ANALYSE FONCTIONNELLE. — *États presque périodiques sur une algèbre de von Neumann.* Note (*) de M. **Alain Connes**, transmise par M. Gaston Julia.

Dans I nous répondons à une question de M. Takesaki en montrant la continuité de la dépendance entre l'état normal fidèle φ et le groupe d'automorphismes modulaires σ_t^φ. Dans II et IV (th. 11), nous relions la propriété L_λ de Powers et l'invariant S de (1). Dans III nous répondons à une question de E. J. Woods (4) en montrant que la classification des facteurs *non hyperfinis* de type III n'est pas standard. Dans IV, nous introduisons et étudions les états normaux fidèles φ dont le groupe d'automorphismes modulaires σ_t^φ est fortement presque périodique.

Dans toute cette Note, M désigne une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ où elle admet un vecteur séparateur et totalisateur. M_* désigne le prédual de M, muni de la topologie normique, $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des états normaux fidèles muni de la topologie induite.

Pour $\varphi \in \mathcal{F}$, σ_t^φ désigne le groupe d'automorphismes modulaires correspondant (3). Pour $\varphi \in \mathcal{F}$ on choisit un élément ξ_φ de $\mathfrak{H}$, totalisateur pour M, tel que $\varphi(x) = \langle x\,\xi_\varphi, \xi_\varphi\rangle$ pour tout x de M, et l'on note $\Delta\varphi$ l'opérateur modulaire correspondant.

I. Perturbation des automorphismes modulaires.

Théorème 1. — (*a*) *$\mathcal{F}$ est un G_δ dans M_* [cf. (2)].*

(*b*) *Quand $\psi \to \varphi$ dans $\mathcal{F}$, pour tout $x \in M$, et tout $t \in R$, on a $\sigma_t^\psi(x) \to \sigma_t^\varphi(x)$ fortement; la convergence est uniforme en t, pour $|t| \leq t_0$.*

L'estimé principal est le suivant :

Lemme 2. — *Si la mesure spectrale de $\Delta\varphi$ sur $x\,\xi_\varphi$ est portée par l'intervalle* $[\gamma^{-1}, \gamma]$, $\gamma \geq 2$ et si

$$\|\psi - \varphi\| \leq 4^{-40}\gamma^{-20}(\operatorname{Log}\gamma)^{-30},$$

on a

$$|\psi(\sigma_t^\psi(x)\,x^*) - \varphi(\sigma_t^\varphi(x)\,x^*)| \leq 36\,(1 + 4\,t^2)^{1/2}\,\|x\|^2\,\|\psi - \varphi\|^{1/10}.$$

II. La propriété L_λ de Powers et l'invariant S.

Théorème 3. — *Soit* λ, $0 < \lambda < 1/2$; *si* M *vérifie la propriété* L_λ *de Powers, on a*

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} \in S(M) = \bigcap \text{Spectre}\,\Delta\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{F}.$$

La démonstration utilise le lemme plus précis suivant :

Lemme 4. — *Soit* λ, $0 < \lambda < 1/2$; *soient* $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{F}$; *soit* $u \in M$, $u^2 = 0$, $uu^* + u^*u = 1$ *tel que*

$$|\lambda\varphi(ux) - (1-\lambda)\varphi(xu)| \leq \varepsilon\,\|x\|, \quad \forall\, x \in M\,;$$

on a alors

$$|\lambda\varphi(ux) - (1-\lambda)\varphi(xu)| \leq 15\,\varepsilon^{1/2}\,[\varphi(x^* x + xx^*)]^{1/2}, \quad \forall\, x \in \mathrm{M}.$$

III. Invariant T et classification des facteurs non hyperfinis de type III dans un espace de Hilbert séparable.

Théorème 5. — *L'espace borélien des classes d'isomorphisme algébrique des facteurs de type* III *non hyperfinis dans l'espace de Hilbert séparable n'est pas dénombrablement séparé.*

La démonstration s'appuie sur la construction effectuée dans ([4]) et sur le lemme suivant :

Lemme 6. — *Soient* P *un I. T. P. F. I.,* N *un facteur fini; on a*

$$\mathrm{T}(\mathrm{P} \otimes \mathrm{N}) = \mathrm{T}(\mathrm{P}) = \left\{ \mathrm{T}_0,\ \exp\left(-\frac{2\pi}{\mathrm{T}_0}\right) \in \rho(\mathrm{P}) \right\},$$

où T désigne l'invariant défini dans ([1]).

IV. États presque périodiques sur une algèbre de von Neumann.

Lemme 7. — *Pour* $\varphi \in \mathcal{F}$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Pour tout élément* x *de* M *l'ensemble* $\{\sigma_t^\varphi(x)\,\xi_\varphi,\ t \in \mathrm{R}\}$ *est normiquement précompact dans* $\mathfrak{H}$;

(*b*) *Pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* M *la fonction*

$$t \to f(t) = \varphi(\sigma_t^\varphi(x)\,y)$$

est presque périodique;

(*c*) *Il existe une famille* E_λ, $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$ *de projecteurs deux à deux orthogonaux de* $\mathfrak{H}$ *tels que* $\Delta_\varphi = \Sigma\,\lambda\,\mathrm{E}_\lambda$, $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$;

(*d*) *Il existe un groupe commutatif compact* K, *un homomorphisme fortement continu* Π *de* K *dans le groupe des automorphismes de* M *qui laissent* φ *invariant, un homomorphisme* β *du dual* $\hat{\mathrm{K}}$ *dans* R_+^* *tels que* $\forall\, x \in \mathrm{M}$, $\forall\, y \in \mathrm{M}$, *en posant pour* $g \in \mathrm{K}$,

$$f_1(g) = \varphi(\Pi_g(x)\,y) \qquad \text{et} \qquad f_2(g) = \varphi(y\,\Pi_g(x)),$$

on ait Fourier $f_1 = \beta$.Fourier f_2.

Définition 8. — Soit $\varphi \in \mathcal{F}$; on dit que φ est presque périodique et on note $\varphi \in \mathcal{F}_{pp}$ s'il vérifie les conditions équivalentes du lemme 7.

Lemme 9. — *Si* M *est un produit tensoriel infini d'algèbres de von Neumann semi-finies de genre dénombrable (et en particulier si* M *est I. T. P. F. I., ou finie),* $\mathcal{F}_{pp}$ *est dense dans* $\mathcal{F}$.

Théorème 10. — *Soit* $\varphi \in \mathcal{F}_{pp}$; *pour* $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$ *on pose*

$$\mathrm{N}_\lambda = \{x,\ x \in \mathrm{M},\ \sigma_t^\varphi(x) = \lambda^{it} x,\ \forall\, t \in \mathrm{R}\}, \qquad \mathrm{N} = \mathrm{N}_\varphi, \qquad \mathrm{C} = \text{Centre de N}.$$

Pour $x \in \mathrm{M}$ *on note* $\gamma(x)$ *le plus petit projecteur* γ *de* C *tel que* $x\gamma = x$.

1° *On a* $\mathrm{N}' \cap \mathrm{M} \subset \mathrm{N}$, *où* N′ *désigne le commutant de* N.

2° (*a*) *Soit* $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$; *pour que* λ *appartienne au spectre ponctuel de* Δ_φ *il faut et il suffit que* $k(\lambda) \neq 0$, *où*

$$k(\lambda) = \mathrm{V}\,\gamma(x), \qquad x \in \mathrm{N}_\lambda;$$

(*b*) *Pour tout* $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$, *il existe un isomorphisme unique* ω_λ *de l'algèbre réduite* $\mathrm{C}\,k(\lambda)$ *sur* $\mathrm{C}\,k(\lambda^{-1})$ *tel que pour tout* x *de* N_λ *on ait*

$$\gamma(x^*) = \omega_\lambda(\gamma(x));$$

(*c*) *Pour tout couple* (λ_1, λ_2) *d'éléments de* R_+^* *et tout projecteur* q *de* C *tel que* $q \leq k(\lambda_1)$, $\omega_{\lambda_1}(q) \leq k(\lambda_2)$, on a

$$q \leq k(\lambda_1 \lambda_2) \qquad \text{et} \qquad \omega_{\lambda_1\lambda_2}(q) = \omega_{\lambda_2}(\omega_{\lambda_1}(q)).$$

3° *Pour que* M *soit un facteur il faut et il suffit que pour tout couple* (q_1, q_2) *de projecteurs non nuls de* C *il existe* $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$ *tel que*

$$q_1\, k(\lambda)\, \omega_{\lambda^{-1}}(q_2\, k(\lambda^{-1})) \neq 0.$$

4° *Si* M *est un facteur l'algèbre de von Neumann* N *est, soit discrète, soit continue.*

Pour tout projecteur non nul e de N, φ_e désigne l'état défini sur l'algèbre réduite M_e par l'égalité $\varphi_e(x) = \varphi(x)/\varphi(e)$.

Pour $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{PP}}$, G_φ désigne le sous-ensemble fermé de R_+^*, intersection des spectres des opérateurs modulaires $\Delta\varphi_e$ quand e décrit l'ensemble des projecteurs non nuls de N.

Théorème 11. — 1° *Soit* $\varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{PP}}$ *et soit* $\lambda \in \mathrm{R}_+^*$, $\lambda \neq 1$:

(*a*) *Pour que* λ *appartienne à* G_φ *il faut et il suffit que pour tout projecteur non nul* q *de* C *et tout voisinage* V *de* λ *il existe un* $\mu \in \mathrm{V}$, *tel que*

$$k(\mu)\, q\, \omega_{\mu^{-1}}(k(\mu^{-1})\, q) \neq 0;$$

(*b*) G_φ *est un sous-groupe multiplicatif fermé de* R_+^*;

(*c*) *Pour que* λ *appartienne à* G_φ, *il faut et il suffit que pour tout état* ψ *commutant avec* φ *et tout nombre positif* ε, *il existe un élément* u *de* M *tel que*

$$u^2 = 0, \qquad uu^* + u^*u = 1, \qquad |\psi(ux) - \lambda\psi(xu)| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \forall\, x \in \mathrm{M}.$$

2° *Soit* M *un facteur de type* III *tel que* $\mathcal{F}_{\mathrm{PP}}$ *soit dense dans* $\mathcal{F}$:

(*a*) *Soit* $\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \bigcap$ *Spectre* Δ_φ, $\varphi \in \mathcal{F}$ [*cf.* ([1])]; *on a*

$$\mathrm{S}(\mathrm{M}) = \bigcap \textit{Spectre}\ \Delta_\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{PP}} = \bigcap \mathrm{G}_\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{F}_{\mathrm{PP}}\ ;$$

(*b*) S (M) *est un sous-groupe multiplicatif fermé de* R_+^*;

(*c*) *Pour que* M *vérifie la propriété* L_λ *de Powers, il faut et il suffit que* $\lambda/(1-\lambda)$ *appartienne à* S (M) (*on suppose* $0 < \lambda < 1/2$).

Corollaire 12. — *Soit* M *un facteur*; *soient* $\varphi \in \mathcal{F}$, et λ, $0 < \lambda < 1$ *tels que*

$$\textit{Spectre}\ \Delta\varphi = \{\lambda^n,\ n \in \mathrm{Z}\} = \mathrm{S}(\mathrm{M});$$

alors l'algèbre

$$\mathrm{N} = \{x,\ x \in \mathrm{M},\ \sigma_t^\varphi(x) = x,\ \forall\ t \in \mathrm{R}\}$$

est un facteur (*fini, continu*).

Corollaire 13. — *Soit* M *un produit tensoriel infini d'algèbres de von Neumann semi-finies de genre dénombrable;* soit λ, $0 < \lambda < 1/2$; M *vérifie la propriété* L'_λ *d'Araki si* (*et seulement si*) M *vérifie la propriété* L_λ *de Powers.*

(*) Séance du 24 avril 1972.

(1) A. Connes, *Comptes rendus*, 274, série A, 1972, p. 175.

(2) J. Dixmier et O. Maréchal, *Vecteurs totalisateurs dans les algèbres de von Neumann.*

(3) M. Takesaki, *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Springer, Berlin, Lecture notes in Mathematics n° 128.

(4) E. J. Woods, *The classification of factors is not smooth* (preprint).

1, *avenue Mathilde,*
95-*Saint-Gratien,*
Val-d'Oise.