C. R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 475-480, 1988

Géométrie/*Geometry*

Conjecture de Novikov et groupes hyperboliques

Alain CONNES et Henri MOSCOVICI

Résumé — Nous démontrons la conjecture de Novikov sur l'invariance homotopique des hautes signatures pour tout groupe discret hyperbolique pour la métrique de la longueur des mots.

Hyperbolic groups and the Novikov conjecture

Abstract — *We prove the higher signature Novikov conjecture for any discrete group which is hyperbolic for the word length metric.*

1. INTRODUCTION. — Un groupe discret Γ vérifie la conjecture de Novikov si pour toute classe de cohomologie $\omega \in H^*(B\Gamma, \mathbb{C})$, la quantité suivante, appelée haute signature, est un invariant homotopique du couple (M, φ) où M est une variété compacte orientée et $\varphi : M \to B\Gamma$ une application continue :

$$\mathrm{Sign}_\omega(M, \varphi) = \langle L(M)\varphi^*(\omega), [M] \rangle. \tag{0}$$

Ici $B\Gamma$ désigne l'espace classifiant de Γ, $L(M)$ la classe L de la variété M et [M] le cycle fondamental de M. Dans [13] G. G. Kasparov démontre que tout sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie vérifie la conjecture de Novikov. Sa méthode utilise la K-théorie bivariante des C*-algèbres. Dans cette Note, nous démontrons par une méthode différente, dont l'outil principal est la cohomologie cyclique de l'algèbre $\mathbb{C}\Gamma$ du groupe Γ, que tout groupe hyperbolique Γ et donc presque tout groupe de présentation finie vérifie la conjecture de Novikov. Le problème général de Novikov se ramène au cas particulier des groupes de présentation finie; de plus [9] presque tout groupe de présentation finie est hyperbolique au sens suivant : si l'on fixe les nombres n de générateurs et r de relations et l'on impose une borne supérieure l à la longueur des relations, la proportion des groupes hyperboliques tend vers 1 quand $l \to \infty$. Techniquement, nous utilisons deux conséquences de l'hyperbolicité : d'une part toute classe de cohomologie $\omega \in H^*(B\Gamma, \mathbb{C})$ est représentée par un cocycle borné (résultat de M. Gromov [9]), d'autre part les inégalités de Haagerup [10] se prolongent, grâce aux travaux de P. Jolissaint [12] et P. de la Harpe [11].

2. INDICE LOCAL D'UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE ET COCHAINES D'ALEXANDER-SPANIER. — Soient M une variété compacte et $D : C^\infty(M, E^+) \to C^\infty(M, E^-)$ un opérateur différentiel elliptique sur M, où $E^\pm$ sont des fibrés vectoriels complexes de classe C^∞. L'existence d'une parametrix Q pour D [i. e. d'un opérateur pseudodifférentiel $Q : C^\infty(M, E^-) \to C^\infty(M, E^+)$ tel que $QD-1$ et $DQ-1$ soient régularisants] montre que D définit canoniquement un élément inversible dans l'algèbre $M(J)/J$ où J est l'algèbre des opérateurs régularisants, et $M(J)$ l'algèbre des multiplicateurs de J. A l'aide de supplémentaires $E'^\pm$ de $E^\pm$, tels que $E'^\pm \oplus E^\pm$ soient triviaux on définit ainsi un élément de $K_1(M(J)/J)$ où J est l'algèbre $C^\infty(M \times M)$ des opérateurs régularisants $k : C^{-\infty}(M) \to C^\infty(M)$. L'élément correspondant de $K_0(J)$, obtenu grâce à la suite exacte :

$$0 \to J \to M(J) \to M(J)/J \to 0$$

Note présentée par Alain CONNES.

0249-6291/88/03070475 \$ 2.00

est donné par la classe réduite de l'idempotent suivant :

$$(1) \qquad P=\begin{bmatrix} S_0^2 & S_0(1+S_0)Q \\ S_1 D & 1-S_1^2 \end{bmatrix}$$

où l'on pose :

$$S_0=1-QD, \qquad S_1=1-DQ.$$

Ici l'algèbre J est indépendante (à isomorphisme près) de la variété M et sa K-théorie est donnée par $K_0(J)=\mathbb{Z}$, la trace $\mathrm{Trace}(k)=\int k(x, x)\,dx$ donnant l'isomorphisme : $K_0(J)\simeq\mathbb{Z}$. De plus la classe $[P]\in K_0(J)=\mathbb{Z}$ est l'indice analytique de D donnée par le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer [2].

En fait, on peut, pour tout entourage $\mathscr{U}$ i. e. tout voisinage $\mathscr{U}$ de la diagonale Δ de $M\times M$, trouver une paramétrix Q de D à support dans $\mathscr{U}$ $(Q(x, y)=0,\ \forall (x, y)\notin\mathscr{U})$. On obtient ainsi grâce à cette localisation, une classe de K-théorie dans une algèbre d'opérateurs régularisants asymptotiques, $R_t\in J$, $\mathrm{Supp}\,R_t\to\Delta$. Sans chercher à définir trop précisément cette algèbre, montrons comment accoupler la classe de K-théorie de D avec une classe de cohomologie d'Alexander-Spanier $[\omega]\in H^*(M, \mathbb{C})$.

Une n-cochaîne d'Alexander-Spanier [17] est une fonction de $n+1$ variables, $\varphi(x^0, \ldots, x^n)$ où $x^i\in M$, dont le cobord est

$$(\delta\varphi)(x^0, \ldots, x^{n+1})=\sum(-1)^j\varphi(x^0, \ldots, \check{x}^j, \ldots, x^{n+1}).$$

La cohomologie d'Alexander-Spanier (isomorphe à la cohomologie usuelle) s'obtient en quotientant le complexe des cochaînes arbitraires (resp. boreliennes bornées; resp. de classe C^∞) par la relation $\varphi_1\sim\varphi_2$ si et seulement si $\varphi_1-\varphi_2$ s'annule dans un voisinage de la diagonale $\{(x, \ldots, x)\}\subset M^{n+1}$. Pour obtenir l'accouplement cherché, on remarque que pour toute cochaîne d'Alexander-Spanier φ, borelienne bornée, l'égalité suivante définit une forme $n+1$ linéaire τ_φ sur J :

$$(2) \qquad \tau_\varphi(k^0, \ldots, k^n)=\int_{M^{n+1}} k^0(x^0, x^1)\,k^1(x^1, x^2)\ldots k^n(x^n, x^0)\,\varphi(x^0, \ldots, x^n)$$

où les k^i sont des demi-densités dans leurs deux variables. De plus, si φ est normalisée (i. e. nulle si $x^i=x^j$ pour un $i\neq j$) et si $\delta\varphi=0$ dans le voisinage $\{(x^i)_{i=0, \ldots, n+1}\,|\,(x^i, x^{i+1})\in\mathscr{U},\ \forall i\}$, on a les propriétés suivantes des cocycles cycliques [6] :

$$(a) \qquad \tau_\varphi(k^1, \ldots, k^n, k^0)=(-1)^n\tau_\varphi(k^0, \ldots, k^n), \qquad \forall k^i\in J, \quad \mathrm{Supp}\,k^i\subset\mathscr{U}$$

$$(b) \qquad \left\{\begin{array}{l} \sum_0^n(-1)^j\tau_\varphi(k^0, \ldots, k^jk^{j+1}, \ldots, k^{n+1})+(-1)^{n+1}\tau_\varphi(k^{n+1}k^0, \ldots, k^n)=0 \\ \qquad\qquad \forall k^i\in J, \quad \mathrm{Supp}\,k^i\subset\mathscr{U}. \end{array}\right.$$

On peut alors utiliser les résultats de [6] pour vérifier que la valeur de $\tau_\varphi(P_\mathscr{U}, \ldots, P_\mathscr{U})$, où $P_\mathscr{U}$ est donnée par la formule (1) appliquée à une paramétrix Q à support dans $\mathscr{U}$, ne dépend que de l'opérateur D et de la classe de cohomologie $[\varphi]\in H^n(M, \mathbb{C})$, n pair. Nous noterons $\mathrm{Ind}_\varphi(D)=\tau_\varphi(P_\mathscr{U}, \ldots, P_\mathscr{U})$ [avec la convention usuelle d'extension de τ_φ aux matrices sur l'algèbre $\tilde{J}$ obtenue en adjoignant une unité à J : $\tilde{\tau}_\varphi(m^0\otimes k^0, \ldots, m^n\otimes k^n)=\mathrm{Trace}\,(m^0\ldots m^n)\,\tilde{\tau}_\varphi(k^0, \ldots, k^n)$ pour $m^j\in M_q(\mathbb{C})$, $k^j\in\tilde{J}$ et $\tilde{\tau}_\varphi(k^0+\lambda^0 1, \ldots, k^n+\lambda^n 1)=\tau_\varphi(k^0, \ldots, k^n)$ pour $k^j\in J$, $\lambda_j\in\mathbb{C}$].

Cet indice local $\mathrm{Ind}_\varphi(\mathrm{D})$ ne dépend que de la classe d'homotopie stable du symbole de D et se calcule par le raffinement suivant du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer :

THÉORÈME 3. — *Soient* M *une variété compacte,* $\mathrm{D}: \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{E}^+) \to \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{E}^-)$ *un opérateur différentiel elliptique sur* M, *et* $\varphi \in \mathrm{H}^{2q}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ *une classe de cohomologie (d'Alexander-Spanier). On a alors :*

$$\mathrm{Ind}_\varphi(\mathrm{D}) = \frac{(-1)^{\dim \mathrm{M}}}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \langle \mathrm{Ch}_*(\mathrm{D}), \varphi \rangle.$$

Ici $\mathrm{Ch}_*(\mathrm{D}) \in \mathrm{H}_*(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ désigne le caractère de Chern de D en K-homologie (*cf.* [4]), qu'il suffit de préciser lorsque $\mathrm{D} = \partial_\mathrm{E}$ est un opérateur de Dirac à coefficient dans un fibré vectoriel complexe E. On a alors $\mathrm{Ch}_*(\partial_\mathrm{E}) = \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{M})\, \mathrm{Ch}\, \mathrm{E} \cap [\mathrm{M}]$ où $\hat{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ est la classe $\hat{\mathrm{A}}$ de M.

Remarque 4. — (1) Notre démonstration [8] prouve en fait un résultat au niveau des formes différentielles, plus précis que le résultat cohomologique ci-dessus.

(2) Nous montrons dans [8] le lien entre le théorème 3, en particulier les constantes $q!/(2q)!$ qui y interviennent, et la cohomologie cyclique entière [7].

3. THÉORÈME DE L'INDICE POUR LES REVÊTEMENTS. — Soient M une variété compacte, $\tilde{\mathrm{M}}$ l'espace total d'un fibré Γ-principal de base M, où Γ désigne un groupe discret. Notons $\pi: \tilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}$ la projection de $\tilde{\mathrm{M}}$ sur M et $(g, x) \to gx$ l'action de Γ sur $\tilde{\mathrm{M}}$. Dans cette section nous montrons un analogue, pour des cocycles arbitraires $c \in \mathrm{H}^*(\Gamma, \mathbb{C})$, du théorème de l'indice L^2 d'Atiyah [1] et Singer [16], cas particulier où $c \in \mathrm{H}^0(\Gamma, \mathbb{C})$. Rappelons d'abord (*cf.* [6] puis [5]) que tout cocycle de groupe $c \in \mathrm{H}^n(\Gamma, \mathbb{C})$, $c(g^1, \ldots, g^n) \in \mathbb{C}$, $\forall g^i \in \Gamma$, normalisé $\left(\text{i. e. } c(g^i, \ldots, g^n) = 0 \text{ si l'un des } g^i \text{ vaut } 1 \text{ ou si } \prod_1^n g^i = 1\right)$ définit un cocycle cyclique τ_c sur l'algèbre du groupe $\mathbb{C}\Gamma$, par l'égalité suivante :

$$\tau_c(a^0, \ldots, a^n) = \sum_{g^0 g^1 \ldots g^n = 1} a^0(g^0)\, a^1(g^1) \ldots a^n(g^n)\, c(g^1, \ldots, g^n). \tag{5}$$

Soit alors $\tilde{\mathrm{D}}$ un opérateur différentiel elliptique Γ-invariant sur $\tilde{\mathrm{M}}$, $\tilde{\mathrm{D}}: \mathrm{C}^\infty(\tilde{\mathrm{M}}, \tilde{\mathrm{E}}^+) \to \mathrm{C}^\infty(\tilde{\mathrm{M}}, \tilde{\mathrm{E}}^-)$ où $\tilde{\mathrm{E}}^\pm$ sont les fibrés $\pi^*(\mathrm{E}^\pm)$ sur $\tilde{\mathrm{M}}$ associés aux fibrés vectoriels complexes $\mathrm{E}^\pm$ sur M. On ne peut définir directement l'indice Γ-équivariant de $\tilde{\mathrm{D}}$ comme un élément de $\mathrm{K}_0(\mathbb{C}\Gamma)$ car ce groupe est en général trop réduit. On peut par contre définir cet indice comme élément de $\mathrm{K}_0(l\Gamma)$, où $l\Gamma$ est le produit tensoriel *algébrique* de $\mathbb{C}\Gamma$ par l'algèbre l des opérateurs traçables dans l'espace de Hilbert à base dénombrable.

Commençons par utiliser l'existence d'une parametrix Q, Γ-invariante, pour $\tilde{\mathrm{D}}$ telle que les noyaux régularisants S_0 et S_1 définis par $\mathrm{S}_0 = 1 - \mathrm{Q}\tilde{\mathrm{D}}$, $\mathrm{S}_1 = 1 - \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{Q}$ soient à support compact dans $\tilde{\mathrm{M}} \times_\Gamma \tilde{\mathrm{M}}$, quotient de $\tilde{\mathrm{M}} \times \tilde{\mathrm{M}}$ par l'action de Γ. L'algèbre $\mathfrak{a}$ de ces noyaux régularisants s'identifie à l'algèbre de convolution $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})$ du groupoïde différentiable $\mathrm{G} = \tilde{\mathrm{M}} \times_\Gamma \tilde{\mathrm{M}}$ où $\mathrm{G}^{(0)} = \mathrm{M}$ et les applications source et but sont données par : (α) $s(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pi(\tilde{y})$, ($\beta$) $r(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pi(\tilde{x})$ et la composition par : (γ) $(\tilde{x}, \tilde{y}).(\tilde{y}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, \tilde{z})$. Il résulte donc de l'existence de Q [1] et de la formule (1), que l'on peut associer canoniquement à $\tilde{\mathrm{D}}$ une classe de K-théorie $[\tilde{\mathrm{D}}] \in \mathrm{K}_0(\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G}))$.

LEMME 6. — *Soient* $\mathrm{U} \subset \tilde{\mathrm{M}}$ *un domaine fondamental relativement compact pour l'action de* Γ *dans* $\tilde{\mathrm{M}}$ *et* $\beta: \mathrm{M} \to \tilde{\mathrm{M}}$ *la section borelienne correspondante de* $\pi: \tilde{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}$.

(a) L'application $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to g^{-1} g'$ *où* $\tilde{x} = g(\beta\pi\tilde{x})$, $\tilde{y} = g'(\beta\pi\tilde{y})$ *définit un homomorphisme* ρ *de* G *dans* Γ.

(*b*) *L'application* $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to ((\pi \tilde{x}, \pi \tilde{y}), \rho(\tilde{x}, \tilde{y}))$ *définit un isomorphisme borelien du groupoïde* G *avec le groupoïde* $(M \times M) \times \Gamma$.

(*c*) *L'isomorphisme* (*b*) *définit un homomorphisme* θ *de* $C_c^\infty(G)$ *dans le produit tensoriel algébrique* $l \otimes \mathbb{C}\Gamma$ *de l'algèbre des opérateurs traçables dans* $L^2(M)$ *par l'algèbre* $\mathbb{C}\Gamma$ *du groupe* $\mathbb{C}\Gamma$.

(*d*) *La flèche* $\theta_* : K_0(C_c^\infty(G)) \to K_0(l\Gamma)$ *est indépendante du choix du domaine fondamental* U.

On définit alors l'indice Γ-équivariant $\mathrm{Ind}_\Gamma(D)$ comme la valeur commune des $\theta_*([D]) \in K_0(l\Gamma)$.

Remarque 7. — Soit $\mathcal{S}$ l'algèbre des matrices (a_{ij}), $a_{ij} \in \mathbb{C}$ qui sont à décroissance rapide, i. e. $|i|^k |j|^l |a_{ij}|$ borné $\forall k, l$. On peut montrer que $\theta_*([D]) \in K_0(\mathcal{S}\Gamma)$ [où $\mathcal{S}\Gamma \subset l\Gamma$ est la sous-algèbre de $l\Gamma$ correspondant à l'inclusion $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1(l^2(\mathbb{N})) = l$]. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de l'indice Γ-équivariant :

THÉORÈME 8. — *Soit* $\tilde{D}$ *un opérateur elliptique* Γ*-invariant sur* $\tilde{M}$ *et soit* $c \in H^{2q}(\Gamma, \mathbb{C})$ *un cocycle de groupe. On a :*

$$\langle \tau_c \# \mathrm{Trace}, \mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \langle \mathrm{Ch}_*(D), \psi^*(c) \rangle$$

où $\tau_c \# \mathrm{Trace}$ *désigne le cocycle cyclique sur* $l\Gamma$ *produit tensoriel de* τ_c *par la trace sur* l, *où* $\mathrm{Ch}_*(D)$ *désigne le caractère en homologie de l'opérateur elliptique sur* M *associé à* $\tilde{D}$, *et où* $\psi : M \to B\Gamma$ *désigne l'application classifiante de* $\tilde{M}$.

La démonstration du théorème est une conséquence immédiate du théorème 3 et de l'isomorphisme local naturel entre les groupoïdes différentiables G et $M \times M$.

4. LE THÉORÈME DES HAUTES SIGNATURES POUR LES GROUPES HYPERBOLIQUES. — Soient M une variété compacte orientée de dimension paire, $\tilde{M}$ l'espace total d'un Γ-fibré principal de base M. Soient D l'opérateur de signature sur M et $\tilde{D}$ l'opérateur Γ-invariant correspondant sur $\tilde{M}$. Le théorème 8 appliqué à un cocycle de groupe $c \in H^{2q}(\Gamma, \mathbb{C})$ montre que :

$$\langle \tau_c \# \mathrm{Trace}, \mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) \rangle = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \langle \mathrm{Ch}_*(D), \varphi^*(c) \rangle$$

où le terme de droite est proportionnel à $\mathrm{Sign}_c(M, \varphi)$ (*cf.* (0)), $\varphi : M \to B\Gamma$ étant l'application classifiante.

Il suffirait de savoir que $\mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) \in K_0(l\Gamma)$ est invariant par homotopie pour avoir une réponse affirmative générale à la conjecture de Novikov. Par [15], la signature Γ-équivariante définit un invariant d'homotopie, élément du groupe de Witt de $\mathbb{C}\Gamma$. Il résulte alors de [15], [13] que l'élément $j_* \mathrm{Ind}_\Gamma(\tilde{D}) \in K_0(k \otimes C_r^*(\Gamma))$ est un invariant d'homotopie, où j est l'injection naturelle de $l \otimes \mathbb{C}\Gamma$ dans le produit tensoriel $k \otimes C_r^*(\Gamma)$ de la C^*-algèbre des opérateurs compacts par la C^*-algèbre réduite du groupe Γ. Tout le problème consiste alors à montrer que l'accouplement de $K_0(l\Gamma)$ avec $\tau_c \# \mathrm{Trace}$ se prolonge à $K_0(k \otimes C_r^*(\Gamma))$. Nous démontrons cela pour les groupes hyperboliques, en utilisant :

(1) L'existence d'un cocycle *borné* : $|c(g^1, \ldots, g^n)| \leq C$, $\forall g^i \in \Gamma$ dans toute classe de cohomologie $\omega \in H^{2q}(\Gamma, \mathbb{C})$, résultat de M. Gromov [9].

(2) L'existence d'une sous-algèbre $B \subset k \otimes C_r^*(\Gamma)$, stable par calcul fonctionnel holomorphe, contenant $\mathcal{S}\Gamma$ (*cf.* remarque 7), et à laquelle le cocycle cyclique $\tau_c \# \mathrm{Trace}$ se prolonge par continuité.

La démonstration de (2) utilise de manière essentielle l'hyperbolicité de Γ et les estimés de Haagerup [10], Jolissaint [12] et P. de la Harpe [11].

LEMME 9. — *Soient Γ un groupe discret, $F \subset \Gamma$ un système fini de générateurs, $g \to |g|$ la longueur des mots correspondante.*

(1) *Soit $\mathfrak{a} \subset k \otimes C_r^*(\Gamma)$ la plus petite sous-algèbre stable par calcul fonctionnel holomorphe contenant $\mathscr{S} \otimes \mathbb{C}\Gamma = \mathscr{S}\Gamma$. Pour tout élément de $\mathfrak{a}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a, avec $T = (T_{ij})$, $T_{ij} \in C_r^*(\Gamma)$*

$$\sum_{i,j} (p_k(T_{ij}))^2 < \infty \tag{10}$$

où $p_k(a) = (\sum |g|^k |a_g|^2)^{1/2}$ pour $a = (a_g)_{g \in \Gamma}$, $a \in C_r^*(\Gamma)$.

(2) *Si Γ est* hyperbolique, *et si le cocycle c est* borné, $c \in H^{2q}(\Gamma, \mathbb{C})$, $q \geqq 1$, *le cocycle cyclique* Trace $\# \tau_c$ *sur $\mathscr{S}\Gamma$ est continu pour les normes* (10) *et se prolonge à $\mathfrak{a}$.*

Nous pouvons alors énoncer le théorème des hautes signatures pour les groupes hyperboliques. Étant donnés un groupe discret Γ et une application continue $\varphi : M \to B\Gamma$ où M est une variété compacte orientée de dimension paire, nous noterons $L(M, \varphi)$ la classe dans le groupe de Witt $W(\mathbb{C}\Gamma)$ de l'algèbre involutive $\mathbb{C}\Gamma$, associé à (M, φ) par la chirurgie Γ-équivariante [15]. Cette classe est représentée par des éléments autoadjoints inversibles $H = H^* \in M_r(\mathbb{C}\Gamma)$ pour r assez grand.

THÉORÈME 11. — *Soient Γ un groupe hyperbolique, $c \in Z^{2q}(\Gamma, \mathbb{C})$ un cocycle borné, $\varphi : M \to B\Gamma$ une application continue où M est une variété compacte orientée de dimension paire. Soit $H = H^* \in M_r(\mathbb{C}\Gamma)$ un représentant de $L(M, \varphi) \in W(\mathbb{C}\Gamma)$ le compact de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ spectre de H dans la représentation régulière de Γ dans $l^2(\Gamma)$. La fonction analytique de plusieurs variables complexes*

$$F(\lambda^0, \ldots, \lambda^{2q}) = \tau_c((H-\lambda_0)^{-1}, (H-\lambda_1)^{-1}, \ldots, (H-\lambda_{2q})^{-1})$$

définie pour $|\lambda^i|$ petit se prolonge à $(\mathbb{C} \setminus K)^{2q+1}$, et la valeur, de

$$\tau_c(E^+, \ldots, E^+) - \tau_c(E^-, \ldots, E^-),$$

où $E^{\pm} = 1/(2\pi i) \int_{c^{\pm}} (H-\lambda)^{-1})$ ($c^{\pm}$ étant des contours convenables autour de la partie positive, resp. négative, du spectre de H) définie par prolongement analytique, est un invariant d'homotopie du cocycle (M, φ). De plus on a :

$$\tau_c(E^+, \ldots, E^+) - \tau_c(E^-, \ldots, E^-) = \frac{1}{(2\pi i)^q} \frac{q!}{(2q)!} \mathrm{Sign}_c(M, \varphi).$$

COROLLAIRE 12. — *Tout groupe hyperbolique vérifie la conjecture de Novikov.*

COROLLAIRE 13. — *Pour tout groupe hyperbolique Γ, l'application*

$$\mu : K_*(B\Gamma) \to K_*(C_r^*(\Gamma))$$

de [14], [3] *est rationnellement injective.*

Note reçue et acceptée le 4 juillet 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. ATIYAH, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, *Astérisque*, 32-33, 1976, p. 43-72.

[2] M. ATIYAH et I. SINGER, The index of ellipic operators I, III, *Ann. Math.*, 87, 1968, p. 484-530 et 546-609.

[3] P. BAUM et A. CONNES, Geometric K-theory for Lie groups and foliations, *Preprint I.H.E.S.*, 1982.

[4] P. BAUM et R. DOUGLAS, K-homology and index theory, *Operator algebras and applications, Proc. Symposia Pure Math.*, I, 38, 1982, p. 117-173.

[5] D. BURGHELEA, The cyclic homology of the group rings, *Comment. Math. Helvetici*, 60, 1985, p. 354-365.

[6] A. CONNES, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 62, 1985, p. 41-144.

[7] A. CONNES, Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules, *K-theory* (à paraître).

[8] A. CONNES et H. MOSCOVICI, Cyclic cohomology and the Novikov conjecture, *Preprint I.H.E.S.*, 1988.

[9] M. GROMOV, Hyperbolic groups, *Essays in group theory*, S. M. GERSTEN éd., Springer Verlag, 1987.

[10] U. HAAGERUP, An example of non nuclear C*-algebra which has the metric approximation property, *Invent. math.*, 50, 1979, p. 279-293.

[11] P. DE LA HARPE, Sur les algèbres d'un groupe hyperbolique, *C. R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).

[12] P. JOLISSAINT, Les fonctions à décroissance rapide dans les C*-algèbres réduites de groupes, *Thèse*, Université de Genève, 1987.

[13] G. G. KASPAROV, Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture, *Invent. math.*, 91, 1988, p. 147-201.

[14] G. G. KASPAROV, The operator K-functor and extensions of C*-algebras, *Math. U.S.S.R. Izv.*, 16, 1981, p. 513-572.

[15] A. S. MISCENKO, Homotopy invariants of non simply connected manifolds. Rational invariants, *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 34, n° 3, 1970.

[16] I. SINGER, Some remarks on operator theory and index theory, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 575, 1977, p. 128-138.

[17] E. SPANIER, Cohomology theory for general spaces, *Ann. Math.*, 49, 1948, p. 407-427.

A. C. : *I.H.E.S.*, 35, *route de Chartres*, 91140 *Bures-sur-Yvette;*

H. M. : *Dept. of Math.*, *Ohio State University*, *Columbus*, *Ohio*, *U.S.A.*