Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) 5B (1988) 65–70
North-Holland, Amsterdam

TRACE DE DIXMIER, MODULES DE FREDHOLM ET GEOMETRIE RIEMANNIENNE

A. Connes

Institut Hautes Etudes Scientifiques, I.H.E.S.

35 Route de Chartres, 91440 BURES SUR YVETTE

Dans cet article je montre comment relier les notions locales de géométrie conforme et Riemannienne à celle de module de Fredholm, point de départ de la géométrie non commutative. Le but encore éloigné est d'identifier les variétés Riemanniennes dont le spectre (pour l'opérateur de Dirac) est fixé aux sous algébres "de Cartan" de l'algébre de Lie $L = \{a \in \mathcal{L}(\mathfrak{h})\ ;\ [D, a] \text{ borné}\}$, laquelle ne dépend évidemment que du spectre de l'opérateur de Dirac D dans $\mathfrak{h}$. Les outils principaux sont les suivants : 1) Les idéaux $\mathcal{L}^{p+}$, $\mathcal{L}^{q-}$ (de Maçaev), d'opérateurs bornés dans l'espace de Hilbert, qui permettent de préciser définitivement la notion de dimension d'un module de Fredholm, 2) La trace non normale Trace_ω sur l'idéal $\mathcal{L}^{1+}$ (des opérateurs dont la trace ordinaire diverge logarithmiquement) construite par J. Dixmier comme le coefficient de LogN dans la divergence de la trace ordinaire, 3) Un résultat de D. Voiculescu sur la théorie du "scattering" en dimension arbitraire.

Les résultats obtenus sont de trois sortes : a) A partir du calcul de la trace de Dixmier pour les opérateurs pseudodifférentiels (thm 3,1) on obtient une forme purement opératorielle de l'action de Yang Mills ainsi que de celle de Polyakov, et une description du passage des formes quantiques aux formes classiques (section 3), b) Dans le cas général on calcule pour tout module de Fredholm $p+$ sommable la classe de Hochschild de son caractére par une formule remarquable qui utilise la trace de Dixmier (pour un ω arbitraire) et une version non bornée arbritraire du module. c) On démontre qu'une telle version du module définit en particulier une trace τ sur l'algébre et que, dans le cas commutatif, la mesure spectrale de Lebesgue est absolument continue par rapport à τ. Le résultat essentiel est l'estimé de la constante k_{p-} de Voiculescu en fonction de la trace de Dixmier (thm 5.1).

I. Notations et rappels sur les idéaux d'opérateurs compacts

Soient $\mathfrak{h}$ un espace de Hilbert, k l'idéal des opérateurs compact dans $\mathfrak{h}$, $T \in k$, $|T| = (T^*T)^{1/2}$ sa valeur absolue et $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n = \mu_n(T), \ldots$ les valeurs propres de $|T|$ rangées par ordre décroissant.

1. Mini Max : $\mu_n(T) = \operatorname{Inf}\{\|T/E^{\perp}\| \,;$ E sous espace de dimension n de $\mathfrak{h}\}$.

2. Distance aux opérateurs de rang n : $\mu_n(T) = d(T, R_n)$ où $R_n \subset \mathcal{L}(\mathfrak{h})$ est l'ensemble des opérateurs de rang $\leq$ n.

3. Continuité de μ_n : $|\mu_n(T_1) - \mu_n(T_2)| \leq \|T_1 - T_2\|$

4. Sous additivité de μ_n : $\mu_{n+m}(T + S) \leq \mu_n(T) + \mu_m(S)$

5. Sous multiplicativité de μ_n : $\mu_{n+m}(TS) \leq \mu_n(T)\mu_m(S)$

6. Normes $\sigma_N = \sum_0^N \mu_n$:

$\sigma_N(T) = \operatorname{Sup}\{\|TE\|_1$, E projecteur orthogonal sur un sous espace de dimension N$\}$, avec $\|S\|_1 = \operatorname{Trace}(|S|)$.

7. Estimation de $\sigma_N(ST)$: $\sigma_N(ST) \leq \sum_0^N \mu_n(S)\mu_n(T)$

Après ces inégalités classiques sur les valeurs caractéristiques des opérateurs compacts, nous introduisons les notations suivantes, variations connues sur les $\mathcal{L}^p(\mathfrak{h}) = \{T \in k \,; \sum_0^\infty \mu_n(T)^p < \infty\}$. (idéaux de Schatten).

8. Idéaux $\mathcal{L}^{p-}(\mathfrak{h})$: Pour $p \in [1, +\infty]$ l'égalité suivante définit un idéal bilatère :

$$\mathcal{L}^{p-}(\mathfrak{h}) = \left\{ T \in k \,; \sum_0^\infty (n+1)^{1/p - 1} \mu_n(T) < \infty \right\}.$$

On a $\mathcal{L}^{1-} = \mathcal{L}^1$ et pour $p' < p$, $\mathcal{L}^{p'} \subset \mathcal{L}^{p-} \subset \mathcal{L}^p$

9. Norme $\| \ \|_{p-}$. L'égalité $\|T\|_{p-} = \sum_0^\infty (n+1)^{1/p - 1} \mu_n(T)$ définit une norme de Banach sur $\mathcal{L}^{p-}$, dont la boule unité est faiblement compacte.

10. Idéaux $\mathcal{L}_0^{p+}$ et $\mathcal{L}^{p+}$. Pour $p \in [1, +\infty]$ l'égalité suivante définit un idéal bilatère

$$\mathcal{L}^{p+} = \left\{ T \in k \,; \sigma_N(T) = 0\left(\sum_0^N (n+1)^{-1/p} \right) \right\}.$$

On pose $\mathcal{L}^{\infty+} = \mathcal{L}(\mathfrak{h})$. On a $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^{p+} \subset \mathcal{L}^r$ pour $p < r$, de plus $\mathcal{L}^{1+} = \{T \in k \,; \sigma_N(T) = 0(\operatorname{Log} N)\}$ et pour $p \in]1, +\infty[$ $\mathcal{L}^{p+} = \{T \in k, \mu_n(T) = 0(n^{-1/p})\}$.

Ces espaces sont analogues aux espaces L^p_W, L^p faibles, de la théorie de l'interpolation en analyse classique. On les munit de la norme : $\|T\|_{p+} = \sup_N \sigma_N(T) \left(\sum_0^N (n+1)^{-1/p} \right)^{-1}$.

On note $\mathcal{L}_0^{p+}$ l'idéal bilatère adhérence de l'idéal des opérateurs de rang fini $R \subset \mathcal{L}^{p+}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{L}^{p+}$, il est caractérisé par petit o au lieu de grand O.

11. Dualité Soient $p, q \in [1, +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'accouplement $\langle A,B \rangle = \operatorname{Trace}(AB)$ identifie $\mathcal{L}^{q-}$ au dual $\mathcal{L}_0^{p+}$ et $\mathcal{L}^{p+}$ au dual de $\mathcal{L}^{q-}$.

II. Trace de Dixmier [3]

1. Soit ω une moyenne invariante pour le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$, i.e. un état invariant par homotéties sur $L^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. A toute suite bornée de nombres réels $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on associe le nombre $\lim_\omega(s) = \omega(f_s)$ où $f_s(\lambda) = 0$ pour $\lambda \in]0,1[$, $f_s(\lambda) = s_n$ sur $[n-1, n[$, $n \geq 2$. On obtient ainsi une forme linéaire $\lim_\omega$ sur l'espace vectoriel des suites bornées, telle que :
a) $\underline{\lim}(s) \leq \lim_\omega(s) \leq \overline{\lim}(s)$ b) $\lim_\omega(s_1, s_2, s_3,\ldots) = \lim_\omega(s_1, s_1, s_2, s_2,\ldots)$.

2. On peut grace à un résultat de G. Mokobodski, imposer que $\lim_\omega$ soit une fonction universellement mesurable de s et vérifie le calcul barycentrique :

$$\lim_\omega\left(\int s_\alpha d\mu(\alpha)\right) = \int \lim_\omega(s_\alpha)\, d\mu(\alpha).$$

3. Soient A une C^*algèbre, τ une trace sur A, i.e. une application de A^+ dans $[0,+\infty]$ telle que $\tau(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2) = \lambda_1\tau(T_1) + \lambda_2\tau(T_2)$ et $\tau(T^*T) = \tau(TT^*)$. Le sous espace A_τ de A engendré par $\{T \in A^*, \tau(T) < \infty\}$ est un idéal bilatère de A auquel τ se prolonge par linéarité et vérifie $\tau(T X T^{-1}) = \tau(X)$ pour $X \in A_\tau$, T inversible dans A.

4. L'égalité suivante définit une trace, Tr_ω, sur la C*algébre $\mathfrak{L}(\mathfrak{h})$:

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = \lim_\omega \frac{1}{\log N}\sum_0^N \mu_n(T) \text{ si } T \in \mathfrak{L}^{1+}(\mathfrak{h}),$$

$$\text{et } \mathrm{Tr}_\omega(T) = +\infty$$

si T (qui est positif) n'appartient pas à $\mathfrak{L}^{1+}(\mathfrak{h})$.

5. La trace Tr_ω ne dépend pas de la norme de $\mathfrak{h}$ mais seulement de l'espace Hilbertien sous jacent.

6. Soit T un opérateur positif dans $\mathfrak{h}$, tel que $T \in \mathfrak{L}^p$ pour tout $p > 1$.
On pose $\mathfrak{T}(s) = \mathrm{Trace}(T^s)$ pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes : a) $(s-1)\mathfrak{T}(s) \to L$ qd $s \to 1+$ b) $\frac{1}{\log N}\sum_0^N \mu_n(T) \to L$ quand $N \to \infty$.

(Thm Taubérien Hardy Littlewood Proc. London Math Soc. Série 2 Vol 13 (1913) p 174. 191). On a alors $\mathrm{Tr}_\omega(T) = L$ pour tout ω.

7. Si $\mathfrak{T}(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge continument à $\{s, \mathrm{Re}(s) \geq 1\}$ on a $T^{1/p} \in \mathfrak{L}^{p+}$ pout tout $p \geq 1$. En général il est faux que $T \in \mathfrak{L}^{1+} \Rightarrow T^{1/p} \in \mathfrak{L}^{p+}$.

III. Trace de Dixmier et opérateurs pseudodifférentiels

1. Théorème : Soient M une variété compacte de dimension n, P un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -n, $P : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ où E est un fibré vectoriel complexe sur M. Alors a) $P \in \mathfrak{L}^{1+}$ b) Pour tout ω on a : $\mathrm{Tr}_\omega(P) = \frac{1}{n}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(T^*M)_1} \mathrm{tr}(\sigma(P))$, où $\sigma(P)$ désigne le symbole principal de P et $(T^*M)_1$ le fibré en sphères unité du fibré cotangent muni de la mesure naturelle (pour une métrique Riemannienne arbitraire dont l'intégrale ne dépend pas).
Le terme de droite est le résidu de Adler, Manin, Wodzicki et Guillemin.

2. Module de Fredholm associé à une variété Riemannienne. [2] Soient M une variété Riemannienne compacte munie d'une structure spinorielle et $\mathfrak{A} = C^\infty(M)$,

$\mathfrak{h} = L^2(M,S)$ l'espace des spineurs L^2 et $F = D|D|^{-1}$ le signe de l'opérateur de Dirac. Le couple $(\mathfrak{h}, F)$ définit un module de Fredholm p+ sommable sur $\mathcal{Q}$, (où p = dim M), i.e. on a : $[F,a] \in \mathcal{L}^{p+}\ \forall\, a \in \mathcal{Q}$. Soient $\Omega(\mathcal{Q})$ l'algèbre différentielle graduée non commutative universelle associée à $\mathcal{Q}$, q l'homorphisme de $\Omega(\mathcal{Q})$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$ tel que $q(da) = i[F,a]$ et $\Omega^n_q(\mathcal{Q})$ l'image de $\Omega^n(\mathcal{Q})$ par q : $\Omega^n_q(\mathcal{Q})$ est l'espace vectoriel d'opérateurs dans $\mathfrak{h}$ engendré par les $a^0[F, a^1]\ldots[F, a^n]$, où $a^i \in \mathcal{Q}$. On a alors :

a) $\Omega^n_q(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{L}^{(p/n)+}$ pour tout n

b) Si $p = \dim M > 1$, il existe un unique isomorphisme c du bimodule quotient $\Omega^1_q/\Omega^1_q \cap \mathcal{L}^{p+}_0$ avec le bimodule des 1-formes $A^1 = C^\infty(M,T^*(M))$ tel que $c(i[F,a]) = da$ pour tout $a \in \mathcal{Q}$.

c) Si $p > 2$ l'application naturelle de $\Omega^1_q \times \Omega^1_q$ dans Ω^2_q définit un isomorphisme du quotient $\Omega^2_q/\Omega^2_q \cap \mathcal{L}^{(p/2)+}_0$ avec l'espace des tenseurs $C^\infty(M, \otimes^2 T^*)$.

d) Pour $p > 1$ et tout $\alpha = \alpha^* \in \Omega^1_q$ on a, pour tout ω :

$$\mathrm{Tr}_\omega\left(|\alpha|^p\right) = \lambda_p \int_M |c(\alpha)|^p$$

où le terme de droite est la (puissance pième de la) norme L^p de la 1-forme $c(\alpha)$ et la contante λ_p est donnée par

$$\lambda_p = 2\left(2\pi\right)^{-p/2}\Gamma\!\left(p - \frac{1}{2}\right)\Gamma\!\left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\Gamma(p+1)^{-1}.$$

La connaissance du terme de droite pour toute 1-forme caractérise la structure conforme de M, le terme de gauche est déterminé par la classe de F modulo les compacts, qui caractérise également la structure conforme de M.

3. Action de Yang Mills

Soient E un fibré vectoriel hermitien sur M, et $\mathcal{E} = C^\infty(M,E)$ le module projectif de type fini correspondant sur $\mathcal{Q}$. Une q-connexion ∇ sur E est une application linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{Q}} \Omega^1_q$ telle que $\nabla(\zeta a) = (\nabla\zeta)a + \zeta \otimes da$ pour $\zeta \in \mathcal{E}$, $a \in \mathcal{Q}$.

On définit facilement les notions de q-connexion compatible avec la métrique, ainsi que la courbure $\theta = \nabla^2$ que l'on identifie à un opérateur $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{Q}} \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$. Pour dim $M > 1$ toute q-connexion définit une connexion classique grâce à l'isomorphisme c de 2.b, notée $\nabla_c = A$.

Théorème : Pour dim (M) = 4 la fonctionnelle $I(\nabla) = \mathrm{Tr}_\omega(\theta^2)$ sur l'espace des q-connexions, est finie et non nulle. (Elle est ∞ si dim $M > 4$ et nulle si dim < 4). Cette fonctionnelle est quadratique sur les espaces affines fibres de l'application linéaire $\nabla \to \nabla_c$ et on a :

$$\mathrm{Inf}\,\{I(\nabla)\,;\,\nabla_c = A\} = \frac{1}{16\pi^2}\,\mathrm{YM}(A)$$

où le terme de droite est l'action usuelle de Yang Mills.

4. Action de Polyakov.

Soient E l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de la métrique Euclidienne $\Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$, Σ une surface de Riemann compacte et φ une application C^∞ de Σ dans E. Le couple (Σ, φ) définit un module de Fredholm 2+ sommable sur $\mathcal{Q} = C^\infty(E)$ en posant $\mathfrak{h} = L^2(\Sigma, \varphi)$, $F = D|D|^{-1}$ comme dans III.1 et en définissant l'action de $\mathcal{Q}$ dans $\mathfrak{h}$ grâce à φ, i.e. toute $f \in \mathcal{Q}$ agit dans $\mathfrak{h}$ par multiplication par la fonction $f \circ \varphi$ sur Σ. On remarque alors que l'action de Polyakov en théorie des cordes s'écrit $I(\Sigma, \varphi)) = \mathrm{Tr}_\omega(\Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu)$, où $\Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$ est l'opérateur dans $\mathfrak{h}$ associé à l'élément de $\Omega^2(\mathcal{Q})$ $g = \Sigma\, g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$). Cette remarque suggère que si l'on remplace $\mathcal{Q}$ par une algèbre non commutative une "structure Riemannienne" soit donnée par une fonctionnelle du type ci-dessus sur l'ensemble des modules de Fredholm 2+ sommables sur $\mathcal{Q}$.

IV. Calcul de la classe de Hochschild du caractère

Soient $\mathcal{A}$ une algébre et $(\mathfrak{h}, F, \varepsilon)$ un module de Fredholm pair sur $\mathcal{A}$. Pour tout entier pair $n = 2q$ tel que $[F,a] \in \mathcal{L}^{2q+1}$ $\forall a \in \mathcal{A}$, (i.e. le module est $2q+1$ sommable) le caractère de dimension n du module est le cocycle cyclique $\tau(a^0,\dots,a^n) = c_n \mathrm{Tr}_s(a^0[F,a^1]\dots[F,a^n])$, où $c_n = (2\pi i)^{n/2}(n/2)\,!$ et $\mathrm{Tr}_s(X) = \frac{1}{2}\mathrm{Trace}(\varepsilon F[F,X])$. On a $\tau \in HC^n(\mathcal{A}) = H^n_\lambda(\mathcal{A})$ et pour que la dimension de τ soit $< n$ il faut et il suffit que sa classe de cohomologie de Hochschild soit nulle. Il existe alors $\tau' \in HC^{n-2}(\mathcal{A})$ tel que $\tau = S\tau'$ dans $HC^n(\mathcal{A})$. Les théorèmes qui suivent montrent que si le module est n-sommable et $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ (où M est de dimension arbitraire) la classe de Hochschild de τ est nulle. De plus si le module est $n+$ sommable la classe de Hochschild ne dépend que des $[F, f^i]$ dans le quotient de $\mathcal{L}^{n+}$ par $\mathcal{L}^{n+}_0$.

Théorème 1. Soient $\mathcal{A} = C^\infty(M)$, $(\mathfrak{h}, F, \varepsilon)$ un module de Fredholm pair, n sommable sur $\mathcal{A}$. ($n = 2q$ pair). La dimension du caratère de $(\mathfrak{h}, F, \varepsilon)$ est alors inférieure ou égale à n-2.

Théorème 2. Soient $\mathcal{A} = C^\infty(M)$, $(\mathfrak{h}, F, \varepsilon)$ un module de Fredholm pair sur $\mathcal{A}$ et D un opérateur autoadjoint non borné dans $\mathfrak{h}$, $\varepsilon D = -D\varepsilon$, tel que a) $F = D|D|^{-1}$ b) $[D,a]$ et $[|D|,a]$ sont bornés pour tout $a \in \mathcal{A}$ c) $|D|^{-1} \in \mathcal{L}^{n+}$.
Alors le module $(\mathfrak{h}, f, \varepsilon)$ est $n+$ sommable et si Trace_ω est une trace de Dixmier telle que $\mathrm{Tr}_\omega(|[F,a]|^n) = 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ la dimension du caractére est inférieure ou égale à n-2.

La classe de cohomologie de Hochschild de τ est caractérisée par le courant de de Rham C, $bC = 0$ donné par :

$$\left\langle C, f^0 d f^1 \wedge \dots \wedge d f^n \right\rangle = \frac{1}{n\,!} \sum_\sigma (-1)^\sigma \, \tau\left(f^0, f^{\sigma(1)}, f^{\sigma(n)}\right),$$

$$\forall f^i \in \mathcal{A},$$

(où σ décrit le groupe de toutes les permutations de $\{1,\dots,n\}$).
Il est remarquable de l'on puisse calculer dans tous les cas, le courant C à partir de la trace de Dixmier. Le résultat général est le suivant

Théorème 3. Soient $\mathcal{A}$ et $(\mathfrak{h}, D, \varepsilon)$, $F = D|D|^{-1}$ comme dans le théorème 2 alors la classe de Hochschild du caractère de $(\mathfrak{h}, D, \varepsilon)$ est la même que celle du cocycle de Hochschild suivant : $\varphi(f^0, f^1, \dots, f^n) = c_n \mathrm{Trace}_\omega\left(\varepsilon f^0 [D,f^1][D,f^2]\dots[D,f^n] D^{-n}\right)$.
(En particulier l'antisymétrisé du terme de droite est indépendant du choix de ω).
En fait ce résultat ne dépend en rien de la commutativité de l'algébre $\mathcal{A}$ et le théorème général est le suivant :

Théorème 4. Soient $\mathcal{A}$ une algébre, $(\mathfrak{h}, F, \varepsilon)$ un module de Fredholm pair sur $\mathcal{A}$ et D un opérateur autoadjoint non borné dans $\mathfrak{h}$, $\varepsilon D = -D\varepsilon$, tel que a) $F = D|D|^{-1}$ b) $[D,a]$ et $[|D|,a]$ sont bornés pour tout $a \in \mathcal{A}$ c) $|D|^{-1} \in \mathcal{L}^{n+}$. Supposons que la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ soit le dual de l'homologie de Hochschild alors la classe de Hochschild du caractère de $(\mathfrak{h}, D, \varepsilon)$ est la même que celle du cocycle de Hochschild suivant :

$$\varphi(f^0, f^1, \dots, f^n) = c_n \, \mathrm{Trace}_\omega\left(\varepsilon f^0 [D,f^1][D,f^2]\dots[D,f^n] D^{-n}\right).$$

V. Spectre absolument continu, trace de Dixmier, et degré de sommabilité

Dans deux articles du Journal of Operator theory, [4] [5] D. Voiculescu a introduit pout tout idéal J à norme symétrique $\| \ \|_J$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{h})$, la fonction suivante k_J sur les sous ensembles finis $X \subset \mathcal{L}(\mathfrak{h})$:

$$k_J(X) = \liminf_{A \in R_1^+} \|[A, X]\|_J$$

où R_1^+ est l'ensemble des opérateurs de rang fini A, $0 \leq A \leq 1$ et où :

$$\|[A, X]\|_J = \sup_{T \in X} \|[A, T]\|_J .$$

Pour $J = \mathcal{L}^{p-}$ on note $k_J = k_{p-}$ et D. Voiculescu démontre le résultat essentiel suivant de la théorie du Scattering : si T_i, $i = 1,\dots,n$ sont n opérateurs autoadjoints qui commutent, $E_{ac} \subset \mathbb{R}^n$ la partie absolument continue de leur mesure spectrale et $n(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction multiplicité spectrale on a :

$$\int_{E_{ac}} n(x)\, d^n x = \alpha_n \left(k_{n-}(\{T_i\})\right)^n$$

où α_n est une constante absolue. Notre résultat essentiel est l'estimé suivant général de k_{p-}, en fonction d'une hypothèse de $p+$ (!) sommabilité. (Un résultat de D. Voiculescu [6] montrait que $k_{p+} = 0$).

Théorème 1. Soit D un opérateur autoadjoint non borné dans $\mathfrak{h}$, tel que $|D|^{-1} \in \mathcal{L}^{p+}$ (p donné $1 < p < \infty$). On a alors pour tout sous ensemble fini de $\mathcal{Q} = \{T \in \mathcal{L}(\mathfrak{h}),$ $[T,D]$ borné$\}$:

$$k_{p-}(X) \leq \beta_p \left(\sup_{T \in X} \|[D,T]\|\right) \left(\mathrm{Tr}_\omega\left(|D|^{-p}\right)\right)^{1/p}$$

où β_p est une constante universelle et Tr_ω la trace de Dixmier.

Théorème 2. Soit $(\mathfrak{h}, D)$ un module de Fredholm non borné $p+$ sommable sur l'algébre $\mathcal{Q}$.

a) L'égalité $\varphi(a) = \mathrm{Tr}_\omega(a|D|^{-p})$ définit une trace sur $\mathcal{Q}$, non nulle si $k_{p-}(\mathcal{Q}) \neq 0$.

b) Pour p entier, $p > 1$ et $X_1,\dots,X_p \in \mathcal{Q}$, autoadjoints et commutants deux à deux la partie absolument continue $\mu_{ac}(f) = \int_{E_{ac}} f(x)\, n(x)\, d^p x$ de la mesure spectrale des X_i est absolument continue par rapport à la mesure $\mu(f) = \varphi(f(X_1,\dots,X_n))$.

Ce texte résume le cours que j'ai fait au Collège de France en hiver 1988.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. CONNES - Non-commutative differential geometry. Publ. Math. IHES 62 (1985) 257-360.

[2] A. CONNES - The action Functional in Non-Commutative Geometry. Comm. Math. Phys. 117, 4 (1988) 673-683.

[3] J. DIXMIER - Existence de traces non normales. C.R. Acad.Sci. Paris 262 (1966) . 1107-1108.

[4] D. VOICULESCU - Some results on norm ideal perturbations of Hilbert space operators. J. Op. Theory. Vol n° 1 (1979) p. 3-37

[5] D. VOICULESCU - Some results on norm ideal perturbations of Hilbert space operators. II J. Op. Theory. Vol n° 5 (1981) p. 77-100

[6] D. VOICULESCU - On the existence of quasi central approximate units relative to normed ideals. Preprint Berkeley 1988.