Géométrie/*Geometry*

Conjecture de Novikov et fibrés presque plats

Alain CONNES, Mikhaïl GROMOV et Henri MOSCOVICI

Résumé — Nous introduisons la notion de fibré presque plat sur une variété M et démontrons en toute généralité que la signature à coefficients dans un tel fibré est un invariant d'homotopie. Ceci implique la conjecture de Novikov dans tous les cas connus ainsi que pour la classe des groupes « semi-hyperboliques ».

Novikov conjecture and almost flat vector bundles

Abstract — *We introduce the notion of almost flat bundle on a manifold* M *and prove in full generality that the signature with coefficients in such a bundle is a homotopy invariant. This implies the Novikov conjecture for all the already proven cases as well as for a suitable class of semihyperbolic groups.*

1. FIBRÉS PRESQUE PLATS. — Soient (M, d) une variété riemannienne compacte et (E, ∇) un fibré vectoriel complexe hermitien sur M muni d'une connexion compatible ∇. Nous poserons :

$$\|(E, \nabla)\| = \sup_{x \in M} \{\|\theta_x(X \wedge Y\| \leqq 1; \|X \wedge Y\| \leqq 1\}$$

où $X, Y \in T_x(M)$ et où la norme $\|\theta_x(X \wedge Y)\|$ est la norme d'opérateur, dans l'espace Hilbertien E_x, de la courbure $\theta = \nabla^2$.

DÉFINITION 1. — Soit $\alpha \in K^0(M)$; on dit que α est presque plat si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un représentant $(E^+, \nabla^+) - (E^-, \nabla^-)$ de α tel que $\|(E^\pm, \nabla^\pm)\| \leqq \varepsilon$.

Cette notion ne dépend pas du choix de la structure riemannienne sur M. Si M est *simplement connexe*, il existe $\varepsilon > 0$ tel que tout fibré (E, ∇), $\|(E, \nabla)\| \leqq \varepsilon$, soit trivial.

Si $M_1 \xrightarrow{\Psi} M_2$ est une application continue et, $\alpha \in K^0(M_2)$ est presque plat si il en est de même de $\Psi^*(\alpha) \in K^0(M_1)$.

PROPOSITION 2 [7]. — *Si* M *est spinorielle et de courbure scalaire partout* > 0, *on a*

$$\langle \hat{A}(M)\, \mathrm{ch}(\alpha), [M] \rangle = 0 \quad \textit{pour tout } \alpha \in K^0(M), \ \alpha \textit{ presque plat.}$$

Il suffit en effet de montrer que l'indice de l'opérateur de Dirac $\mathscr{D}_E$ à coefficients dans un fibré hermitien (E, ∇) est nul dès que $\|(E, \nabla)\|$ est suffisamment petit, ce qui résulte de la formule de Lichnerowicz.

Nous démontrons comme corollaire d'un théorème de l'indice (th. 10) le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Soient* M *une variété compacte et* $\alpha \in K^0(M)$, α *presque plat. Le scalaire* $\langle L_N \Psi^* \mathrm{ch}(\alpha), [N] \rangle$ *est un invariant d'homotopie du couple* (N, Ψ), *où* N *est une variété compacte orientée et* $\Psi : N \to M$ *une application continue.*

Ici L_N désigne le genre de Hirzebruch qui intervient dans le théorème de signature.

Le théorème 3 donne une réponse très générale à la conjecture de Novikov qui se ramène à démontrer que sur un espace $K(\pi, 1)$ il existe suffisamment de fibrés presque plats. Nous discutons les applications dans la section 6 ci-dessous.

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/90/03100273 $ 2.00 © Académie des Sciences

2. Quasi-représentation de $\Gamma=\pi_1(M)$ associée à un fibré presque plat. — Soient (M, d) une variété riemannienne compacte, $\Gamma=\pi_1(M)$ et $a \in M$ un point base. Soient $\mathscr{L}M$ (resp. $\mathscr{L}_0 M$) l'espace des lacets dans M de source a et de but $y \in M$ (resp. de but a), et $\gamma: \Gamma \to \mathscr{L}_0$ une section de l'application canonique de $\mathscr{L}_0$ sur Γ, telle que (*a*) $\gamma(1)$ est le lacet trivial, (*b*) $\gamma(g^{-1})$ est le lacet opposé de $\gamma(g)$, $\forall g \in \Gamma$, $g^2 \neq 1$.

Pour tout fibré hermitien (E, ∇) comme ci-dessus, on définit une application linéaire bornée involutive de l'algèbre de Banach involutive $l^1(\Gamma), *)$ dans $\mathscr{L}(E_{x_0})$ en associant à $g \in \Gamma$ l'opérateur $\sigma(g)$ de transport parallèle le long de $\gamma(g)$ (si $g^2=1$ on remplace $\sigma(g)$ par $(1/2)(\sigma(g)+\sigma(g)^*)$). Le lemme suivant montre qu'un fibré presque plat est caractérisé par la « quasi-représentation » associée σ de $\Gamma=\pi_1(M)$.

Lemme 4. — 1. *Étant donnée* (M, d), *il existe* $\varepsilon>0$ *et une partie finie* $F \subset \Gamma$ *tels que si* $\|(E, \nabla)\| \leqq \varepsilon$, $\|(E', \nabla')\| \leqq \varepsilon$, *et si* $U: E_a \to E'_a$ *est un unitaire tel que*

$$\|U\sigma(g)U^{-1}-\sigma'(g)\| \leqq \varepsilon, \qquad \forall g \in F \subset \Gamma,$$

les deux fibrés E *et* E' *sont isomorphes*.

2. *Soient* $a_1, a_2 \in l^1(\Gamma)$; *il existe* $C<\infty$ *tel que pour tout couple* (E, ∇) *on ait* $\|\sigma(a_1 a_2)-\sigma(a_1)\sigma(a_2)\| \leqq C\|(E, \nabla)\|$.

Nous appellerons *quasi-représentation* d'une algèbre de Banach involutive A [ici $l^1(\Gamma)$, $*$] dans un espace hilbertien de dimension finie E_0, la donnée d'une application linéaire bornée et involutive $\sigma: A \to \mathscr{L}(E_0)$ telle que $\sigma(1)=1$. La donnée importante est celle des normes suivantes sur l'espace des quasi-représentations (F partie finie de A) :

$$\|\sigma\|_F=\operatorname{Sup}\{\|\sigma(ab)-\sigma(a)\sigma(b)\|;\ a, b \in F\}$$

3. Groupe de Witt de A et quasi-représentations. — Avec les notations du théorème 3, deux couples (N_1, Ψ_1), (N_2, Ψ_2) qui sont homotopes définissent grâce à la chirurgie algébrique équivariante de Mishchenko [11] des éléments équivalents $[H_1]=[H_2]$ dans le groupe de Witt de l'algèbre involutive $\mathbb{C}\Gamma$, $\Gamma=\pi_1(M)$. Pour démontrer le théorème 3 nous construisons en général un accouplement entre classes $\alpha \in K^0(M)$, α presque plat, et le groupe de Witt de $\mathbb{C}\Gamma$, de telle sorte que :

$$\langle \alpha, H\rangle=\langle L_N \operatorname{ch} \Psi^*(\alpha), [N]\rangle.$$

Nous commençons par définir l'accouplement au niveau des quasi-représentations :

Proposition 5. — *Soit* $H=H^*$ *un élément inversible autoadjoint de* $M_q(l^1(\Gamma))$ 1). *Si* σ *est une quasi-représentation de* $l^1(\Gamma)$ *dans l'espace hilbertien de dimension finie* E, *et si* $\|\sigma\|_F<(1/2)q^{-2}$ *où* $F=\{H_{ij}, (H^{-1})_{ij};\ i, j=1, \ldots, q\}$, *l'élément* $\sigma(H)=(\sigma(H_{ij}))_{ij}$ *de* $M_q(\mathscr{L}(E))=\mathscr{L}(E \otimes \mathbb{C}^q)$ *est autoadjoint et inversible*.

2. *Si* H *et* H' *sont comme ci-dessus et définissent le même élément du groupe de Witt de* $l^1(\Gamma)$, *il existe une partie finie* $F' \subset l^1(\Gamma)$ *et* $\varepsilon>0$ *tels que :*

$$\|\sigma\|_{F'}<\varepsilon \Rightarrow \text{Signature } \sigma(H)=\text{Signature } \sigma(H').$$

Il suffit pour 1 de s'assurer que $\|\sigma(H)\sigma(H^{-1})-1\|<1/2$ et $\|\sigma(H^{-1})\sigma(H)-1\|<1/2$. L'égalité 2 et l'invariance par homotopie de la classe de la signature équivariante ramènent la démonstration du théorème 3 à celle du théorème suivant :

Théorème 6. — *Soient* (M, d) *une variété riemannienne compacte orientée*, $\Gamma=\pi_1(M)$ *et* $H \in M_q(l^1(\Gamma))$ *un représentant de la signature équivariante de* M. *Pour* $\varepsilon>0$ *assez petit et tout couple* (E, ∇) *tel que* $\|(E, \nabla)\| \leqq \varepsilon$, *on a avec les notations ci-dessus :*

$$\text{Signature } \sigma(H)=\langle L_M \operatorname{ch} E, [M]\rangle.$$

En utilisant la proposition 5 2 et le lemme 7 suivant, on peut remplacer Sign $\sigma(H)$ dans le théorème 6 par Sign $(\sigma(e))$ où $e=[e^+]-[e^-]\in K_0(l^1(\Gamma))$ est la classe de K théorie définie (*cf.* [5]) par l'indice analytique de l'opérateur de signature sur le revêtement $\tilde{M}$ de M. Ceci ramène la démonstration du théorème 6 à celle du théorème de l'indice (th. 10) de la section 5 qui a un intérêt plus général.

LEMME 7. — *La classe dans le groupe de Witt de $l^1(\Gamma)$ de la signature équivariante de* M *est égale à celle de l'indice analytique de l'opérateur de signature sur le revêtement* $\tilde{M}$.

4. COHOMOLOGIE CYCLIQUE ET CARACTÈRE D'UNE QUASI-REPRÉSENTATION. — Nous avons introduit dans [5] section 4 la cohomologie cyclique asymptotique pour les C* algèbres (ou plus généralement les algèbres de Banach) en considérant comme cocycles les familles différentiables $(\varphi_t)_{t>0}$ de cocycles $(\varphi_t^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ où :

(*a*) φ_t^{2n} est une forme $(2n+1)$ linéaire continue sur l'algèbre de Banach A.

(*b*) $d_1\varphi_t^{2n}+d_2\varphi_t^{2n+2}=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t$

[où $d_1=(2n+1)b$, $d_2=1/(2n+2)$ B sont les différentielles du bicomplexe de la cohomologie cyclique] (*cf.* [2]).

(*c*) $\lim\limits_{t\to 0}\rho(\varphi_t, F)=0$ pour toute partie finie $F\subset A$.

Ici, *cf.* [5], on utilise la notation :

$$\rho(\varphi_t, F)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\ \overline{\lim_{q\to\infty}}\left(\frac{1}{q!}\sup|\varphi_t^{2q}(a^0,\ldots,a^{2q})|\right)^{1/2q}$$

où le sup est pris sur l'ensemble des $2q+1$-uples $(a^0,\ldots,a^{2q})$ tels que tous les a^i soient dans F sauf au plus k d'entre eux. Nous demanderons en outre (*cf.* [5]) que $(d/dt)\varphi_t$ soit un cobord. Le lien entre cette notion et celle de quasi-représentation est le même que le lien entre la notion de trace et celle de représentation :

PROPOSITION 8. — *Soient* A *une algèbre de Banach,* σ *une application linéaire de* A *dans* $\mathscr{L}(E)$ *où* E *est un espace hilbertien de dimension finie, telle que* $\sigma(1)=1$, $\|\sigma(a)\|\leq\|a\|$, $\forall a\in A$. 1. *L'égalité suivante définit un cocycle* $(\varphi^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *du bicomplexe* (d_1, d_2) [cf. (*a*)(*b*)] :

$$\varphi^{2n}(a^0,\ldots,a^{2n})=\lambda_n \operatorname{Tr}(\sigma(a^0)\,\theta(a^1,a^2)\ldots\theta(a^{2n-1},a^{2n})),\qquad \forall a^i\in A$$

où $\theta(a,b)=\sigma(ab)-\sigma(a)\,\sigma(b)$, $\forall a, b\in A$ *et où*

$$\lambda_n=(-1)^n 2^{2n}\times\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}.$$

2. *Pour toute partie finie* $F\subset A$ *on a :*

$$\rho(\varphi, F)=\|\sigma\|_F.$$

Pour la formule 1, *voir* [2] section 6 et [12].

Nous avons montré dans [5], prop. 4.5, que la condition (*c*) ci-dessus permet de définir l'accouplement entre cocycles asymptotiques et K-théorie, grâce à la convergence pour tout projecteur $e\in M_n(A)$ de la série :

$$(*)\qquad \langle\varphi, e\rangle=\sum_{q!}^{\infty}\frac{(-1)^q}{q!}(\varphi_{2q}\#\operatorname{tr})(e,\ldots,e).$$

Comme le cocycle de la proposition 8 n'est pas normalisé au sens de [3] il faut utiliser la formule générale suivante due à E. Getzler et A. Szenes qui ne nécessite pas la normalisation :

$$(**)\qquad \langle \varphi, e\rangle = \sum_0^\infty \frac{(-1)^q}{q!}(\varphi_{2q}\#\mathrm{tr})\left(e-\frac{1}{2}, \quad e, \ldots, e\right).$$

PROPOSITION 9. — *Soient* A *une algèbre de Banach, et* $e \in M_n(A)$ *un projecteur. Il existe une partie finie* $F \subset A$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que pour toute quasi-représentation* $\sigma : A \to \mathscr{L}(E)$ *telle que* $\|\sigma\|_F < \varepsilon$ *on ait (avec* E *de dimension finie) :*

(*a*) Spectre $\sigma(e) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z^2 - z| < 1/4\}$.

(*b*) $\langle \varphi, e\rangle = \text{trace}\ (p-(1/2))$ *où* p *est le projecteur,* $p \in M_n(\mathscr{L}(E))$ *défini par* $p = 1/2 i\pi \int_c (\sigma(e)-z)^{-1}\, dz$ *où* C *est le cercle de centre* $z=1$ *et de rayon* $1/2$.

On utilise les égalités suivantes (avec $n=1$ pour simplifier) :

$$\langle \varphi, e\rangle = \sum_0^\infty \frac{(-1)^q}{q!}\varphi_{2q}\left(e-\frac{1}{2}, e, \ldots, e\right)$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^q \lambda_q}{q!}\mathrm{Tr}\left(\sigma\left(e-\frac{1}{2}\right)\theta(e, e)^q\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Trace}\left(\frac{2\sigma(e)-1}{\sqrt{(2\sigma(e)-1)^2}}\right),$$

où l'inégalité $\|\theta(e, e)\| < 1/4$ permet de définir sans ambiguïté la racine carrée de $(1-2\sigma(e))^2 = 1 - 4\theta(e, e)$.

5. THÉORÈME DE L'INDICE ET QUASI-REPRÉSENTATION. — Comme nous l'avons vu dans la section 3 la démonstration du théorème 3 se ramène à celle du théorème suivant :

THÉORÈME 10. — *Soient* (M, *d*) *une variété riemannienne compacte,* $\Gamma = \pi_1(M)$, D *un opérateur différentiel elliptique sur* M *et* $[e] \in K_0(R\Gamma)$ (cf. [5]) *son indice analytique équivariant. Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que pour tout couple* (E, ∇) *tel que* $\|(E, \nabla)\| < \varepsilon$ *on ait :*

$$\text{Signature}\ (\sigma(e)) = \text{Indice}\ (D_E).$$

La démonstration est semblable à celle du théorème de l'indice pour les revêtements (*cf.* [1], [13]) et consiste à exprimer les deux termes de l'égalité du théorème 10 sous la même forme :

$$(*)\qquad \sum_{q=0}^\infty \frac{(-1)^q \lambda_q}{q!}\int_{M^{2q+1}} dx_{2q}\,\mathrm{tr}(R(x_0, x_1)\ldots R(x_{2q}, x_0)\,\varphi_{2q}(x_0, \ldots, x_{2q})$$

où R est le noyau idempotent construit dans [5] (*cf.* th. 5.4) à partir de l'opérateur D et d'une parametrix Q suffisamment localisée, et où $(\varphi_{2q})_{q\in\mathbb{N}}$ est une cochaîne d'Alexander Spanier convenable.

On utilise la proposition 9 pour exprimer $\mathrm{Ind}(D_E)$ sous la forme (*) avec :

$$\varphi_{2q}(x_0, \ldots, x_{2q}) = \mathrm{tr}(\delta_{x_0, x_1}\theta(x_1, x_2, x_3)\,\theta(x_3, x_4, x_5)\ldots\theta(x_{2q-1}, x_{2q}, x_0))$$

où $\delta_{xy} \in \mathrm{Hom}(E_y, E_x)$ désigne le transport parallèle pour la connexion ∇, le long de la géodésique de y à x et où $\theta(x, y, z) \in \mathrm{Hom}(E_z, E_x)$ est égale à $\delta_{xz} - \delta_{xy}\delta_{yz}$.

On utilise de même la proposition 9 et la démonstration du théorème 5.4 de [5] pour exprimer $\mathrm{Sign}(\sigma(e))$ sous la forme (*) avec :

$$\varphi'_{2q}(x_0, \ldots, x_{2q}) = \mathrm{tr}(\delta'_{x_0, x_1}\theta'(x_1, x_2, x_3)\,\theta'(x_3, x_4, x_5)\ldots\theta'(x_{2q-1}, x_{2q}, x_0))$$

où $\delta'_{xy} \in \mathrm{Hom}(E_y, E_x)$ est défini pour $x, y \notin C$ le cut locus du point base comme la composition $\delta'_{xy} = \delta_{xa}\delta_{ay}$ des transports parallèles le long des géodésiques ya puis ax.

6. Applications et remarques. — Le théorème 3 reste valable si M est un complexe simplicial, à condition de reformuler correctement la notion de fibré presque plat. Il est d'ailleurs nécessaire dans les applications qui vont suivre de reformuler cette notion en l'adaptant aux fibrés de dimension infinie munis d'une superconnexion en un sens convenable. Le théorème 3 implique la conjecture de Novikov pour un groupe discret Γ dès que toute classe de K-théorie $\alpha \in K^0(B\Gamma)$ est presque plate, ce qui se démontre facilement dans les cas suivants :

1. $\Gamma = \pi_1(N)$ où N est une variété, non nécessairement compacte, à courbure sectionnelle négative ou nulle [9].

2. Γ sous-groupe discret d'un groupe de Lie connexe ou d'un groupe algébrique sur un corps local [10].

3. $\Gamma = \pi_1(N)$, où le revêtement universel $\tilde{N}$ est un espace hyper Euclidien (au sens de [8]).

4. Γ groupe hyperbolique [5].

En fait ceci se démontre aussi pour les groupes semi hyperboliques en un sens convenable.

Ce théorème démontre également en toute généralité la conjecture de Novikov pour le sous-anneau de $H^*(B\Gamma)$ engendré par $H^n(B\Gamma)$, $n \leqq 2$. Le seul cas qui n'est pas couvert est celui des classes de cohomologie de Gelfand-Fuchs $\alpha \in H^*(B\,\mathrm{Diff}, \mathbb{R})$ traité dans [4] car celles-ci sont à coefficients réels.

Enfin la notion de quasi-représentation d'un groupe est déjà apparue dans un cas particulier, *i.e.* $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, dans le contexte des C* algèbres [14].

Note remise et acceptée le 23 octobre 1989.

Références bibliographiques

[1] M. F. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, *Asterisque*, 32-33, 1976, p. 43-72.

[2] A. Connes, Non-commutative differential geometry, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 62, 1985, p. 41-144.

[3] A. Connes, Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules. *K theory*, 1, 1988, p. 519-548.

[4] A. Connes, Cyclic Cohomology and the Transverse Fundamental Class of a Foliation. In *Geometric methods in operator algebras*, H Araki et E. G. Effros éd., Pitman, Research Notes in Mathematics Series; 123. Longman Scientific & Technical and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986, p. 52-144.

[5] A. Connes et H. Moscovici, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, *Topology* (to appear).

[6] M. Gromov, Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, S. M. Gersten, éd. Mathematical Sciences Research Institute Publication; 8°, Springer-Verlag, New York, Inc., 1987, p. 75-264.

[7] M. Gromov et H. B. Lawson, Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 58, 1983, p. 83-196.

[8] M. Gromov, Large Riemannian manifolds, *Lecture Notes in Math.*, n° 1201, 1985, p. 108-122.

[9] G. G. Kasparov et G. Skandalis, Groupes agissant sur des immeubles de Bruhat-Tits, K-théorie opératorielle et conjecture de Novikov, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 310, série I, 1990, p. 171-174.

[10] G. G. Kasparov, Equivariant KK theory and the Novikov conjecture, *Invent. Math.*, 91, 1988, p. 147-201.

[11] A. S. Mishchenko, Homotopy invariants of non simply connected manifolds. Rational invariants I, *Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 34, 1970, n° 3, p. 501-514.

[12] D. Quillen, Algebra cochains and cyclic cohomology *Publ. Math. J.M.E.S.*, 68, 1989, p. 139-174.

[13] I. M. Singer, Some remarks on operator theory and index theory, *Lecture Notes in Math.*, n° 575, 1977, p. 128-138.

[14] D. Voiculescu, Asymptotically commuting finite rank unitary operators without commuting approximants, *Acta. Sci. Math.*, 45, 1983, p. 429-431.

A. C. : *Collège de France*, 3, *rue d'Ulm*, 75231 *Paris Cedex* 05;
M. G. : *I.H.E.S.*, 35, *route de Chartres*, 91440 *Bures-sur-Yvette*;
H. M. : *Dept. of Math. O.S.U. at Columbus, Ohio, U.S.A.*