

Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante

Alain CONNES et Nigel HIGSON

Résumé — Nous montrons que les classes d'homotopie stable de morphismes asymptotiques d'une C^* algèbre A vers une C^* algèbre B forment un groupe abélien $E(A, B)$ et que le foncteur bivariant ainsi construit est le foncteur universel semi-exact dont l'existence abstraite a été démontrée par le second auteur. La théorie ainsi obtenue est une amélioration et une simplification de la théorie bivariante de Kasparov : $KK(A, B)$.

Deformations, asymptotic morphisms and bivariant K-theory

Abstract — We show that stable homotopy classes of asymptotic morphisms from A to B , where A and B are C^* algebras, form an abelian group $E(A, B)$ and that the corresponding bivariant functor is the universal half exact functor whose abstract existence was shown by the second author. The theory thus obtained is an improvement and a simplification of the bivariant theory $KK(A, B)$ of Kasparov.

1. INTRODUCTION. — Un foncteur F de la catégorie des C^* algèbres vers celle des groupes abéliens est dit semi-exact si pour toute suite exacte courte de C^* algèbres, $0 \rightarrow J \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$ la suite correspondante de groupes abéliens est exacte en $F(A)$. On ne sait toujours pas si le foncteur bivariant KK de Kasparov est semi exact, mais dans [7] le second auteur (N.H.) a montré l'existence d'un foncteur bivariant $E(A, B)$ universel semi-exact. Dans cette Note nous montrons comment réaliser concrètement ce bifoncteur, grâce à la notion de morphisme asymptotique de C^* algèbres. Cette notion est intimement reliée d'une part à la cohomologie cyclique asymptotique, introduite dans [1] et définie par des familles à un paramètre (φ_t) , $t \in \mathbb{R}^+$, de cocycles, et d'autre part à la notion de fibré presque plat et de représentation asymptotique introduite dans [2]. La théorie $E(A, B)$ ainsi obtenue est identique à $KK(A, B)$ quand A est K nucléaire [10] mais est semi-exacte en ses deux variables en toute généralité.

2. DÉFORMATIONS DE C^* ALGÈBRES ET MORPHISMES ASYMPTOTIQUES. — Soient A et B deux C^* algèbres; nous appellerons déformation de A en B la donnée d'un champ continu $(A(t), \Gamma)$ de C^* algèbres sur $[0,1]$ dont la fibre en 0 est $A(0) = A$ et dont la restriction à $]0,1]$ est le champ de fibre $A(t) = B$, $t \neq 0$ (cf. [5], def. 10.3.1). Il existe par hypothèse pour tout $a \in A$ une section continue $\alpha \in \Gamma$ telle que $\alpha(0) = a$. Choisissons un tel $\alpha = \alpha(a)$ pour tout $a \in A$ et posons : $\varphi_t(a) = \alpha_{1/t}(a) \in B$, $t \in [1, \infty[$, $a \in A$. On vérifie alors en utilisant la continuité, pour toute section continue $\beta \in \Gamma$ de la fonction $t \rightarrow \|\beta_t\| \in \mathbb{R}_+$, que la famille φ_t d'applications de A dans B vérifie les conditions suivantes :

- (1) Les applications $t \rightarrow \varphi_t(a) \in B$ sont continues (en norme) pour tout $a \in A$.
- (2) Pour tous $a, a' \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on a (en norme) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(a) + \lambda \varphi_t(a') - \varphi_t(a + \lambda a')) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(aa') - \varphi_t(a) \varphi_t(a')) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(a)^* - \varphi_t(a^*)) = 0.$$

Note présentée par Alain CONNES.

On adopte alors la définition générale suivante :

DÉFINITION 1. — Soient A, B deux C^* algèbres; on appelle morphisme asymptotique de A dans B la donnée d'une famille φ_t d'applications de A dans B vérifiant les conditions (1) et (2).

Nous dirons que deux morphismes asymptotiques (φ_t) et (φ'_t) sont équivalents quand $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi'_t(a) - \varphi_t(a)) = 0, \forall a \in A$. Pour toute C^* algèbre B , notons B_∞ le quotient de la

C^* algèbre $C_b([1, \infty[, B)$ des fonctions continues bornées à valeurs dans B par l'idéal $C_0([1, \infty[, B)$ des fonctions nulles à l'infini. Les classes d'équivalence de morphismes asymptotiques de A dans B correspondent exactement aux morphismes de A dans B_∞ , en posant $(\tilde{\varphi}(a))_t = \varphi_t(a), \forall a \in A, t \in [1, \infty[$. Pour tout morphisme asymptotique (φ_t) on a $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a)\| \leq \|a\|$ pour tout $a \in A$. Nous dirons que (φ_t) est *injectif* si

$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a)\| \neq 0, \forall a \neq 0$, *i. e.* si $\tilde{\varphi}$ est injectif.

La donnée d'une déformation de A en B équivaut à celle de la classe d'équivalence du morphisme asymptotique (φ_t) que nous lui avons associée ci-dessus, et l'on obtient ainsi tous les morphismes asymptotiques injectifs de A dans B . Tout morphisme asymptotique φ de A dans B est équivalent à la composition $\psi \circ p$ d'une déformation de A/J en B avec l'application quotient $A \xrightarrow{p} A/J$, où J est un idéal bilatère fermé de A .

DÉFINITION 2. — Deux morphismes asymptotiques $(\varphi_t^i) : A \rightarrow B, i=0,1$ sont homotopes s'il existe un morphisme asymptotique (φ_t) de A dans $B[0,1] = B \otimes C[0,1]$ dont l'évaluation en $i=0,1$ redonne φ_t^i .

L'homotopie est une relation d'équivalence entre morphismes asymptotiques et on notera $[[A, B]]$ l'ensemble des classes d'homotopie obtenu ainsi. Un changement de paramètre $r(t) \rightarrow \infty$, *i. e.* le remplacement de (φ_t) par $(\varphi_{r(t)}) = (\psi_t)$ ne change pas la classe d'homotopie correspondante.

3. COMPOSITION DES MORPHISMES ASYMPTOTIQUES. — Soient $(\varphi_t)_{t \in [1, \infty[}, \varphi_t : A \rightarrow B$ un morphisme asymptotique et $K \subset A$ un compact de A (pour la norme). Nous dirons que (φ_t) est *uniforme* sur K si l'application $(t, a) \rightarrow \varphi_t(a)$ de $[1, \infty[\times K$ dans B est continue et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T < \infty$ avec pour tout $t \geq T$:

$$(\alpha) \quad \|\varphi_t(a) + \lambda\varphi_t(a') - \varphi_t(a + \lambda a')\| < \varepsilon, \forall a, a' \in K, \forall \lambda, |\lambda| \leq 1.$$

$$(\beta) \quad \|\varphi_t(a)\varphi_t(a') - \varphi_t(aa')\| < \varepsilon, \forall a, a' \in K.$$

$$(\gamma) \quad \|\varphi_t(a)^* - \varphi_t(a^*)\| < \varepsilon, \forall a \in K.$$

$$(\delta) \quad \|\varphi_t(a)\| < \|a\| + \varepsilon, \forall a \in K.$$

Le théorème de sélection continue de Bartle-Graves montre en utilisant B_∞ que dans la classe d'équivalence de tout morphisme asymptotique (φ_t) il en existe un (φ'_t) qui est uniforme sur tout compact K de A .

Soit $\mathcal{A} \subset A$ une sous algèbre involutive dense de A qui est une réunion dénombrable $\mathcal{A} = \cup K_n$ de compacts K_n de A , ou de manière équivalente qui est engendrée par un compact de A . On peut choisir les K_n de telle sorte que $K_n + K_n \subset K_{n+1}$, $K_n K_n \subset K_{n+1}$ et $\lambda K_n \subset K_n, \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1$. Pour tout compact K de \mathcal{A} il existe alors n tel que $K \subset K_n$.

Tout morphisme asymptotique (φ_t) de \mathcal{A} dans B uniforme sur tout compact de \mathcal{A} se prolonge en un morphisme asymptotique $(\bar{\varphi}_t)$ de A dans B , unique à équivalence près.

LEMME 3. — Soient $(\varphi_t) : A \rightarrow B, (\psi_t) : B \rightarrow C$ des morphismes asymptotiques de C^* algèbres. On suppose que (φ_t) est uniforme sur tout compact de \mathcal{A} , sous algèbre involutive dense et σ -compacte de A , et que (ψ_t) est uniforme sur tout compact de B . Il existe alors

une fonction continue croissante $r(t) : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ telle que pour toute fonction continue croissante $s(t) \geq r(t)$ la composition $\theta_t = \psi_{s(t)} \cdot \varphi_t$ soit un morphisme asymptotique de \mathcal{A} dans C uniforme sur tout compact.

Démonstration. — Écrivons comme ci-dessus $\mathcal{A} = \bigcup K_n$ et soient $t_n \in [1, \infty[$ tels que φ_t vérifie les conditions (α) , (β) , (γ) et (δ) sur K_n pour $\varepsilon = 1/n$, $t \geq t_n$. De même soient K'_n les compacts de B , $K'_n = \{ \varphi_t(a); a \in K_{n+3}, t \leq t_{n+1} \}$ et $r_n \in [1, \infty[$ tels que ψ_t vérifie (α) , (β) , (γ) et (δ) sur K'_n pour $\varepsilon = 1/n$, $t \geq r_n$. Toute fonction continue croissante r telle que $r(t_n) \geq r_n$ convient. \square

PROPOSITION 4. — Soient $(\varphi_t) : A \rightarrow B$, $(\psi_t) : B \rightarrow C$ des morphismes asymptotiques de C^* algèbres, uniformes sur tout compact.

(1) Pour toute sous algèbre involutive dense σ -compacte $\mathcal{A} \subset A$ et toute fonction continue croissante $s(t) : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ suffisamment grande, le prolongement $\bar{\theta}_t$ à A de la composition $\psi_{s(t)} \cdot \varphi_t : \mathcal{A} \rightarrow C$ définit un morphisme asymptotique de A dans C .

(2) La classe d'homotopie $[\bar{\theta}] \in [[A, C]]$ ne dépend que des classes d'homotopie $[\varphi] \in [[A, B]]$ et $[\psi] \in [[B, C]]$.

(3) La composition $[\psi] \circ [\varphi]$ des classes d'homotopie est associative.

Démonstration. — (1) Résulte du lemme 3. (2) La sous algèbre involutive de A engendrée par deux sous algèbres σ -compactes est encore σ -compacte, on en déduit que la classe d'homotopie de $\bar{\theta}_t$ ne dépend pas du choix de \mathcal{A} . La possibilité de composer les homotopies permet de conclure. (3) La sous algèbre involutive de B engendrée par les $\varphi_t(\mathcal{A})$ où (φ_t) est uniforme sur tout compact de \mathcal{A} est encore σ -compacte, d'où la conclusion. \square

Notons enfin que le lemme suivant permet de définir le produit tensoriel de morphismes asymptotiques $(\varphi_t) : A \rightarrow C$ et $(\psi_t) : B \rightarrow D$ comme un morphisme asymptotique, unique à équivalence près, de $A \otimes_{\max} C$ dans $B \otimes_{\max} D$, noté $\varphi \otimes \psi$. De plus l'opération $\varphi, \psi \rightarrow \varphi \otimes \psi$ passe aux classes d'homotopie.

LEMME 5. — Soient A, B, C des C^* algèbres et $(\varphi_t), (\psi_t)$ des morphismes asymptotiques $\varphi : A \rightarrow C, \psi : B \rightarrow C$, tels que pour tout $a \in A, b \in B$ le commutateur $[\varphi_t(a), \psi_t(b)]$ converge vers 0 en norme. Il existe alors un morphisme asymptotique $(\theta_t) : A \otimes_{\max} B \rightarrow C$ unique à équivalence près, tel que $\theta_t(a \otimes b) - \varphi_t(a)\psi_t(b) \rightarrow 0, \forall a \in A, b \in B$.

Démonstration. — Immédiat en utilisant C_∞ . \square

4. LA CATÉGORIE ADDITIVE E . — Soit E la catégorie dont les objets sont les C^* algèbres séparables et ayant pour morphismes de A vers B l'ensemble

$$E(A, B) = [[SA \otimes \mathcal{K}, SB \otimes \mathcal{K}]]$$

des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques, où $SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A$, et \mathcal{K} est la C^* algèbre élémentaire des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert séparable. La composition des morphismes est donnée par la composition des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques.

L'isomorphisme naturel de $M_2(\mathcal{K}) = M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K}$ avec \mathcal{K} permet de définir la somme directe de deux éléments $\varphi, \psi \in E(A, B)$ grâce au morphisme asymptotique

$$\theta_t(a) = \begin{bmatrix} \varphi_t(a) & 0 \\ 0 & \psi_t(a) \end{bmatrix}$$

avec des notations évidentes.

PROPOSITION 6. — *Dotée de l'opération de somme directe, la catégorie E est une catégorie additive.*

Démonstration. — Immédiat : on utilise la réflexion $s \rightarrow -s$ de $C_0(\mathbb{R})$ pour obtenir l'inverse $-[\varphi]$ d'un élément $[\varphi] \in E(A, B)$. \square

Notons j le foncteur de la catégorie $C^* \text{ Alg}$ des C^* algèbres (séparables) et $*$ homomorphismes vers la catégorie E, qui à $\rho : A \rightarrow B$ associe la classe d'homotopie du morphisme asymptotique $\varphi_t = \rho \otimes \text{id}$ de $SA \otimes \mathcal{K}$ dans $SB \otimes \mathcal{K}$.

Le résultat essentiel de cette Note est l'identité de la catégorie E ci-dessus avec celle construite par N.H. dans [7]. Plus précisément E est caractérisée par les résultats suivants :

THÉORÈME 7. — (1) *Le bifoncteur $E(A, B)$ de la catégorie $C^* \text{ Alg}$ vers celle des groupes abéliens est semi-exact en chacun de ses arguments.*

(2) *Tout foncteur F de la catégorie $C^* \text{ Alg}$ vers celle des groupes abéliens, qui est stable (i. e. ne change pas quand on remplace A par $A \otimes \mathcal{K}$), invariant par homotopie et semi-exact se factorise à travers la catégorie E.*

Comme le foncteur $j : C^* \text{ Alg} \rightarrow E$ vérifie les hypothèses du corollaire suivant, celui-ci caractérise E.

COROLLAIRE 8. — *Soit $F : C^* \text{ Alg} \rightarrow X$ un foncteur dans une catégorie additive X, qui est stable, invariant par homotopie, et semi-exact comme bifoncteur vers la catégorie des groupes abéliens. Alors F se factorise uniquement à travers E.*

Comme la K-théorie bivariante a une caractérisation semblable en remplaçant la semi-exactitude par l'exactitude pour les suites exactes scindées [6] on obtient :

COROLLAIRE 9. — (a) *Le foncteur $j : C^* \text{ Alg} \rightarrow E$ se factorise canoniquement à travers la catégorie KK de Kasparov.*

(b) *La flèche correspondante $KK(A, B) \rightarrow E(A, B)$ est un isomorphisme dès que A est K-nucléaire.*

Le (b) résulte de [10] et du théorème 7 (2).

5. MORPHISMES ASYMPTOTIQUES ET SUITES EXACTES DE C^* ALGÈBRES. — Dans cette section nous donnons les étapes essentielles de la démonstration du théorème 7 (1) tout en explicitant la flèche naturelle de $KK(A, B)$ vers $E(A, B)$ du corollaire 9. On a en fait une flèche naturelle de $\text{Ext}(A, SB)$ vers $E(A, B)$ grâce au lemme suivant :

LEMME 10. — (a) *Soit $0 \rightarrow J \rightarrow A \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* algèbres (séparables). Soit $(u_t)_{t \in [1, \infty[}$ une unité approchée quasi centrale continue en norme, $0 \leq u_t \leq 1$, $u_t \in J$. Alors l'égalité suivante définit un morphisme asymptotique $(\varphi_t) : SB \rightarrow J$:*

$$\varphi_t(f \otimes b) = f(u_t) b', \quad \forall f \in C_0(]0, 1[), \quad b \in B$$

où $b \rightarrow b'$ est une section arbitraire de la projection p .

(b) *La classe ε_A d'homotopie de φ ne dépend que de la suite exacte donnée.*

Démonstration. — (a) Résulte du lemme 5 (b). Immédiat. \square

Si $(A(t), \Gamma)$ est une déformation de A en B (section 2), il lui correspond la suite exacte $0 \rightarrow SB \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow 0$ où C est la C^* algèbre du champ continu A(t) restreint à $[0, 1[$. On vérifie que le morphisme asymptotique $\psi : SA \rightarrow SB$ associé à cette suite exacte par le lemme 10 n'est autre (à homotopie près) que $1 \otimes \varphi$ où φ est associé à la déformation (section 2). La E-théorie est ainsi le quotient par homotopie de la théorie des extensions.

Comme la K-théorie bivariante de Kasparov $KK(A, B)$ peut se définir à partir d'extensions particulières (cf. [8], § 7), on déduit du lemme 10 une flèche canonique de $KK(A, B)$ vers $E(A, B)$.

Esquissons la démonstration du théorème 7 (1). — Soient $0 \rightarrow J \rightarrow A \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$ une suite exacte de C^* algèbres et C_p le cône de l'application p en C_p provient de la suite exacte :

$$(*) \quad 0 \rightarrow J([0,1[) \rightarrow A([0,1[) \rightarrow C_p \rightarrow 0$$

et on a une inclusion naturelle $0 \rightarrow J \xrightarrow{i} C_p \rightarrow CB \rightarrow 0$ où CB est le cône de l'algèbre B , $CB = B([0,1[)$. Les deux résultats essentiels sont alors :

LEMME 12. — (a) La flèche i est un isomorphisme $J \cong C_p$ dans la catégorie E , avec pour inverse l'élément de $E(C_p, J)$ associé par le lemme 10 à la suite exacte (*).

(b) L'application de suspension $\varphi \rightarrow 1 \otimes \varphi$ de $E(A, B)$ vers $E(SA, SB)$ est un isomorphisme.

On peut alors dans le problème de semi-exactitude des foncteurs $E(A, \cdot)$ et $E(\cdot, B)$ remplacer l'idéal J par le cône C_p de l'application p , ce qui suffit pour le premier cas. En utilisant (b) on conclut de même pour le deuxième cas.

6. EXEMPLES DE MORPHISMES ASYMPTOTIQUES. — (a) Soient M une variété Riemannienne compacte, T^*M son espace cotangent. Considérons la déformation naturelle de l'algèbre des fonctions sur T^*M associée à la quantification de Weyl, on obtient ainsi une déformation (au sens de la section 2) de la C^* algèbre $C_0(T^*M)$ en la C^* algèbre élémentaire \mathcal{K} des opérateurs compacts dans $L^2(M)$.

L'objet géométrique qui systématise cette déformation est le groupoïde tangent de M . L'élément correspondant de $E(C_0(T^*M), \mathbb{C})$ est l'indice analytique.

(b) Soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe et soit K un sous groupe compact maximal de G , $\alpha : K \rightarrow \text{Aut } V$ la représentation d'isotropie de K dans l'espace V tangent à G/K en K . A la déformation naturelle du groupe $V \rtimes_{\alpha} K = G_0$ (produit semi-direct de V par K) en le groupe G correspond une déformation de $C^*(G_0) = A$ en $B = C^*(G)$. L'élément correspondant de $E(A, B)$ est l'induction de Dirac [12].

(c) Soit A une C^* algèbre asymptotiquement abélienne *i. e.* on suppose avoir un groupe à un paramètre $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'automorphismes de A tels que $\|[a, \sigma_t(b)]\| \rightarrow 0, \forall a, b \in A$. Le lemme 5 donne alors un morphisme asymptotique Δ de $A \otimes A$ vers A tel que

$\Delta_t(a \otimes b) = a \sigma_t(b), \forall a, b \in A$. On vérifie que l'on peut alors utiliser Δ comme le morphisme diagonal des algèbres commutatives, ce qui donne une structure d'anneau sur $K(A)$.

(d) Soient A une C^* algèbre séparable et π une représentation de A dans l'espace de Hilbert séparable \mathfrak{h} telle que $x \in A, \pi(x) \in \mathcal{K} \Rightarrow x = 0$, où \mathcal{K} est l'algèbre des opérateurs compacts. Soit A' la C^* algèbre commutant de A dans $\mathcal{K}_{\infty} = C_b([1, \infty[, \mathcal{K})/C_0([1, \infty[, \mathcal{K})$, *i. e.*

$$(x(t))_{t \in [1, \infty[} \in A' \Leftrightarrow \|[x(t), a]\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \forall a \in A.$$

Le théorème d'unicité de Voiculescu [11] montre que la C^* algèbre A' ne dépend pas du choix de π . Le lemme 5 définit une morphisme asymptotique φ_A de $A \otimes A'$ dans \mathcal{K}_{max}

tel que $\varphi_t(a \otimes (x(t))) = \pi(a) x(t)$ pour $a \in A$ et $x \in A'$. De plus, la proposition 11 montre que la flèche canonique $i : KK(A, \mathbb{C}) \rightarrow E(A, \mathbb{C})$ du corollaire 9 (a) se factorise à travers

$K_0(A')$, $i = i_1 \circ i_2$ où $i_1 : K_0(A') \rightarrow E(A, \mathbb{C})$ associe à $x \in K_0(A') = E(\mathbb{C}, A')$ l'élément $\varphi_A \circ (x \otimes \text{id}_A)$ de $E(A, \mathbb{C})$.

(e) Soit X un espace compact métrisable connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Soient $\Gamma = \pi_1(X)$ son groupe fondamental et $\psi : X \rightarrow B\Gamma$ l'application classifiante du revêtement universel $\tilde{X} \rightarrow X$. En composant ψ avec l'appa-

tion canonique [8] $\mu : K_*(B\Gamma) \rightarrow K(C^*(\Gamma))$ de la K -homologie de $B\Gamma$ vers la K -théorie de $C^*(\Gamma)$ on obtient $\mu \circ \psi_* : K_*(X) \rightarrow K(C^*(\Gamma))$. En fait cette flèche correspond au morphisme asymptotique suivant de la C^* algèbre $C(X)'$ [cf. exemple (d)] vers $C^*(\Gamma)$: Soient ν une mesure de probabilité sur X , diffuse et de support X et $\tilde{\nu}$ la relevée de ν sur le revêtement \tilde{X} . Comme la C^* algèbre du groupoïde fondamental G de X (muni de la mesure $\tilde{\nu}$ sur chacun des G^x , $x \in X$) est Morita équivalente à $C^*(\Gamma)$ il suffit de construire un morphisme asymptotique θ de $C(X)'$ vers $C^*(G, \tilde{\nu})$ [9]. Soit alors $s : \tilde{\mathcal{U}} \subset G \rightarrow \mathcal{U} \subset X \times X$ un isomorphisme local du groupoïde G avec le groupoïde $X \times X$ (cf. [1]). On obtient θ en posant :

$$\theta_i((k_i)) = \sum_{i=1}^m (\varphi_i k_i \varphi_i) \circ s$$

où $\sum_{i=1}^m \varphi_i^2 = 1$ est une partition de l'unité convenable sur X , et où tout élément $k \in C(X)'$ est représenté par un noyau asymptotique $k_i(x, y)$; $x, y \in X$ en utilisant la représentation canonique π de $C(X)$ dans $L^2(X, \mu)$.

Note remise et acceptée le 21 mai 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. CONNES et MOSCOVICI, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic group, *Topology* (à paraître).
- [2] A. CONNES, M. GROMOV et H. MOSCOVICI, Conjecture de Novikov et fibrés presque plats, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 310, série I, 1990, p. 273-277.
- [3] J. CUNTZ, A new look at KK theory, *K-theory*, 1, 1987, p. 31-51.
- [4] J. CUNTZ et G. SKANDALIS, Mapping cones and exact sequences in KK theory, *J. Operator theory*, 15, 1986, p. 163-180.
- [5] J. DIXMIER, *Les C^* algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [6] N. HIGSON, A characterization of KK theory, *Pacific J. Math.*, 126, 1987, p. 253-276.
- [7] N. HIGSON, *Categories of fractions and excision in KK theory*, Preprint, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [8] G. G. KASPAROV, The operator K functor and extensions of C^* algebras, *Math. U.S.S.R. Izv.*, 16, 1981, p. 513-572.
- [9] J. RENAULT, A groupoid approach to C^* algebras, *Lecture notes in Math.*, 793, Springer, 1980.
- [10] G. SKANDALIS, Une notion de nucléarité en K théorie, *K theory*, 1, 1988, p. 549-574.
- [11] D. VOICULESCU, A non commutative Weyl von Neumann theory, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, 21, 1976, p. 97-113.
- [12] A. WASSERMAN, Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 304, série I, 1987, p. 559.

A. C. : I.H.E.S., 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette;

N. H. : Dept. of Mathematics, Penn State University, Penn-State, U.S.A.