ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Caractère multiplicatif d'un module de Fredholm.

Note de **Alain Connes,** Membre de l'Académie et **Max Karoubi.**

Remise le 1er octobre 1984.

Nous définissons un accouplement $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A}) \times \mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A}) \to \mathbf{C}^*$, où $\mathscr{A}$ est une **C**-algèbre quelconque, $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$ est le groupe engendré par les modules de Fredholm $(p+1)$-sommables [7] et où $\mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A})$ est le groupe de K-théorie algébrique de Quillen [10]. Cet accouplement généralise la construction de l'extension centrale des « groupes de lacets » $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^1, \mathrm{U}(n))$ par $\mathbf{C}^*$ [18].

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Multiplicative Character of a Fredholm Module.

We define a pairing $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A}) \times \mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A}) \to \mathbf{C}^*$ *where* $\mathscr{A}$ *is an arbitrary* **C**-*algebra,* $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$ *is the group generated by* $(p+1)$-*summable Fredholm modules* [7] *and where* $\mathrm{K}_{p+1}(\mathscr{A})$ *is the algebraic K-theory group of Quillen* [10]. *This pairing extends the construction of the central extension of the loop groups* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{S}^1, \mathrm{U}(n))$ *by* $\mathbf{C}^*$ [18].

I. Les groupes $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$. — Soit $\mathscr{A}$ une **C**-algèbre. Une structure de $\mathscr{A}$-module à gauche sur un espace hilbertien H est la donnée d'un homomorphisme π de $\mathscr{A}$ dans l'algèbre $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ des opérateurs bornés dans H. Nous noterons $\mathscr{K}(\mathrm{H})$ l'idéal bilatère de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$ formé des opérateurs compacts. La notion de *module de Fredholm* rappelée ci-dessous est due à Atiyah [4] dans le cas pair et à Brown, Douglas, Fillmore et Kasparov ([5], [15]) dans le cas impair.

Définition 1. — (*a*) *Un module de Fredholm impair sur* $\mathscr{A}$ *est donné par un couple* (H, F) *où* H *est un espace hilbertien qui est un* $\mathscr{A}$-*module à gauche et où* $\mathrm{F} \in \mathscr{L}(\mathrm{H})$ *avec* $\mathrm{F}^2=1$ *et* $[\mathrm{F}, \pi(a)] \in \mathscr{K}(\mathrm{H})$ *pour tout* $a \in \mathscr{A}$. (*b*) *Un module de Fredholm pair sur* $\mathscr{A}$ *est donné par un couple* (H, F) *comme dans* (*a*) *et d'une* $\mathbf{Z}/2$-*graduation* [1] *de* H *telle que* $\varepsilon \mathrm{F} = -\mathrm{F} \varepsilon$ *et* $\varepsilon\, \pi(a) = \pi(a)\, \varepsilon$ *pour tout* $a \in \mathscr{A}$.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on désigne par $\mathscr{L}^p(\mathrm{H})$ l'idéal de Schatten de $\mathscr{L}(\mathrm{H})$, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs T tels que $\mathrm{Trace}(|\mathrm{T}|^p) < +\infty$.

Définition 2. — *Un module de Fredholm* (H, F) *est dit p-sommable si, pour tout* $a \in \mathscr{A}$, $[\mathrm{F}, \pi(a)] \in \mathscr{L}^p(\mathrm{H})$.

Pour tout nombre entier p positif ou nul, on désigne par $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ l'ensemble des classes d'isomorphie de modules de Fredholm (H, F) sur $\mathscr{A}$ tels que : (i) H est un espace hilbertien à base dénombrable; (ii) (H, F) a la même parité que p; (iii) (H, F) est $(p+1)$-sommable.

Muni de l'opération de somme directe, $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ est un semi-groupe commutatif. Soit $(\mathrm{H}, \mathrm{F})^-$ l'élément de $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ obtenu en changeant F en $(-1)^p \mathrm{F}$ et ε en $-\varepsilon$ (si p est pair).

Proposition 3. — (*a*) *Le quotient de* $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ *par le semi-groupe* $\{x+x^-,\ x \in \mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})\}$ *est un groupe commutatif noté* $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$. (*b*) *L'inclusion de* $\mathscr{E}ll^p(\mathscr{A})$ *dans* $\mathscr{E}ll^{p+2}(\mathscr{A})$ *induit un homomorphisme* $\mathrm{S}: \mathrm{Ell}^p(\mathscr{A}) \to \mathrm{Ell}^{p+2}(\mathscr{A})$.

Soit H_0 l'espace hilbertien $l^2(\mathbf{N})$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, nous allons définir l'algèbre $\mathscr{M}^p$ suivante : *si p est pair,* $\mathscr{M}^p = \{(x, y) \in \mathscr{L}(\mathrm{H}_0) \times \mathscr{L}(\mathrm{H}_0)$ avec $x-y \in \mathscr{L}^{p+1}(\mathrm{H}_0)\}$; *si p est impair,* $\mathscr{M}^p$ est la sous-algèbre des matrices 2×2 sur l'anneau $\mathscr{L}(\mathrm{H}_0)$ formée des matrices $a=(a_{ij})$ telles que $a_{ij} \in \mathscr{L}^{p+1}(\mathrm{H}_0)$ si $i \neq j$.

Soit $(\mathrm{H}, \mathrm{F})_p$ l'élément de $\mathrm{Ell}^p(\mathscr{M}^p)$ obtenu en posant $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_0$ avec l'action évidente de $\mathscr{M}^p$ et les opérateurs F et ε suivants : *si p est pair* $\mathrm{F}_{11}=\mathrm{F}_{22}=0$, $\mathrm{F}_{12}=\mathrm{F}_{21}=1$, $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}=0$, $\varepsilon_{11}=-\varepsilon_{22}=1$; *si p est impair* $\mathrm{F}_{12}=\mathrm{F}_{21}=0$, $\mathrm{F}_{11}=-\mathrm{F}_{22}=1$. On a alors la

0249-6321/84/02990963 \$ 2.00 © Académie des Sciences

proposition évidente suivante :

PROPOSITION 4. — (*a*) Ell^p *est un foncteur contravariant de la catégorie des* **C**-*algèbres dans celle des groupes commutatifs.* (*b*) *Pour tout* $x \in \mathrm{Ell}^p(\mathscr{A})$, *il existe un homomorphisme d'algèbres* $\rho : \mathscr{A} \to \mathscr{M}^p$ *tel que* $x = \rho^*((\mathrm{H}, \mathrm{F})_p)$.

II. K-THÉORIE TOPOLOGIQUE ET COHOMOLOGIE CYCLIQUE DES ALGÈBRES DE BANACH $\mathscr{M}^p$. — Pour tout $q \in [1, +\infty[$, on note $\| \;\|_q$ la norme canonique sur $\mathscr{L}^q(\mathrm{H})$. On peut alors munir les algèbres $\mathscr{M}^p$ des normes suivantes qui en font des algèbres de Banach :

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|[\mathrm{F}, x]\|_{p+1},$$

où $\|x\|_\infty$ désigne la norme usuelle des opérateurs dans $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_0$. De plus, d'après [7], $\mathscr{M}^p$ est une sous-algèbre stable par calcul fonctionnel holomorphe dans la C*-algèbre $\mathscr{M}_j$, $j = 0$ ou 1 avec $j \equiv p \pmod 2$, qui est l'adhérence de $\mathscr{M}^p$ dans $\mathscr{L}(\mathrm{H})$. Du théorème de périodicité de Bott [11], p. 175 et du théorème de densité ([11], p. 109), on déduit alors la proposition suivante.

PROPOSITION 5. — *Les groupes* $\mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathscr{M}^p)$ *sont isomorphes à* **Z** *si* $n \equiv p \pmod 2$ *et sont égaux à* 0 *si* $n \equiv p+1 \pmod 2$.

L'homologie et la cohomologie cycliques des algèbres de Banach $\mathscr{M}^p$ sont moins connues [7]. Cependant, on peut définir des éléments remarquables non triviaux τ_p de $\mathrm{HC}^p(\mathscr{M}^p)$ par les formules suivantes [7]. *Si p est pair :*

$$\tau_p((x^0, y^0), (x^1, y^1), \ldots, (x^p, y^p)) = c_p \operatorname{Trace}((x^0 - y^0).(x^1 - y^1) \ldots (x^p - y^p)),$$

avec $c_p = (p/2)!$. *Si p est impair :*

$$\tau_p(a^0, a^1, \ldots, a^p) = c_p \operatorname{Trace}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^p \\ a_{21}^p & 0 \end{pmatrix},$$

avec :

$$c_p = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)\ldots\frac{1}{2}.$$

On remarquera que le « caractère de Chern topologique » défini dans [8] et [14] :

$$\mathbf{Z} \approx \mathrm{K}_p^{\mathrm{top}}(\mathscr{M}^p) \to \mathrm{HC}_p(\mathscr{M}^p) \xrightarrow{\tau_p} \mathbf{C},$$

a comme image le sous-groupe $r_p \mathbf{Z}$ où $r_p = (2i\pi)^{[p/2]}$ avec les constantes de normalisation c_p choisies [3].

III. DÉFINITION DES GROUPES DE K-THÉORIE RELATIVE $\mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A})$ ET DES HOMOMORPHISMES $\mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{HC}_{n-1}(\mathrm{A})$ (*voir aussi* IV). — Si A est une algèbre topologique localement convexe, nous suivrons [14] en définissant $\mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ pour $n > 0$ comme le n-ième groupe d'homotopie de l'ensemble simplicial $\mathrm{BGL}(\mathrm{A}_*)$ où A_* est l'anneau simplicial défini par $\mathrm{A}_n = \mathrm{A} \hat{\otimes} \mathrm{C}^\infty(\Delta^n)$, Δ^n étant le n-simplexe standard. En particulier, $\mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A})$ est le groupe de K-théorie topologique usuel si A est une algèbre de Banach, ce que nous supposerons désormais. Nous définirons le groupe de « K-théorie relative » $\mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A})$ comme le n-ième groupe d'homotopie de la fibre homotopique $\mathscr{F}_\mathrm{A}$ de l'application évidente :

$$\mathrm{BGL}(\mathrm{A})^+ = \mathrm{BGL}(\mathrm{A}_0)^+ \to \mathrm{BGL}(\mathrm{A}_*)^+ \sim \mathrm{BGL}(\mathrm{A}_*).$$

On a donc une suite exacte fondamentale :

$$\mathrm{K}_{n+1}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_{n+1}^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_n^{\mathrm{rel}}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_n(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}_n^{\mathrm{top}}(\mathrm{A}),$$