C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I, p. 661-666, 1991

Théorie des groupes/*Group Theory*

Caractères des représentations θ-sommables des groupes discrets

Alain Connes

Résumé – Nous montrons comment adapter au cas général la construction du caractère de Chern en K homologie de [3] pour les représentations de Fredholm des groupes discrets. On obtient ainsi une classe de cohomologie cyclique entière sur l'algèbre du groupe.

Characters of θ-summable Fredholm representations of discrete groups

Abstract – *We show how to extend to the general case the construction of the Chern character in* K *homology* [3] *for Fredholm representations of discrete groups. We thus obtain an entire cyclic cohomology class on the group ring.*

Introduction. – Soit Γ un groupe discret de type fini. Un tel groupe possède en général trop peu de représentations unitaires de dimension finie et ses représentations unitaires irréductibles de dimension infinie ne sont jamais traçables.

Nous avons montré dans [3] l'utilité du *caractère* d'une représentation virtuelle *finiment sommable* $\pi_+ - \pi_-$ de Γ, *i. e.* d'un couple π_+, π_- de représentations unitaires de Γ telles que :

$$(*) \qquad \pi_+(g) - \pi_-(g) \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H}), \qquad \forall g \in \Gamma$$

où $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ est l'idéal de Schatten [6]. Le caractère d'une telle représentation virtuelle est un cocycle cyclique de dimension $2n \geqq p$ sur l'algèbre du groupe. Pour les sous-groupes discrets des groupes de Lie, la construction naturelle de représentations virtuelles [3] ne conduit à la sommabilité finie que dans le cas de rang 1. Nous montrons ici comment traiter le cas général grâce aux théorèmes 3 et 7 ci-dessous et à la cohomologie cyclique entière.

Représentation de Fredholm θ-sommable. – Soit A une C^* algèbre. Rappelons qu'une représentation de Fredholm de A (ou module de Fredholm sur A) est la donnée d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, d'une représentation involutive π de A dans $\mathcal{H}$ et d'un opérateur F, $F = F^*$, $F^2 = 1$ dans $\mathcal{H}$ tel que

$$[F, a] \in \mathcal{K}, \qquad \forall a \in A$$

où $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ désigne l'idéal des opérateurs compacts. Ceci définit un module de Fredholm *impair*, dans le cas *pair* on suppose $\mathcal{H}$ muni d'une $\mathbb{Z}/2$ graduation γ, $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$, telle que $\gamma a = a \gamma$, $\forall a \in A$ et $\gamma F = -F\gamma$.

Lemme 1. – *Soit* $J \subset \mathcal{K}$ *l'ensemble des opérateurs compacts* $T \in \mathcal{K}$ *dont les valeurs caractéristiques* $\mu_n(T) = \mu_n(|T|)$ *vérifient :*

$$\mu_n(T) = O((\operatorname{Log} n)^{-1/2}).$$

Alors J *est un idéal bilatère de* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Note présentée par Alain Connes.

0764-4442/91/03120661 $ 2.00

Démonstration. — Il suffit de montrer que J est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$ car l'inégalité $\mu_n(T_1 T_2) \leqq \| T_1 \| \mu_n(T_2)$ montre alors que c'est un idéal à gauche autoadjoint et donc bilatère.

On a [6] $\mu_{n+m}(T_1+T_2) \leqq \mu_n(T_1)+\mu_m(T_2)$, ce qui montre, en prenant $m=n$ et $m=n+1$ que J est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$. □

DÉFINITION 2. — *Soient* A *une* C* *algèbre,* $(\mathcal{H}, F)$ *un module de Fredholm sur* A. *Nous dirons que* $(\mathcal{H}, F)$ *est* θ*-sommable si et seulement si la sous-algèbre* $\{a \in A;\ [F, a] \in J\}$ *est dense en norme dans* A.

Soient $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$ les idéaux de Schatten et $\mathcal{L}^{\infty, 1}(\mathcal{H})$ l'idéal de Maçaev, défini par la condition [7] :

$$T \in \mathcal{L}^{\infty, 1}(\mathcal{H}) \quad \text{si et seulement si } \sum \frac{1}{n} \mu_n(T) < \infty.$$

On a $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^{\infty, 1}$, $\forall p < \infty$, de plus la racine carrée de l'idéal de Maçaev : $(\mathcal{L}^{\infty, 1})^{1/2} = \{T \in \mathcal{K},\ |T|^2 \in \mathcal{L}^{\infty, 1}\}$ est contenue dans J car tout $T \in \mathcal{L}^{\infty, 1}$ vérifie (*cf.* [7]) :

$$\mu_n(T) = O\left(\frac{1}{\operatorname{Log} n}\right).$$

Ainsi la condition de θ sommabilité est très peu restrictive, elle est bien entendu impliquée par la p-sommabilité pour $p < \infty$. Nous avons défini dans [3] *le caractère* d'une représentation de Fredholm finiment sommable grâce à la formule :

$$\varphi(a^0, \ldots, a^{2n+1}) = \lambda_n \operatorname{Trace}(a^0 [F, a^1] \ldots [F, a^{2n+1}]), \qquad \forall a^i, \quad [F, a^i] \in \mathcal{L}^{1/2n+1}$$

(ou une formule analogue dans le cas pair [3]).

Cette formule définit un cocycle sur une sous-algèbre dense de A stable par calcul fonctionnel holomorphe.

Nous avons montré dans [2] comment prolonger cette définition quand il existe un opérateur autoadjoint non borné D dans $\mathcal{H}$ tel que :

(*a*) Signe D = F.

(*b*) $\{a,\ [D, a] \text{ borné}\}$ dense dans A.

(*c*) Trace $(e^{-D^2}) < \infty$.

La formule obtenue dans [2] a été simplifiée sans changer la classe de cohomologie par A. Jaffe, A. Lesniewski et K. Osterwalder sous la forme [5] :

$$\varphi_{2n+1}(a^0, \ldots, a^{2n+1}) = \int_{s_i \geqq 0,\ \Sigma s_i = 1} \Pi\, ds_i \operatorname{Trace}(a^0 e^{-s_0 D^2} [D, a^1] e^{-s_1 D^2} \ldots [D, a^{2n+1}] e^{-s_{2n+1} D^2}) \, \pi\, ds_i$$

$$\forall a^i \in A, \qquad [D, a^i] \text{ borné}.$$

On obtient ainsi un cocycle cyclique entier sur une sous-algèbre de A stable par calcul fonctionnel holomorphe. Notre but est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Soient* A *une* C* *algèbre,* $(\mathcal{H}, F)$ *un module de Fredholm* θ*-sommable sur* A *et* $\mathcal{A}$ *une sous-algèbre de type fini de* $\{a \in A;\ [F, a] \in J\}$. *Il existe alors un opérateur autoadjoint non borné* D *dans* $\mathcal{H}$ *tel que :*

(*a*) Signe D = F.

(*b*) $[D, a]$ *et* $[D^2, a]$ *sont bornés* $\forall a \in \mathcal{A}$.

(*c*) Trace $(e^{-D^2}) < \infty$.

Démonstration. — Comme la sous-algèbre $B=\{a\in A;\ [F, a]\in J\}$ est stable par l'involution et par calcul fonctionnel holomorphe on peut sans changer le problème remplacer $\mathscr{A}$ par l'algèbre engendrée par un sous-groupe Γ de type fini du groupe unitaire de B, avec $F\in\Gamma$. Soit alors $Z\subset\Gamma$ un sous-ensemble fini, symétrique (*i.e.* $Z=Z^{-1}$) $e\in\Gamma$ et engendrant Γ. Notons $\gamma\in\Gamma\to l(\gamma)\in\mathbb{N}$ la longueur des mots correspondante (*i.e.* $l(\gamma)\leqq n\Leftrightarrow\gamma\in Z^n$) et soit $\beta>\log(\text{Card } Z)$ de telle sorte que :

(1) $$C_\beta=\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\beta l(\gamma)}<\infty.$$

Pour tout opérateur borné T dans $\mathscr{H}$ posons alors :

$$\mathscr{M}_\beta(T)=\frac{1}{2}C_\beta^{-1}\left(\sum e^{-\beta l(g)}(gTg^{-1}+FgTg^{-1}F)\right).$$

Par construction $\mathscr{M}_\beta(T)$ appartient à l'enveloppe convexe des conjugués de T par les unitaires $g\in\Gamma$ (on a $F\in\Gamma$). On a :

(2) $$\mathscr{M}_\beta(T)\geqq\frac{1}{2}C_\beta^{-1}T,\qquad\forall T\geqq 0.$$

(3) $$g\mathscr{M}_\beta(T)g^{-1}\leqq e^{\beta l(g)}\mathscr{M}_\beta(T),\qquad\forall T\geqq 0.$$

(4) $$F\mathscr{M}_\beta(T)F=\mathscr{M}_\beta(T).$$

Pour démontrer (3) on utilise l'inégalité $l(g_1g_2)\geqq l(g_1)-l(g_2)$ pour tous $g_1, g_2\in\Gamma$.

Considérons la transmuée Θ_β de l'opération $\mathscr{M}_\beta$ par l'application (non linéaire)

$$T\to f(T)=\exp(-1/T)$$

définie pour $T\geqq 0$ et dont l'application inverse est $f^{-1}(T)=-1/\operatorname{Log} T$, $0\leqq T\leqq 1$:

$$\Theta_\beta(T)=f^{-1}(\mathscr{M}_\beta f(T)).$$

Nous définirons l'opérateur D cherché par l'égalité :

(5) $$D^{-2}=\Theta_\beta(G),\qquad G=\sum[F, g_i]^*[F, g_i].$$

Avec la notation $dx=i[F, x]$ pour la différentielle quantique [3] le terme G correspond au choix de la « métrique » $\sum(dg_i)^*dg_i=G$ et modulo la régularisation due à l'opération Θ_β l'égalité fondamentale est $|D|^{-1}\simeq G^{1/2}$.

On a par construction $FD^{-2}=D^{-2}F$ en utilisant (4).

La fonction f^{-1} est une fonction croissante d'opérateurs :

(6) $$0\leqq T_1\leqq T_2\leqq 1\ \Rightarrow\ f^{-1}(T_1)\leqq f^{-1}(T_2).$$

Il résulte donc de (2) que :

$$D^{-2}\geqq f^{-1}\left(\frac{1}{2}C_\beta^{-1}f(G)\right)=\left(\operatorname{Log}(2C_\beta)+\frac{1}{G}\right)^{-1}\geqq\lambda G$$

où $\lambda^{-1}=1+\|G\|\operatorname{Log}(2C_\beta)$. Ainsi :

(7) $$D^{-2}\geqq\lambda G,\qquad\lambda>0.$$

Soit $\mathscr{H}_1\subset\mathscr{H}$ le plus grand sous espace fermé de $\mathscr{H}$ invariant par Γ (et donc par $F\in\Gamma$) sur lequel $[F, g]=0$ pour tout $g\in\Gamma$. Comme l'énoncé du théorème est trivial sur $\mathscr{H}_1$ on supposera $\mathscr{H}_1=\{0\}$. Montrons alors que $\operatorname{Ker} D^{-2}=\{0\}$.

On a en effet $\operatorname{Ker} D^{-2}=\operatorname{Ker}\mathscr{M}_\beta(f(G))\subset\bigcap_{g\in\Gamma}\operatorname{Ker} g(f(G))g^{-1}$ et le terme de droite est un sous-espace fermé, invariant par Γ et sur lequel $f(G)=0$, *i.e.* $G=0$ et donc $[F, g]=0$ pour tout $g\in\Gamma$.

L'opérateur D^2 a donc un sens comme opérateur positif autoadjoint non borné, il commute avec F, ce qui donne un sens à $D=F|D|$.

On a $D^2=-\mathrm{Log}(\mathcal{M}_\beta(f(G)))$, ainsi les inégalités (3) et la décroissance de $-\mathrm{Log}$ comme fonction d'opérateurs donnent :

$$D^2-\beta l(g)\leqq g D^2 g^{-1}\leqq D^2+\beta l(g) \tag{8}$$

ce qui montre que $[D^2, g]$ et $[|D|, g]$ sont bornés pour tout $g\in\Gamma$.

L'inégalité (7) montre que $[F, g_i]|D|$ est borné et donc que $[D, g_i]$ est borné, pour $g_i\in Z$. On a donc bien vérifié les conditions (*a*) et (*b*) du théorème.

On a par construction :

$$e^{-D^2}=\mathcal{M}_\beta(f(G)). \tag{9}$$

Il suffit donc pour conclure de montrer que pour un p convenable, $p<\infty$, on a $f(G)\in\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$.

Mais par hypothèse on a $G\in J^2$, *i.e.* les valeurs propres λ_n de G vérifient

$$\lambda_n=O\left(\frac{1}{\mathrm{Log}\, n}\right),$$

disons $\lambda_n\leqq C/\mathrm{Log}\, n$, il est clair ainsi que $e^{-1/G}\in\mathcal{L}^p$, $\forall p>C$. □

Remarque 4. — 1. Réciproquement, si $(\mathcal{H}, D)$ est un module de Fredholm non borné sur A, qui est θ sommable (*i.e.* tel que $\mathrm{tr}(e^{-D^2})<\infty$), et si $a\in A$ est tel que $[D, a]$ et $[|D|, a]$ sont bornés, on a $[F, a]\in J$ où $F=\mathrm{Sign}\, D$. En effet, le produit $[F, a]|D|$ est borné, de sorte que $[F, a]^2\leqq CD^{-2}$; or la n-ième valeur propre λ_n de D^2 vérifie $e^{-\lambda_n}\leqq\lambda/n$, *i.e.* $\lambda_n^{-1}=O(1/\mathrm{Log}\, n)$.

2. Avec les notations du théorème 3 et $P=D^2$, on a $\mathrm{Tr}(e^{-tP})<\infty$ pour t assez grand et $[P, g]$ borné pour tout $g\in\Gamma$. On ne peut supposer en général que $\mathrm{Tr}(e^{-tP})<\infty$ pour tout $t>0$; en effet on démontre comme dans [4] théorème, qu'il existe une constante absolue C telle que :

$$k_\infty\{u_i\}\leqq C\sup\|[P, u_i]\|$$

pour tout ensemble fini d'unitaires $\{u_i\}$ dans $\mathcal{H}$ et tout opérateur positif P tel que $\mathrm{Tr}(e^{-P})<\infty$. Ici k_∞ désigne l'obstruction à l'existence d'unité approchée quasi centrale relative à l'idéal de Maçaev, définie par D. Voiculescu dans [7]. Les résultats de D. Voiculescu montre en effet qu'en général on a $k_\infty\{u_i\}>0$.

3. La norme naturelle sur l'idéal J^2 qui en fait un espace de Banach est la suivante :

$$\|T\|_{Li}=\sup_{n>1}\frac{\sum_0^n\mu_k(T)}{L\,i(n)}$$

où la fonction $\mathrm{Li}(x)$ est le logarithme intégral $\mathrm{Li}(x)=\int_0^x du/\mathrm{Log}\, u$.

Caractère d'une représentation θ-sommable d'un groupe discret. — Soit Γ un groupe discret de type fini et soit $C^*(\Gamma)=C^*_{\max}(\Gamma)$ la C^* algèbre du groupe, *i.e.* la C^* algèbre enveloppante de l'algèbre de Banach involutive $l^1(\Gamma)$. Commençons par introduire une algèbre de Banach naturelle $B=C_1(\Gamma)$, dont la cohomologie cyclique entière contiendra les caractères des représentations θ-sommables.

Soit $Z \subset \Gamma$ un système fini de générateurs et soit ρ la plus grande fonction de $\mathbb{C}\Gamma$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

(α) $\rho(g_i) \leqq 1$, $\forall g_i \in Z$.

(β) $\rho(x+y) \leqq \rho(x)+\rho(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{C}\Gamma$.

(γ) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}\Gamma$.

(δ) $\rho(xy) \leqq \rho(x)\|y\| + \|x\| \rho(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{C}\Gamma$.

(ε) $\rho(1)=0$.

Dans (δ) on utilise la norme $\|x\|$ de C* algèbre. Ainsi ρ est le sup de toutes les fonctions ρ_α vérifiant (α) (β) (γ) (δ). Ce sup est fini sur $\mathbb{C}\Gamma$ grâce à (α), et on a :

$$\left(\sum |\lambda_g|^2 l(g)^2\right)^{1/2} \leqq \rho\left(\sum \lambda_g g\right) \leqq \sum |\lambda_g| l(g)$$

où $l(g)$ est la longueur des mots dans Γ relative à Z.

DÉFINITION 5. — *Soit* $C_1(\Gamma)$ *la sous-algèbre de* $C^*(\Gamma)$ *complétion de* $\mathbb{C}\Gamma$ *pour la norme* $\|x\|' = \|x\| + \rho(x)$.

Par construction $C_1(\Gamma)$ est une algèbre de Banach pour la norme $\|x\|'$. De plus $C_1(\Gamma)$ ne dépend pas du choix du système Z de générateurs car si Z′ est un autre système on a :

$$C^{-1}\rho \leqq \rho' \leqq C\rho$$

pour une constante $C < \infty$ convenable.

LEMME 6. — $C_1(\Gamma)$ *est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans la* C* *algèbre* $C^*(\Gamma)$.

Démonstration (*cf.* [3]). — On notera enfin que si $\alpha : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ est un homomorphisme de groupe, on a $\alpha_* C_1(\Gamma_1) \subset C_1(\Gamma_2)$ où α_* est l'homomorphisme correspondant de $C^*(\Gamma_1)$ dans $C^*(\Gamma_2)$.

Notons $HC(\Gamma)$ la cohomologie cyclique entière [2] de l'algèbre de Banach $C_1(\Gamma)$.

Soient alors $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, π une représentation unitaire de Γ dans $\mathscr{H}$ et $F \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $F = F^*$, $F^2 = 1$. Nous dirons que ($\mathscr{H}$, π, F) est une représentation θ-sommable impaire ([1]) de Γ si et seulement si $[F, \pi(g)] \in J$ pour tout $g \in \Gamma$. Il en résulte bien entendu que le prolongement de π à $C^*(\Gamma)$ est un module de Fredholm θ-sommable.

THÉORÈME 7. — *A toute représentation* θ-*sommable* π *de* Γ *correspond de manière canonique une classe de cohomologie* $\mathrm{ch}_*(\pi) \in HC(\Gamma)$ *telle que pour tout* $e \in K_*(C^*(\Gamma))$,

$$\langle F, e \rangle = \langle \mathrm{ch}_*(\pi), \mathrm{ch}^*(e) \rangle.$$

Dans cet énoncé, $\langle F, e \rangle$ est l'accouplement, à valeurs dans $\mathbb{Z}$ entre la K-homologie de $C^*(\Gamma)$ et sa K-théorie. On utilise l'isomorphisme $K_*(C_1(\Gamma)) \simeq K_*(C^*(\Gamma))$ pour obtenir $\mathrm{ch}^*(e)$ dans l'homologie cyclique entière de $C_1(\Gamma)$. La construction de $\mathrm{ch}_*(\pi)$ résulte du théorème 3 et de [2].

On utilise l'inégalité (avec les notations du théorème 3), $\|[D, x]\| \leqq C\rho(x)$, $\forall x \in \mathbb{C}\Gamma$, qui résulte des propriétés (β) (γ) (δ) (ε) vérifiées par $\rho_1(x) = \|[D, x]\|$.

([1]) Dans le cas pair on suppose comme ci-dessus que $\mathscr{H}$ est $\mathbb{Z}/2$ gradué.

Note remise le 11 février 1991, acceptée le 13 février 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. BAAJ et P. JULG, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C* modules hilbertiens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 296, série I, 1983, p. 875-878.

[2] A. CONNES, Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules, K-*Theory*, 1, 1988, p. 519-548.

[3] A. CONNES, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 62, 1986, p. 44-144.

[4] A. CONNES, Trace de Dixmier, modules de Fredholm et géométrie Riemannienne, *Nuclear Phys.* B, 1988, p. 65-70.

[5] A. JAFFE, A. LESNIEWSKI et K. OSTERWALDER, Quantum K-Theory: The Chern character, *Comm. Math. Phys.*, 118, n° 1, 1988, p. 1-14.

[6] B. SIMON, *Trace ideals and their applications*, London Math. Soc. Lecture Notes, 35, Cambridge Univ. Press, 1979.

[7] D. VOICULESCU, On the existence of quasi central approximate units relative to normed ideals, Part I, *J. Funct. Analysis*, 91, 1990, p. 1-36.

I.H.E.S, 35, *route de Chartres*, 91440 *Bures-sur-Yvette*.