ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki.* Note (*) de M. **Alain Connes**, transmise par M. Gaston Julia.

Nous montrons grâce à l'invariant **S** de [2] que si les $\mathbf{M}_\lambda$, $0 < \lambda < 1/2$, sont les facteurs de Powers, et **N** une algèbre semifinie $\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}_\lambda$ et $\mathbf{N} \otimes \mathbf{M}_{\lambda'}$ sont non isomorphes pour $\lambda \neq \lambda'$. Pour un ITPFI de type III, $\mathbf{S}(\mathbf{M}) = r_\infty(\mathbf{M})$, preuve simple de l'invariance de l'« asymptotic ratio set » d'Araki et Woods. Pour un ITPFI, nous calculons l'invariant ρ de [1] grâce à un second invariant **T**, ensemble des périodes possibles des groupes d'automorphismes modulaires.

Pour une algèbre de von Neumann de genre dénombrable, **M**, on pose [*cf.* [2]] $\mathbf{S}(\mathbf{M}) = \bigcap \text{Spectre } \Delta_\varphi$, φ état normal fidèle sur **M**; par abus de langage, nous omettons $0 \in \mathbf{S}(\mathbf{M})$ dans certains cas, vu que :

$$0 \notin \mathrm{S}(\mathbf{M}) \iff \mathbf{M} \text{ finie} \iff \mathbf{S}(\mathbf{M}) = \{1\}.$$

Pour un ITPFI, $(\mathbf{M}, \Omega) = \bigotimes_{\nu \in \mathrm{A}} (\mathbf{M}_\nu, \Omega_\nu)$ nous notons comme [1], nous supposons Ω_ν séparateur et totalisateur pour $\mathbf{M}_\nu$. On pose $\mathbf{R}_u = \mathbf{M}_\lambda$, $u = (1 - 2\lambda)/(1 + 2\lambda)$, où les $\mathbf{M}_\lambda$ sont les facteurs de Powers, $0 < \lambda < 1/2$.

Théorème 1. — *Soient* **M** *un facteur* ITPFI *de type* III, *et* $0 < u < 1$; (*a*), (*b*), (*c*) *sont équivalents :*

(*a*) $u \in r_\infty(\mathbf{M}, \Omega)$ [1];

(*b*) $\mathbf{M} \otimes \mathbf{R}_u$ *isomorphe à* **M**;

(*c*) $u \in \mathrm{S}(\mathbf{M})$.

Pour (*a*) entraîne (*b*), *voir* [1]; pour (*b*) entraîne (*c*) on a :

Lemme 2. — *Pour toute algèbre de genre dénombrable* **M**, *et* $0 < u < 1$, $\mathbf{S}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{R}_u) \supset \{ u^k, k \in \mathbf{Z} \}$.

Fixons $k > 0$; par [2], la suite

$$\mathrm{X}_n = \Pi_{n+1}(z) \ldots \Pi_{n+k}(z) \quad [\text{resp. } \mathrm{Y}_n = \Pi'_{n+1}(z) \ldots \Pi'_{n+k}(z)]$$

d'éléments de $\mathbf{R}_u$ (resp. $\mathbf{R}'_u$) vérifie $\| \mathrm{X}_n \alpha \| \to \| \alpha \|$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{h}_u$, et les suites $u^{k/2} \mathrm{X}_n - \mathrm{Y}_n$, $\mathrm{X}^*_n - u^{k/2} \mathrm{Y}^*_n$ tendent fortement vers zéro.

Soit $x_n = \mathrm{X}_n \otimes 1_\mathrm{M}$, $y_n = \mathrm{Y}_n \otimes 1_{\mathrm{M}'}$; on vérifie que $x^*_n x_n$ tend vers 1 faiblement, $u^{k/2} x_n - y_n$ et $x^*_n - u^{k/2} y^*_n$ vers zéro fortement; de plus [*voir* [2]], on a :

Lemme 3. — *Soit* **N** *une algèbre de von Neumann dans* $\mathfrak{h}$, β *un vecteur séparateur et totalisateur*, $\varepsilon > 0$, $u \geq 0$.

(*a*) *Soit* $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}'$ *avec*

$$\| x \beta \| = 1, \quad \left\| u^{\frac{1}{2}} x \beta - y \beta \right\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left\| x^* \beta - u^{\frac{1}{2}} y^* \beta \right\| < \varepsilon;$$

alors distance ($u^{1/2}$, *Spectre* $\Delta_\beta^{1/2}$) $< 2\varepsilon$.

(*b*) *Si distance* ($u^{1/2}$, *Spectre* $\Delta_\beta^{1/2}$) $< \varepsilon$, *il existe* $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}'$ *vérifiant* (*a*).

Montrons (*c*) entraîne (*a*). Pour un ITPFI $(\mathbf{M}, \Omega)$, une bijection partielle ψ est la donnée d'une partie finie **J** de **A**, de deux sous-ensembles disjoints au sens de (1), $\mathbf{K}^1$ et $\mathbf{K}^2$ de Sp (Ω ($\mathbf{J}$), $\mathbf{M}$ ($\mathbf{J}$)) et d'une bijection ψ de $\mathbf{K}^1$ sur $\mathbf{K}^2$.

Soit $\mathbf{V}$ un ouvert de $\mathbf{R}^+$, nous dirons que ψ est $\mathbf{V}$ maximale si $\psi(\lambda)/\lambda \in \mathbf{V}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}^1$, et s'il n'existe aucune bijection partielle ($\mathbf{J}$, $\mathbf{K}'^1$, $\mathbf{K}'^2$, ψ'), avec $\mathbf{K}^1$ inclus strictement dans $\mathbf{K}'^1$, et $\psi'/\mathbf{K}_1 = \psi$, avec $\psi'(\lambda)/\lambda \in \mathbf{V}$ pour $\lambda \in \mathbf{K}'^1$.

La propriété (*a*) [*voir* (1)] est plus faible que la propriété suivante :

(*d*) Pour tout ouvert $\mathbf{V}$, $u \in \mathbf{V}$, $1 \notin \mathbf{V}$, toute partie finie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{A}$, toute suite ($\mathbf{J}_n$, $\mathbf{K}_n^1$, $\mathbf{K}_n^2$, ψ_n) de bijections partielles $\mathbf{V}$ maximales, telle que $\mathbf{J}_n \subset \mathbf{J}_{n+1}$, $\bigcup_1^\infty \mathbf{J}_n = \mathbf{A} \setminus \mathbf{F}$, ψ_{n+1} est un prolongement de $\psi_n \times \mathbf{I}_n$ [$\mathbf{I}_n$ est l'application identique de Sp (Ω ($\mathbf{J}_{n+1} \setminus \mathbf{J}_n$), $\mathbf{M}$ ($\mathbf{J}_{n+1} \setminus \mathbf{J}_n$))], on a $C_n \to 1$, où $C_n = \sum \lambda$, $\lambda \in \mathbf{K}_n^1 \cup \mathbf{K}_n^2$.

Lemme 4. — *Soit* $\mathbf{V}$ *un ouvert de* $\mathbf{R}_+$, $1 \notin \mathbf{V}$, $\mathbf{F}$ *une partie finie de* $\mathbf{A}$, ψ_n *comme dans* (*d*), *avec* C_n *ne tendant pas vers* 1. *Il existe alors un état normal fidèle* φ *sur* $\mathbf{M}$ *tel que* Sp $\Delta_\varphi \cap \mathbf{V} = \emptyset$.

Soit β_n (resp. $\beta_{n,\eta}$, avec $\eta > 0$), l'élément de $\mathfrak{h}$ ($\mathbf{J}_n$) déduit de Ω ($\mathbf{J}_n$) en remplaçant les $\lambda^{1/2}$ de la diagonale par des 0 (resp. des η) quand $\lambda \in \mathbf{K}_n^1 \cup \mathbf{K}_n^2$.

L'on a

$$\| \beta_{n+m} - \beta_n \otimes \Omega (\mathbf{J}_{n+m} \setminus \mathbf{J}_n) \|^2 = C_{n+m} - C_n$$

et comme $C_n \leqq C < 1$ par hypothèse, la limite α de la suite de Cauchy $1_F \otimes \beta_n \otimes \Omega (A \setminus (\mathbf{J}_n \cup \mathbf{F})) = \alpha_n$ [où $1_\mathbf{F}$ est la matrice unité, $1_\mathbf{F} \in \mathfrak{h}$ (F)] est non nulle.

Soit $\mathfrak{k} = \overline{\mathbf{M}\,\alpha} \cap \overline{\mathbf{M}'\,\alpha}$, $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{N}'$) l'algèbre induite et réduite de $\mathbf{M}$ dans $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathbf{M}'$); le commutant de $\mathbf{N}$ est $\mathbf{N}'$ [*voir* (3)]. Le vecteur α est séparateur et totalisateur pour $\mathbf{N}$, comme $\mathfrak{k}$ est séparable et $\mathbf{M}$ de type III et facteur, il existe un isomorphisme Π entre $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$, donc un état φ sur $\mathbf{M}$ dont la construction de Gelfand-Segal est ($\mathfrak{k}$, α, Π, $\mathbf{N}$).

Par le (*b*) du lemme 3, il reste à montrer que la propriété $\mathfrak{P}$ ($\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, α, u, ε) : Il existe $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}'$ tels que

$$\| x\,\alpha \| > 1, \qquad \left\| u^{\frac{1}{2}}\,x\,\alpha - y\,\alpha \right\| < \varepsilon, \qquad \left\| x^*\,\alpha - u^{\frac{1}{2}}\,y^*\,\alpha \right\| < \varepsilon,$$

conduit à une contradiction si $[u^{1/2} - 2\,\varepsilon,\ u^{1/2} + 2\,\varepsilon] \subset \mathbf{V}^{1/2}$.

Pour $x \in \mathbf{N}$ (resp. $y \in \mathbf{N}'$), il existe $X \in \mathbf{M}$ (resp. $Y \in \mathbf{M}'$), avec $X\,\alpha = x\,\alpha$, $X^*\,\alpha = x^*\,\alpha$, $Y\,\alpha = y\,\alpha$, $Y^*\,\alpha = y^*\,\alpha$; l'on aurait donc $\mathfrak{P}$ ($\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, α, u, ε). Comme les algèbres $\mathbf{M}$ ($\mathbf{F} \cup \mathbf{J}_n$) $\otimes$ 1 engendrent $\mathbf{M}$ [resp. $\mathbf{M}'$ ($\mathbf{F} \cup \mathbf{J}_n$) $\otimes$ 1 et $\mathbf{M}'$] l'on aurait, en notant que $\alpha_n \to \alpha$, un entier n tel que

$$\mathfrak{P}\,(\mathbf{M}\,(\mathbf{F} \cup \mathbf{J}_n),\ \mathbf{M}'\,(\mathbf{F} \cup \mathbf{J}_n),\ 1_\mathbf{F} \otimes \beta_n,\ u,\ \varepsilon).$$

Comme $\beta_{n,\eta} \to \beta_n$ quand $\eta \to 0$ l'on pourrait remplacer β_n par $\beta_{n,\eta}$, avec $\eta > 0$ et aucun des rapports $\lambda^{1/2}/\eta$ ou $\eta/\lambda^{1/2}$ dans $[u^{1/2} - 2\,\varepsilon,\ u^{1/2} + 2\,\varepsilon]$.

Le (*a*) du lemme 3 montre que si Δ est l'opérateur modulaire associé au vecteur séparateur et totalisateur $1_F \otimes \beta_{n,\eta}$ l'on a distance $(\mathrm{Sp}\,\Delta^{1/2}, u^{1/2}) < 2\,\varepsilon$; or, d'après (2), ce spectre ne contient que des rapports entre éléments diagonaux de la matrice de $\beta_{n,\eta}$; il existe donc λ_i, $i = 1, 2$, avec

$$\lambda_i \in \mathrm{Sp}\,(\Omega\,(\mathbf{J}_n), \mathrm{M}\,(\mathbf{J}_n)) \setminus (\mathbf{K}_n^1 \cup \mathbf{K}_n^2) \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda_2^{\frac{1}{2}}} \in \left[u^{\frac{1}{2}} - 2\,\varepsilon, u^{\frac{1}{2}} + 2\,\varepsilon\right]$$

d'où $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbf{V}$, ce qui contredit la maximalité de ψ_n car $1 \notin \mathbf{V}$, donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

THÉORÈME 5. — *Soit* **N** *une algèbre de von Neumann semi-finie de genre dénombrable,* $\mathbf{R}_u$ $(0 < u < 1)$ *les facteurs de Powers; si* $u \neq u'$, $\mathbf{N} \otimes \mathbf{R}_u$ *et* $\mathbf{N} \otimes \mathbf{R}_{u'}$ *sont non isomorphes car*

$$\mathbf{S}\,(\mathbf{N} \otimes \mathbf{R}_u) = \{ u^k, k \in \mathbf{Z} \}.$$

COROLLAIRE 6. — *Soit* $\mathfrak{G}$ *le groupe libre à deux générateurs,* $\mathbf{U}\,(\mathfrak{G})$ *l'algèbre de von Neumann associée* (1); *les* $\mathbf{U}\,(\mathfrak{G}) \otimes \mathbf{R}_u$ *forment une famille continue de facteurs non hyperfinis non isomorphes.*

D'après le lemme 2, il suffit de prouver l'existence d'un état φ sur $\mathbf{N} \otimes \mathbf{R}_u$ tel que $\mathrm{Sp}\,\Delta_\varphi \subset \{ u^k, k \in \mathbf{Z} \}$, ce qui équivaut à $\sigma_{\mathrm{T}} = 1$, où σ_t est le groupe modulaire associé, et $\mathrm{T}\,\mathrm{Log}\,u = 2\,\pi$. D'après (2), l'état décomposable canonique sur $\mathbf{R}_u$ vérifie la condition ci-dessus; d'après (5), le groupe modulaire associé au produit tensoriel de deux états est le produit tensoriel des groupes correspondants; de plus :

LEMME 8. — *Si* **N** *est semi-finie de genre dénombrable et* $\mathrm{T} \neq 0$, *il existe un état normal fidèle* φ *sur* **N** *tel que* $\sigma_{\mathrm{T}} = 1$.

C'est une conséquence simple de (2).

Pour **M** de genre dénombrable posons $\mathbf{T}\,(\mathbf{M}) = \{ \mathrm{T}$, il existe un état normal fidèle φ avec $\sigma_{\mathrm{T}} = 1 \}$.

THÉORÈME 9. — *Soit* $\mathrm{T} \geq 0$. *Pour un* ITPFI **M** *les conditions suivantes sont équivalentes :* (*a*) $\mathrm{T} \in \mathbf{T}\,(\mathbf{M})$; (*b*) $e^{-2\pi/\mathrm{T}} \in \rho\,(\mathbf{M})$, *où*

$$\rho\,(\mathbf{M}) = \{ u, \mathbf{M} \otimes \mathbf{R}_u \text{ isomorphe à } \mathbf{R}_u \}.$$

Par contre,

$$\mathrm{T}\,(\mathbf{U}\,(\mathfrak{G}) \otimes \mathbf{R}_u) = \{ n\,\mathrm{T}_0, n \in \mathbf{Z} \setminus \{ 0 \}, \mathrm{T}_0\,\mathrm{Log}\,u = 2\,\pi \},$$

mais $u \notin \rho\,(\mathbf{U}\,(\mathfrak{G}) \otimes \mathbf{R}_u) = \emptyset$.

(*) Séance du 3 janvier 1972.

(1) H. ARAKI et E. J. WOODS, *A classification of factors*, Publ. Res. Instit. Math. Sci., 4, 1968.

(2) A. CONNES, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 900.

(3) J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 2e édition, 1969.

(4) S. SAKAI, *Erg. der Math.*, 60, Berlin, 1971.

(5) M. TAKESAKI, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Springer, Berlin, Lecture notes in Mathematics, 128.

1, avenue Mathilde,
95-Saint-Gratien,
Val-d'Oise.