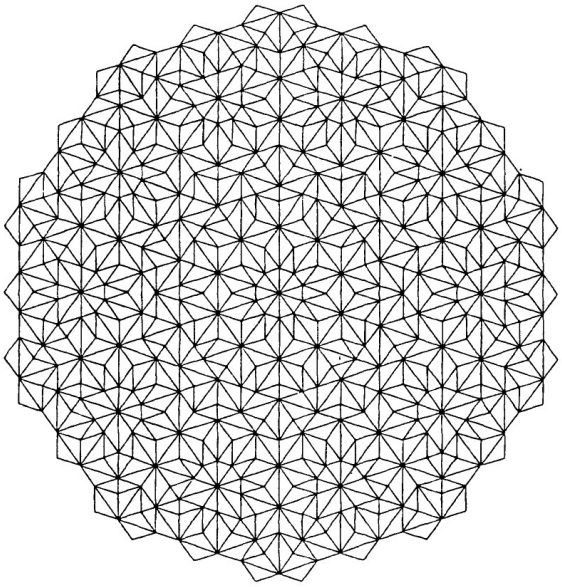
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics
Volume 50 (1990)

Introduction à la géométrie non-commutative

ALAIN CONNES



1. Un exemple d'espace quantique: l'ensemble des pavages de Penrose. Le but de la géométrie "non-commutative" est de comprendre la structure d'espaces géométriques plus complexes que les espaces ordinaires, dont la description ne peut plus se faire à partir d'un ensemble X et de classes de fonctions $f: X \to \mathbf{R}$ ayant certains types de régularité: mesurabilité, continuité, différentiabilité.

Pour fixer les idées nous commencerons par décrire un exemple simple d'espace non-commutatif X en montrant la différence entre le point de vue classique ou commutatif et notre point de vue. L'espace X est l'ensemble des univers de Penrose ou pavages quasi périodiques du plan.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 46L80, 46L55, 46L40, 51Nxx.

A detailed version of this paper will appear in A. Connes, *Géométrie non-commutative*, Inter Editions, Paris, 1990, to appear.

©1990 American Mathematical Society
0082-0717/90 $1.00 + $.25 per page

J'ai eu la chance d'assister, au cours d'une conférence, à un exposé de R. Penrose sur les pavages quasi périodiques du plan (Figure 5). Penrose a construit de tels pavages à l'aide de deux motifs simples A et B. La construction n'est pas unique et le pavage obtenu T dépend de choix successifs effectués au cours de sa construction. De manière plus précise il faut pour construire un tel pavage disposer d'une suite $(z_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ de 0 et 1 qui vérifie la règle de cohérence:

$$z_n = 1 \Rightarrow z_{n+1} = 0. \tag{1}$$

On utilise la valeur de z_n comme indiqué dans l'appendice dans la construction de T. Cependant il se peut que deux suites $z = (z_n)$ et $z' = (z'_n)$ distinctes conduisent au même pavage et on a en fait:

$$T \text{ identique à } T' \quad \text{ssi} \quad \exists n \quad \text{avec} \quad z_j = z'_j \quad \forall j \geq n. \tag{2}$$

Ainsi l'espace X des pavages obtenus est l'ensemble $K/\mathfrak{R}$ quotient d'un compact K par une relation d'équivalence. Le compact K, homéomorphe à l'ensemble de Cantor, est l'ensemble des suites $z = (z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de 0 et 1 qui vérifient la règle (1). C'est par construction un fermé du produit d'une infinité d'ensembles à deux éléments. La relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ est donnée par:

$$z \sim z' \quad \text{ssi} \quad \exists n, z_j = z'_j \quad \forall j \geq n. \tag{3}$$

On a donc $X = K/\mathfrak{R}$ et c'est exactement sous cette forme que R. Penrose présentait l'ensemble de ses pavages dans son exposé. Si l'on cherche à comprendre l'espace X comme un espace ordinaire, on s'aperçoit vite que les outils classiques ne fonctionnent pas et ne distinguent pas X de l'espace réduit à un point. Par exemple, on peut, (Cf. [**28**]) étant donnés deux pavages T_1 et T_2 et une portion finie quelconque P de T_1, retrouver la même configuration P dans T_2, de sorte qu'aucune portion finie ne distingue T_1 de T_2. Cette propriété géométrique se traduit par la trivialité de la topologie de X. La topologie naturelle de X a pour sous ensembles fermés $F \subset X$ les sous ensembles fermés de K et saturés pour $\mathfrak{R}$. Or toute classe d'équivalence pour $\mathfrak{R}$ est dense dans K et il en résulte que les seuls sous ensembles fermés $F \subset X$ sont $F = \varnothing$, $F = X$. Ainsi la topologie de X est triviale et ne distingue pas X d'un point, elle n'est bien entendu pas séparée, et ne contient aucune information intéressante.

Une attitude possible devant un tel exemple serait de dire qu'à des fluctuations près il *y* a *un seul* pavage T du plan et de ne pas s'inquiéter de la distinction entre X et un point. En fait nous verrons que X est un espace "non-commutatif" ou espace "quantique" très intéressant et que l'un de ses invariants topologiques, le groupe des dimensions, est le sous groupe de $\mathbf{R}$ engendré par $\mathbf{Z}$ et le nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$. Ceci montrera, en particulier, pourquoi uniquement à cause de la topologie de X, la densité ou fréquence d'apparition d'un motif dans le pavage doit être un élément du groupe $\mathbf{Z} + ((1 + \sqrt{5})/2)\mathbf{Z}$. Expliquons d'abord pourquoi la description de X

comme espace topologique se fait en remplaçant l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues sur X par une C^*-algèbre non-commutative, ce qui est à l'origine de la terminologie "géométrie non-commutative". Etant donné Y un espace (localement) compact ordinaire, le lemme d'Urysohn montre qu'il existe suffisamment de fonctions continues $f \in C(Y)$ sur Y pour déterminer uniquement la topologie de Y. Ceci est vrai pour les fonctions à valeurs réelles et à fortiori celles à valeurs complexes. Ainsi la topologie de Y détermine et est déterminée par l'algèbre $A = C(Y)$ des fonctions continue à valeurs complexes sur Y, munie de l'involution $f \to f^*$ où $F^*(y) = \overline{f(y)}$ $\forall y \in Y$. (Ici, un énoncé analogue serait faux si l'on remplaçait $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ par un corps local totalement discontinu). De plus la classe de $\mathbf{C}$-algèbres involutives A obtenue se caractérise très simplement. Il s'agit des C^*-algèbres (avec unité) *commutatives*. Les C^*-algèbres ont une caracterérisation axiomatique très simple qui exprime exactement ce que l'on attend des fonctions de classe C^0. Une C^*-algèbre A est une algèbre involutive qui est une algèbre de Banach pour la norme $x \to \|x\|$ uniquement déterminée par la structure d'algèbre comme le rayon spectral de x^*x: $\|x\|^2 =$ rayon spectral $(x^*x) = \sup\{|\lambda|, x^*x - \lambda \text{ non inversible}\}$. Pour qu'une algèbre involutive A soit une C^*-algèbre il faut et il suffit qu'elle admette une représentation involutive π dans un espace de Hilbert telle que:

(4) $$(1)\ \pi(x) = 0 \Rightarrow x = 0;$$
$$(2)\ \pi(A) \text{ est fermé en norme.}$$

Le théorème de Gelfand, qui s'appuie sur l'analyse complexe et la structure des idéaux maximaux de A, montre que si A est une C^*-algèbre *commutative* il existe un espace topologique compact $Y = \mathrm{SP}(A)$ tel que $A = C(Y)$. La raison d'être de la géométrie non-commutative est la possibilité d'adapter la plupart des outils classiques tels mesures de Radon, K-théorie, cohomologie... nécessaires à l'étude d'un espace compact Y au cas où la C^*-algèbre $A = C(Y)$ est remplacée par une C^*-algèbre non-commutative.

Bien entendu cette adaptation au cas non-commutatif n'est jamais immédiate et s'accompagne souvent de phénomènes totalement nouveaux. Même dans le paysage de la théorie de la mesure, si simple dans le cas commutatif, l'on voit apparaître l'implication suivante:

$$\text{Non-commutativité} \Rightarrow \text{Groupe à 1 paramètre d'évolution}$$

dont nous aurons l'occasion de reparler.

Quand la C^*-algèbre A n'est pas commutative le spectre $Y = \mathrm{Sp}(A)$ de Gelfand est remplacé par l'ensemble Y des représentations irréductibles π de A dans l'espace de Hilbert. Mais, bien que l'on puisse toujours démontrer l'existence de suffisamment de représentations irréductibles de A, dès que A est *simple*, i.e., n'a pas d'idéal bilatère non-trivial, la topologie naturelle de l'espace Y a la même propriété de trivialité que celle de l'ensemble X des pavages de Penrose rencontré ci-dessus. Deux représentations irréductibles

π_1 et π_2 de A peuvent par une transformation unitaire être rendues aussi ressemblantes que l'on veut. C'est le théorème de transitivité de R. V. Kadison [33]. Il est donc naturel de chercher a associer à l'espace X des pavages de Penrose une C^*-algèbre *non-commutative* qui remplace $C(X)$.

Comme la dichotomie entre espaces classiques et espaces "quantiques" n'est pas exactement celle entre algèbre commutative et algèbre non-commutative, il est d'abord nécessaire d'expliquer en quel sens certaines algèbres non-commutatives équivalents à des algèbres commutatives. Toutes les représentations irréductibles de la C^*-algèbre $M_n(\mathbf{C})$ des matrices $n \times n$ sur $\mathbf{C}$ sont deux à deux équivalentes, et il en résulte que l'on ne change pas l'espace $\mathrm{Sp}(A)$ des représentations irréductibles de A quand on remplace la C^*-algèbre A par $M_n(A) = M_n(\mathbf{C}) \otimes A$. Plus généralement on ne change aucune des propriétés importantes de A relativement à la théorie de la mesure, K-théorie, cohomologie ... quand on remplace A par $M_n(A)$ ou par une C^*-algèbre *équivalente au sens de Morita.* Sans donner la définition technique de cette équivalence (Cf. [45]) notons que comme elle ne change pas l'espace $\mathrm{Sp}(A)$ des représentations irréductibles de A, il est facile de voir que:

(5) Il existe au plus une C^*-algèbre commutative $C(Y)$ équivalente au sens de Morita, à une C^*-algèbre A.

Ainsi le cas classique ne contient pas que des C^*-algèbres commutatives mais il est limité aux C^*-algèbres qui sont équivalentes à une C^*-algèbre commutative. Or il est clair que cette classe de C^*-algèbres n'a rien de naturel et n'est même pas fermée pour l'opération élémentaire de réunion croissante. Pour voir à quelle opération géométrique cela correspond sur les espaces Y, il faut d'abord comprendre à quelle situation géométrique correspond la description d'un compact Y non par $C(Y)$ mais par une C^*-algèbre non-commutative équivalence à $C(Y)$. Le point crucial est que l'opération ensembliste qui consiste à *identifier deux points* x et y se traduit algébriquement par le remplacement de l'algèbre commutative des fonctions sur $\{x\} \cup \{y\}$ par l'algèbre des matrices 2×2, $\left[\begin{smallmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{smallmatrix}\right]$ à coefficients complexes. Dans le spectre de cette algèbre les états purs ω_x, ω_y associés à x et y par les formules $\omega_x(a) = a_{xx}$; $\omega_y(a) = a_{yy}$ donnent des représentations irréductibles équivalentes d'où l'identification ensembliste $x \sim y$. Prenons par exemple une variété Y compacte obtenue en recollant des morceaux ouverts U_i de l'espace Euclidien, $U_i \subset Y$ selon les intersections $U_i \cap U_j$. Il faut pour obtenir Y à partir de l'ouvert Euclidien $V = \coprod U_i$ réunion disjointe des U_i, identifier les couples (z, z') d'éléments de V où le collage a lieu. On vérifie facilement que la C^*-algèbre $C(Y)$ est Morita équivalente à la C^*-algèbre A des matrices $a = a_{(z,z')}$ qui dépendent continuement des couples (z, z') ci-dessus et où le produit est défini par la règle:

$$(ab)_{(z,z')} = \sum_{z''} a_{(z,z'')} b_{(z'',z')}.$$

En résumé dès qu'un espace ordinaire Y est *surparamétré*, i.e., est présenté comme un quotient ou par recollement, il est naturel de lui associer une algèbre non-commutative A qui code cette information, mais est néanmoins Morita équivalente à $C(Y)$. Mais il peut très bien arriver qu'à vouloir recoller des morceaux d'espace Euclidien pour construire une variété on obtienne un espace analogue à l'espace X des pavages de Penrose. La construction de la C^*-algèbre A des matrices $a = a_{(z,z')}$ restera cependant valable et nous allons maintenant la décrire dans le cas de cet espace $X = K/\mathfrak{R}$. Un élément général $a \in A$ est donné par une matrice $(a_{z,z'})$ de nombres complexes, indexée par les couples $(z, z') \in \mathfrak{R}$. Le produit de deux éléments de A des donné par le produit des matrices

$$(ab)_{z,z''} = \sum_{z'} a_{z,z'} b_{z',z''}.$$

A chaque élément $x \in X$ de X correspond une classe d'équivalence pour $\mathfrak{R}$ qui est un sous-ensemble dénombrable de K, on peut donc associer à x l'espace de Hilbert ℓ^2_x ayant pour base orthonormale cet ensemble dénombrable. Tout élément a de A définit un opérateur dans ℓ^2_x par l'égalité.

$$(a(x)\zeta)_z = \sum_{z'} a_{z,z'} \zeta_{z'}.$$

Pour $a \in A$ la norme $\|a(x)\|$ de l'opérateur $a(x)$, est finie et ne dépend pas de $x \in X$, c'est la norme de C^*-algèbre. Bien entendu, il y a un point technique qui consiste à donner la définition rigoureuse de la classe de matrices a que nous considérons. Mais la relation $\mathfrak{R} \subset K \times K$ est réunion croissante des relations $\mathfrak{R}_n = \{(z, z'); z_j = z'_j \quad \forall j \geq n\}$, et on définit A comme la fermeture normique de l'algèbre obtenue à partir des matrices a où a est continue sur $\mathfrak{R}_n$ et nulle sur $\mathfrak{R}_n^c$ pour n assez grand. Comme il n'y a pas de formule explicite simple pour la norme d'une matrice en fonction de ses coefficients il est difficile de décrire exactement la régularité de la matrice générale $a \in A$ mais en tous les cas toute matrice continue sur $\mathfrak{R}_n$ et nulle sur $\mathfrak{R}_n^c$ appartient à A et tout élément de A correspond à une matrice $a_{(z,z')} = a$ continue sur chaque $\mathfrak{R}_n$. On peut résumer la construction ci-dessus en disant qu'alors que l'espace X ne peut être non-trivialement décrit en utilisant des fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$, il existe sur X une classe très riche de fonctions à valeurs opérateurs:

$$a(x) \in \ell(\ell^2_x) \quad \forall x \in X.$$

La structure algébrique de A est dictée par ce point de vue car on a:

$$(\lambda a + \mu b)(x) = \lambda a(x) + \mu b(x) \qquad \forall a, \quad b \in A, \quad x \in X$$
$$(ab)(x) = a(x)b(x) \qquad \forall x \in X.$$

Pour bien montrer la richesse de la C^*-algèbre A nous en donnons maintenant une autre description [22] comme limite inductive d'algèbres de dimension finie. Le Cantor K est par construction la limite projective des ensembles finis K_n, où K_n est l'ensemble des suites de $n+1$ éléments: $(z_j)_{j=0,1,\ldots,n}$ de 0 et 1 qui

vérifient la règle $z_j = 1 \Rightarrow z_{j+1} = 0$. On a une projection évidente $K_{n+1} \to K_n$ qui consiste à oublier le dernier z_{n+1}. Considérons sur l'ensemble fini K_n la relation $\mathfrak{R}^n = \{(z, z') \in K_n \times K_n ; z_n = z'_n\}$. Toute fonction $a = a_{(z,z')}$ sur $\mathfrak{R}^n$ définit un élément $\tilde{a}$ de la C^*-algèbre A par l'égalité:

$$\tilde{a}_{(z,z')} = a_{((z_0,\ldots,z_n)(z'_0,\ldots,z'_n))} \qquad \forall (z, z') \in \mathfrak{R}_n$$
$$\tilde{a}_{(z,z')} = 0 \qquad \forall (z, z') \notin \mathfrak{R}_n.$$

De plus la sous-algèbre de A obtenue à partir des fonctions sur $\mathfrak{R}^n$ se calcule facilement, c'est une somme directe, $A_n = M_{k_n}(\mathbf{C}) \oplus M_{k'_n}(\mathbf{C})$ de deux algèbres de matrices, où k_n (resp. k'_n) est le nombre d'éléments de K_n qui se terminent par 0 (resp. 1). Enfin l'inclusion $A_n \to A_{n+1}$ est uniquement déterminée par le diagramme (de Bratteli [7])

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i.e., l'égalité $k_{n+1} = k_n + k'_n$, $k'_{n+1} = k_n$ permet de plonger $M_{k_n} \oplus M_{k'_n}$ comme matrices par blocs dans M_{k_n} et par l'homomorphisme $(a, a') \to a$ dans $M_{k'_{n+1}}$).

La C^*-algèbre A est alors la limite inductive des algèbres de dimension finie A_n et on peut calculer les invariants, pour la classification de Bratteli, Elliott, Effros, Chen, Handelman ([7], [**24**], [**23**], [**30**]) de ces C^*-algèbres particulières. L'invariant à calculer est un groupe, muni d'une relation d'ordre. Comme il garde un sens pour toute C^*-algèbre A nous allons donner sa définition en général. Le groupe $K_0(A)$ est le groupe engendré par les classes d'équivalence de projecteurs, comme dans les travaux de Murray et von Neumann sur les facteurs. Un projecteur $e \in A$ est un élément de A tel que $e^2 = e$ et $e = e^*$. Deux projecteurs e, f sont équivalents s'il existe $u \in A$ tel que $u^*u = e$, et $uu^* = f$. Pour pouvoir additionner les classes d'équivalence de projecteurs on utilise les matrices $M_n(A)$, n arbitraire ce qui permet de donner un sens à $e \oplus f = \left[\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{smallmatrix}\right]$ pour deux projecteurs e, $f \in M_k(A)$. Le groupe ordonné $K_0(A)$, $K_0(A)^+$ est obtenu canoniquement à partir du semi-groupe des classes d'équivalence de projecteur $e \in M_n(A)$ par l'opération usuelle de symétrisation qui fait passer du semi-groupe $\mathbf{N}$ des entiers positifs au groupe ordonné $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}^+$ des entiers relatifs.

Ce groupe ordonné est très facile à calculer pour des algèbres de dimension finie comme les algèbres A_n, $UA_n = A$ rencontrées ci-dessus. Comme A_n est la somme directe de deux algèbres de matrices, on obtient:

$$K_0(A_n) = \mathbf{Z}^2, \quad K_0(A_n)^+ = \mathbf{Z}^+ \oplus \mathbf{Z}^+ \subset \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

Le groupe ordonné $(K_0(A), K_0(A)^+)$ est alors la limite inductive des groupes ordonnés $(\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^+ \oplus \mathbf{Z}^+)$, où l'inclusion du $n$ième dans le $n$ième est donné par la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ qui correspond à l'inclusion $A_n \subset A_{n+1}$ décrite ci-dessus.

Comme cette matrice définit une bijection $(a, b) \to (a + b, a)$ de $\mathbf{Z}^2$ sur $\mathbf{Z}^2$ la limite inductive cherchée est le groupe $K_0(A) = \mathbf{Z}^2$. Mais cette bijection n'est pas une bijection de $\mathbf{Z}^+ \oplus \mathbf{Z}^+$ sur $\mathbf{Z}^+ \oplus \mathbf{Z}^+$, et à la limite le semi groupe

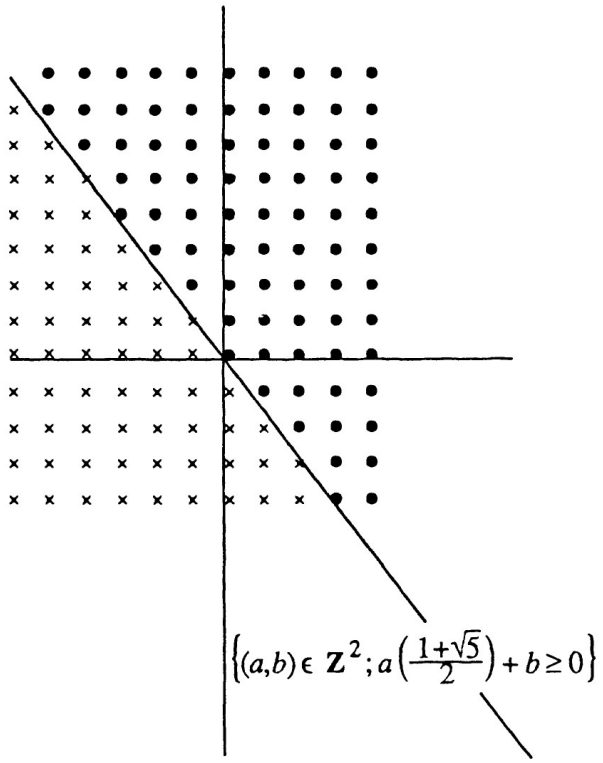


FIGURE 1. Le groupe $K_0(A)$; Chaque point de réseau entier représente un élement de $K_0(A)$, les élements de $K_0(A)$ situés à droite de Δ correspondent à des idempotents.

$K_0(A)^+$ devient: $K_0(A)^+ = \{(a,b) \in \mathbf{Z}^2; ((1/\sqrt{5})/2)a + b \geq 0\}$ comme on le voit en diagonalisant la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ (Cf. Figure 1.)

Il en résulte que modulo le choix d'une base dans $\mathbf{Z}^2$, i.e., modulo $\mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$ on trouve le nombre d'or $((1+\sqrt{5})/2)$ comme un invariant topologique de l'espace X à travers la C^*-algèbre A. Sous une autre formulation, on montre que cette C^*-algèbre a une unique trace τ, $\tau(1) = 1$, i.e., il existe sur A une unique forme linéaire τ telle que $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tous $x, y \in A$, et les valeurs prises par τ sur les projecteurs donne le sous-groupe $\mathbf{Z} + ((1+\sqrt{5})/2)\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Cette trace τ sur A est *positive*, i.e., elle vérifie

$$\tau(a^*a) \geq 0 \quad \forall a \in A$$

et elle se calcule directement pour $a = a_{(z,z')}$ comme intégrale des coefficients diagonaux de la matrice a:

$$\tau(a) = \int_K a_{(z,z)}\, d\mu(z)$$

où la mesure de probabilité μ sur K est uniquement déterminée par la condition $\tau(ab) = \tau(ba)$ $\forall a, b \in A$. En théorie classique de la mesure, étant donnée une mesure de Radon ρ sur un espace compact Y, on obtient l'espace de Hilbert $L^2(Y,\rho)$ comme complétion de $C(Y)$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int f\bar{g}\, d\rho$, et la fermeture faible de l'algèbre $C(Y)$ agissant dans

$L^2(Y,\rho)$. Dans le cas qui nous intéresse, l'algèbre A remplace $C(Y)$, la trace positive τ remplace la mesure de Radon ρ et la fermeture faible de l'action de A par multiplication à gauche dans $L^2(A,\tau)$ (complétion de A pour le produit scalaire $\langle a,b\rangle = \tau(a^*b)$) est le facteur hyperfini de type II_1 de Murray et von Neumann (Cf. [**38**]), que nous noterons R. Il nous reste à expliquer, toujours sur notre exemple des pavages du plan comment la notation de dimension continue de Murray et von Neumann est reliée à la notion de densité d'un sous-ensemble discret d'un pavage. Une propriété extraordinaire d'un facteur de type II_1 comme le facteur R est la classification complète des classes d'équivalence de projecteurs $e \in R$ par un nombre réel $\dim(e) \in [0,1]$ qui peut prendre *toute valeur continue* entre 0 et 1. La Grassmannienne des projecteurs $e \in \mathbf{R}$ décrit ainsi, non plus les droites, plans, ... de la géométrie usuelle, mais des "espaces de dimension $\alpha \in [0,1]$" i.e., une géométrie continue. La force de cette découverte transparaît très clairement quand on lit le texte original de Murray et von Neumann ([**38**], [**39**], [**40**], [**41**]). On peut comme dans le cas usuel parler de l'intersection de "sous-espaces" et le projecteur correspondant $e \vee f$. est le plus grand projecteur majoré par e et f. On peut de même parler du sous-espace engendré par e et f et le projecteur correspondant est noté $e \wedge f$ L'égalité fondamentale est alors

$$\dim(e \wedge f) + \dim(e \vee f) = \dim(e) + \dim(f) \quad \forall e, f.$$

Ces propriétés permettent de prolonger la notion de dimension continue aux représentations de R dans l'espace de Hilbert, disons aux R-modules, de telle sorte que ces modules sont classifiés exactement par leur dimension: $\dim_R(\mathfrak{h})$ qui peut être n'importe quel réel $\in [0,+\infty]$.

Supposons maintenant avoir pour chaque pavage $T \in X$ un ensemble dénombrable Z_T comme l'ensemble Δ^0 des sommets du pavage T. On peut alors, modulo des problèmes de mesurabilité, définir un module sur R de la manière suivante. Pour tout $z \in K$ considérons l'espace de Hilbert

$$\mathfrak{h}_z = \ell^2(Z_{T_z}) \quad \text{où} \quad T_z \text{ est le pavage associé à } z$$

toujours modulo les problèmes de mesurabilité, on peut alors considérer l'espace de Hilbert $\mathfrak{h}$ des sections de carré intégrable pour la mesure μ de la famille $\mathfrak{h}_z$, i.e., un élément de $\mathfrak{h}$ est une section $\xi_z \in \mathfrak{h}_z \quad \forall z \in K$ et sa norme est donnée par $\int \|\xi_z\|^2 \, d\mu(z) = \|\xi\|^2$. L'espace $\mathfrak{h}$ est un R-module car lorsque $z, z' \in K$ sont équivalents pour la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ les pavages T_z et $T_{z'}$ sont les mêmes, ce qui montre que l'on a une identification canonique des espaces $\mathfrak{h}_z$ et $\mathfrak{h}_{z'}$. On peut donc donner un sens à la formule:

$$(a\xi)_z = \sum a_{(z,z')}\xi_{z'}$$

qui définit l'action de R dans $\mathfrak{h}$. Bien sûr nous avons allègrement négligé le problème de mesurabilité, et pour le traiter il faut que l'ensemble dénombrable Z_T associé au pavage T dépende en quelque sorte mesurablement de T. Au lieu de donner une définition il vaut mieux donner un exemple, T

est construit à partir de deux motifs et on peut par exemple associer à T l'ensemble des motifs A qui apparaissent dans T ou l'ensemble des motifs B, des motifs AB, des arêtes $\Delta^1(T)$ du pavage etc.... La théorie de la dimension continue de Murray et von Neumann montre alors que étant donné deux familles $(Z_T)_{T\in X}$ et $(Z'_T)_{T\in X}$ d'ensembles dénombrables, pour que l'on puisse construire pour μ presque tout $T \in X$ une bijection mesurable de Z_T avec Z'_T il faut et il suffit que les *dimensions continues* $\dim_R(\mathfrak{h})$ et $\dim_R(\mathfrak{h}')$ soient égales. On peut montrer en utilisant le théorème ergodique que par exemple pour l'ensemble Z_T des motifs d'un certain type t dans T, la dimension continue $\dim_R(\mathfrak{h})$ s'obtient comme la *densité ou fréquence d'apparition* de t dans T, i.e., on prend un très grand disque D dans T et on divise le nombre de motifs de type t qui apparaissent dans D par la surface du disque, quand le rayon de D tend vers ∞, la limite est la densité cherchée, elle existe presque surement modulo μ. L'on voit donc dans cet exemple que les *dimensions continues* de Murray et von Neumann ont la même relation par rapport aux dimensions entières classiques, que la notion de densité d'un ensemble infini a par rapport à la notion classique de cardinalité d'un ensemble fini. Ainsi il est facile d'imaginer un sous ensemble Z de $\mathbf{N}$ de densité un nombre $\alpha \in [0, 1]$, il suffit que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Card}(Z \cap \{0, 1, \ldots, N\}) = \alpha.$$

La notion de dimension continue est exactement analogue et il est clair que dans l'exemple ci-dessus α est la dimension "relative" de $\ell^2(Z)$ par rapport à $\ell^2(\mathbf{N})$. Mais revenons à la C^*-algèbre A qui remplace $C(X)$ de notre point de vue. Alors que la dimension continue de Murray et von Neumann peut prendre toutes les valeurs réelles positives pour les projecteurs de R (ou des matrices $M_n(R)$), comme $\dim(e) = \tau(e)$, cette dimension ne peut pour les projecteurs qui appartiennent à A prendre ses valeurs que dans le sous groupe $\mathbf{Z} + ((1 + \sqrt{5})/2)\mathbf{Z}$. En résumé, nous avons dans cet exemple montré que la "topologie" de X est loin d'être triviale, qu'elle donne naissance à la C^*-algèbre A qui est une C^*-algèbre *simple*, uniquement caractérisée comme C^*-algèbre (à équivalence de Morita près) par:

(1) A est limite inductive d'algèbres de dimension finie, on dit que A est approximativement finie (ou AF).

(2) $$(K_0(A), K_0(A)^+ (= \left(\mathbf{Z}^2, \left\{(a, b); \left(\frac{1\sqrt{5}}{2}\right) a + b \geq 0\right\}\right).$$

Notons enfin que la C^*-algèbre A est exactement celle qui intervient dans la construction des sous-facteurs d'indice inférieur à 4 de von Jones [**32**], pour l'indice égal au nombre d'or. On peut exploiter cela pour décrire explicitement le sours-facteur dans cette situation géométrique et cela suggère une explication générale pour l'apparence des nombres: $sin\frac{\pi}{n}$ conjecturée dans [**28**] pour les pavages quasi périodiques plus généraux.

La géométrie non-commutative a pour but de comprendre et d'utiliser des espaces semblables à l'espace X ci-dessus, il faut pour cela:

(1) Disposer d'un nombre suffisant d'exemples non-triviaux.

(2) Développer l'analogue non-commutatif des outils classiques y compris le calcul différentiel et la géométrie Riemannienne.

Pour les applications il faut distinguer celles qui portent

(a) sur la géométrie classique de *familles* Y_x de variétés ordinaires en général non-compactes, paramétrées par $x \in X$

(b) sur la géométrie moins classique de l'espace X des paramètres.

Nous allons maintenant, en faisant référence à des articles développés esquisser quel est l'état de la situation en ce qui concerne (1), (2), (a), et (b).

2. Feuilletages et théorème de l'indice avec mesure transverse. Une construction assez générale d'espaces X semblable à l'espace des pavage de Penrose est celle des feuilletages qui est traitée dans **[12]**, **[13]**, **[16]**, et **[18]**. Si M est une variété (compacte) et F un sous-fibré intégrable de son fibré tangent TM, l'espace X des feuilles (du feuilletage de M (où $\dim L = \dim F$ et $T_x L = F_x$ pour tout $x \in L$) est en général un espace dont la topologie à la même type de pauvreté que celle de l'espace des pavages de Penrose. On peut récupérer une structure non-triviale grâce aux topos de Grothendieck mais la difficulté consiste à garder le contact avec les outils puissants de l'analyse fonctionnelle (positivité, mesure, espaces de Hilbert...). C'est exactement ce que réalise la construction de la C^*-algèbre associée à un feuilletage, et le point de vue des topos n'apparaît que plus tard pour faire des calculs de cohomologie cyclique, analogue (au sens de (2)) de l'homologie de de Rham pour les espaces ordinaires. J'ai expliqué dans mon cours au Collège de France en 1986 comment calculer en général la cohomologie cyclique de l'algèbre des éléments suffisamment réguliers dans la C^*-algèbre de (M, F) en relation avec le topos étale naturel du feuilletage. Pour illustrer deux applications dans cet exemple des feuilletages nous allons expliquer brièvement le théorème de l'indice longitudinal et la relation des facteurs de type III avec l'invariant de Godbillon-Vey.

La notion de trace (positive) sur la C^*-algèbre A du feuilletage (M, F) correspond à la notion géométrique de mesure transverse pour le feuilletage. Une telle mesure est donnée par un courant de de Rham C sur M de dimension égale à celle de F et qui a pour propriétés

(α) $\langle C, \omega \rangle \geq 0$ pour tout forme différentielle ω, dont la restriction aux feuilles (orientées) est positive

(β) $bC = 0$ i.e., C est un courant fermé.

Grâce à C on définit une trace positive sur la C^*-algèbre A et grâce à la théorie de Murray et von Neumann on définit une dimension continue, $\dim_C$ pour une famille d'espaces de Hilbert $(\mathscr{H}_L)_{L \in X}$ indexée mesurablement par l'espace X des feuilles du feuilletage, comme nous l'avions expliqué plus haut. On peut alors énoncer une formule qui permet pour tout opérateur

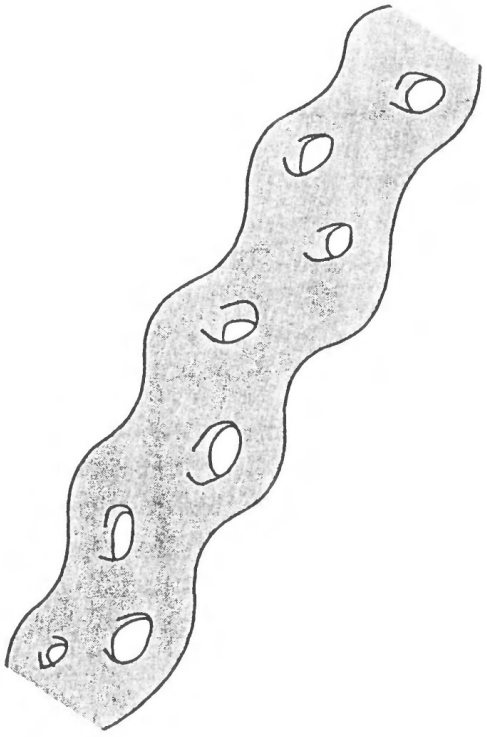


FIGURE 2. Feuille générique.

différentiel $D: E^+ \to E^-$ sur M qui est *longitudinalement elliptique*, i.e., se restreint aux feuilles en une famille $(D_L)_{L\in X}$ d'opérateurs elliptiques, de calculer son indice:

$$\mathrm{Ind}_C(D_L)_{L\in X} = \dim_C(\mathrm{Ker}(D_L)_{L\in X} - \dim_C(\mathrm{Ker}(D_L^*)_{L\in X}.$$

La formule est l'exact analogue de la formule de l'indice d'Atiyah-Singer: $(\mathrm{Ind}(D) = \langle \mathrm{ch}(\sigma_D)T\,d(T^*M), [T^*M]\rangle)$ à la différence près qu'il faut utiliser la classe d'homologie du courant C au lieu de la classe fondamentale de M:

$$\mathrm{Ind}_C(D_L)_{L\in X} = \langle \mathrm{ch}(\sigma_D)T\,d(T^*M), C\rangle.$$

En général la classe d'homologie du courant fermé C n'est pas rationnelle et les dimensions continues de Murray et von Neumann sont bien nécessaires dans l'énoncé. Ce théorème permet d'étendre au cadre des variétés non-compactes un énoncé comme le théorème de Riemann-Roch: $\ell(D) - \ell(\Delta - D) = \deg(D) + 1 - g$; M courbe complexe de genre g. On y remplace le degré $\deg D = \sum n_i$ d'un diviseur $D = \sum n_i P_i$, $P_i \in M$, $n_i \in \mathbf{Z}$ par la densité i.e., une limite convenable $\frac{1}{|S|}\sum_{P_i\in S} n_i$ (où S est un disque de surface $|S|$ dans M). On y remplace de même la dimension $\ell(D)$ de l'espace des sections holomorphes de carré intégrable du fibré L_D par la dimension de Murray et von Neumann de l'espace des sections holomorphes de carré intégrable du fibré L_D. Enfin le genre s'obtient à partir de la dimension de Murray et von Neumann des 1-formes harmoniques de carré intégrable et n'est pas toujours (dans la situation non-moyennable) obtenu à partir de la densité des (Cf. Figure 2) défauts topologiques.

Le théorème de l'indice "longitudinal" mentionné ci-dessus, n'utilise que très peu la structure transverse du feuilletage car il n'utilise que la *théorie de la mesure* dans le sens transverse, i.e., l'algèbre de von Neumann de type II associée à une trace sur la C^*-algèbre du feuilletage. On peut alors en déduire des résultats (John Roe [**47**]) portant sur les variétés non-compactes en utilisant le même procédé de construction de mesures que celui qui permet par exemple la démonstration du théorème combinatoire de Szemeredi "Tout sous ensemble $Z \subset \mathbf{N}$ de densité positive contient une progression arithmétique de longueur arbitraire" en utilisant la théorie ergodique [**26**].

3. Facteurs de type III, cohomologie cyclique et invariant de Godbillon-Vey. Passons maintenant à la relation entre facteurs de type III et l'invariant de Godbillon-Vey. Sous sa première forme elle est due à S. Hurder et A. Katok [**31**], mais j'expliquerai mon point de vue. La théorie modulaire des facteurs de type III a comme outil principal l'*existence* pour toute algèbre de von Neumann M (l'analogue non-commutatif de l'algèbre des fonctions mesurables essentiellement bornées) et tout poids φ sur M (L'analogue non-commutatif d'une mesure positive) d'un groupe à un paramètre $(\sigma_t^{\varphi})_{t\in\mathbf{R}}$ d'automorphismes de M, le groupe d'automorphismes modulaires de φ, qui est trivial si et seulement si φ est une trace, i.e., $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ pour tous $x, y \in M$. Ce résultat est dû aux mathematiciens Japonais M. Tomita et M. Takesaki. J'ai montré dans ma thèse, que si l'on change le choix du poids φ sur M en le remplaçant par un autre poids ψ, on ne change le groupe à un paramètre (σ_t^{φ}) que par un *automorphisme intérieur* de M. En d'autres termes si l'on divise le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ des automorphismes de M par le sous-groupe normal $\mathrm{Int}(M)$ des automorphismes intérieurs: $\alpha(x) = uxu^* \forall x \in M$, on obtient un homomorphisme complètement canonique:

$$\delta\colon \mathbf{R} \to \mathrm{Out}M = \mathrm{Aut}\,M\,\mathrm{Int}\,M$$

qui ne dépend d'aucun choix auxiliaire. Ainsi la seule donnée de l' algèbre (de von Neumann) M détermine uniquement une *dynamique*, un groupe à un paramètre d'automorphismes de M, modulo les automorphismes automatiquement présents dans le cas non-commutatif que sont les automorphismes intérieurs. Ce résultat est le point de départ de la classification des facteurs de type III, i.e., des algèbres de von Neumann dont le centre $Z(M)$ est réduit à $\mathbf{C}$ et pour lesquelles δ n'est pas égal à 1. Il est évident par exemple que le noyau $T(M) = \mathrm{Ker}\,\delta$ est un sous-groupe de $\mathbf{R}$ qui est un invariant de M et les résultats de Powers, Araki et Woods sur les facteurs obtenus comme produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices montraient que $T(M)$ distingue de très nombreux facteurs. (Pour $M = \otimes_{\nu=1}^{\infty}(M_{n_\nu}(\mathbf{C}), \varphi_\nu)$ où φ_ν est l'état sur M_{n_ν} associé à la liste de valeurs propres $\lambda_{\nu,1}, \ldots, \lambda_{\nu,n_\nu}$), réels positifs de somme 1, on a $t \in T(M)$ ssi $\sum_{\nu=1}^{\infty}(1 - |\sum \lambda_{\nu,j}^{1+it}|) < \infty$.)

Cette dynamique canonique δ des facteurs de type III permet de définir un invariant du facteur M qui est un *flot ergodique* $(W(M), W_\lambda)$ où $W(M)$ est un espace mesurable ordinaire muni d'une classe de mesure et $(W_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}_+^*}$ est un groupe à un paramètre de transformations, ou flot, sur $W(M)$, dont le paramètre naturel est le groupe dual $\mathbf{R}_+^*$ de $\mathbf{R}$. Comme ce flot a une description intrinsèque en termes de classes de poids sur M, l'action de $\mathbf{R}_+^*$ étant simplement la multiplication $\varphi \in \lambda\varphi$, il porte le nom de *flot des poids* de M. [21], [35].

Mais revenons aux feuilletages (V, F) de variétés compactes et au lien entre type III et invariant de Godbillon-Vey. Soit X l'espace des feuilles d'un feuilletage (V, F). A la classe de la mesure de Lebesgue sur V correspond une "classe de mesure" sur X et donc une algèbre de von Neumann, en général non-commutative, obtenue en complétant la C^*-algèbre du feuilletage.

La dynamique canonique δ de l'algèbre de von Neumann $M =$ "$L^\infty(X)$" est un phénomène purement non-commutatif et nous allons obtenir la classe de Godbillon-Vey comme classe d'homologie de X à partir de cette dynamique et de la classe fondamentale de X. En supposant pour simplifier que F est de codimension 1 et en parlant abusivement de courants (de de Rham) pour repésenter l'homologie de X on aboutit à la formule suivante:

$$(*) \qquad \text{Classe de Godbillon-Vey} = i_H[\overset{\circ}{X}]$$

où:

(a) $[X]$ désigne la classe fondamentale de X.

(b) $[\overset{\circ}{X}]$ désigne la derivée en $t = 0$ de la transformée de cette classe par la dynamique δ de M.

(c) i_H désigne la contraction du courant $[\overset{\circ}{X}]$ par le "champ de vecteur" engendrant la dynamique δ.

On démontre alors que l'on peut localiser GV par rapport à n'importe quel sous-ensemble mesurable $P \subset W(M)$ de l'espace du flot des poids de M et que la classe obtenue est une classe d'homologie sur X, invariant quand on remplace P par $W_\lambda(P)$ où W_λ est le flot des poids. Il en résulte que dès que la classe GV de Godbillon-Vey est non nulle on peut construire sur le flot des poids une *mesure finie invariante* et en particulier que M est de type II car le flot des poids d'un facteur de type II est celui des translations de $\mathbf{R}$ et n'a pas de mesure invariante.

Bien sûr l'égalité (*) ci-dessus surréaliste tant que l'on n'a pas défini proprement ce qu'est l'homologie de l'espace X, et en fait ce qu'est la théorie des courants de de Rham sur X. C'est l'explication de ce point fort important qui nous conduit à aborder la question (2) ci-dessus et à parler de la cohomologie cyclique.

Pour une variété différentiable ordinaire Y on peut s'amuser à donner diverses présentations du calcul des formes différentielles ne s'appuyant que

sur l'algèbre $\mathfrak{a} = C^\infty(Y)$ des fonctions de classe C^∞ sur Y. La plus ordinaire aurait pour "mots clefs" dérivations et algèbre extérieure. Je vais essayer d'expliquer pourquoi ce point de vue est, à mon avis, inadapté au cas non-commutatif, puis pourquoi l'on est conduit à la cohomologie cyclique. D'abord, la notion de dérivation d'une algèbre $\mathfrak{a}$, i.e., d'application linéaire $D: \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ vérifiant $D(xy) = D(x)y + xD(y) \forall x, y \in \mathfrak{a}$ correspond à la notion d'homomorphisme ρ d'un groupe (discret Γ à valeurs dans $\mathbf{C}$: $\rho: \Gamma \to \mathbf{C}$. (Si par exemple on associe à Γ l'algèbre $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$ du groupe, à tout homomorphisme ρ correspond la dérivation D_ρ, $(D_\rho a)(g) = \rho(g)a(g)$ pour tout $a \in \mathbf{C}\Gamma$). Or comme $\mathbf{C}$ est commutatif il n'existe en général, pour Γ non-commutatif, que peu d'homomorphismes de Γ dans $\mathbf{C}$. Leur noyau contient toujours le sous-groupe des commutateurs et si Γ est parfait, i.e., égal au sous-groupe engendré par les commutateurs $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, il n'y aura pas d'homomorphisme non-trivial de Γ dans $\mathbf{C}$. Par contre, si l'on interprète les homomorphismes de Γ dans $\mathbf{C}$ comme la 1-cohomologie $H^1(\Gamma, \mathbf{C})$ de Γ à coefficients dans $\mathbf{C}$ on voit que dans le cas général, les groupes de cohomologie $H^n(\Gamma, \mathbf{C})$ sont parfaitement adaptés aux groupes non-commutatifs. La seule erreur à éviter est de croire que H^1 et une opération convenable de produit extérieur engendrent H^n en général.

Montrons, toujours dans le cas des algèbres de groupes, comment associer à un cocycle de groupe $c \in Z^n(\Gamma, \mathbf{C})$, l'analogue d'un courant de de Rham fermé sur le dual $\hat{\Gamma}$ de Γ. Rappelons d'abord qu'un cocycle de groupe est donné de manière équivalente par:

(a) Une fonction de $n+1$ éléments de Γ, $\gamma(g_0, g_1, \ldots, g_n) \in \mathbf{C}$ invariante par translations à gauche $\gamma(g g_0, g g_1, \ldots, g g_n) = \gamma(g_0, \ldots, g_n) \forall g \in \Gamma$, totalement antisymétrique, et fermée:

$$\sum (-1)^j \gamma(g_0, \ldots, \overset{\vee}{g}_j, \ldots, g_{n+1}) = 0 \quad \forall g_0, \ldots, g_{n+1} \in \Gamma.$$

(b) Une fonction de n éléments de Γ,

$$c(g_1, \ldots, g_n) = \gamma(1, g_1, g_1, g_2, \ldots, g_1 g_2, \ldots, g_n)$$

qui vérifie $bc = 0$, où:

$$\begin{aligned}(*)\ (bc)(g_1, \ldots, g_{n+1}) = {} & c(g_2, \ldots, g_{n+1}) - c(g_1 g_2, g_3, \ldots, g_{n+1}) + \cdots \\ & + (-1)^j c(g_1, \ldots, g_j g_{j+1}, \ldots, g_{n+1}) + \cdots \\ & + (-1)^n c(g_1, \ldots, g_n g_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(g_1, \ldots, g_n).\end{aligned}$$

Un courant de de Rham C sur une variété V est entièrement caractérisé par la fonctionnelle multilinéaire suivante sur l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur V:

$$\tau(f^0, \ldots, f^n) = \langle C, f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge df^n \rangle.$$

L'égalité $d(fg) = (df)g + f\,dg$ montre que cette fonctionnelle vérifie $b\tau = 0$ où l'opérateur de cobord b est donné par

$(*)'$

$$(b\tau)(f^0,\ldots,f^{n+1}) = \tau(f^0f^1,\ldots,f^{n+1}) - \tau(f^0,f^1f^2,\ldots,f^{n+1}) + \cdots + (-1)^j\tau(f^0,\ldots,f^jf^{j+1},\ldots,f^{n+1}) + \cdots + (-1)^n\tau(f^0,\ldots,f^nf^{n+1}) + (-1)^{n+1}\tau(f^{n+1}f^0,\ldots,f^n).$$

De plus le courant C est un courant fermé au sens de de Rham si et seulement si la fonctionelle τ est cyclique, i.e., vérifie

$$\tau(f^1,\ldots,f^n,f^0) = (-1)^n\tau(f^0,\ldots,f^n).$$

Utilisons la ressemblance évidente entre $(*)$ et $(*)'$ pour associer à un n-cocycle $c \in Z^n(\Gamma,\mathbf{C})$ une fonctionnelle τ vérifiant $(*)'$ sur l'algèbre $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$. Comme τ est *multilinéaire* et $\mathbf{C}\Gamma$ est linéairement engendrée par Γ il suffit de définir $\tau(a^0,\ldots,a^n)$ lorsque les a^i sont des éléments g_i de Γ. On pose alors:

$$\tau(g^0,\ldots,g^n) = c(g^1,\ldots,g^n) \quad \text{si } g^0\ldots g^n = 1$$
$$\tau(g^0,\ldots,g^n) = 0 \quad \text{si } g^0\ldots g^n \neq 1.$$

On vérifie alors en utilisant $(*)$ que τ vérifie $(*)'$, et de plus que comme c provient de γ qui est antisymétrique, τ est *cyclique*, $\tau(a^1,\ldots,a^n,a^0) = (-1)^n\tau(a^0,a^1,\ldots,a^n)\forall a^i \in \mathfrak{a}$. Ainsi tout cocycle de groupe $c \in Z^n(\Gamma,\mathbf{C})$ définit sur l'algèbre du groupe $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$ un *n-cocycle cyclique* τ, et cette construction n'est plus dépendante de la notion troup unidimensionnelle de dérivation.

Mais revenons à l'espace X des feuilles d'un feuilletage (V,F) de codimension 1, transversalement orienté, et montrons comment construire un 1-cocycle, représentant la "classe fondamentale" $[X]$, sur l'algèbre du feuilletage. Si τ est un n-cocycle cyclique sur une algèbre $\mathfrak{a}$ et l'on remplace $\mathfrak{a}$ par l'algèbre des matrices $M_k(\mathfrak{a}) = B$, on obtient un cocycle cyclique τ' sur B en posant:

$$\tau'(\mu_0 \otimes a_0,\ldots,\mu_n \otimes a_n) = \operatorname{Trace}(\mu_0\ldots\mu_n)\tau(a_0,\ldots,a_n)$$

où les $\mu_i \in M_k(\mathbf{C})$ et $a_i \in \mathfrak{a}$. Plus généralement, si $\mathfrak{a}$ et B sont des algèbres Morita équivalentes les cocycles cycliques sur $\mathfrak{a}$ et B se correspondent de manière naturelle. Nous utiliserons ce principe pour remplacer l'algèbre du feuilletage par l'algèbre équivalente $\mathfrak{a}$ obtenue en prenant une sous-variété T de V transverse au feuilletage (Cf. Figure 3) telle que toute feuille rencontre T (on ne suppose T ni fermée ni connexe). L'espace X des feuilles du feuilletage est alors le quotient de T par la relation d'équivalence: $\mathfrak{R}x \sim y$ si et seulement si x et y sont sur la même feuille L de (V,F). En fait, dès que la feuille L a une holonomie non-triviale il faut être plus précis et donner une classe d'holonomie de chemin γ dans L, allant de x à y. On obtient ainsi un paramètre discret supplémentaire qui permet de remplacer la relation $\mathfrak{R}$ par une variété $\tilde{\mathfrak{R}}$ qui est un groupoïde différentiable. Toute fonction de classe

C^∞ à support compact $(a(\gamma), \gamma \in \tilde{\mathfrak{R}})$ définit un élément de l'algèbre $\mathfrak{a}$ et le produit est donné par:

$$(ab)(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} a(\gamma_1)b(\gamma_2).$$

Comme F est de codimension 1, la variété T est de dimension 1, de même que la variété $\tilde{\mathfrak{R}}$ qui est orientée.

La classe fondamentale de l'espace $X = V/F$ des feuilles est donnée par le 1-*cocycle cyclique* τ sur $\mathfrak{a}$:

$$\tau(a,b) = \int_{\tilde{\mathfrak{R}}} a(\gamma^{-1})\, db(\gamma).$$

Dans le terme de droite, db est la différentielle ordinaire de la fonction b sur la variété $\tilde{\mathfrak{R}}$, c'est donc une 1-forme sur $\tilde{\mathfrak{R}}$, de même que le produit $a(\gamma^{-1})\, db(\gamma)$ que l'on intègre sur la variété orientée $\tilde{\mathfrak{R}}$.

On vérifie directement que τ est un 1-cocycle cyclique sur $\mathfrak{a}$ ce qui permet de donner un sens à la classe fondamentale de X et de démontrer la formule $GV = i_H\dot{\tau}$, dont on déduit que si la classe de Godbillon-Vey est non-nulle l'algèbre de von Neumann du feuilletage est de type III. Ainsi pour un espace "quantique" comme l'espace X on dispose de l'analogue non-commutatif de la théorie de la mesure et de la théorie des courants de de Rham. Mais comme une classe de mesure (celle de Lebesgue) engendre une dynamique non-trivale δ, les relations entre les deux théories sont beaucoup plus intéressantes que dans le cas classique. Par exemple la non-nullité d'une classe telle celle de Godbillon-Vey impose une propriété qualitative (type III) de la classe de mesure.

4. Cohomologie cyclique et K-théorie des espaces quantiques. Pour utiliser la cohomologie cyclique pour un espace "quantique" X, il est crucial de disposer de l'accouplement entre cocycles cycliques et "fibrés vectoriels" sur X. Dans le cas d'un espace compact X ordinaire il y a équivalence entre la donnée d'un fibré vectoriel (complexe) E sur X et celle d'un module projectif de type fini $\mathscr{E}$ sur l'algèbre $A = C(X)$. La correspondance est obtenue en prenant pour $\mathscr{E}$ le module $C(X,E)$ sur $C(X)$ des sections continues de E. Or la notion de module projectif de type fini sur une algèbre A ne demande en rien que cette algèbre soit commutative. De plus, à isomorphisme près tout module projectif de type fini sur A est donné par un idempotent $e \in M_n(A)$ de l'algèbre des matrices sur A, dont la classe d'équivalence, au sens de Murray et von Neumann est uniquement déterminée par la classe d'isomorphisme du module. Ainsi la K-théorie de l'espace X s'obtient comme le groupe déduit du semi-groupe des classes d'équivalence d'idempotents $e \in M_n(A)$. La construction classique du caractère de Chern d'un fibré vectoriel s'adapte très simplement pour donner l'accouplement suivant entre cocycles cycliques (de dimension paire) et K-théorie:

$$\langle \tau, e \rangle = \tau(e, \ldots, e)$$

On démontre en effet que le nombre obtenu ne dépend que de la classe de l'idempotent e dans le groupe $K_0(A)$ et de plus que si $e(t)$ est une famille de classe C^1 d'idempotent de a, la valeur de $\langle \tau, e(t) \rangle$ ne dépend pas de t.

Dans le cas où X est une variété ordinaire et $\tau = \tau_c$ le cocycle cyclique sur l'algèbre $\mathfrak{a} = C^\infty(X)$ associé à un courant de de Rham C tel que $bC = 0$, le caractère de Chern d'un fibré vectoriel E sur X défini par un idempotent $e \in M_n(\mathfrak{a})$ est déterminé comme forme différentielle sur X par la connexion Grassmannienne, et l'accouplement ci-dessus est l'évaluation $\langle C, \operatorname{ch} E \rangle$ de C sur cette forme différentielle.

La construction de Chern Weil du caractère de Chern d'un fibré vectoriel E par connexion et courbure apparait ainsi comme un cas particulier de l'accouplement entre K-théorie et cohomologie cyclique, lequel se décrit également en termes de connexion et courbure (Cf. [**10**]). Comme la valeur $\langle \tau, e \rangle$ de cet accouplement ne dépend que de la classe de cohomologie de τ et de la classe de K-théorie, $[e] \in K_0(\mathfrak{a})$, il permet en particulier de détecter la non-trivialité d'une telle classe. Dans le cas d'une variété X on a $\mathfrak{a} = C^\infty(X)$ mais la K-théorie de l'algèbre $\mathfrak{a}$ ne dépend que de la topologie de X. En effet l'inclusion naturelle de $\mathfrak{a}$ dans la C^*-algèbre $A = C(X)$ définit un isomorphisme en K-théorie. L'égalité $K_0(\mathfrak{a}) \cong K_0(A)$ et l'accouplement ci-dessus permettent donc de définir des invariants *topologiques* de fibrés vectoriels sur X. L'utilisation de la structure différentiable de X pour obtenir des renseignements purement topologiques est un exemple typique des méthodes de la *topologie différentielle*. En général un espace quantique X tel que l'espace des feuilles d'un feuilletage ou le dual d'un groupe discret possède une structure suffisamment riche pour que l'on dispose non seulement de la C^*-algèbre $A =$ "$C(X)$" mais aussi d'une sous-algèbre dense $\mathfrak{a}$ de A qui joue le rôle de l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur X, ou tout au moins est contenue dans l'algèbre des fonctions de classe C^∞. Par exemple, si Γ est un groupe discret, la C^*-algèbre réduite $C^*_r(\Gamma)$ de Γ, (engendrée par la représentation régulière gauche de Γ dans $\ell^2(\Gamma)$) contient somme sous- algèbre dense $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$. Si Γ est commutatif de type fini les éléments de $\mathfrak{a}$ sont des fonctions analytiques réelles sur le tore dual de Γ.

La stratégie générale pour analyser la K-théorie et l'homologie d'un espace quantique X comprend les étapes suivantes:

(α) Calcul de la cohomologie cyclique $HC(\mathfrak{a})$
(β) Construction géométrique d'éléments de la K-théorie $K_0(A)$
(γ) Prolongement de l'accouplement $\langle \tau, [e] \rangle$ de $K_0(\mathfrak{a})$ à $K_0(A)$.

Une fois ces trois étapes réalisées on peut alors l'espace X comme un espace ordinaire, en particulier on peut utiliser le théorème de l'indice à la "Atiyah-Singer" pour les familles d'opérateurs elliptiques $(D_x)_{x \in X}$ paramétrées par X. Nous allons voir en effet que l'indice d'une telle famille est un élément de $K_0(A) =$ "$K^0(X)$" et ce n'est que dans ce groupe de K-théorie (qui est un

groupe abélien dénombrable) et non dans le groupe $K_0(\mathfrak{a})$, que se manifestent les propriétés d'invariance topologique ou d'annulation telles que:

(a) L'invariance par homotopie de l'indice de l'opérateur de signature.
(b) L'annulation de l'indice de l'opérateur de Dirac quand la courbure scalaire est > 0.

Il nous reste à décrire trois étapes (α), (β), (γ).

α. **Cohomologie cyclique** $HC(\mathfrak{a})$. Le cas des groupes discrets: $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$ était une motivation importante pour la cohomologie cyclique. Comme nous l'avons montré plus haut (Cf. [**10**]) tout cocycle de groupe donne naissance à un cocycle cyclique τ_c sur $\mathfrak{a}$.

Réciproquement D. Burghelea a calculé en général [**18**] la cohomologie cyclique de $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$. En particulier il en résulte que $H^*(B\Gamma, \mathbf{C})$, i.e., la cohomologie de Γ en est un facteur direct.

Passons au cas des feuilletages, le rôle de Γ est alors tenu par le graphe G du feuilletage [**48**] qui est une variété et un groupoïde différentiable. En particulier l'algèbre $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de convolution des fonctions C^∞ à support compact sur G. La cohomologie cyclique de $\mathfrak{a}$ est alors reliée à la cohomologie $H^*_\tau(BG, \mathbf{C})$ de l'espace classifiant BG de la catégorie topologique ou groupoïde G. Plutôt que de décrire la théorie générale (Cf. [**4**]) nous allons expliquer la signification de H^*_τ et la flèche de "localisation" de $HC(\mathfrak{a})$ vers H^*_τ avec des hypothèses simplificatrices.

En général de nombreux feuilletages différents correspondent au même espace quantique X comme espace de feuilles. On peut par exemple partir d'une variété feuilletée (V, F) et d'une transversale fermée T et effectuer de la chirurgie le long des feuilles L de (V, F) en chaque point de $L \cap T$. Cela modifie la variété V, les feuilles L mais laisse intact l'espace X des feuilles.

Le rôle de l'espace BG est le suivant: c'est l'espace total V d'un feuilletage (V, F) ayant X comme espace de feuilles mais dont chaque feuille L[1] est *contractile*. En général on ne peut pas toujours trouver un tel couple (V, F) de dimension finie mais nous ferons cette hypothèse pour simplifier la discussion. On a donc $BG = V$. Dans la notation $H^*_\tau(BG, \mathbf{C})$, τ désigne le fibré transverse au feuilletage, i.e., $\tau_x = T_x(V)/F_x \forall x \in V$. Ce fibré τ n'est pas nécessairement orienté ou orientable et $H^*_\tau(V, \mathbf{C})$ désigne la cohomologie tordue correspondante. Supposons pour simplifier que τ est orienté. On désigne alors par Ω^k le faisceau sur V des sections généralisées (i.e., de classe $C^{-\infty}$) du fibré $\Lambda^k \tau^*$ qui sont *constantes le long des feuilles*, i.e., dont la différentielle longitudinale est nulle. Le faisceau Ω^k joue (Cf. [**29**]) un rôle analogue au faisceau des formes différentielles holomorphes sur une variété complexe. En utilisant la différentiation transverse et la trivialité locale du feuilletage on obtient une résolution du faisceau constant de la forme $\mathbf{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \cdots \xrightarrow{d} \Omega^t \to 0^1$ où $t = \dim \tau$ est la dimension transverse.

[1] En fait le revêtement d'holonomie de chaque feuille.

La cohomologie de chacun des faisceaux Ω^k est en général non-triviale et se calcule (Cf. [**29**]) en résolvant chaque Ω^k par des formes différentielles longitudinales à valeurs dans $\Lambda^k \tau^*$. La suite spectrale correspondant à la résolution (*) est exactement adaptée à la description de la flèche de localisation:

$$HC(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\ell} H^*_\tau(V, \mathbf{C}).$$

Pour localiser un n-cocycle cyclique φ sur $\mathfrak{a}$ on commence par le restreindre aux sous-algèbres $\mathfrak{a}(U)$ de $\mathfrak{a}$ qui correspondent à la restriction du feuilletage F à un petit ouvert U. Comme le feuilletage est localement trivial la situation locale est facile à analyser et on obtient ainsi une section globale du faisceau Ω^{t-n} sur V. (Localement on obtient un courant transverse de dimension n mais en utilisant l'orientation de τ on le considère comme section généralisée de $\Lambda^{t-n}(\tau^*)$).

Si par exemple φ est la trace sur $\mathfrak{a}$ associée à une mesure tranverse invariante par holonomie, φ est un o-cocycle cyclique et li lui correspond une section globale du faisceau Ω^t sur V qui n'est autre que la mesure transverse. Si φ est le cycle fondamental de l'espace V/F, dont nous avons donné un exemple plus haut dans le cas de codimension un, φ est un cocycle cyclique de dimension t sur $\mathfrak{a}$ et la section globale correspondante de Ω^0 sur V est la fonction constante égale à 1.

En affinant la construction ci-dessus on en déduit une surjection ℓ de la cohomologie cyclique $HC(\mathfrak{a})$ vers la cohomologie $H^*_\tau(V, \mathbf{C})$ et l'on démontre que c'est un isomorphisme pour la cohomologie cyclique périodique $H(\mathfrak{a})$. L'originalité d'espaces quantiques comme $X = V/F$ se manifeste en particulier par l'existence de cycles non-triviaux sur X dont la dimension excède la dimension apparente t de X. Par cycle sur X nous entendons un cocycle cyclique $\varphi \in HC^n(\mathfrak{a})$, l'homologie entre deux cycles étant donnée par l'image de l'opérateur B (Cf. [**10**]) et la notion de dimension correspondant à la filtration de la cohomologie cyclique périodique par l'image des $HC^n(\mathfrak{a})$.

Nous renvoyons à [**4**], [**20**], et [**18**] pour plus de détails.

β. ***K*-théorie** $K(A)$. Dans le cas des groupes discrets, $A = C^*_r(\Gamma)$, la construction d'éléments non-triviaux de la K-théorie de la C^*-algèbre A a pour origine les travaux de Mishchenko et Kasparov sur la conjecture des hautes signatures de Novikov [**34**], [**36**]. Cela permet de définir un élément $\mathrm{Ind}_\Gamma(D) \in K_0(A)$ chaque fois que l'on part d'une variété compacte M, d'un opérateur elliptique D sur M et d'un revêtement Galoisien de M de groupe Γ. Cette construction se retrouve sous diverses formes dans [**4**], [**20**], et [**19**], mais en l'affinant suffisamment [**19**] on montre que cet *indice* Γ *équivariant* du relevé $\widetilde{D}$ de D sur le revêtement $\widetilde{M}$ définit en fait un élément du groupe: $K_0(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{R})$ où $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$ et $\mathfrak{R}$ est une algèbre universelle, celle des matrices infinies $(a_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}$ de nombres complexes, qui sont à décroissance rapide. On obtient ainsi en général une flèche μ de la K-homologie $K_*(B\Gamma)$ vers la K-théorie de la C^*-algèbre $C^*_r(\Gamma)$. La conjecture de Novikov forte énonce l'injectivité

rationnelle de μ et a été démontrée par Mischchenko et Kasparov dans de nombreux cas par les méthodes de la K-théorie bivariante et l'accouplement avec la K-homologie de $C_r^*(\Gamma)$ [37], [34].

Pour appliquer à ce problème les méthodes de topologie différentielle il est nécessaire de résoudre le problème (3) ci-dessus, mais le théorème de l'indice suivant montre bien que la cohomologie cyclique de $\mathfrak{a}$ est suffisamment riche pour séparer les éléments de $K_*(B\Gamma)$. Ce théorème [19] calcule l'accouplement $\langle \tau_c, \mathrm{Ind}_\Gamma(D)\rangle$ entre le cocycle cyclique sur $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{R}$ associé à un cocycle de groupe $c \in Z^{2q}(B\Gamma, \mathbf{C})$ et l'indice équivariant d'un opérateur elliptique D sur M. Au recouvrement Γ-équivariant $\widetilde{M}$ de M correspond une application classifiante: $\Psi\colon M \to B\Gamma$ et la formule de l'indice est la suivante:

$$\langle \tau_c, \mathrm{Ind}_\Gamma(D)\rangle = \frac{1}{(2\pi)^q}\frac{q!}{(2q)!}\langle \mathrm{ch}\, D\, T\, dTM\Psi^*(c), [M]\rangle .$$

Les seules nouveautés dans le terme de droite par rapport au théorème d'Atiyah-Singer sont la constante numérique $\frac{1}{(2\pi)^q}q!(2q)!$ et la présence de la classe de cohomologie $\Psi^*(c)$. En affinant quelque peu (Cf. [4]) la construction de μ pour le cas où le groupe Γ a de la torsion on peut raisonnablement penser que cette flèche est un isomorphisme (Cf. [4]). Ce résultat aurait de nombreuses implications et la recherche dans ce sens est très active.

Passons au cas des feuilletages, i.e., des espaces quantiques $X = V/F$. On construit à nouveau une flèche μ de la K-homologie tordue $K_{*,\tau}(BG)$ vers la K-théorie de la C^*-algèbre $A = C^*(V, F)$ du feuilletage.

Cela permet d'associer à toute famille d'opérateurs elliptiques $(D_x)_{x\in X}$ un indice, $\mathrm{Ind}(D) \in K_0(A)$. L'exemple typique d'une telle famille est obtenu en restreignant à chaque feuille L du feuilletage (V, F)[2] un opérateur différentiel sur V qui est *longitudinalement elliptique* (Cf. [20]). Si les feuilles de (V, F) sont contractiles on a $BG = V$ et en supposant que le fibré F est K-orienté on a alors:

$$K_{*,\tau}(BG) = K_{*,\tau}(V) = K^*(V), \quad \text{la } K\text{-théorie de } V .$$

La flèche μ associe alors à tout fibré E sur V, $[E] \in K^*(V)$ l'indice $\mathrm{Ind}(D) \in K_0(A)$ de la famille $(\mathscr{D}_E)_{L\in V/F}$ des opérateurs de Dirac longitudinaux à coefficient dans le fibré E. (La K-orientation de F est utilisée pour définir l'opérateur de Dirac).

Le premier exemple non-trivial de feuilletage est le feuilletage de Kronecker: $dy = \theta\, dx$ du tore $\mathbf{T}^2$. La C^*-algèbre correspondante A est Morita équivalente à la C^*-algèbre A_θ [46] engendrée par deux unitaires u, v tels que $uv = \exp(2\pi i\theta)vu$ dès que θ est irrationnel. (Si θ est rationnel A est Morita équivalente à $C(S^1)$). La K-théorie de la C^*-algèbre A_θ se calcule grâce au résultat remarquable de Pimsner et Voiculescu [43] sur les produits croisés. En particulier le groupe $K_0(A_\theta)$ est égal à $\mathbf{Z}^2$ ordonné par le demi

[2] Plus précisément au revêtement d'holonomie $\widetilde{L}$ de L.

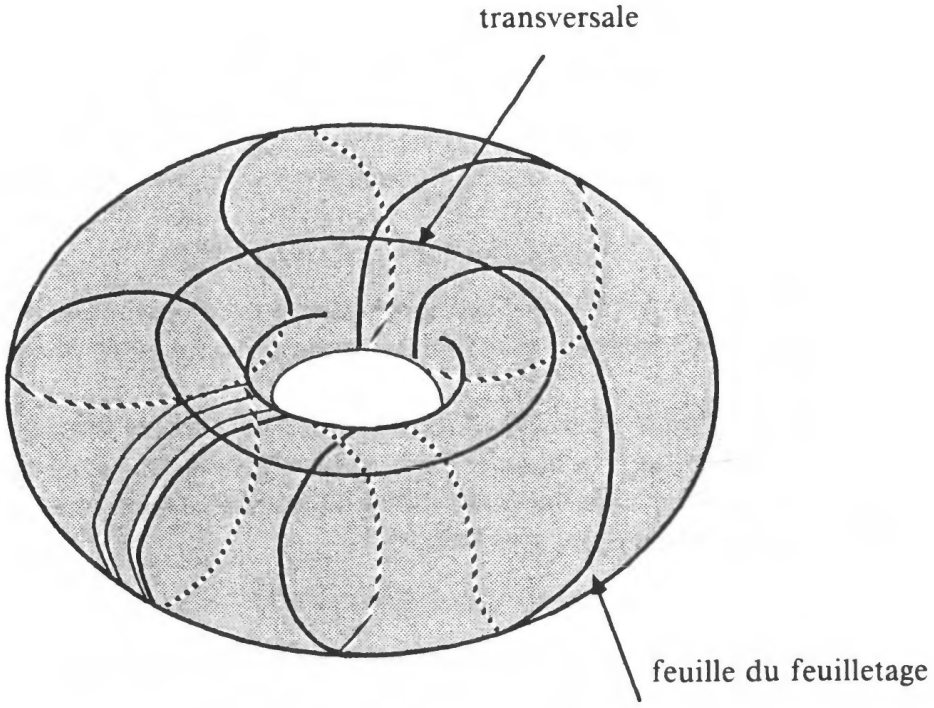


FIGURE 3. Feuilletage du tore.

plan $\{(n,m); n+m\theta \geqq 0\}$. Ceci permet de vérifier que la flèche μ est un isomorphisme, ce qui est un résultat général pour les feuilletages de dimension 1 (Cf. **[15]**). En fait il est possible dans cet exemple de décrire de manière simple et géométrique les éléments de $K_0(A)$ à partir des *transversales fermées* au feuilletage (V,F).

On démontre qu'à toute transversale T au feuilletage (V,F) correspond un homomorphisme injectif d'une C^*-algèbre Morita équivalente à $C_0(T)$ dans $C^*(V,F)$. Il en résulte que si T est fermée, l'élément $1 \in C(T)$ définit un idempotent, unique à équivalence près, $e(T) \in C^*(V,F)$. Ainsi, dans le cas du feuilletage de Kronecker avec $\theta \notin \mathscr{Q}$, chaque géodésique fermée du tore plat $\mathbf{T}^2$, donnée par $T_{n,m} = \{(nt,mt), t \in S^1\}$ (n et m premiers entre eux) définit une transversale et donc un idempotent $e_{n,m} = e(T_{n,m})$. Ce idempotents engendrent la partie positive de $K_0(A)$.

Cette construction, à partir de transversales, d'éléments, de $K_0(A)$ où $A = C^*(V,F)$ permet de formuler le théorème de l'indice directement au niveau de la K-théorie **[20]**. Pour formuler ce théorème utilisons la notation $X = V/F$ pour l'espace des feuilles et $K^0(X) = K_0(A)$, $A = C^*(V,F)$ pour la K-théorie de cet espace. Etant donnée une famille d'opérateurs elliptiques paramétrée par X, $(D_x)_{x\in X}$ telle que la famille des restrictions $(D_L)_{L\in X}$ aux feuilles d'un opérateur longitudinalement elliptique, on a défini son *indice analytique* $\mathrm{Ind}(D) \in K^0(X)$. Il reste à définir *l'indice topologique* d'une telle famille en utilisant le *symbole principal* (longitudinal) des opérateurs D_L. Or presque par définition ce symbole définit un élément de la K-théorie à

support compact $K^0(F)$ où F désigne l'espace total sur V du fibré tangent aux feuilles. On utilise alors un plongement de la variété V dans $\mathbf{R}^{2N}$ pour faire de la variété ouverte F une transversale au feuilletage de $V \times \mathbf{R}^{2N}$ par $F \times \{0\}$ dont l'espace des feuilles est $Y = X \times \mathbf{R}^{2N}$. La construction ci-dessus fournit une application i de $K^0(F)$ dans $K^0(Y)$, l'indice topologique de D est alors:

$$\mathrm{Ind}_t(D) = \beta^{-1}(i\sigma(D)) \in K^0(X)$$

où $\beta\colon K^0(X) \simeq K^0(Y)$ est l'isomorphisme de périodicité de Bott qui reste vrai pour les C^*-algèbres et établit un isomorphisme entre $K_0(A)$ et $K_0(A \otimes C_0(\mathbb{R}^{2N}))$.

On peut déduire de ce théorème l'accouplement entre l'image de la flèche μ et la cohomologie cyclique $HC(\mathfrak{a})$. Dans le cas le plus simple, i.e., quand $\varphi \in HC^0(\mathfrak{a})$ est la trace sur $\mathfrak{a}$ associée à une mesure transverse on retrouve le théorème de l'indice cité plus haut:

$$\mathrm{Ind}_C(D_L)_{L \in X} = \langle \mathrm{ch}\, \sigma_D T\, d(T^*M), C \rangle .$$

Mais le cas général est beaucoup plus riche. Par exemple, si le feuilletage (V, F) est de codimension 1, orienté transversalement et l'on prend pour φ le 2-cocycle $\varphi = i_H \dot{\tau}$ que nous avons discuté plus haut à propos de l'invariant de Godbillon-Vey, on a:

$$\langle \varphi, \mu(\alpha) \rangle = \langle GV, \mathrm{ch}(\alpha) \rangle$$

pour toute classe de K-homologie $\alpha \in K_*(BG)$, où GV désigne la classe de Godbillon-Vey qui est une classe de cohomologie de dimension 3 sur BG.

γ. **Prolongement de l'accouplement de $K_0(\mathfrak{a})$ à $K_0(A)$.** Pour pouvoir appliquer la méthode de la topologie différentielle encore faut-il démontrer que l'accouplement entre un cocycle cyclique $\varphi \in HC(\mathfrak{a})$ et le groupe de K-théorie $K_0(\mathfrak{a})$ se prolonge au groupe $K_0(A)$ qui lui ne dépend que de la *topologie* de l'espace quantique X.

La stratégie générale consiste à prolonger le cocycle φ à une algèbre intermédiaire entre $\mathfrak{a}$ et A: $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \subset A$ pour laquelle l'injection $i\colon \mathfrak{a}' \to A$ est un isomorphisme en K-théorie. Ceci est le cas dès que $\mathfrak{a}'$ est *stable par calcul fonctionnel holomorphe*, i.e.,:

Pour toute fonction holomorphe sur le spectre d'un élément $a \in \mathfrak{a}'$, $\mathrm{Sp}_A(a)$, on a $f(a) \in \mathfrak{a}'$.

Il n'est pas nécessaire que le cocycle φ soit continue par rapport à la norme de C^*-algèbre (cela n'arrive jamais pour les cocycles intéressants) pour qu'il se prolonge à fermeture $\mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{a}$ par calcul fonctionnel holomorphe. Il suffit pour cela que φ vérifie certaines inégalités [**18**] qui sont par exemple automatiques pour tout 1-cocycle cyclique $\varphi(a^0, a^1)$ qui est continu en a^0 (pour la norme de A) pour tout a^1 fixé, $a^1 \in \mathfrak{a}$. Avec pas mal de travail supplémentaire (Cf. [**18**]) on en déduit que la propriété de prolongement a lieu, dans le cas des feuilletages, pour tous les cocycles cycliques qui sont *purement transverses*,

i.e., qui correspondent à des sections globales fermées des faisceaux Ω^{t-n} définis plus haut. Cela inclus bien sur le cas des mesures transverses mais aussi celui de la classe fondamentale transverse $[V/F] = [X]$. Un autre cas particulier important de ce résultat est celui des classes de Gelfand-Fuchs [27]. En le combinant avec l'invariance par homotopie de l'indice de l'opérateur de signature on en déduit que ces classes de cohomologie $\omega \in H^*(B\,\mathrm{Diff})$ verifient la conjecture de Novikov, i.e., que l'égalité

$$\langle L_M \Psi^*(\omega), [M] \rangle$$

définit un invariant d'homotopie de tout fibré plat sur M de groupe structural le groupe Diff muni de la topologie discrète. (Ici M est compacte orientée et Ψ: $M \to B\,\mathrm{Diff}$ est l'application classifiante du fibré).

Pour les cocycles cycliques φ, sur l'algèbre d'un feuilletage, qui ne sont pas purement transverses la difficulté est essentiellement la même que pour les groupes discrets, cas que nous discutons maintenant.

Soient donc Γ un groupe discret et $\mathfrak{a} = \mathbf{C}\Gamma$ l'algèbre du groupe, $A = C_r^*(\Gamma)$ son adhérence normique dans l'algèbre des opérateurs dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$, où Γ agit par la représentation régulière gauche. Supposons Γ de type fini et soit $F \subset \Gamma$ un système fini de générateurs, $g \to |g|$ la longueur des mots correspondante. Considérons l'opérateur D dans $l^2(\Gamma)$, de multiplication par $\ell(g) = |g|$, i.e., dans la base orthonormale $(\varepsilon_g)_{g\in\Gamma}$ canonique de $\ell^2(\Gamma)$ on a:

$$D\varepsilon_g = \ell(g)\varepsilon_g\,.$$

L'application $a \in \mathfrak{a} \xrightarrow{\delta} [D, a] \in \mathscr{L}(\ell^2)$ définit une dérivation de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{L}(\ell^2)$, l'algèbre des opérateurs bornés dans l'espace de Hilbert ℓ^2 et on définit l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\Gamma)$ comme la sous-algèbre de A qui est l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathrm{Dom}\,\delta^n$ des domaines des puissances de la dérivation δ. (Il est possible d'itérer δ en itérant dans $\mathscr{L}(\ell^2)$ l'opération $x \to [D, x]$).

Il n'est pas difficile de montrer que l'algèbre $\mathscr{S}(\Gamma)$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $A = C_r^*(\Gamma)$ de sorte que:

$$K_0(\mathscr{S}(\Gamma)) = K_0(A)\,.$$

Enfin, grâce aux inégalités de U. Haagerup, P. Jolissaint, et P. de la Harpe, il est possible de prolonger le cocycle cyclique τ_c associé à un cocycle de groupe *borné* c, à toute l'algèbre $\mathscr{S}(\Gamma)$, dès que le groupe Γ est un *groupe hyperbolique*. Cela permet en particulier de démontrer la conjecture de Novikov pour ces groupes très généraux [**19**] dont la définition est implicite, et qui sont génériques parmi les groupes discrets de présentation finie.

Il existe un autre résultat remarquable (dû à J. B. Bost [**6**]) qui permet de démontrer l'égalité $K_0(\mathfrak{a}') = K_0(A)$ pour des sous-algèbres $\mathfrak{a}'$ qui ne sont plus stables par calcul fonctionnel holomorphe dans A. Il s'agit d'une adaptation au cas non-commutatif (aux espaces quantiques) du principe d'Oka

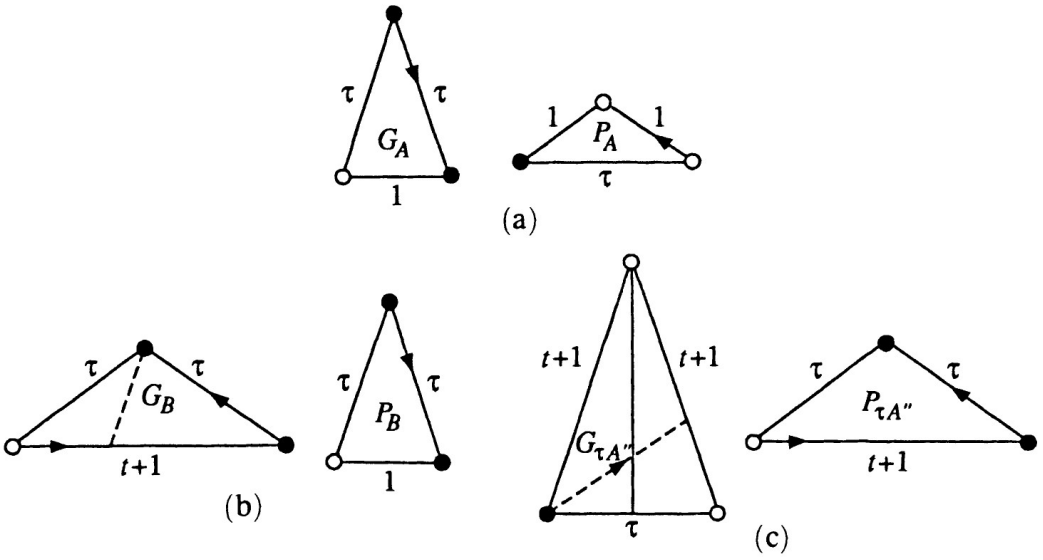


FIGURE 4

en géométrie analytique complexe. Ce résultat permet de résoudre complètement le problème de prolongement (3) pour les feuilletages de dimension 1 et pour les groupes discrets résolubles.

Pour terminer, signalons qu'au prix du passage à des cocycles de dimension infinie (où une série $\sum_n \varphi_{2n}$ remplace un cocycle φ_{2m}) on peut appliquer directement la cohomologie cyclique aux C^*-algèbres (Cf. [17]).

Appendice: Les pavages de Penrose. Dans cette section nous rappelons pour la commodité du lecteur des résultats classiques (Cf. [28]) sur les pavages quasi périodiques du plan de R. Penrose.

On considère d'abord deux types G_A et P_A de tuiles triangulaires représentées dans la Figure 4. Les sommets sont colorés: blanc ou noir, et l'arête entre deux sommets d'une même couleur est orientée. La tuile G_A a deux sommets noirs et un blanc, la tuile P_A a deux sommets blancs et un noir.

On appelle pavage du plan de type A, toute triangulation du plan par des triangles isométriques à G_A ou P_A, de telle sorte que les couleurs des sommets communs soient les mêmes ainsi que les orientations des arêtes communes.

Nous renvoyons à [28] pour la démonstration de l'existence de tels pavages du plan (Cf. Figure 2). Nous dirons que deux pavages T et T' sont identiques s'ils se déduisent l'un de l'autre par une isométrie du plan Euclidien.

Soit X l'ensemble des pavages du plan de type A (à isométrie près), le résultat essentiel que nous utiliserons est la possibilité de paramétrer X par l'ensemble K des suites infinies $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \in \{0, 1\}$ de 0 et de 1 telles que $a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$, et ce de telle sorte que tout pavage T de type A provienne d'une suite: $T = T(a)$ et que deux suites a et b donnent le même pavage si et seulement s'il existe N tel que $a_n = b_n$ pour tout $n \geqq N$. Comme il s'agit d'un point crucial pour la suite nous allons expliciter la correspondance $a \to T(a)$

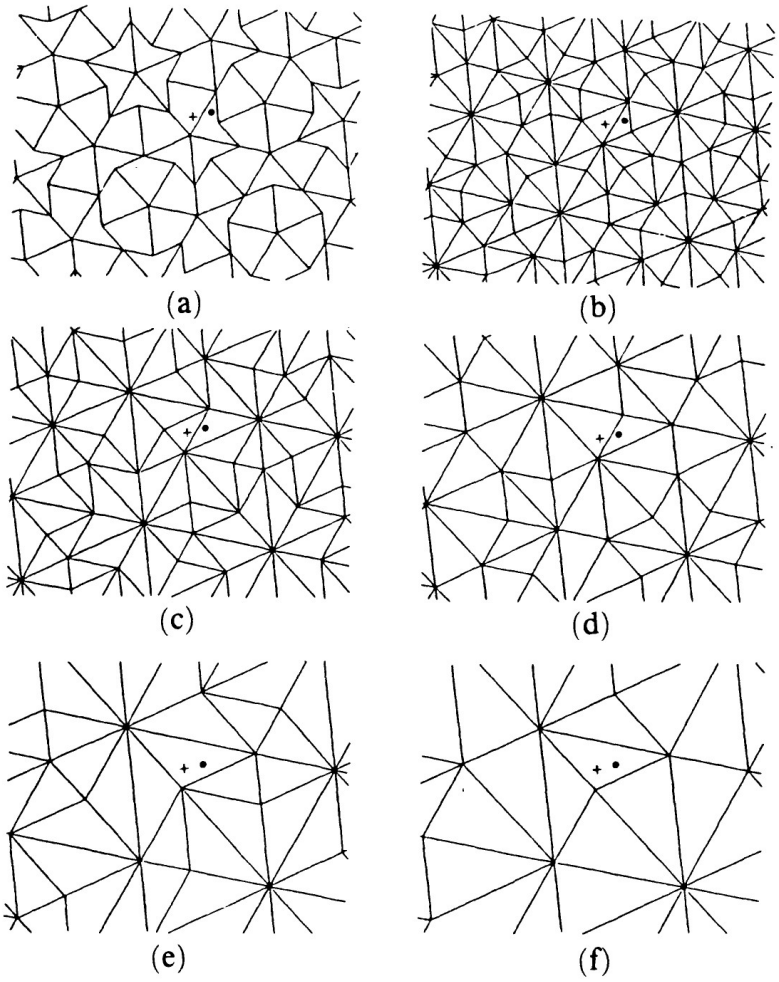


FIGURE 5

(Cf. [**28**, p. 586]). Si T est un pavage de type A et si l'on efface dans la triangulation T toutes arêtes courtes qui joignent deux sommets de couleurs différentes (Cf. Figure 5), on obtient une nouvelle triangulation T_1 du plan dont tous les triangles sont isométriques à l'un des deux triangles G_B, P_B de la figure. On obtient ainsi un pavage du plan de type B, c'est-à-dire une triangulation du plan par les triangles isométriques à G_B ou P_B de telle sorte que les couleurs des sommets communs soient les mêmes ainsi que les orientations des arêtes communes. Si l'on efface dans cette triangulation T_2 toutes les arêtes courtes qui joignent deux sommets de mêmes couleurs on obtient une nouvelle triangulation T_3 dont tous les triangles sont isométriques à l'un des triangles $G_{\tau A'}$, $P_{\tau A'}$ de la Figure 4. En itérant ce procédé on obtient donc une suite T_n de triangulations du plan. A chacune d'entre elle correspondent des triangles G_n et P_n.

Etant donné un pavage T de type A et un triangle α de la triangulation T (Cf. Figure 5) on lui associe la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où a_n vaut 0 ou 1 selon que

le triangle de T_n qui contient α est grand (i.e., isométrique à G_n) ou petit. Notons $i(T,\alpha)$ la suite ainsi obtenue.

Désignons alors par K l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} a_n \in \{0,1\}$, telles que $a_n = 1 \Rightarrow a_{n+1} = 0$. Il est clair que toute suite de la forme $i(T,\alpha)$ appartient à K car le triangle P_n n'est pas utilisé pour construire $P_{n+1} = G_n$. Réciproquement (Cf. [**28**, p. 568]) on démontre que tout élément a de K est de la forme $i(T,\alpha)$ pour un pavage de type A et un α convenables.

Deux triangles α, β d'un même pavage T se retrouvent pour n assez grand dans le même triangle de T_n. Il en résulte que les suites $a = i(T,\alpha)$ et $b = i(T,\beta)$ vérifient:

$$(*) \qquad a_m = b_m \quad \forall m \geqq n\,.$$

Réciproquement (Cf. [**28**, p. 568]), on d'émontre que si $a = i(T,\alpha)$ et $b \in K$ vérifient $(*)$ il existe un triangle β de T tel que $b = i(T,\beta)$.

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble X des pavages de Penrose et le quotient $K/\mathfrak{R}$ de l'ensemble K par la relation d'equivalence $\mathfrak{R}$ définie par la relation $(*)$ (Cf. [**28**, p. 568]).

Bibliographie

1. M. F. Atiyah, *K-Theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1967.
2. M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators* I, Ann. of Math. **87** (1968), 484–530.
3. ——, *The index of elliptic operators* IV, Ann. of Math. **93** (1971), 119–138.
4. P. Baum and A. Connes, *Geometric K-theory for Lie groups and foliations*, preprint Institute des Hautes Études Scientifiques, 1982.
5. P. Baum and R. Douglas, "K-homology and index theory," in *Operator algebras and applications* (R. Kadison, Ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 38, part I, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 117–173.
6. J. B. Bost, *Principe d'Oka et K-théorie des algèbres de Banach non-commutatives*, A paraître dans Inventiones Math.
7. O. Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 195–234.
8. D. Burghelea, *The cyclic cohomology of the group rings*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), 354–365.
9. P. Cartier, *Homologie cyclique*, Exposé 621, Séminaire Bourbaki, Février 1984.
10. A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, part I, *The Chern character in K-homology*, part II, *de Rham homology and noncommutative algebra*, preprint Institute des hautes études scientifiques (1983), Publ. Math. **62** (1986), 44–144.
11. ——, *C^*-algèbres et géométrie différentielle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **290** (1980), 599–604.
12. ——, "Sur la théorie non-commutative de l'intégration," in *Algèbres d'opérateurs* (P. de la Harpe, Ed.), Lecture Notes in Math., vol. 725, Springer-Verlag, Berlin and New York,
13. ——, *The von Neumann algebra of a foliation*, Lecture Notes in Physics, vol. 80, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978, pp. 145–151.
14. ——, *Feuilletages et algèbres d'opérateurs*, Séminaire Bourbaki, Février 1980, 551–01.
15. ——, *An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^*-algebra by an action of* **R** Adv. in Math. **39** (1981), 31–55.

16. ——, "A survey of foliations and operator algebras," in *Operator algebras and applications* (R. Kadison, Ed.), Proc. Symp. Pure Math., vol. 38, part I, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, pp. 521–628.
17. ——, *Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of θ-summable Fredholm modules*, *K* theory **1** (1988), 519–548.
18. ——, "Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation," in *geometric methods in operator algebras* (H. Araki and E. G. Effros, Eds), Pitman Research Notes in Mathematics Series, **123**, Longman Scientific & Technical and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986, pp. 52–144.
19. A. Connes and M. H. Moscovici, *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups*, To appear in Topology.
20. A. Connes and G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 1139–1183.
21. A. Connes and M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type* III, Tohoku Math. J., vol. 29, no. 4 (1977), pp. 473–575.
22. J. Cuntz and W. Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), 251–268.
23. E. G. Effros, D. E. Handelman and C. -L. Shen, *Dimension groups and their affine representations*, Amer. J. Math. **102** (1980), 385–407.
24. G. A. Elliott, *On totally ordered groups and K_0*, Ring Theory (Proc. Waterloo, 1987), Lecture Notes in Math., vol. 734, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979, pp. 1–34.
25. ——, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras*, J. Algebra **38** (1976), 29–44.
26. H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1981.
27. I. Gelfand and D. Fuchs, *The cohomology of the Lie algebra of formal vector fields*, Izv. Ann. SSSR **34** (1970), pp. 327–342.
28. B. Grünbaum and G. C. Shepard, *Tilings and patterns*, Freeman and Company, New York, 1987.
29. A. Haefliger, *Differentiable cohomology*. Cours donné au C.I.M.E. (1976).
30. D. Handelman, "Positive matrices and dimensions groups affiliated to topological Markov chains," in *Operator algebras and applications* (R. Kadison, Ed.), Proc. Pure Sympos. Math., vol. 38, part I, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1982, pp. 191–194.
31. S. Hurder, *Secondary classes and the von Neumann algebra of a foliation*, preprint MSRI Berkeley (1983).
32. V. Jones, *Index of subfactors*, Invent. Math. **72** (1983), 1–25.
33. R. V. Kadison, *Irreducible operator algebras*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43** (1957), 273–276.
34. G. G. Kasparov, *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Invent. Math. **91** (1988), 147–201.
35. W. Krieger, *On ergodic flows and the isomorphism of factors*, Math. Ann. **223** (1976), 19–70.
36. A. S. Mishchenko, *Homotopy invariants of non simply connected manifolds, Rational invariants* I. Izv. Akad. Nauk. SSSR **34** (1970) no. 3, 501–514.
37. ——, *C^*-algebras and K-theory*, Algebraic Topology (Proc. Aarhus, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 763, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1979.
38. F. Murray and J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. Math. **37** (1936), 116–229.
39. ——, *On rings of operators* II, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 208–248.
40. ——, *On rings of operators* IV, Ann. Math. **44** (1943), 716–808.
41. J. von Neumann, *On rings of operators* III, Ann. Math. **41** (1940), 94–161.
42. G. K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.
43. M. Pimsner and D. Voiculescu, *Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C^*-algebras*, J. Operator Theory **4** (1980), 93–118.
44. J. Renault, *A groupoid approach to C^*-algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 793, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.

45. M. A. Rieffel, *Morita equivalence for C^*-algebras and W^*-algebras*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974), 51–96.
46. ——, *C^*-algebras associated with irrational rotations*, Pacific J. Math. **93** (1981), pp. 415–429.
47. J. Roe, *An index theorem for open manifolds* I, J. Diff. Geometry **27** (1988), 87–113; II, J. Diff. Geometry **27** (1988), 115–136.
48. E. Winkelnkemper, *The graph of a foliation* (preprint).

INSTITUTE DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES, FRANCE