associée à la filtration de $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ par les ideaux $(q\mathscr{A})^n$. Les relations entre $\Omega\mathscr{A}$ et $q\mathscr{A}$ sont précisées par les résultats suivants:

Proposition 1. *Soit* $\Omega = \bigoplus_0^\infty \Omega^n$ *une k algèbre différentielle graduée,*

a) *Pour tout* $t \in k$ *l'égalité suivante définit un produit associatif et bilinéaire sur* Ω*:*

$$\omega_1 \cdot_t \omega_2 = \omega_1 \omega_2 \quad \textit{si} \quad \deg\omega_1 \quad \textit{est pair},$$

$$\omega_1 \cdot_t \omega_2 = \omega_1 \omega_2 + t\omega_1\, d\omega_2 \quad \textit{si} \quad \deg\omega_1 \quad \textit{est impair}.$$

b) *Soit* $\Omega_{(t)}$ *l'algèbre construite dans* a), *sa classe d'isomorphie ne dépend pas de t si* $t \neq 0$.

c) *L'algèbre graduée associée à la filtration de* $\Omega_{(t)}$ *par les ideaux* $\Omega_{(t)}^{(n)} = \bigoplus_n^\infty \Omega^k$ *est l'algèbre* Ω.

Les vérifications de a), b), c) sont immédiates.

Proposition 2. 1) *L'algèbre* $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ *est canoniquement isomorphe à* $(\Omega\mathscr{A})_{(1)}$ *par l'isomorphisme* π, $\pi(a) = a$, $\pi(q(a)) = da$, $\forall a \in \mathscr{A}$. *On a* $\pi(q\mathscr{A}) = (\Omega\mathscr{A})_{(1)}^{(1)}$.

2) *L'égalité* $\varrho(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a - q(a) \end{bmatrix}$, $\varrho(da) = \begin{bmatrix} 0 & -q(a) \\ q(a) & 0 \end{bmatrix}$ *définit un homomorphisme de* $\Omega\mathscr{A}$ *dans* $M_2(\mathscr{A} * \mathscr{A})$. *On a* $\varrho(\Omega^n\mathscr{A}) \subset M_2(q\mathscr{A})^n$ $\forall n \geqq 1$.

Démonstration. 1) Soit π la bijection linéaire de $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ sur Ω telle que

$$\pi(a^0 q(a^1) \dots q(a^n)) = a^0\, da^1 \dots da^n, \quad \pi(q(a^1) \dots q(a^n)) = da^1 \dots da^n \qquad \forall a^i \in \mathscr{A}\,.$$

Pour montrer que π est un homomorphisme de $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ dans $\Omega_{(1)}$ il suffit de vérifier que $\pi(qa)\,\pi(b) = \pi((qa)b)$ $\forall a, b \in \mathscr{A}$. On a

$$\pi(qa)\,\pi(b) = da \cdot b = (da)b + da\,db\,,$$

$$\pi((qa)b) = \pi(q(ab) - aq(b) + q(a)\,q(b)) = d(ab) - a\,db + da\,db\,.$$

2) L'application $a \to \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a - q(a) \end{bmatrix}$ est un homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans $M_2(\mathscr{A} * \mathscr{A})$ et l'application $a \to \delta(a) = \begin{bmatrix} 0 & -q(a) \\ q(a) & 0 \end{bmatrix}$ est une dérivation de $\mathscr{A}$ dans $M_2(\mathscr{A} * \mathscr{A})$, d'où le résultat. $\square$

On peut donc considérer $q\mathscr{A}$ comme une quantification de l'algèbre $\Omega^{(1)}\mathscr{A}$ des formes différentielles universelles sur $\mathscr{A}$ de degré $\geqq 1$. La famille $\Omega^{(1)}_{(t)}\mathscr{A}$ d'algèbres est une déformation de l'algèbre $\Omega^{(1)}\mathscr{A}$.

II. Traces paires et impaires sur $q\mathscr{A}$

Gardons les notations de I. Soit J^n l'idéal $(q\mathscr{A})^n$ de $\mathscr{A} * \mathscr{A}$, i.e. le sous-espace engendré par les éléments $x^0 q(x^1) \dots q(x^m)$, et $q(x^1) \dots q(x^m)$ avec $x^i \in \mathscr{A}$, $m \geqq n$. Par définition une trace de domaine J^n est une forme linéaire T sur J^n telle que:

$$T(\alpha\beta) = T(\beta\alpha) \qquad \forall \alpha \in J^k, \beta \in J^l, k+l=n. \tag{3}$$

(où l'on pose $J^0 = \mathscr{A} * \mathscr{A}$).

Proposition 3. *Soit T une trace de domaine J^{n+1}, n pair, l'égalité $\tau(x^0, \dots, x^n) = T(q(x^0) \dots q(x^n))$ définit un n-cocycle cyclique τ sur $\mathscr{A}$.*

Démonstration. On a $\tau(x^0, \dots, x^n) = T_s((x^0\, dx^1 \dots dx^n))$ où T_s est la trace graduée sur $M_2(q\mathscr{A})^n$ définie par $T_s\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = T(a_{11}) - T(a_{22})$ ce qui montre que τ définit un n-cocycle de Hochschild, $\tau \in Z^n(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$. La cyclicité de τ est évidente. □

On notera $Ch_n(T)$ le cocycle cyclique ainsi obtenu.

Lemme 4. *L'égalité $\sigma(x^0 q(x^1) \dots q(x^n)) = (-1)^n (x^0 - q(x^0))\, q(x^1) \dots q(x^n)$, $\sigma(q(x^1) \dots q(x^n)) = (-1)^n q(x^1) \dots q(x^n)$ $\forall x^i \in \mathscr{A}$ définit un automorphisme involutif de $\mathscr{A} * \mathscr{A}$. On a $\sigma(J^n) = J^n$ $\forall n$.*

Démonstration. C'est l'automorphisme qui échange les deux copies de $\mathscr{A}$. □

Nous dirons qu'une forme linéaire T sur J^n est paire (resp. impaire) ssi $T \circ \sigma = T$ (resp. $T \circ \sigma = -T$). Toute forme linéaire T sur J^n s'écrit de manière unique sous la forme $T = T_+ + T_-$ avec T_+ paire et T_- impaire.

Soit T une forme linéaire sur J^n, pour tout $m \geqq n$ on pose

$$T^{(m)}(x^0, x^1, \dots, x^m) = T(x^0 q(x^1) \dots q(x^m)) \qquad \forall x^i \in \mathscr{A}.$$

L'égalité $q(x^0) \dots q(x^m) = (\alpha - (-1)^m \sigma(\alpha))$ où $\alpha = x^0 q(x^1) \dots q(x^m)$ montre que:

$$\begin{aligned} T_+(q(x^0) \dots q(x^m)) &= 2T_+^{(m)}(x^0, \dots, x^m) && m \text{ impair} \\ &= 0 && m \text{ pair}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} T_-(q(x^0) \dots q(x^m)) &= 2T_-^{(m)}(x^0, \dots, x^m) && m \text{ pair} \\ &= 0 && m \text{ impair}. \end{aligned} \tag{5}$$

Il en résulte que toute forme linéaire impaire (resp. paire) sur J^n est déterminée par les formes multilinéaires $T^{(m)}$ $m \geqq n$ et la forme $T_-(q(x^1) \dots q(x^n))$ si n est impair [resp. $T_+(q(x^1) \dots q(x^n))$ si n est pair].

Proposition 5. *Soient T_+ et T_- des formes linéaires paires et impaires sur J^n, n entier impair et soient $T^{(m)}$ les formes multilinéaires associées sur $\mathscr{A}$, $m \geqq n$. Posons: $T_+^{(n-1)} = 0$ et*

$$T_-^{(n-1)}(x^1, \dots, x^n) = \tfrac{1}{2} T_-(q(x^1) \dots q(x^n)) \qquad \forall x^i \in \mathscr{A}.$$

1) *T_+ est une trace si et seulement si $bT_+^{(m)}=T_+^{(m+1)}$ et $(1+\lambda)T_+^{(m)}=0$ pour tout entier m impair, $m \geqq n$*[1].

2) *T_- est une trace si et seulement si $T_-^{(n-1)}$ est un cocycle cyclique et $bT_-^{(m)}=T_-^{(m+1)}$, $(1-\lambda)T_-^{(m)}=2b_0T_-^{(m-1)}$ pour tout entier m impair $m \geqq n$*[1].

Démonstration. Pour m impair, on a

$$x_0x_1q(x_2)\dots q(x_{m-1})=x_0q(x_1x_2)\,q(x_3)\dots q(x_{m+1})-x_0q(x_1)\,q(x_2x_3)\dots q(x_{m+1})+\dots$$
$$+x_0q(x_1)\dots q(x_mx_{m+1})-x_0q(x_1)\dots q(x_m)x_{m+1}+x_0q(x_1)\dots q(x_{m+1}).$$

Il en résulte que si T est une trace on a:

$$bT^{(m)}=T^{(m+1)} \qquad \forall m \text{ impair, } m \geqq n. \tag{6}$$

L'égalité (4) ci-dessus montre que si T_+ est une trace on a, avec m impair,

$$T_+^{(m)}(x^0,\dots,x^m)=T_+^{(m)}(x^1,\dots,x^m,x^0) \quad \text{i.e.} \quad T_+^{(m)}=-\lambda T_+^{(m)}.$$

La proposition 3 montre que si T_- est une trace on a $T_-^{(n-1)}\in Z_\lambda^{n-1}$. De plus, l'égalité $x^0q(x^1)\dots q(x^m)+q(x^0)\,x^1q(x^2)\dots q(x^m)=q(x^0x^1)\,q(x^2)\dots q(x^m)+q(x^0)\,q(x^1)\dots q(x^m)$ avec m impair, montre que si T_- est une trace on a $(1-\lambda)T_-^{(m)}=2b_0T_-^{(m-1)}$ en utilisant (5). Ainsi les conditions 1) et 2) sont nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Pour montrer que T est une trace, il suffit de montrer que $T(a\omega)=T(\omega a)$ et $T((qa)\omega)=T(\omega qa)$ pour tout $a\in\mathscr{A}$ et tout $\omega\in J^n$ (resp. J^{n-1}). Par hypothèse on a $bT^{(m)}=0$ pour m pair et $bT^{(m)}=T^{(m+1)}$ pour m impair, ce qui montre que $T(a\omega)=T(\omega a)$ pour tout ω de la forme $\omega=x^0q(x^1)\dots q(x^m)$. On a:

$$q(x^1)\dots q(x^m)x^0=\sum_1^m(-1)^{m-j}q(x^1)\dots q(x^jx^{j+1})\dots q(x^0)$$
$$+(-1)^m x^1q(x^2)\dots q(x^0)+\alpha q(x^1)\dots q(x^m)\,q(x^0), \tag{7}$$

où $\alpha=1$ si m est impair et $\alpha=0$ si m est pair. Avec $\omega=q(x^1)\dots q(x^m)$, l'égalité $T(x^0\omega)=T(\omega x^0)$ signifie donc:

Pour m impair et $T=T_+$ que:

$$T_+^{(m)}(x^0,\dots,x^m)=-T_+^{(m)}(x^1,\dots,x^m,x^0)+2T_+^{(m)}(x^1,\dots,x^m,x^0)$$

ce qui résulte de $(1+\lambda)T_+^{(m)}=0$.

Pour m pair et $T=T_+$ que:

$$T_+^{(m)}(x^0,\dots,x^m)=-2(b'T_+^{(m-1)})(x^1,\dots,x^m,x^0)+T_+^{(m)}(x^1,\dots,x^0)$$

ce qui résulte de l'égalité $Db=b'D$ (cf. [2]) appliquée à $T_+^{(m-1)}$[2].

Pour m impair et $T=T_-$, que:

$$T_-^{(m)}(x^0,\dots,x^m)=2(b'T_-^{(m-1)})(x^1,\dots,x^m,x^0)-T_-^{(m)}(x^1,\dots,x^m,x^0)$$

ce qui résulte de l'hypothèse: $(1-\lambda)T_-^{(m)}=2b_0T_-^{(m-1)}$ et de l'égalité $bT_-^{(m-1)}=0$ de sorte que $b'T_-^{(m-1)}=b_0T_-^{(m-1)}$.

---

[1] On pose $\lambda\varphi(x^0,\dots,x^m)=(-1)^m\varphi(x^m,x^0,\dots,x^{m-1})$ $\forall x^i\in\mathscr{A}$ et $(b_0\varphi)(x^0,\dots,x^{m+1})=(-1)^m\varphi(x^{m+1}x^0,x^1,\dots,x^m)$

[2] On pose (cf. [2]), $b'=b+b_0$, $D=1-\lambda$

Pour m pair et $T=T_-$, que:

$$T_-^{(m)}(x^0,\dots,x^m)=T_-^{(m)}(x^1,\dots,x^m,x^0), \tag{8}$$

i.e. que $DT_-^{(m)}=0$. Or pour $m=n-1$ ceci fait partie de l'hypothèse et pour $m>n$ on a $T_-^{(m)}=bT_-^{(m-1)}$, $DT_-^{(m)}=DbT_-^{(m-1)}=b'DT_-^{(m-1)}=b'\,2b'T_-^{(m-2)}=0$.

Il reste à vérifier que $T((qa)\omega)=T(\omega(qa))$ pour tout $a\in\mathscr{A}$ et $\omega\in J^{n-1}$. Si $\omega=q(a^1)\dots q(a^m)$ cela résulte des égalités (4), (5) et $(1+\lambda)T_+^{(m)}=0$, m impair, $(1-\lambda)T_-^{(m)}=0$, m pair.

On a:

$$\begin{aligned} q(x^{m+1})x^0q(x^1)\dots q(x^m)&=q(x^{m+1}x^0)q(x^1)\dots q(x^m)\\ &-x^{m+1}q(x^0)q(x^1)\dots q(x^m)+q(x^{m+1})q(x^0)q(x^1)\dots q(x^m). \end{aligned}\tag{9}$$

L'égalité $T(q(x^{m+1})\omega)=T(\omega q(x^{m+1}))$ avec $\omega=x^0q(x^1)\dots q(x^m)$ signifie donc:

Pour m pair et $T=T_+$, que:

$$T_+(x^0,\dots,x^{m+1})+T_+(x^{m+1},x^0,\dots,x^m)=2T_+(x^{m+1},x^0,\dots,x^m)$$

ce qui résulte de l'hypothèse $(1+\lambda)T_+^{(m+1)}=0$.

Pour m impair et $T=T_+$, que:

$$T_+^{(m+1)}(x^0,\dots,x^{m+1})+T_+^{(m+1)}(x^{m+1},\dots,x^m)=2T_+^{(m)}(x^{m+1}x^0,\dots,x^m),$$

i.e. que $(b+\lambda b)T_+^{(m)}=-2b_0T_+^{(m)}$ ce qui résulte de l'égalité $\lambda b=b\lambda-b_0(1-\lambda)$ et de l'hypothèse $T_+^{(m)}=-\lambda T_+^{(m)}$. [L'égalité $\lambda b=b-b_0(1-\lambda)$ est une reformulation de $Db=b'D$.]

Pour m pair et $T=T_-$ que:

$$T_-^{(m+1)}(x^0,\dots,x^{m+1})+T_-^{(m+1)}(x^{m+1},\dots,x^m)=2T_-^{(m)}(x^{m+1}x^0,\dots,x^m)$$

ce qui résulte de $(1-\lambda)T_-^{(m+1)}=2b_0T_-^{(m)}$.

Pour m impair et $T=T_-$, que:

$$T_-^{(m+1)}(x^0,\dots,x^{m+1})+T_-^{(m+1)}(x^{m+1},\dots,x^m)=2T_-^{(m+1)}(x^{m+1},x^0,\dots,x^m)$$

ce qui résulte de l'égalité (8) ci-dessus. □

Il résulte directement de la proposition 5 1) qu'il existe toujours une abondance de traces *paires* sur J^n. Il suffit en effet de choisir pour tout entier impair $m\geqq n$, une forme $m+1$ linéaire f_m sur $\mathscr{A}$ telle que:

$$f_m(x^m,x^0,\dots,x^{m-1})=f_m(x^0,x^1,\dots,x^m)\qquad\forall x^i\in\mathscr{A}$$

et de poser $T_+^{(m)}=f_m$ $\forall m$ impair, $T_+^{(m)}=bf_{m-1}$ $\forall m$ pair.

III. Traces impaires sur $q\mathscr{A}$ et cohomologie cyclique

L'égalité $b_0=b'-b$ montre que l'on peut reformuler la condition 2) de la proposition 5 sous la forme:

a) $T_-^{(m-1)}$ est un cocycle cyclique
b) $bT_-^{(m)}=T_-^{(m+1)}$ pour m impair
c) $DT_-^{(m)}=2b'T_-^{(m-1)}$ pour m impair.

Soit alors $\mathscr{C}$ le bicomplexe (cf. [3, 9]) obtenu en posant $C^{n,m} = C^m(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$ et:

$$\begin{aligned} d_1 &= D : C^{n,m} \to C^{n+1,m} && \text{si } n \text{ est pair},\\ d_1 &= A : C^{n,m} \to C^{n+1,m} && \text{si } n \text{ est impair},\\ d_2 &= b : C^{n,m} \to C^{n,m+1} && \text{si } n \text{ est pair},\\ d_2 &= b' : C^{n,m} \to C^{n,m+1} && \text{si } n \text{ est impair}. \end{aligned}$$

L'existence, étant donné un cocycle cyclique $\varphi \in Z_\lambda^{(n-1)}(\mathscr{A})$ d'une trace impaire T sur J^n (n impair) telle que $T_-^{(n-1)} = \varphi$ résulte facilement de l'exactitude des lignes dans le bicomplexe ci-dessus. Plus précisément considérons l'opérateur $A' : C^n(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*) \to C^n(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$, $A'\varphi = \dfrac{-1}{n+1}(1 + 2\lambda + 3\lambda^2 + \ldots + (n+1)\lambda^n)\varphi$, on a:

Proposition 6. *Soit $\varphi \in Z_\lambda^{(n-1)}(\mathscr{A})$ un cocycle cyclique. La trace impaire T_- la plus générale sur J^n telle que $T_-^{(n-1)} = \varphi$ est de la forme $T_- = T_1 + T_2$ où:*

1) *T_1 est déterminé de manière unique par les égalités: $T_1^{(n-1)} = \varphi$, $T_1^{(m)} = 2A'b'T_1^{(m-1)}$, m impair, $T_1^{(m)} = bT_1^{(m-1)}$ m pair.*

2) *T_2 est déterminé par une suite arbitraire $\varphi_m \in C_\lambda^m(\mathscr{A})$, m impair, $m \geqq n$, par les égalités:*

$$T_2^{(n-1)} = 0,\ T_2^{(n)} = \varphi_n,\ T_2^{(m)} = b\varphi_{m-1},\quad m \text{ pair},\quad T_2^{(m)} = \varphi_m + K\varphi_{m-2},$$

$$m \text{ impair, où}\quad K\varphi = 2A'b'b\varphi - \alpha S\varphi,\ \alpha = \frac{2(m+3)}{2i\pi(m+1)^2},\quad \forall \varphi \in C_\lambda^m.$$

Démonstration. L'égalité $DA' = 1 - \dfrac{1}{n+1}A$ montre que les égalités 1) déterminent une trace impaire T_1 telle que $T_1^{(n-1)} = \varphi$. On peut donc supposer que $\varphi = 0$. On a alors $DT_1^{(n)} = 0$ et on peut choisir pour $T_2^{(n)}$ n'importe quel élément de C_λ^n. Pour conclure il suffit de vérifier que pour tout m impair et $\psi \in C_\lambda^m$ les égalités $T^{(k)} = 0$, $k = n-1, n, \ldots, m-1$, $T^{(m)} = \Psi$, $T^{(m+1)} = b\Psi$, $T^{(m+2)} = K\Psi$, $T^{(q)} = 0$ $\forall q > m+2$, déterminent une trace impaire, i.e. vérifient a), b), c). Cela revient à montrer que $bK\Psi = 0$ et que $DK\Psi = 2b'b\Psi$, ce qui résulte de [2, p. 322, Lemma 11b]. □

Corollaire 7. *Soit p un entier pair:*

1) *L'application $T \to T^{(p)}$ induit un isomorphisme du quotient {Traces sur J^{p+1}}/{Traces sur J^{p-1} avec $T^{(p-2)} = 0$} avec $H_\lambda^p(\mathscr{A})$.*

2) *L'application ci-dessus induit un isomorphisme du quotient: {Traces sur J^{p+1}}/{Traces sur J^{p-1}} avec $H_\lambda^p(\mathscr{A})/SH_\lambda^{p-2}(\mathscr{A})$.*

3) *On a un isomorphisme $H^{\mathrm{ev}}(\mathscr{A}) = \lim\limits_p$ {Traces sur J^{p+1}}/{Traces sur J avec $T^{(0)} = 0$}.*

Cela montre que la cohomologie cyclique de dimension paire s'introduit de façon naturelle à partir des traces sur $q\mathscr{A}$. Considérons maintenant le cas de la cohomologie cyclique de dimension impaire. Le groupe de Kasparov $KK_1(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ se décrit d'après [11] comme l'ensemble $[\varepsilon\mathscr{A}, k \otimes \mathscr{B}]$ des classes d'homotopie d'homomorphismes de $\varepsilon\mathscr{A}$ dans $k \otimes \mathscr{B}$, $\varepsilon\mathscr{A}$ est le produit croisé $q\mathscr{A} \times_\sigma \mathbb{Z}/2$ de $q\mathscr{A}$

par l'automorphisme σ. Par analogie avec ce qui a été dit plus haut on s'intéresse donc aux traces sur les ideaux $\hat{J}^n=(\varepsilon\mathscr{A})^n$ de $\varepsilon\mathscr{A}$. Le domaine naturel d'une trace est $\hat{J}^{n+1}$ avec n impair. Soit $\hat{\sigma}$ l'automorphisme de $\varepsilon\mathscr{A}$ dual de σ. Les traces $\hat{\sigma}$ invariantes sur $\hat{J}^{n+1}$ sont exactement les traces duales $\hat{T}$ de traces σ invariantes sur J^{n+1} et sont donc décrites par la proposition 5 1).

Les traces T sur $\hat{J}^{n+1}$ telles que $T\circ\hat{\sigma}=-T$ correspondent exactement aux σ-traces sur J^{n+1}, c'est-à-dire aux formes linéaires T' sur J^{n+1} telles que:

$$T'(\alpha\beta)=T'(\beta\sigma(\alpha)) \qquad \forall\alpha\in J^p,\ \beta\in J^q,\ p+q=n+1\,.$$

En décrivant l'élément général de $\varepsilon\mathscr{A}$ sous la forme $x=a+bF$ ou $F^2=1$ et $FbF=\sigma(b)$ on a:

$$T(a+bF)=T'(b) \qquad \forall a,b\in J^{n+1}\,.$$

Etant donné une σ-trace T sur J^{n+1} on pose

$$T^{(n)}(x_0,\dots,x_n)=T(qx_0qx_1\dots qx_n)\,.$$

La démonstration de la proposition suivante est strictement analogue à celle de la proposition 5.

Proposition 8. *Pour qu'une forme linéaire T sur J^{n+1} soit une σ-trace il faut et il suffit que* a) $T^{(n)}\in Z^n_\lambda(\mathscr{A})$, b) $DT^{(m)}=2b'T^{(m-1)}$ *m pair,* c) $T^{(m)}=bT^{(m-1)}$ *m impair.*

On obtient alors une réciproque à la proposition 7.4 de [2] part I.

IV. Traces positives sur $q\mathscr{A}$ et cocycles positifs

Pour l'étude des traces *positives* sur $q\mathscr{A}$ dans le cas où $\mathscr{A}$ est une algèbre involutive nous commençons par reformuler la caractérisation (proposition 5) des traces sur $q\mathscr{A}$ en utilisant l'algèbre $\tilde{\mathscr{A}}$ obtenue en adjoignant une unité à $\mathscr{A}$. Formons le produit libre $\tilde{\mathscr{A}} \underset{\mathbb{C}}{*} \tilde{\mathscr{A}}$ relativement à l'unité, c'est un quotient de $\tilde{\mathscr{A}} * \tilde{\mathscr{A}}$ et l'image de $q\tilde{\mathscr{A}}$ dans ce quotient est isomorphe à $q\mathscr{A}$. En fait ceci revient à décrire $q\mathscr{A}$ à partir des monomes $a^0q(a^1)\dots q(a^n)$, $a^i\in\tilde{\mathscr{A}}$, $n\geqq 1$ avec les relations supplémentaires $1q(a)=q(a)$ $\forall a\in\tilde{\mathscr{A}}$; $q(1)=0$.

Chaque trace T sur $J^n\subset q\mathscr{A}$ induit une trace $\tilde{T}$ sur l'idéal correspondant $\tilde{J}^n$ de $q\tilde{\mathscr{A}}$ et donc des formes multilinéaires $\tilde{T}^{(m)}=\omega_m$ sur $\tilde{\mathscr{A}}$. Comme $\tilde{T}$ est nulle sur l'idéal engendré par $q(1)$ et $1q(a)-q(a)$, $a\in\tilde{\mathscr{A}}$ on a, avec $\tilde{T}=\tilde{T}_+ +\tilde{T}_-$,

1) $\omega_m(x^0,\dots,x^m)=0$ si $x^i=1$ pour un $i\neq 0$.

2) $\omega_m(1,x^0,\dots,x^{m-1})=\begin{cases}2\tilde{T}_+^{(m-1)}(x^0,\dots,x^{m-1}) & \text{si } m \text{ est pair}\\ 2\tilde{T}_-^{(m-1)}(x^0,\dots,x^{m-1}) & \text{si } m \text{ est impair}\end{cases}$

En particulier pour m pair on voit que $B_0\omega_m$ est invariant par permutations cycliques[3], [i.e. $(1+\lambda)B_0\omega_m=0$]. Il en résulte que $AB_0\omega_m=0$, i.e. que $\omega_m\in\operatorname{Ker}B\cap\operatorname{Ker}b$ (cf. [2]). Le lemme II.30 de [2] donne une manière canonique de corriger un tel cocycle pour en faire un cocycle cyclique:

[3] On pose $(B_0\varphi)(x^0,\dots,x^{m-1})=\varphi(1,x^0,\dots,x^{m-1})-(-1)^m\varphi(x^0,\dots,x^{m-1},1)$

Lemme 9. *Soient $\mathscr{B}$ une algèbre unifère, m un nombre pair et ω une forme $(m-1)$-linéaire sur $\mathscr{B}$ telle que:*

a) $b\omega=0$ b) $B_0\omega$ *est invariante par permutations cycliques alors* $\omega'=\omega-\frac{1}{2}bB_0\omega$ *est un cocycle cyclique et* $\omega'-\omega\in b(\operatorname{Im}B)$.

Démonstration. Cf. [2, Lemme II.30].

Proposition 10. *Soit T une fonctionelle linéaire sur J^n, n pair. Soient ω_m les formes multilinéaires normalisées associées sur $\tilde{\mathscr{A}}$. Alors T est une trace si et seulement si:*

a) *Pour m pair* $b\omega_m=0$ *et* $(1+\lambda)B_0\omega_m=0$,

b) *Pour m impair* $b\omega_m=\omega_{m+1}$, $B_0\omega_m=2\omega'_{m-1}$.

Démonstration. Pour montrer que ces conditions sont nécessaires il suffit d'utiliser 1) et 2) et la proposition 5. On a pour m impair,

$B_0\omega_m=2\tilde{T}_-^{(m-1)}$, $\omega'_{m-1}=\omega_{m-1}-\frac{1}{2}bB_0\omega_{m-1}=\omega_{m-1}-b\tilde{T}_+^{(m-2)}$
$=\omega_{m-1}-\tilde{T}_+^{(m-1)}$ de sorte que l'égalité $B_0\omega_m=2\omega'_{m-1}$ résulte de:
$\omega_{m-1}=\tilde{T}^{(m-1)}=\tilde{T}_+^{(m-1)}+\tilde{T}_-^{(m-1)}$.

La suffisance résulte de la proposition 5 ou se démontre par calcul direct. □

Nous supposons désormais que $k=\mathbb{C}$ et que $\mathscr{A}$ est une algèbre involutive. Il en est de même de $\tilde{\mathscr{A}}$, $\mathscr{A}*\mathscr{A}$, et de $q\mathscr{A}$, on a de plus:

$$(qa)^*=q(a^*)\qquad \forall a\in\mathscr{A}.$$

Une trace T sur J^n, n pair est *positive* si et seulement si on a

$$T(\beta^*\beta)\geqq 0\qquad \forall\beta\in J^{n/2}.$$

Il en résulte que $\tilde{T}$ est positive et que pour tout entier pair $2m\geqq n$ la forme sesquilinéaire sur $\tilde{\mathscr{A}}^{\otimes(m+1)}$ définie par

$$\begin{aligned}\langle a^0\otimes\ldots\otimes a^m, b^0\otimes\ldots\otimes b^m\rangle &= \tilde{T}(a^0q(a^1)\ldots q(a^m)q(b^{m*})\ldots q(b^1)^*b^{*0})\\ &=\omega_{2m}(b^{0*}a^0, a^1,\ldots,a^m,b^{m*},\ldots,b^{1*})\end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire positive.

La proposition montre que de plus on a $b\omega_{2m}=0$, $(1+\lambda)B_0\omega_{2m}=0$. Nous adopterons la définition suivante.

Définition. Soient n un entier pair, $\mathscr{A}$ une algèbre involutive unifère (sur $\mathbb{C}$) et ω une forme $(n+1)$-linéaire sur $\mathscr{A}$. Nous dirons que ω est un cocycle positif si et seulement si:

a) $b\omega=0$, $(1+\lambda)B_0\omega=0$,

b) La forme sesquilinéaire sur $\mathscr{A}^{\otimes(p+1)}$, $p=n/2$ définie ci-dessous est positive: $\langle a^0\otimes\ldots\otimes a^p, b^0\otimes\ldots\otimes b^p\rangle=\omega(b^{0*}a^0,a^1,\ldots,a^p,b^{p*},\ldots,b^{1*})$.

On a donc:

Proposition 11. *Soit T une trace positive sur J^n alors les formes $\omega_{2m}=\tilde{T}^{(2m)}$ sont des cocycles positifs, pour tout $m\geqq n/2$.*

La réciproque est manifestement fausse. Passons à des exemples.

Exemple 1. Soit M une surface de Riemann compacte et $\mathscr{A}=C^\infty(M)$ l'algèbre involutive des fonctions de classe C^∞ sur M à valeurs complexes. L'égalité

$$\tau(f^0,f^1,f^2)=2/i\int_M f^0\,\partial f^1\,\bar\partial f^2$$

définit un 2-cocycle positif sur $\mathscr{A}$.

Exemple 2. Soit M une variété Kählerienne compacte et soit Ω la 2-forme fermée canonique. L'égalité $\tau(f^0,f^1,f^2)=2/i\int_M f^0\,\partial f^1\,\bar\partial f^2\Omega^{n-1}$, où $n=\dim_{\mathbb{C}}(M)$ définit un 2 cocycle positif sur $\mathscr{A}=C^\infty(M)$.

Exemple 3. Soit M^{2k} une variété Riemannienne compacte et $\mathscr{A}=C^\infty(M)$. Dotons les formes différentielles sur M du produit de Clifford noté $\omega_1\cdot\omega_2$. Supposons M orientée et soit ε la forme correspondante. Posons, pour $f^i\in\mathscr{A}$,

$$\tau(f^0,\dots,f^{2k})=\int_M \operatorname{Trace}((1+\varepsilon)f^0\cdot df^2\dots df^{2k})|\varepsilon|\,.$$

On obtient ainsi un cocycle positif sur M qui ne dépend que de la classe conforme de la métrique Riemannienne.

Exemple 4. Soient $\mathscr{A}_\theta$ l'algèbre des élements de classe C^∞ dans la C^*-algèbre A_θ [4, 5] δ_1,δ_2 les dérivations canoniques de cette algèbre et Tr la trace canonique. Pour tout nombre complexe z, $\operatorname{Im} z>0$, l'égalité $\tau(f^0,f^1,f^2)=\operatorname{Tr}(f^0(\delta_1+z\delta_2)f^1(\delta_1+\bar z\delta_2)f^2)$ définit un 2 cocycle positif dur $\mathscr{A}_\theta$.

V. Régularité des traces positives sur $q\mathscr{A}$

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre involutive, $n=2p$ un entier pair, et T une trace positive sur $J^n\subset q\mathscr{A}$. Munissons J^p de la structure d'espace préhilbertien définie par le produit scalaire:

$$\langle\alpha,\beta\rangle=T(\alpha\beta^*)\qquad\forall\alpha,\beta\in J^p\,.$$

Comme T est une trace on a $T(\alpha\beta^*)=T(\beta^*\alpha)$ et donc

$$\langle\beta^*,\alpha^*\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle\qquad\forall\alpha,\beta\in J^p\,.\tag{1}$$

Par construction J^p est une algèbre involutive munie d'un produit scalaire vérifiant les conditions (1) et:

$$\langle\alpha\beta,\gamma\rangle=\langle\beta,\alpha^*\gamma\rangle\qquad\forall\alpha,\beta,\gamma\in J^p\,.\tag{2}$$

Pour que J^p soit une algèbre Hilbertienne il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifées: [7].

$$\text{Pour tout }\alpha\in J^p\text{ il existe }c<\infty\text{ avec:}\quad\langle\alpha\beta,\alpha\beta\rangle\leqq c\langle\beta,\beta\rangle\qquad\forall\beta\in J^p\,.\tag{3}$$

$$\{\alpha\beta;\alpha,\beta\in J^p\}\text{ est total dans l'espace préhilbertien }J^p\,.\tag{4}$$

Nous commençons par montrer que la condition (3) est automatiquement satisfaite lorsque $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre involutive d'une C^* algèbre et est stable par calcul fonctionnel holomorphe, on a:

Proposition 12. *Soit $\mathscr{A}$ une sous-algèbre involutive d'une C^* algèbre A. Supposons que pour tout $a \in \mathscr{A}$ et $\varepsilon > 0$ il existe $x \in \mathscr{A}$ avec*

$$a^*a + x^*x = (\|a\|^2 + \varepsilon)1 .$$

Alors pour toute trace positive T sur $J^n \subset q\mathscr{A}$ la condition (3) *est vérifiee.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $a \in \mathscr{A}$ les opérateurs de multiplication à gauche dans J^p par les éléments a et $a - q(a)$ de $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ sont bornés. Or toute représentation involutive de $\tilde{\mathscr{A}}$ est automatiquement bornée. □

Avec les hypothèses de la proposition ci-dessus, soit $\mathscr{h}_T$ l'espace Hilbertien séparé complété de J^p muni du produit scalaire $\langle \alpha, \beta \rangle = T(\alpha\beta^*)$ $\forall \alpha, \beta \in J^p$. Notons λ_T la représentation de $\mathscr{A} * \mathscr{A}$ dans $\mathscr{h}_T$ par multiplication à gauche. Il n'est pas vrai en général que J^p vérifie la condition (4), en fait (4) est vérifiée si et seulement si la représentation λ_T de l'algèbre $q\mathscr{A}$ dans $\mathscr{h}_T$ est *non dégénérée.* On a cependant:

Lemme 13. *Soit $\mathscr{A}$ une sous algèbre involutive d'une C^* algèbre stable par calcul fonctionnel holomorphe et soit T une trace positive sur J^n, $n = 2p$. Munissons $\mathscr{U} = J^{p+1}$ du produit scalaire $\langle \alpha, \beta \rangle = T(\alpha\beta^*)$ alors $\mathscr{U}$ est une algèbre Hilbertienne, i.e. vérifie* 1), 2), 3), 4).

Démonstration. Les conditions 1), 2), 3) sont déjà vérifiées. Il reste à montrer que $\mathscr{U}^2$ est dense dans $\mathscr{U}$. Pour cela il suffit de montrer que tout $\xi \in \mathscr{U}$ de la forme $\alpha\omega$, $\alpha \in J = q\mathscr{A}$, $\omega \in J^p$ est dans l'adhérence de $\mathscr{U}^2$. Comme l'opérateur $x = \lambda(\alpha)$ de multiplication à gauche par α est borné on peut supposer que $\|x\| < 1$. Pour tout entier $m > 0$ on a $p_j((xx^*)^m)x \xrightarrow[j \to \infty]{} x$ fortement, où $p_j(t) = 1 - (1-t)^j$ [10], ainsi

$$p_j((xx^*)^m)x\omega \to x\omega .$$

Pour m assez grand on a $(\alpha\alpha^*)^m \in J^{p+1} = \mathscr{U}$ d'où le résultat. □

L'inclusion $J^{p+1} \subset J^p$ définit une isométrie v de l'espace Hilbertien séparé complète de $\mathscr{U}$, noté $\mathscr{h}'_T$ dans $\mathscr{h}_T$. On a $vv^* = P$ le projecteur orthogonal de $\mathscr{h}_T$ sur l'adhérence de $\lambda_T(q\mathscr{A})\mathscr{h}_T$. Par construction P commute avec $\lambda_T(x)$ pour tout $x \in \mathscr{A} * \mathscr{A}$ et la restriction de $\lambda_T(x)$ à $\mathscr{h}'_T$ est l'opérateur $\lambda'_T(x)$ de multiplication à gauche par x dans $\mathscr{U}$.

Lemme 14. *Soient N l'algèbre de von Neumann à gauche de $\mathscr{U}$ et τ la trace normale semifinie fidèle correspondante.*

1) *Pour tout $\alpha \in q\mathscr{A}$ on a $\lambda'_T(\alpha) \in L^{2p}(N, \tau)$.*
2) *$T' = \tau \circ \lambda'_T$ est une trace positive sur J^n qui coincide avec T sur J^{n+1}.*

Démonstration. 1) Pour tout $x \in \mathscr{A} * \mathscr{A}$, $\lambda'_T(x)$ commute avec les multiplications à droite et donc appartient à N. Pour $\alpha \in q\mathscr{A}$ il s'agit de montrer que $(\alpha^*\alpha)^p \in \mathrm{Dom}(\tau)$. Il suffit pour cela de montrer que si $\omega \in J^p$ on a $\omega \in \mathrm{Dom}^{1/2}(\tau)$, i.e.

$$\mathrm{Sup}\{\|\omega\eta\|, \eta \in \mathscr{U}, \|\varrho(\eta)\| \leqq 1\} < \infty ,$$

où $\varrho(\eta)$ est l'opérateur de multiplication à droite par η. Mais l'opérateur $\varrho(\eta)$ est la restriction à $\mathscr{h}'_T$ de l'opérateur $\varrho_1(\eta)$ de multiplication à droite par η dans $\mathscr{h}_T$, dont l'image est contenu dans $\mathscr{h}'_T$. Ainsi

$$\|\varrho_1(\eta)\| = \|\varrho(\eta)\| \leqq 1 \quad \text{et} \quad \|\omega\eta\| = \|\varrho_1(\eta)\omega\| \leqq \|\omega\| .$$

2) D'après le 1) on a $\lambda'_T(J) \subset L^{2p}(N,\tau)$ et donc $\lambda'_T(J^n) \subset L^1(N,\tau)$ grâce à l'inégalité de Holder, ainsi T' est une trace positive sur J^n. Pour $\alpha, \beta \in J^p$ on a:

$$T'(\alpha\beta) = \langle P\alpha, \beta^* \rangle$$

comme on le voit en construisant une suite $\eta_n \in J^{p+1}$ telle que $\varrho_1(\eta_n) \to P$ [10].

Pour $\alpha \in J^{p+1}$ on a $P\alpha = \alpha$, d'où:

$$T'(\alpha\beta) = \langle \alpha, \beta^* \rangle = T(\alpha\beta) \qquad \forall \alpha \in J^{p+1},\ \beta \in J^p . \quad \square$$

Théorème 15. *Soit $\mathscr{A}$ une sous-algèbre involutive d'une C^* algèbre A, stable par calcul fonctionnel holomorphe. Soit T une trace positive sur J^n, $n=2p$. Il existe alors une algèbre de von Neumann N munie d'une trace semifinie τ normale et fidèle et un N-module de Fredholm n-sommable sur $\mathscr{A}$, $\mathscr{E} \in KK(A,N)$ dont le caractère de dimension n est égal à $Ch_n(T)$.*

Démonstration. La construction ci-dessus donne deux homomorphismes π et $\bar{\pi}$ de A dans N tels que:

$$\pi(x) - \bar{\pi}(x) \in L^n(N,\tau) \qquad \forall x \in \mathscr{A} .$$

Le caractère du N-module de Fredholm correspondant se calcule en utilisant uniquement $\tau(q(x^0) \dots q(x^n))$, où $q(x) = \pi(x) - \bar{\pi}(x)$, $x \in \mathscr{A}$ et donc uniquement la restriction de T' à J^{n+1} d'où le résultat. $\square$

Remarque. Nous dirons qu'une trace positive sur J^n, $n=2p$ est régulière si le projecteur P défini ci-dessus est égal à 1. Une trace positive quelconque T sur J^n se décompose toujours comme $T = T_{\text{reg}} + T_{\text{sing}}$ ($T_{\text{reg}} = T'$ avec les notations ci-dessus), où T_{reg} est régulière tandis que T_{sing} est singulière dans le sens que la représentation $\lambda_{T_{\text{sing}}}$ de $q\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}(h_{T_{\text{sing}}})$ est nulle. L'argument ci-dessus montre en outre que $ch_n(T) = ch_n(T_{\text{reg}})$ et que $T_{\text{sing}} = (T_{\text{sing}})_+$. Les traces singulières sur J^n ont une structure très simple: On a $T_{\text{sing}}^{(k)} = 0$ pour $k \neq n, n-1$ et $(1+\lambda)T_{\text{sing}}^{(n-1)} = 0$, $b(T_{\text{sing}}^{(n-1)}) = T_{\text{sing}}^{(n)}$.

En ce qui concerne les traces régulières on démontre aisément les propriétés suivantes:

(a) Soit T une trace positive régulière sur J^n, $n=2p$, telle que $T_+^{(n+2k-1)} = 0$ pour un $k \geqq 0$. Alors $T=0$.

(b) Soient T_1, T_2 deux traces régulières positives sur J^n telles que les restrictions $T_1|_{J^{n+2k}}$, $T_2|_{J^{n+2k}}$ coincident pour un $k \geqq 0$. Alors $T_1 = T_2$.

Bibliographie

1. Arveson, W.: The harmonic analysis of automorphism groups. Proc. Symp. Pure Math., Vol. 38, Part 2
2. Connes, A.: Non-commutative differential geometry. Publ. Math. IHES, **62**, 257–360 (1985)
3. Connes, A.: Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n. C. R. Acad. Sci. Par. **296**, 953–958 (1983)

4. Connes, A.: C^* algèbres et géométrie différentielle. C. R. Acad. Sci. Par. **290**, 559–604 (1980)
5. Connes, A., Rieffel, M.: Yang Mills for non-commutative two tori. Contemp. Math. **62**, 237–265 (1987)
6. Cuntz, J.: A new look at KK theory. K. Theory **1**, (1987)
7. Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, Deuxième édition. Paris: Gauthier Villars 1969
8. Karoubi, M.: Connexions, courbure et classes caractéristiques en K theorie algébrique. Can. Math. Soc. Proc. **2**, 19–27 (1982)
9. Loday, J.L., Quillen, D.: Cyclic homology and the Lie algebra of matrices. C. R. Acad. Sci. Par. Serie 1
10. Takesaki, M.: Tomita's theory and its applications. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 128. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970
11. Zekri, R.: A new description of Kasparov's theory of C^* algebra extensions. CPT 86/P. 1986. Marseille-Luminy

Communicated by A. Jaffe

Received July 13, 1987