Sur certains espaces de fonctions holomorphes. II.[1]

Par *Alexandre Grothendieck*, Nancy.

---

§ 7. Etude topologique des espaces $H(O, E)$.

1. Interprétation de certains théorèmes des paragraphes précedents en termes de produits tensoriels topologiques, et généralisations. Pour toute $\varphi \in P(\Omega_1)$, et $a \in E$, posons

$$(10) \qquad \varphi \otimes a(z) = \varphi(z)\, a.$$

Cela définit une application bilinéaire de $P(\Omega_1) \times E$ dans $P(\Omega_1, E)$, et on vérifie immédiatement que cette application est continue. Par suite, toute forme linéaire continue u sur $P(\Omega_1, E)$ définit une forme bilinéaire continue $\tilde{u}$ sur $P(\Omega_1) \times E$ par la formule

$$(11) \qquad \tilde{u}(\varphi, a) = u(\varphi \otimes a).$$

Proposition 6. *L'application linéaire naturelle $u \to \tilde{u}$ du dual de $P(\Omega_1, E)$ dans l'espace $\mathfrak{B}(P(\Omega_1) \times E)$ des formes bilinéaires continues sur $P(\Omega_1) \times E$, définie par la formule* (11), *est une application biunivoque sur. Aux parties équicontinues du dual de $P(\Omega_1, E)$ correspondent les parties équicontinues des $\mathfrak{B}(P(\Omega_1) \times E)$.*

En effet, un élément du dual de $P(\Omega_1, E)$ s'identifie, par le théorème 2 bis, à une $g \in P(\Omega_2, E')$ ayant localement une image équicontinue; et une forme bilinéaire bicontinue sur $P(\Omega_1) \times E$, ou, ce qui revient au même, une application linéaire de $P(\Omega_1)$ dans E' appliquant un voisinage de l'origine en une partie équicontinue de E', s'identifie (par le théorème 3 et la remarque 1 qui le suit) à une $\bar{h} \in P(\Omega_2, E')$ ayant localement une image équicontinue. Or on vérifie immédiatement qu'avec ces identifications, l'application $u \to \tilde{u}$ définie par (11) est l'identité. Par ailleurs, l'application des critères de la proposition 2 bis du § 4 et de la remarque 2 suivant le théorème 3, montre que les parties équicontinues de $P(\Omega_1, E)'$ et de $\mathfrak{B}(P(\Omega_1) \times E)$ sont les mêmes (noter qu'une partie équicontinue de ce dernier espace revient à un ensemble d'applications linéaires de $P(\Omega_1)$ dans E' qui appliquent un même voisinage de l'origine en une partie équicontinue fixe de E').

Corollaire. *L'ensemble des $\varphi \otimes a$ ($\varphi \in P(\Omega_1)$, $a \in E$) est total dans $P(\Omega_1, E)$.*

Nous exprimerons la proposition 6 en disant que $P(\Omega_1, E)$ est un *produit tensoriel topologique* des espaces $P(\Omega_1)$ et E relativement à l'application bilinéaire $(\varphi, a) \to \varphi \otimes a$. De façon générale, si A, B, C sont trois espaces localement convexes, $(a, b) \to \beta(a, b)$ une application bilinéaire continue de $A \times B$ dans C, on a une application linéaire naturelle $u \to \tilde{u}$ du dual C' de C dans l'espace des formes bilinéaires continues sur $A \times B$, par la formule $\tilde{u}(a, b) = u(\beta(a, b))$. Nous dirons que C est un produit tensoriel topologique de A et B pour l'application β, si $u \to \tilde{u}$ est application *biunivoque sur*, et si aux parties équicontinues de C' correspondent les ensembles équicontinus de formes bilinéaires. Si d'ailleurs on suppose que C est engendré vectoriellement par les éléments de la forme

---

[1]) La première partie a été publiée dans tome 192 de ce journal.

$\beta(a, b)$, ou si on suppose que C est complet, alors le produit tensoriel topologique est essentiellement unique, dans un sens évident à préciser. Il n'est pas difficile de se convaincre d'ailleurs que si A et B sont donnés arbitrairement, un produit tensoriel topologique existe toujours: on prendra le produit tensoriel *algébrique* ordinaire (c. f. [1]) qu' on munit de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de l'espace $\mathfrak{B}(A \times B)$ des formes bilinéaires continues sur $A \times B$ (cet espace étant en effet en dualité naturelle avec $A \times B$). En complétant $A \otimes B$ pour cette topologie, on obtient d'ailleurs un produit tensoriel complet, noté $\overline{A \otimes B}$.

L'intérêt de la considération d'un produit tensoriel topologique C pour deux espaces A et B tient en premier lieu au fait suivant facile à démontrer (qui *caractérise* le produit tensoriel topologique si on le suppose complet en plus): Les applications bilinéaires continues de $A \times B$ dans un espace localement convexe complet H correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues du produit tensoriel topologique C dans H, par la formule $\tilde{u}(a, b) = u(a \otimes b)$ (où nous avons remplacé $\beta(a, b)$ par la notation $a \otimes b$). Il tient en second lieu au fait que l'on a sous certains hypothèses (notamment si A et B sont des espaces $(\mathfrak{F})$), des théorèmes généraux non triviaux dont l'application dans certains cas particuliers peut être utile. Ainsi, un théorème général relatif aux produits tensoriels topologiques d'espaces $(\mathfrak{F})$, que je ne démontrerai pas ici, permet d'énoncer le corollaire suivant de la proposition 6, qui nous sera utile par la suite:

Proposition 7. *Soit E un espace $(\mathfrak{F})$, O une partie ouverte non vide de Ω distincte de Ω. Alors toute $f \in P(O, E)$ est de la forme*

$$f = \Sigma\, \lambda_i\, \varphi_i \otimes a_i \tag{12}$$

où $(\varphi_i)_i$, $(a_i)_i$ sont des suites tendant vers 0 dans $P(O)$ et E respectivement, et $(\lambda_i)_i$ une suite de nombres positifs avec $\Sigma\, \lambda_i \leqq 1$.

Corollaire. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors l'application linéaire naturelle de $P(O, E)$ dans $P(O, E/F)$ est une application sur.*

Nous allons donner maintenant un autre corollaire de la proposition 6, impliquant une propriété topologique remarquable des espaces $P(O)$. Soient d'abord A et B deux espaces localement convexes complets. Alors on a un isomorphisme algébrique bien connu $u \to \tilde{u}$ de leur produit tensoriel algébrique $A \otimes B$ dans l'espace des applications linéaires de rang fini du dual algébrique B^* de B dans A. D'ailleurs, ici $\tilde{u}$ sera application faiblement continue (car somme d'applications $\widetilde{a \otimes b}$ qui sont évidemment faiblement continues), donc déterminée déjà par sa valeur sur le sous-espace faiblement dense B' de B^*, de sorte qu'on a en fait un isomorphisme algébrique canonique de $A \otimes B$ dans l'espace des applications linéaires faiblement continues de B' dans A — espace que nous désignons par $\mathfrak{L}(B', A)$. — On vérifie de plus trivialement que quand on munit $\mathfrak{L}(B', A)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de B', et $A \otimes B$ de sa topologie de produit tensoriel topologique définie plus haut, cette application linéaire est continue. D'ailleurs, il est facile de voir que $\mathfrak{L}_e(B', A)$ (cette notation indiquant l'espace $\mathfrak{L}(B', A)$ topologisé comme on vient de le dire) est complet, de sorte que l'application linéaire $u \to \tilde{u}$ peut se prolonger par continuité en une application linéaire continue du produit tensoriel complet $\overline{A \otimes B}$ dans $\mathfrak{L}_e(B', A)$. Mais en général (par exemple chaque fois semble-t-il que A et B sont des espaces de Banach de dimension infinie), on n'obtient là *ni* un isomorphisme topologique dans, *ni* une application sur. Il existe pourtant certains espaces A tels que quel que soit l'espace localement convexe complet B, l'application précédente est un *isomorphisme topologique sur.* Il résulte d'une généralisation facile de la théorie générale des noyaux-distributions de L. Schwartz (non encore publiée) que tel est le cas pour certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables, notamment les espaces ($\mathfrak{E}$) et ($\mathfrak{S}$) (voir définition dans [9]). Nous donnons plus bas quelques indications sur le cas de l'espace ($\mathfrak{E}$). La même propriété vaut pour les espaces $P(O)$, de façon précise:

Proposition 8. *Soit O un ouvert non vide de la sphère de Riemann Ω. Pour tout espace localement convexe complet E, l'application canonique du produit tensoriel complet $\overline{P(O) \otimes E} = P(O, E)$ dans l'espace $\mathfrak{L}_e(E', P(O))$ des applications linéaires faiblement continues de E' dans $P(O)$, muni de la topologie de la convergence équicontinue, est un isomorphisme sur.*

Moyennant la proposition 6, cette proposition peut se regarder comme cas particulier de la facile proposition 3 (où on prend pour G l'espace E' *muni* de la topologie de Mackey $\tau(E', E)$). Nous appelerons espace nucléaire tout espace qui satisfait à la condition envisagée précédemment. Ainsi, les espaces ($\mathfrak{E}$), ($\mathfrak{S}$), $P(O)$, sont des espaces nucléaires. Nous ferons ailleurs une étude approfondie de ces espaces, incluant aussi les théorèmes que nous allons démontrer directement plus bas. Signalons seulement ici qu'on peut démontrer sans difficulté que le produit tensoriel topologique et le produit topologique de deux espaces nucléaires est encore un espace nucléaire. Beaucoup moins facile sont les résultats suivants: un espace nucléaire est un espace ($\mathfrak{M}$) (c. f. [4]); tout sous-espace vectoriel fermé et tout quotient par un tel sous-espace d'un espace nucléaire est encore nucléaire. Ces résultats ont de nombreuses applications, dont nous signalons la suivante:

On notera que, alors que l'énoncé même des théorèmes fondamentaux 2 et 3 fait intervenir le fait que l'ensemble O sur lequel on considère des fonctions est une partie de la sphère de Riemann Ω, la proposition 6 et ses corollaires propositions 7, 8 gardent un sens pour l'espace des fonctions holomorphes définies sur une variété quelconque, à une ou plusieures dimensions complexes. Mais les théorèmes correspondants pour l'espace de Schwartz ($\mathfrak{E}$) = $\mathfrak{E}(O)$ construit sur O (espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables sur O, avec la topologie de la convergence de la fonction et de chacune de ses dérivées multiples — dérivées définies par des champs de vecteurs indéfiniment différentiables —) se démontrent directement par les méthodes de L. Schwartz sur une variété indéfiniment différentiable quelconque O (voir No **3**). En particulier, $\mathfrak{E}(O)$ est un espace nucléaire. Donc, si O est une variété holomorphe, comme $H(O)$, espace des fonctions holomorphes complexes sur O, est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{E}(O)$, il est lui-même un espace nucléaire d'après le résultat signalé plus haut. Comme d'autre part l'espace $\mathfrak{L}_e(E', H(O))$ s'identifie toujours, par le même raisonnement élémentaire, à $H(O, E)$, il suit très facilement que les propositions 6, 7 et 8 sont encore valables dans ce cas plus général.

Signalons enfin un dernier résultat, qui découle de la théorie générale des espaces nucléaires, et dont nous aurons besoin par la suite (et que nous admettrons encore, pour ne pas allonger cet exposé):

Proposition 9. *Dans l'énoncé de la proposition* 7, *si f parcourt une partie convexe cerclée fermée bornée C de $P(O, E)$, on peut supposer les suites $(\lambda_i)_i$ et $(\varphi_i)_i$ fixes, et que les a_i restent dans une partie bornée fixe B de E.*

Corollaire 1. *Si C est une partie bornée de $P(O, E)$, il existe une partie bornée A de $P(O)$, et une partie bornée B de E, telles que C soit contenue dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble des $\varphi \otimes a$ $(\varphi \in A, a \in B)$.*

Ce corollaire est, par dualité, équivalent au suivant:

Corollaire 2. *L'isomorphisme canonique du dual de $P(O, E)$ sur l'espace $\mathfrak{B}(P(O) \times E)$ des formes bilinéaires continues sur $P(O) \times E$ défini dans la proposition* 6, *est un isomorphisme vectoriel topologique quand on munit ces deux espaces de leur topologie forte.* (Par topologie forte sur $\mathfrak{B}(P(O) \times E)$, nous entendons la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'une partie bornée de $P(O)$ par une partie bornée de E.)

Corollaire 3. *Dans l'énoncé du corollaire 1 de la proposition 7, si on suppose que toute partie bornée de E/F est l'image canonique d'une partie bornée de E, alors tout ensemble borné d'applications holomorphes de O dans E/F est image canonique d'un ensemble borné d'applications holomorphes de O dans E.*

Remarque. La proposition 9 peut encore se préciser dans le sens suivant: on peut trouver, pour tout indice i, une application *linéaire* $u \to a_i(u)$ de $\boldsymbol{C} \cdot C$ dans $\boldsymbol{C} \cdot B$, appliquant C dans B, telle que l'on ait pour tout $u \in \boldsymbol{C} \cdot C$:

$$u = \sum_i \lambda_i \varphi_i \otimes a_i(u).$$

Nous n'aurons pas par la suite à nous servir de ce complément à la proposition 9. Mais cette remarque est utile pour déterminer par exemple les applications linéaires bornées d'un espace vectoriel localement convexe F dans $P(O, E)$.

Bien entendu, la proposition 9, ces corollaires et ce qui précède est valable encore pour l'espace $H(O, E)$ construit sur une variété holomorphe quelconque.

2. Parties bornées, compactes et faiblement compactes d'espaces $H(O, E)$. Dans la suite de ce paragraphe, nous considérons l'espace $H(O, E)$ des fonctions holomorphes sur une variété holomorphe quelconque O (à une ou plusieurs dimensions complexes), à valeurs dans l'espace localement convexe E. Pour simplifier les notations, nous supposerons que O est un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$, mais cela n'a rien d'essentiel.

On vérifie trivialement que pour que $A \subset H(O, E)$ soit partie bornée, il faut et il suffit que pour tout compact $K \subset O$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ soit partie bornée de E. Comme une dérivation est application continue de $H(O, E)$ en lui-même (en supposant $H(O, E)$ stable pour la dérivation — c. f. § 2 —) et transforme donc les bornées en parties bornées, l'ensemble $\bigcup_{f \in A} D^p f(K)$ sera partie bornée de E quel que soit l'indice de dérivation multiple $p = (p_1, \ldots, p_n)$ définissant l'opérateur de dérivation multiple D^p, et quel que soit le compact $K \subset O$.

Théorème 5 (Théorème de Montel). *Soit A une partie bornée de $H(O, E)$. Alors*

a) *A est un ensemble équicontinu d'applications de O dans E, donc sur A la topologie (resp. la structure uniforme) de la convergence compacte est identique à la topologie (resp. la structure uniforme) de la convergence simple, et même de la convergence simple dans une partie dense de O.*

b) *Toute application de O dans E qui est limite simple d'applications éléments de A est holomorphe — et appartient par suite à l'adhérence de A dans $H(O, E)$.*

c) *Pour que la partie A de $H(O, E)$ soit relativement compacte (resp. précompacte) il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ soit relativement compact (resp. précompact) dans E.*

Demonstration. a) L'équicontinuité de A resulte de la formule des accroissements finis:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \int_0^1 \left(\sum_i h_i \frac{\partial f}{\partial z_i} (z_0 + th) \right) dt$$

où on pose $h = (h_i)_{1 \leq i \leq n}$, $z = (z_i)_{1 \leq i \leq n}$. Posons $\| h \| = \operatorname{Sup}_i | h_i |$, soit $\| z - z_0 \| \leq r$ une boule contenu dans O. On a pour $\| h \| \leq r$

$$f(z_0 + h) - f(z_0) \in \| h \| \cdot K,$$

où K_f désigne la somme des enveloppes convexes cerclées fermées des ensembles de valeurs prises respectivement par $\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$ dans la boule $\| z - z_0 \| \leqq r$. Mais A étant borné, les K_f restent dans un borné fixe K de E, d'où $f(z_0 + h) - f(z_0) \in \| h \| \cdot K$ pour $\| h \| \leqq r$, $f \in A$, d'où aussitôt l'équicontinuité de A. — On notera que la démonstration résulte en fait de ce que $H(O, E)$ est sous-espace vectoriel topologique de l'espace $\mathfrak{E}^1(O, E)$ des applications continûment différentiables f de O dans E, muni de la topologie de la convergence uniforme de f et de ses dérivées partielles du premier ordre. — La démonstration supposait implicitement que les $\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$ étaient dans E, mais c'est évidemment licite, autrement il suffirait comme d'habitude de compléter E.

b) De a) resulte que si f est limite simple d'applications éléments de A, elle en est aussi limite uniforme sur tout compact. De là résulte aussitôt qu'elle est holomorphe, car il est trivial de vérifier que toute application de O dans E qui est limite uniforme sur tout compact de fonctions holomorphes est elle-même holomorphe (on se ramène par exemple immédiatement au cas scalaire).

c) En passant au complété $\hat{E}$ de E, et en considérant comme d'habitude $H(O, E)$ comme sous-espace vectoriel topologique de l'espace *complet* $H(O, \hat{E})$, on est ramené à démontrer le critère de compacité relative dans $H(O, E)$, le critère de précompacité en résultera aussitôt. Mais le premier est conséquence immédiate du théorème de Tychonoff et de a) et b).

Corollaire 1. *Pour que dans $H(O, E)$, les parties bornées soient relativement compactes, il faut et il suffit qu'il en soit de même dans E. En particulier, $H(O, E)$ est un espace $(\mathfrak{M})$ si et seulement si E l'est* (c. f. [4] pour la définition des espaces $(\mathfrak{M})$).

La topologie d'une partie compacte A de $H(O, E)$ est identique à toute topologie séparée moins fine sur A. Soit σ une partie de O telle que toute fonction holomorphe *complexe* dans O qui s'annule sur σ soit nulle (il suffit par exemple que σ soit dense dans O, ou que, O étant connexe et à *une* dimension complexe, σ ait un point d'accumulation dans O): nous dirons alors que σ est analytiquement dense dans O. Alors deux fonctions éléments de $H(O, E)$ qui coïncident sur σ sont identiques, et par suite sur $H(O, E)$ la topologie de la convergence simple dans σ est séparée. Elle est évidemment moins fine que la topologie de $H(O, E)$, et induit par suite sur A la même topologie que $H(O, E)$. En passant au complété de E, ceci s'étend de façon évidente aux parties précompactes de $H(O, E)$. De plus, tout ce que nous venons de dire est encore vrai pour les structures uniformes. En résumé, on obtient le

Corollaire 2 (Théorème de Vitali). *Soit A partie bornée de $H(O, E)$, telle que pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ soit partie précompacte de E. Soit σ une partie analytiquement dense de O. Alors sur A, la structure uniforme induite par $H(O, E)$ est identique à la structure uniforme de la convergence simple dans σ. Si on suppose les ensembles $A(z)$ même relativement compacts dans E, et si $\mathfrak{F}$ est un filtre dans A tel que $f(z)$ tende vers une limite suivant $\mathfrak{F}$ pour tout $z \in \sigma$, alors $\mathfrak{F}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe $g \in H(O, E)$.*

En remarquant que toute partie bornée de E est faiblement précompacte, on obtiendrait un énoncé valable pour *toutes* les parties bornées de $H(O, E)$, que nous laissons au lecteur le soin d'énoncer. Nous obtiendrons un résultat bien plus précis avec le théorème 7 du No 2.

Un critère de faible compacité dans $H(O, E)$ tout analogue au théorème de Montel est le

Théorème 6. *Pour qu'une partie A de $H(O, E)$ soit faiblement relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ soit partie faiblement relativement compacte E.*

La condition est évidemment nécessaire, car pour tout $z \in O$, $f \to f(z)$ est application linéaire continue de $H(O, E)$ dans E, transformant donc parties faiblement relativement compactes en parties faiblement relativement compactes. Pour voir qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que A est partie faiblement relativement compacte de l'espace $C(O, E)$ des applications continues de O dans E, muni de la topologie de la convergence compacte (en effet, $H(O, E)$ est un sous-espace *fermé* de cet espace). Mais cela résulte du lemme suivant, ayant son intérèt propre (et qui est corollaire du th. 5 et th. 7 a) de mon article [6]):

Lemme 1. *Soit O un espace topologique, E un espace vectoriel localement convexe, $C(O, E)$ l'espace des applications continues de O dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. Une partie A de $C(O, E)$ est faiblement relativement compacte si et seulement si elle satisfait aux trois conditions suivantes:*

a) *A est bornée.*

b) *Pour tout $z \in O$, l'ensemble des $f(z)$ $(f \in A)$ est partie faiblement relativement compacte de E.*

c) *Toute application de O dans E faible qui est limite simple d'applications éléments de A, est continue.*

(Remarquer que la conjonction de b) et c) signifie évidemment — en vertu du théorème de Tychonoff — que A est relativement compact dans $C(O, E_f)$ pour la topologie de la convergence simple, E_f désignànt E muni de la topologie faible). — Dans les conditions du théorème 6, les trois conditions qui précèdent sont automatiquement vérifiées (c) resultant du théorème 5b)).

Corollaire. *Pour que $H(O, E)$ soit semi-réflexif, il faut et il suffit que E le soit.*

La suffisance est un cas particulier du théorème 6. La nécessité résulte de ce que E est isomorphe à un sous-espace fermé de $H(O, E)$.

Au numéro suivant, nous obtiendrons une autre démonstration du théorème 6, donnant en même temps un résultat plus précis (théorème 7).

3. Quelques propriétés auxiliaires des espaces $\mathfrak{E}(O, E)$. Soit O un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, on désignera par $\mathfrak{E}(O, E)$ l'espace des applications $f(\xi)$ de O dans E telles que pour tout $x' \in E'$, $\langle f(\xi), x'\rangle$ soit fonction indéfiniment différentiable dans O. Nous avons déjà remarqué (voir note du bas de la page 39) que cela implique que f est fortement continue et si E est complet, que f est fortement indéfiniment différentiable. De toutes façons, f peut être regardée comme application fortement indéfiniment différentiable à valeurs dans le complété $\hat{E}$ de E. — Si E est complet, nous munirons $\mathfrak{E}(O, E)$ de la topologie de la convergence compacte de f et de chacune de ses dérivées, c'est alors un espace vectoriel localement convexe complet. Si E n'est pas complet, on munit $\mathfrak{E}(O, E)$ de la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, \hat{E})$. L'espace $\mathfrak{E}(O, E)$ est complet, ou métrisable, si et seulement si E l'est, c'est donc un espace $(\mathfrak{F})$ si et seulement si E l'est.

Si $\boldsymbol{R}^n$ est un espace $\boldsymbol{C}^m$, alors l'espace $H(O, E)$ est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{E}(O, E)$. Les théorèmes concernant $H(O, E)$ qui vont suivre ont avantage à être démontrés en faisant usage de ce fait, l'espace $\mathfrak{E}(O, E)$ étant mieux connu que $H(O, E)$. Une méthode plus directe serait il est vrai possible car on pourrait appliquer des théorèmes généraux sur les espaces nucléaires, théorèmes dont les démonstrations sont d'ailleurs tout analogues à celles que nous donnons ici.

Nous aurons surtout besoin du résultat suivant, dû essentiellement à L. Schwartz:

Lemme 2. *Soit O un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, E un espace localement convexe, soit $p = (p_1, \ldots, p_n)$ un indice de dérivation multiple, et F_p une application faiblement continue et à support compact de O dans une partie équicontinue de E'.*

a) *Pour toute $f \in \mathfrak{E}(O, E)$, $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle$ est alors une fonction continue de ξ, et si on pose*

$$\langle f, \Phi_p\rangle = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle \, d\xi \tag{1}$$

la forme linéaire Φ_p de f ainsi définie est continue.

b) *Réciproquement, toute forme linéaire continue sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est somme d'un nombre fini de formes φ_p du type précédent, où les F_p peuvent même être choisies fortement continues.*

c) *Si, pour p donné, on se donne un ensemble M_p d'applications F_p faiblement continues de O dans une partie équicontinue fixe V^0 de E' s'annulant en dehors du compact fixe $K < O$, alors l'ensemble M'_p des formes linéaires correspondantes sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est équicontinu. Réciproquement, tout ensemble équicontinu de formes linéaires sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est contenu dans la somme d'un nombre fini d'ensembles M'_p du type précédent, où pour tout p l'ensemble M_p des fonctions F_p peut même être choisi fortement équicontinu.* (Par *somme* de deux ensembles A et B, nous entendons l'ensemble des $a + b$ pour $a \in A$ et $b \in B$).

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce lemme, qui résulte de la caractérisation donnée dans [9] des parties bornées de l'espace de distributions $\mathfrak{E}'(O)$, dual de $\mathfrak{E}(O)$. Notons seulement en passant que la démonstration prouve même que, si on fait correspondre à toute forme linéaire continue Φ sur $\mathfrak{E}(O, E)$ la forme bilinéaire continue $\Phi(\varphi \otimes x)$ sur $\mathfrak{E}(O) \times E$ ($\varphi \otimes x$ désignant l'application bilinéaire continue naturelle de $\mathfrak{E}(O) \times E$ dans $\mathfrak{E}(O, E)$, analogue à l'application bilinéaire $H(O) \times E \to H(O, E)$ définie au No **1**), l'application linéaire du dual $\mathfrak{E}(O, E)'$ de $\mathfrak{E}(O, E)$ dans l'espace $\mathfrak{B}(\mathfrak{E}(O) \times E)$ des formes bilinéaires continues sur $\mathfrak{E}(O) \times E$, est un isomorphisme sur, qui identifie les parties équicontinues de $\mathfrak{E}(O, E)'$ et celles de $\mathfrak{B}(\mathfrak{E}(O) \times E)$. En d'autres termes, avec la terminologie introduite au § 7, No **1**, *$\mathfrak{E}(O, E)$ est un produit tensoriel topologique de $\mathfrak{E}(O)$ et de E.*

D'autre part, supposant pour fixer les idées que E est un espace $(\mathfrak{F})$ il est très facile de montrer que les applications linéaires faiblement continues u de E' dans $\mathfrak{E}(O)$ correspondent biunivoquement aux éléments f de $\mathfrak{E}(O, E)$ grâce à la formule $u \cdot x'(\xi) = \langle f(\xi), x'\rangle$. Par suite la proposition analogue à la proposition 7 du § 5 est valable ici. En d'autres termes, avec la terminologie introduite au § 7 No **1**, *$\mathfrak{E}(O)$ est un espace nucléaire* — comme nous l'avions déjà annoncé.

La définition de la topologie de $\mathfrak{E}(O, E)$ et l'énoncé du lemme 2 se modifient de façon évidente si on suppose que O est une variété indéfiniment différentiable quelconque au lieu d'un ouvert d'un espace $\boldsymbol{R}^n$. Pour ne pas encombrer inutilement nos notations, nous nous restreindrons pourtant à ce cas.

Le lemme 2, conjugué avec le théorème de Hahn-Banach, donne aussi un théorème de structure analogue pour les ensembles équicontinus de formes linéaires sur les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{E}(O, E)$, et en particulier pour les ensembles équicontinus de formes linéaires sur $H(O, E)$, si $\boldsymbol{R}^n$ est un espace $\boldsymbol{C}^m$. Nous nous dispensons de répèter l'énoncé pour ce cas.

Du lemme 2, on déduit le

Théorème 7. *Soit A une partie bornée de $\mathfrak{E}(O, E)$, E_f l'espace E muni de sa topologie faible, σ une partie dense de O. Alors toutes les topologies suivantes sur A,* (*ou les structures uniformes correspondantes*), *sont identiques:*

a) *Topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$ muni de la topologie de la convergence simple dans σ (ou de la topologie de la convergence simple, ou de la topologie de la convergence compacte).*

b) *Topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$ (avec sa topologie usuelle: convergence compacte de la fonction et de toutes ses dérivées).*

c) *Topologie induite par la topologie faible de $\mathfrak{E}(O, E)$.*

De plus, toute application de O dans E qui est adhérente à A pour la topologie de la convergence simple, est élément de $\mathfrak{E}(O, E)$.

Démonstration. On peut évidemment supposer A convexe cerclé fermé. Alors il suffit de démontrer l'identité des topologies envisagées, l'identité des structures uniformes correspondantes en résulte aussitôt en raison du résultat général que voici, et dont la vérification est évidente: Soit $\mathfrak{E}$ un espace vectoriel, A une partie convexe cerclée de $\mathfrak{E}$, T_1 et T_2 deux topologies localement convexes sur E. Pour que T_1 et T_2 induisent sur A la même structure uniforme, il suffit déjà qu'elles induisent le même système de voisinages de 0.

Il est d'autre part évident que la topologie b) est plus fine que la plus fine des topologies envisagées dans a). Montrons que réciproquement la moins fine de ces dernières est déjà identique à la topologie b). Enonçons d'abord un lemme, analogue au théorème 5, et se démontrant de façon identique:

Lemme 3. a) *La partie A de $\mathfrak{E}(O, E)$ est bornée si et seulement si pour tout indice de dérivation multiple p et tout compact $K \subset O$, l'ensemble $\bigcup_{f \in A} D^p f(K)$ est partie bornée de E. Une telle partie de $\mathfrak{E}(O, E)$ est un ensemble équicontinu d'applications de O dans E.*

b) *Pour que $A \subset \mathfrak{E}(O, E)$ soit relativement compacte (resp. précompacte) il faut et il suffit qu'elle soit bornée, et que pour tout $\xi \in O$, et tout indice de dérivation multiple p, l'ensemble des $D^p f(\xi)$ (où $f \in A$) soit partie relativement compacte (resp. précompacte) de E.*

Il suit aussitôt comme pour le corollaire 2 du théorème 5, que si A est partie précompacte de $\mathfrak{E}(O, E)$ — donc partie relativement compacte de l'espace complet $\mathfrak{E}(O, \hat{E})$, où $\hat{E}$ désigne le complété de E — la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E)$ est identique à la topologie de la convergence simple dans une partie dense σ de O. Le fait que la topologie b) de l'énoncé du théorème 7 soit identique à la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$ muni de la convergence simple dans σ, est un cas particulier de ce qui précède, car en vertu du lemme 3, A sera bien une partie précompacte de $\mathfrak{E}(O, E_f)$ (toute partie bornée de E_f étant en effet faiblement précompacte).

Donc, les topologies dans a) et la topologie b) sont identiques. De plus, il est évident que la topologie c) est plus fine que la topologie de la convergence simple dans $\mathfrak{E}(O, E_f)$ car pour tout $\xi \in O$, et tout $x' \in E'$, la forme linéaire $\varepsilon_{\xi, x'}(f) = \langle f(\xi), x' \rangle$ sur $\mathfrak{E}(O, E)$ est continue. Tout revient donc à montrer que la topologie b) est plus fine que la topologie c). Soit donc $f \in A$, $\mathfrak{F}$ le filtre de ses voisinages dans la topologie induite par $\mathfrak{E}(O, E_f)$, il faut montrer que pour toute forme linéaire continue Φ sur $\mathfrak{E}(O, E)$, on a $\langle f, \Phi \rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle g, \Phi \rangle$

Mais en vertu du lemme 2, Φ est somme de formes Φ_p du type

$$\langle g, \Phi_p \rangle = \int_O \langle D^p g(\xi), F_p(\xi) \rangle \, d\xi$$

où $F_p(\xi)$ est application *fortement* continue, à support compact $K \subset O$, de O dans une partie équicontinue de E'. On est donc ramené au cas où Φ est de cette forme simple, il faut donc montrer que

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int_O \langle D^p g(\xi), \; F_p(\xi) \rangle \, d\xi = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle \, d\xi .$$

Il suffit pour ce de démontrer que la fonction complexe $\xi \to \langle D^p g(\xi), F_p(\xi) \rangle$, variable avec g, tend suivant $\mathfrak{F}$ uniformément sur K vers la fonction $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle$. Cela se vérifie en effet aussitôt: soit M l'adhérence de $\bigcup_{g \in A} D^p g(K)$, et $N = F_p(K)$; M est une partie bornée de E, N une partie *fortement* compacte de E', donc sur M la topologie faible est plus fine que la topologie de la convergence uniforme sur N. Mais si $g \to f$ suivant $\mathfrak{F}$, $D^p g(\xi)$ tend vers $D^p f(\xi)$ faiblement, et uniformément quand ξ parcourt K, donc $\langle D^p g(\xi), x'\rangle \to \langle D^p f(\xi), x'\rangle$ uniformément pour $\xi \in K$, $x' \in N$, d'où le résultat voulu.

Enfin, la dernière partie du théorème 7 se démontre de façon évidente grâce au lemme 3.

Corollaire 1. *Pour que la partie A de $\mathfrak{E}(O, E)$ soit relativement faiblement compacte, il faut et il suffit que A soit borné, et que pour tout $\xi \in O$, l'ensemble des $f(\xi)$ $(f \in A)$ soit partie faiblement relativement compacte de E.*

Corollaire 2. *Pour que $\mathfrak{E}(O, E)$ soit semi-réflexif, il faut et il suffit que E le soit.*

Le théorème 7 et ses corollaires s'appliquent aussitôt aux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathfrak{E}(O, E)$, et en particulier aux espaces du type $H(O, E)$. On réobtient ainsi le théorème 6 du numéro précédent. Il est bon de noter que le théorème 7 est assez spécial à la nature particulière des formes linéaires continues sur $\mathfrak{E}(O, E)$. Ainsi, il est facile de définir des parties bornées et équicontinues d'un espace $C(O, E)$, — E étant par exemple un espace de Banach — (cf. lemme 1 ci-dessus), où même la convergence simple n'implique pas la convergence faible.

4. Bidual d'espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ et $H(O, E)$. Espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ et $H(O, E)$ distingués. Soit M un espace localement convexe, M' son dual fort. On appelle bidual de M ([4]) le dual M'' de M'. Si M'^* désigne le dual algébrique de M', M s'identifie à un sous-espace vectoriel de M'^*, et il résulte aussitôt du théorème des bipolaires que M'' est la réunion des adhérences faibles dans M'^* des parties bornées de M (théorème de Mackey). — Nous munirons toujours M'' de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de M', topologie qui induit sur M la topologie donnée de M. On voit par polarité qu'un système fondamental de voisinages de l'origine dans M'' est formé par les adhérences faibles dans M'' des voisinages de l'origine dans M.

Soit N un autre espace vectoriel localement convexe, u une application linéaire continue de N dans M. On vérifie trivialement que l'application bitransposée u'' de u — application de N'' dans M'' — est continue pour les topologies précédentes, et que si u est un isomorphisme topologique dans, il en est de même de u''[2]). Donc le bidual d'un sous-espace vectoriel N de M s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de M''.

Soit maintenant O un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, E un espace localement convexe, E'' son bidual. $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(O, E)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(O, E'')$. Nous allons prolonger la dualité entre $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ en une dualité entre $\mathfrak{E}(O, E'')$ et $\mathfrak{E}'$, de la façon suivante. Soit Φ une forme linéaire continue sur $\mathfrak{E}$, on aura donc $\Phi = \sum_{|p| \leq m} \Phi_p$, où Φ_p est donnée par

$$(1) \qquad \langle f, \Phi_p\rangle = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle \, d\xi,$$

F_p satisfaisant aux conditions du lemme 2. Mais l'intégrale du second membre garde un sens si $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$, car en vertu du fait que F_p est fortement continue, la fonction à intégrer, $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle$, est fonction continue de ξ. De plus, en vertu de la partie facile a) du lemme 2, appliqué à l'espace $\mathfrak{E}(O, E'')$, la forme linéaire ainsi définie sur $\mathfrak{E}(O, E'')$ est continue, donc aussi la forme linéaire

$$(2) \qquad f \to \sum_p \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle \, d\xi .$$

---

[2]) Mais on fera attention que l'application bitransposée d'un homomorphisme sur peut ne pas être un homomorphisme sur, même si M et N sont des espaces $(\mathfrak{F})$.

Montrons que cette dernière ne dépend que de Φ, et non de la manière dont Φ est représentée à l'aide de fonctions F_p. Montrons d'abord qu'il en est ainsi chaque fois que f est de la forme $\varphi \otimes a$, où $\varphi \in \mathfrak{E}(O)$, $a \in E''$. En effet, montrons qu'on a alors

$$\sum_p \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi) \rangle d\xi = \lim_{\mathfrak{F}} \langle \varphi \otimes x, \Phi \rangle$$

où $\mathfrak{F}$ est un filtre sur une partie bornée A de E qui converge faiblement vers a. En effet, on a $\langle \varphi \otimes x, \Phi \rangle = \sum_p \int_O \langle D^p(\varphi \otimes x)(\xi), F_p(\xi) \rangle d\xi$ il suffit de noter alors que pour tout indice p, la fonction $\langle D^p(\varphi \otimes x)(\xi), F_p(\xi) \rangle$ tend uniformément sur O vers la fonction $\langle D^p(\varphi \otimes a)(\xi), F_p(\xi) \rangle$ — comme il résulte aussitôt du fait que $F_p(O)$ est partie fortement compacte de E', par le même raisonnement élémentaire que dans la démonstration du théorème 7.

Ainsi, l'expression (2) ne dépend que de la forme Φ chaque fois que f est du type $\varphi \otimes a$. Mais les combinaisons linéaires des $\varphi \otimes a$ sont denses dans $\mathfrak{E}(O, E'')$ — fait qui se démontre élémentairement, mais qui est aussi contenu dans le théorème, rappelé plus haut, affirmant qu'un espace $\mathfrak{E}(O, M)$ est un produit tensoriel topologique de $\mathfrak{E}(O)$ et de M. Comme l'expression (2) est forme linéaire *continue* de $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$, il suit que quel que soit $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$, sa valeur sur f ne dépend que de la forme Φ sur $\mathfrak{E}(O, E)$.

Par suite: toute $\Phi \in \mathfrak{E}'$ définit une forme linéaire continue sur $\mathfrak{E}(O, E'')$ grâce à la formule (2), forme que nous noterons $\bar{\Phi}$. $\langle f, \bar{\Phi} \rangle$ est manifestement une forme bilinéaire sur $\mathfrak{E}(O, E'') \times \mathfrak{E}'$. Donc, toute $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$ définit une forme linéaire $\Phi \to \langle f, \bar{\Phi} \rangle$ sur $\mathfrak{E}'$, que nous désignerons par $\bar{f}$. Nous avons ainsi défini une application linéaire $f \to \bar{f}$ de $\mathfrak{E}(O, E'')$ dans $\mathfrak{E}'^*$, prolongeant l'application canonique de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{E}'^*$. D'ailleurs, de la partie c) du lemme 2) il résulte aussitôt que les formes $\bar{f}$ sont bornées sur les parties équicontinues de $\mathfrak{E}'$. Nous allons prouver maintenant le

Théorème 8. a) *L'application linéaire naturelle définie ci-dessus de $\mathfrak{E}(O, E'')$ dans le dual algébrique $\mathfrak{E}'^*$ du dual $\mathfrak{E}'$ de $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(O, E)$ est un isomorphisme vectoriel topologique dans l'espace des formes linéaires sur $\mathfrak{E}'$ bornées sur les parties équicontinues, muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de $\mathfrak{E}'$.*

b) *L'image de $\mathfrak{E}(O, E'')$ par l'application précédente contient le bidual $\mathfrak{E}''$ de $\mathfrak{E}$, de sorte que $\mathfrak{E}''$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{E}(O, E'')$. Ce sous-espace est dense dans $\mathfrak{E}(O, E'')$.*

c) *Si E est un espace $(\mathfrak{F})$, l'isomorphisme précédent de $\mathfrak{E}''$ dans $\mathfrak{E}(O, E'')$ est un isomorphisme sur.*

Démonstration. a) Il est d'abord immédiat que l'application $f \to \bar{f}$ est continue. Il revient en effet au même de dire que si Φ parcourt une partie équicontinue de $\mathfrak{E}'$, l'ensemble des formes linéaires $f \to \langle \bar{f}, \Phi \rangle$ sur $\mathfrak{E}(O, E'')$ est équicontinu. Or $\langle \bar{f}, \Phi \rangle$ est donné par la formule (2), et notre assertion résulte alors immédiatement des conditions nécessaires et suffisantes du lemme 2c). — Dire que de plus $f \to \bar{f}$ est un isomorphisme topologique, signifie que pour tout voisinage U de l'origine dans $\mathfrak{E}(O, E'')$, existe une partie équicontinue M de $\mathfrak{E}'$, telle que

$$|\langle \bar{f}, \Phi \rangle| \leqq 1 \text{ pour toute } \Phi \in M \text{ implique } f \in U.$$

Mais un système fondamental de voisinages de l'origine dans $\mathfrak{E}(O, E'')$ est obtenu en prenant les ensembles $U(K, B, m)$ définis à l'aide d'un compact $K \subset O$, d'une partie équicontinue B de E' et d'un entier $m > 0$ par la formule

$$f \in U(K, B, m) \Longleftrightarrow D^p f(K) \subset B^0 \text{ (polaire de } B \textit{ dans } E''), \text{ pour } |p| \leqq m$$

i. e. $|\langle D^p f(\xi), x' \rangle| \leqq 1$ pour $\xi \in K$, $x' \in B$, $|p| \leqq m$. On peut donc supposer U de la forme $U(K, B, m)$. Pour tout $\xi \in O$, $x' \in E'$, et tout indice de dérivation multiple p, soit $\varepsilon^p_{\xi,x'}$ l'élément de $\mathfrak{E}'$ défini par $\langle f, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle D^p f(\xi), x'\rangle$. Montrons que si f est élément de $\mathfrak{E}(O, E'')$, on a encore

$$\langle \bar{f}, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle D^p f(\xi), x'\rangle. \tag{3}$$

Alors nous pourrons prendre pour M l'ensemble des $\varepsilon^p_{\xi,x'}$ ($\xi \in K$, $x' \in B$, $|p| \leqq m$) qui est manifestement une partie équicontinue de $\mathfrak{E}'$; M étant ainsi choisi, il résultera bien de (3) que $|\langle \bar{f}, \varphi\rangle| \leqq 1$ pour toute $\Phi \in M$ implique $f \in U = U(K, B, m)$.

Reste à démontrer (3). Considérons la forme linéaire continue ε^p_ξ sur l'espace $\mathfrak{E}(O)$, définie par $\langle \varphi, \varepsilon^p_\xi\rangle = D^p_\varphi(\xi)$. D'après un théorème de L. Schwartz (cas particulier du lemme 2), cette forme linéaire sera de la forme

$$D^p\varphi(\xi) = \langle \varphi, \varepsilon^p_\xi\rangle = \sum_{|q|\leqq m} \int_O D^q\varphi(\eta)\, \psi_q(\eta)\, d\eta \tag{4}$$

où les ψ_q sont des fonctions complexes continues sur O, à support compact. Pour $f \in \mathfrak{E}(O, E)$, considérons la fonction $\eta \to \langle f(\eta), x'\rangle$, c'est un élément φ_f de $\mathfrak{E}(O)$. On a en vertu de (4)

$$\langle f, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle \varphi_f, \varepsilon^p_\xi\rangle = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \langle D^q f(\eta), x'\rangle\, \psi_q(\eta)\, d\eta = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \langle D^q f(\eta), F_q(\eta)\rangle\, d\eta$$

en posant $F_q(\eta) = \psi_q(\eta)\, x'$. Par définition, on a donc, pour $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$

$$\langle \bar{f}, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \langle D^q f(\eta), F_q(\eta)\rangle\, d\eta = \sum_{|q|\leqq m} \int_O \left(D^q \langle f(\eta), x'\rangle\right) \psi_q(\eta)\, d\eta$$

d'où, en vertu de (4) appliqué à la fonction $\eta \to \langle f(\eta), x'\rangle$

$$\langle \bar{f}, \varepsilon^p_{\xi,x'}\rangle = \langle D^p f(\xi), x'\rangle, \text{ c. q. f. d.}$$

b) Soit $X \in \mathfrak{E}''$, montrons que X provient d'une $f \in \mathfrak{E}(O, E'')$. Pour ce, soit A une partie bornée de $\mathfrak{E}$ telle que X soit faiblement adhérent à A, soit $\mathfrak{F}$ la trace sur A du filtre des voisinages faibles de X. Pour tout $\xi \in O$, l'image de $\mathfrak{F}$ par l'application $g \to g(\xi)$ de $\mathfrak{E}$ dans E est un filtre de Cauchy faible borné, qui converge donc vers un élément de E'', que nous désignerons par $f(\xi)$. Je dis que l'application $\xi \to f(\xi)$ de O dans E'' est $\in \mathfrak{E}(O, E'')$. En premier lieu, si E''_f désigne E'' muni de la topologie faible définie par la dualité avec E', la dernière partie du théorème 7, appliquée à la partie bornée A de $\mathfrak{E}(O, E''_f)$, montre que $f \in \mathfrak{E}(O, E''_f)$, i. e. que pour toute $x' \in E'$, la fonction $\langle f(\xi), x'\rangle$ est indéfiniment différentiable. Mais il faut montrer que pour *toute* forme linéaire continue x''' sur E'', la fonction $\langle f(\xi), x'''\rangle$ est indéfiniment différentiable. Mais d'après la définition de la topologie de E'', x''' sera limite simple de formes linéaires qui appartiennent à une même partie équicontinue M de E', donc la fonction $\langle f(\xi), x'''\rangle$ sera limite simple de fonctions $\langle f(\xi), x'\rangle$, où $x' \in M$. Il suffit maintenant de montrer que l'ensemble des fonctions $\langle f(\xi), x'\rangle$ ($x' \in M$) est une partie bornée de l'espace $\mathfrak{E}(O)$ (cf. dernière partie du théorème 7). Mais pour $x' \in M$ donné, $\langle f(\xi), x'\rangle$ est elle-même limite simple de fonctions $\langle g(\xi), x'\rangle$, où $g \in A$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des fonctions $\langle g(\xi), x'\rangle$, pour $g \in A$, $x' \in M$, est une partie bornée de $\mathfrak{E}(O)$, ce qui se vérifie en effet trivialement.

Montrons que l'on a bien $X = \bar{f}$, i. e. que $\langle X, \Phi\rangle = \langle \bar{f}, \Phi\rangle$ pour $\Phi \in \mathfrak{E}'$. En effet $\langle X, \Phi\rangle = \lim_{\mathfrak{F}} \langle g, \Phi\rangle$, et explicitant Φ par une intégrale (lemme 2) on est ramené à montrer que

$$\lim_{\mathfrak{F}} \int_O \langle D^p g(\xi), F_p(\xi)\rangle\, d\xi = \int_O \langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle\, d\xi.$$

F_p étant comme d'ordinaire. Mais cela se voit comme d'habitude, en montrant que la fonction $\langle D^p g(\xi), F_p(\xi)\rangle$ tend uniformément vers la fonction $\langle D^p f(\xi), F_p(\xi)\rangle$.

Nous avons donc démontré que $\mathfrak{E}''$ est contenu dans l'image canonique de $\mathfrak{E}(O, E'')$, et s'identifie donc à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(O, E'')$. Pour montrer que ce dernier est dense, il suffit de montrer qu'il contient les $\varphi \otimes a$, ($\varphi \in \mathfrak{E}(O)$, $a \in E''$). Mais cela est facile, car soit A une partie bornée de E à laquelle a soit faiblement adhérent, $\mathfrak{F}$ la trace sur A du filtre des voisinages faibles de a, $\mathfrak{F}_1$ le filtre borné dans $\mathfrak{E}$ image de $\mathfrak{F}$ par l'application $x \to \varphi \otimes x$. Il est manifeste que $\mathfrak{F}_1$ est filtre de Cauchy faible borné dans $\mathfrak{E}$, et si X est sa limite faible dans $\mathfrak{E}''$, que l'élément de $\mathfrak{E}(O, E'')$ qui correspond à X par la construction faite plus haut n'est autre que $\varphi \otimes a$.

c) De a) et b) résulte que dans le cas où $\mathfrak{E}''$ est complet, $\mathfrak{E}''$ s'identifie à tout l'espace $\mathfrak{E}(O, E'')$. En particulier, si E est un espace $(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{E}$ est un espace $(\mathfrak{F})$, or on sait ([5]) que le bidual d'un espace $(\mathfrak{F})$ est complet. Par là, le théorème 8 est complètement démontré.

Si maintenant H est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}$, son bidual s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{E}(O, E'')$. En particulier, supposons que O soit un ouvert de C^n, et prenons $H = H(O, E)$. H'' s'identifie donc à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{E}(O, E'')$, à tout $X \in H''$, limite faible d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur une partie bornée A de H, correspond d'après la construction donnée plus haut la fonction $f(\xi) = \lim_{\mathfrak{F}}$. faible $g(\xi)$. Mais on voit par application du théorème 5b) à l'espace E''_f, que $f(\xi)$ est application holomorphe de O dans E''_f. Conjugué avec la remarque 1 du § 2, cela donne $f \in H(O, E'')$. Donc H'' s'identifie à un sous-espace vectoriel de $H(O, E'')$. On voit exactement comme ci-dessus que ce sous-espace contient les $\varphi \otimes a$ $(\varphi \in H(O),\ a \in E'')$, et est par suite dense (corollaire de prop. 6). Enfin, si E est un espace $(\mathfrak{F})$, H'' sera encore complet comme bidual d'espace $(\mathfrak{F})$, et on aura encore $H'' = H(O, E'')$. En résumé, nous pouvons donc énoncer le

Corollaire du théorème 8. *Si O est un ouvert de C^n, il existe un isomorphisme canonique du bidual H'' de $H(O, E)$ dans l'espace $H(O, E'')$, prolongeant l'application identique de $H(O, E)$ dans $H(O, E'')$. L'image de H'' est dense dans $H(O, E'')$. Si E est un espace $(\mathfrak{F})$, cet isomorphisme est un isomorphisme sur.*

Rappelons qu'on dit qu'un espace localement convexe M est *distingué* ([4]), si toute partie faiblement bornée de son bidual est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée A de M, c'est-à-dire est une partie équicontinue du dual de M' fort (en d'autres termes, si M' fort est «tonnelé» dans la terminologie de [3]). On notera qu'il existe des espaces $(\mathfrak{F})$ non distingués, comme il résulte d'une construction de G. Köthe relative à une question voisine, conjuguée avec certains résultats de ma note [5] (je donnerai ailleurs des indications plus détaillées sur ces questions). — On a le

Théorème 9. *Soit O un ouvert de R^n (resp. de C^n), et soit E un espace $(\mathfrak{F})$. Alors*

a) *$\mathfrak{E}(O, E)$ (resp. $H(O, E)$) est distingué si et seulement si E l'est.*

b) *Plus généralement, pour que la partie bornée A de $\mathfrak{E}(O, E)'' = \mathfrak{E}(O, E'')$ (resp. de $H(O, E)'' = H(O, E'')$) soit contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée B de $\mathfrak{E}(O, E)$ (resp. de $H(O, E)$), il faut et il suffit que pour tout compact $K \subset O$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ soit une partie de E'' contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de E.*

Nous donnerons la démonstration pour l'espace $H(O, E)$ pour fixer les idées, le lecteur vérifiera aisément qu'elle se répète identiquement pour $\mathfrak{E}(O, E)$. En fait, comme nous l'avons déjà dit, les théorèmes 5 à 9 peuvent s'énoncer en termes abstraits pour le produit tensoriel topologique d'un espace nucléaire par un espace $(\mathfrak{F})$ quelconque.

La partie a) de l'énoncé du théorème 9 est manifestement contenue dans la partie b). La condition nécessaire de l'énoncé b), donc de l'énoncé a), se réduit à une vérification triviale. Démontrons maintenant que si E est distingué, $H(O, E)$ l'est. En effet, soit A une partie bornée de $H(O, E'')$. D'après la proposition 9 du No 1, corollaire 3, il existe un borné $M \subset H(O)$ et un borné $N \subset E''$ tels que A soit contenu dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble des $\varphi \otimes a$ $(\varphi \in M,\ a \in N)$. Par hypothèse, il existe un borné $N_1 \subset E$ tel que N soit contenu dans l'adhérence faible de N_1 dans E''. Soit B l'enveloppe convexe cerclée fermée dans $H(O, E)$ de l'ensemble des $\varphi \otimes a$ $(\varphi \in M,\ a \in N_1)$. C'est une partie bornée de $H(O, E)$, et il est facile de vérifier que A est contenu dans l'adhérence faible de B dans $H(O, E'')$. En effet, il suffit de le vérifier pour des éléments de la forme $f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \otimes a$, où $\sum |\lambda_i| \leqq 1$, $\varphi_i \in M$, $a_i \in N$. Soit, pour tout i, $\mathfrak{F}_i$ la trace sur N_1 du filtre des voisinages faibles de a_i, on vérifie alors aussitôt que f est limite faible de $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \otimes x_i$ suivant le filtre produit des $\mathfrak{F}_i$ (en se servant comme usuellement de la représentation intégrale des formes linéaires continues sur $H(O, E)$ donnée par le lemme 2). Comme les $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i \otimes x_i$ sont éléments de B, il suit bien que f est faiblement adhérente à B.

Reste à démontrer la condition suffisante de la partie b) du théorème 9. Soit (K_i) une suite de compacts contenus dans O tels que tout autre compact dans O soit contenu dans l'un des K_i. Pour tout i, il existe par hypothèse un borné $M_i \subset E$ tel que $\bigcup_{f \in A} f(K_i)$ soit contenu dans l'adhérence faible de M_i dans E''. On sait alors qu'il existe un borné $M \subset E$ tel que pour tout i, existe $\lambda_i > 0$ tel que $M_i \subset \lambda_i M$ («première condition de dénombrabilité de Mackey»; c. f. [4]). Donc on aura $f(K_i) \subset \lambda_i \overline{M}$ pour tout i ($\overline{M}$ désignant l'adhérence faible de M dans E''). On peut supposer M convexe cerclé fermé dans E. En vertu de la remarque 2 du § 2, les $f \in A$ peuvent donc être considérées comme des applications holomorphes de O dans l'espace de Banach $F = \boldsymbol{C} \cdot \overline{M}$ (muni de la « boule » $\overline{M}$) et forment évidemment une partie bornée de l'espace $H(O, F)$. Soit de même E_1 l'espace de Banach $\boldsymbol{C} \cdot M$, et soit u l'application identique de E_1 dans E. L'application bitransposée u'' applique E_1'' dans E'', et applique la boule de E_1'' sur l'adhérence faible de M dans E'' (car l'image de la boule de E_1'' doit être faiblement adhérente à M dans E'' par continuité, et faiblement compacte comme image continue d'un faiblement compact). Par suite, on peut aussi considérer u'' comme application linéaire continue de E_1'' *sur* F. Du corollaire de la proposition 7 de ce paragraphe résulte que les $f \in A$ sont de la forme $u'' \circ g$, où g est application holomorphe de O dans E_1''. Cette g correspondant à une $f \in A$ donnée n'est pas déterminée de façon unique, mais en vertu de la proposition 9, corollaire 3, l'ensemble de ces g peut être choisi borné dans $H(O, E_1'')$, soit B. De la partie a) du théorème, appliquée à l'espace de Banach E_1 (qui est distingué !) on tire l'existence d'une partie bornée B_1 de $H(O, E_1)$ telle que B soit contenu dans l'adhérence faible de B_1 dans $H(O, E_1'')$. Mais B_1 s'identifie aussi à une partie bornée de $H(O, E)$. Je dis que la partie A de $H(O, E'')$ est contenue dans l'adhérence faible de B_1 dans $H(O, E'')$. En effet, soit v l'application naturelle de $H(O, E_1)$ dans $H(O, E)$, il est immédiat de vérifier que sa bitransposée v'' est l'application de $H(O, E_1'')$ dans $H(O, E'')$ obtenue à partir de l'application linéaire u'' de E_1'' dans E''. Par suite, on a $A \subset v''(B)$, or B est contenu dans l'adhérence faible de B_1 dans $H(O, E_1'')$, donc $v''(B)$ et par suite A est contenu dans l'adhérence faible de $v(B_1) = B_1$ dans $H(O, E'')$. Le théorème 9 est donc complètement démontré.

5. Convergence forte des suites de formes lineaires sur $H(O, E)$. Une propriété utile, vérifiée par les espaces $(\mathfrak{F})$ les plus importants (c. f. les espaces étudiés dans [9]) est la suivante: Si (x_i') est une suite du dual de E qui converge fortement vers zéro, il existe un voisinage de l'origine U dans E tel que (x_i') converge vers zéro uniformément sur U; ou, ce qui revient au même, il existe un borné convexe cerclé fermé K dans E', tel que (x_i') converge vers zéro dans l'espace de Banach $\boldsymbol{C} \cdot K$ (muni de la « boule » K). Cette propriété peut pourtant être en défaut même si E est un espace $(\mathfrak{M})$ (c. f. [8]).

Une condition plus forte que la précédente est: pour toute partie équicontinue K_0 de E', existe un voisinage U de l'origine dans E tel que sur K_0, la topologie forte soit identique à la topologie de la convergence uniforme sur U; ou, ce qui revient au même, qu'il existe un ensemble équicontinue convexe cerclé fermé $K \supset K_0$ dans E', tel que sur K_0, la topologie forte soit identique à la topologie induite par l'espace de Banach $C \cdot K$. Il est facile de mettre cette condition sous la forme duale: Pour tout voisinage V de l'origine dans E, existe un voisinage convexe cerclé fermé U de l'origine, tel que pour tout entier $n > 0$, existe un borné $A \subset E$ avec $n \cdot U \subset A + V$. D'ailleurs, appliquant le fait qu'un espace $(\mathfrak{F})$ satisfait à la première condition de dénombrabilité de Mackey (c. f. [4]), cela équivaut quand E est du type $(\mathfrak{F})$ à l'existence d'un borné *fixe* A, ayant la propriété: pour tout voisinage V de 0, existe un voisinage U de 0 tel que, quel que soit l'entier $n > 0$, on puisse trouver un entier m_n tel que

$$n \cdot U \subset m_n \cdot A + V.$$

Si E possède cette propriété, E sera appelé *quasi-normable*. Dans le cas où E est un espace $(\mathfrak{M})$, cette propriété signifie aussi manifestement: pour tout voisinage convexe cerclé fermé V de 0, existe un voisinage U de 0 qui soit précompact pour la topologie définie par l'unique voisinage V.

Il est facile de voir que le produit tensoriel complet de deux espaces $(\mathfrak{F})$ quasi-normables est quasi-normable. D'autre part, on voit immédiatement que l'espace $H(O)$ est un espace $(\mathfrak{M})$ quasi-normable. Un système fondamental de voisinages de 0 est en effet formé par les $U(K)$ et leurs homothétiques, où pour tout compact $K \subset O$, $U(K)$ désigne l'ensemble des $f \in H(O)$ telles que $|f(\xi)| \leqq 1$ pour $\xi \in K$. Pour $U(K)$ donné, soit O_1 un voisinage ouvert relativement compact de K dans O, je dis que $U(\overline{O_1})$ est précompact pour la topologie définie par le voisinage $U(K)$ de 0, c'est à dire pour la topologie de la convergence uniforme sur K. Il suffit pour cela de vérifier que $U(\overline{O_1})$ est un ensemble équicontinu de fonctions sur K, mais cela résulte du théorème de Montel, les $f \in U(\overline{O_1})$ formant un ensemble borné *dans l'espace* $H(O_1)$. — Si maintenant E est un espace $(\mathfrak{F})$ quasi-normable (en particulier un espace de Banach), alors $H(O, E) = \overline{H(O) \otimes E}$ est quasi-normable d'après ce que nous avons dit plus haut, d'où la

Proposition 10. *L'espace $H(O)$ est quasi-normable. Si E est un espace quasi-normable, $H(O, E)$ est quasi-normable.*

D'ailleurs, une démonstration toute analogue donne que l'espace $\mathfrak{E}(O)$ est quasi-normable, par suite aussi les espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ pour des espace E qui sont quasi-normables. D'autre part, on peut montrer que tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace $(\mathfrak{M})$ quasi-normable est quasi-normable, ce qui ramène encore la propriété envisagée pour $H(O)$ à la même propriété pour $\mathfrak{E}(O)$. Enfin, signalons qu'on peut même montrer que tout espace nucléaire est quasi-normable [3]).

§ 8. Etude des espaces $P(\Omega_1, E)$.

Dans ce paragraphe, nous considérons de nouveau des fonctions holomorphes locales sur une partie Ω_1 de la sphère de Riemann Ω, à valeurs dans un espace localement convexe E, sans nous préoccuper si les résultats obtenus auraient en réalité une portée plus générale. Ω_2 désignera comme d'habitude le complémentaire de Ω_1, et on suppose Ω_1 et Ω_2 non vides.

[3]) *Note ajoutée pendant la correction des épreuves.* — Pour les résultats utilisés dans la théorie des espaces $(\mathfrak{F})$, voir: *A. Grothendieck*, Sur les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{DF})$, á paraitre dans Summa Brasiliensis Mathematicae. Pour les espaces nucléaires voir: *A. Grothendieck*, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, á paraitre aux Memoirs of the American Math. Soc., 1954.

1. Les espaces $P(\Omega_1, E)$ comme duals forts, et détermination de leurs parties bornées. On peut se demander si la topologie assez naturelle que nous avons introduite sur $P(\Omega_1, E)$ au § 4 est aussi la topologie forte de $P(\Omega_1, E)$, considéré comme dual de son dual. De façon générale, suivant la terminologie de [3], nous dirons qu'un espace localement convexe P est tonnelé, si sa topologie est identique à la topologie forte du dual de P' faible, ou encore, si toute partie faiblement bornée de son dual est équicontinue. Ainsi tout espace $(\mathfrak{F})$ est tonnelé. Par définition, le dual fort d'un espace E est tonnelé si et seulement si E est distingué. Les espaces tonnelés forment sans doute la classe la plus importante d'espaces vectoriels utiles dépassant le cadre des espaces $(\mathfrak{F})$ (voir [3]).

Il est facile de voir que pour que $P(\Omega_1, E)$ soit tonnelé, il est nécessaire que E le soit, du moins si $\infty \in \Omega_1$ (E' s'identifie alors à un sous-espace du dual de $P(\Omega_1, E)$ grâce au théorème 2 bis). Nous supposerons donc E tonnelé. Le dual de $P(\Omega_1, E)$ s'identifie alors à tout $P(\Omega_2, E')$ (th. 2 bis) et dire que $P(\Omega_1, E)$ est tonnelé signifie indifféremment que sa topologie est celle de la convergence uniforme sur les parties faiblement bornées de $P(\Omega_2, E')$, ou que toute partie faiblement bornée de $P(\Omega_2, E')$ est équicontinue — ou enfin, ce qui revient encore au même par la proposition 2 bis, que toute partie faiblement bornée de $P(\Omega_2, E')$ soit contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un $P(O, E'_f)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_2 (E'_f désignant E' faible). On a dans cet ordre d'idées la facile

Proposition 11. *$P(\Omega_1, E)$ est tonnelé dans chacun des deux cas suivants:*

a) *E est tonnelé, et Ω_1 fermé,*

b) *E est un espace $(\mathfrak{F})$.*

Démonstration. a) résulte immédiatement de ce qui précède, car, Ω_2 étant ouvert, il suffit de vérifier que toute partie A de $P(\Omega_2, E'_f)$ qui est bornée pour la dualité avec $P(\Omega_1, E)$ est bornée. Mais d'après le théorème 2 bis, le dual de $P(\Omega_2, E'_f)$ est *contenu dans* $P(\Omega_1, E)$, d'où aussitôt notre assertion (les parties bornées ou faiblement bornées de l'espace vectoriel topologique $P(\Omega_2, E'_f)$ étant les mêmes, d'après le théorème de Mackey-Banach).

Pour établir la conclusion dans le cas b), on note d'abord que $P(O, E)$ est tonnelé pour tout ouvert O, puisque c'est même un espace $(\mathfrak{F})$. Mais $P(\Omega_1, E)$ est par définition limite inductive d'espaces $P(O, E)$, dans le sens généralisé explicité au § 4, No 5, (topologie localement convexe la plus fine rendant continues des applications linéaires données des espaces $P(O, E)$ dans $P(\Omega_1, E)$). Or il est immédiat de vérifier qu'une telle limite inductive généralisée d'espaces tonnelés est un espace tonnelé. — La démonstration montre même que $P(\Omega_1, E)$ est tonnelé pour tout Ω_1, dès qu'il est tonnelé pour Ω_1 ouvert.

Explicitons la forme duale de la proposition 11:

Proposition 12. *Si E est un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, ou plus généralement un sous-espace fortement fermé d'un tel espace (en particulier si E est un espace de Banach), alors toute partie bornée de $P(\Omega_1, E)$ est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un espace $P(O, E)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_1.*

Supposons d'abord que E est le dual fort F' de l'espace F du type $(\mathfrak{F})$; considérons $P(\Omega_2, F)$, son dual s'identifie à $P(\Omega_1, E)$ (th. 2 bis), et les formes linéaires sur $P(\Omega_1, E)$ définies par les éléments de $P(\Omega_2, F)$ sont continues (id.). Donc une partie bornée de l'espace vectoriel topologique $P(\Omega_1, E)$ est à fortiori faiblement bornée (pour la dualité avec $P(\Omega_2, F)$) donc équicontinue en vertu de la proposition 2 bis, ce qui signifie précisément qu'elle est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un $P(O, E)$.

Supposons maintenant que E est un sous-espace fortement fermé d'un dual fort E_1 d'un espace $(\mathfrak{F})$. Alors $P(\Omega_1, E)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $P(\Omega_1, E_1)$ l'application identique de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Omega_1, E_1)$ étant continue. En vertu de ce qui précède, une partie bornée A de $P(\Omega_1, E)$, étant bornée dans $P(\Omega_1, E_1)$, provient d'une partie bornée B d'un $P(O, E_1)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_1. On peut supposer que O est réunion de *cercles* ouverts centrés sur les points de Ω_1. Alors, les $f \in B$ sont en fait des applications *de O dans E*, car elles le sont au voisinage de chaque point de Ω_1. La proposition 12 est par là démontrée, car il est évident que B est alors borné *dans* $P(O, E)$.

Corollaire de la proposition 11. *Si E est un espace de Banach réflexif, alors $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$ sont réflexifs et duals forts l'un de l'autre.*

Nous verrons au No 3 que même si E est un espace $(\mathfrak{M})$, $P(\Omega_1, E)$ peut ne pas être réflexif (même si Ω_1 est réduit à un point).

Enfin, dans l'ordre d'idées précédent, donnons encore le résultat suivant, qui pour E réflexif résulte facilement de la proposition 11, mais constitue un résultat assez profond dans le cas général:

Proposition 13. *Munissons E' de la topologie forte. Alors la topologie de $P(\Omega_2, E')$ est identique à la topologie forte du dual de $P(\Omega_1, E)$ dans chacun des deux cas suivants:*

a) *E est un espace de Banach.*

b) *E est un espace $(\mathfrak{F})$, et Ω_1 est un ouvert.*

Démonstration. a) Le dual de $P(\Omega_2, E')$ est $P(\Omega_1, E'')$ (th. 2 bis) et les parties équicontinues de $P(\Omega_2, E'')$ sont, d'après la proposition 2 bis, les parties qui proviennent d'une partie bornée d'un $P(O, E'')$, où O est voisinage ouvert de Ω_1. En particulier, d'après la proposition 11, toute partie bornée de $P(\Omega_1, E)$ est équicontinue, donc la topologie forte de dual sur $P(\Omega_2, E')$ est moins fine que la topologie de $P(\Omega_2, E')$. L'identité des deux topologies signifie que toute partie équicontinue A de $P(\Omega_1, E'')$ est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de $P(\Omega_1, E)$. Mais A provenant d'une partie bornée B d'un $P(O, E'')$, il suffit à fortiori de montrer que B est contenu dans l'adhérence faible d'une partie bornée de $P(O, E)$ (où le qualificatif «faible» désigne ici la topologie faible propre de l'espace $P(O, E)$). On est donc ramené à démontrer b).

b) Ici on a encore: le dual de $P(\Omega_1, E')$ est $P(O, E'')$, et les partie équicontinues de $P(O, E'')$ sont les ensembles A tels que pour tout compact $K \subset O$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ soit partie équicontinue de E''. En particulier, une partie bornée de $P(O, E)$ est évidemment équicontinue. Tout revient encore à démontrer que réciproquement, toute partie équicontinue de $P(O, E'')$ est contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de $P(O, E)$. Mais cela n'est autre que le théorème 9b).

2. La topologie de $P(\Omega_1, E)$ en termes d'espaces $P(K, E)$. Si Ω_1 et Ω_1' sont deux parties de Ω telles que $\Omega_1' \subset \Omega_1$, il existe une application linéaire naturelle $\varphi_{\Omega_1, \Omega_1'}$ de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Omega_1', E)$, évidemment continue. Pour Ω_1 donné, considérons sur $P(\Omega_1, E)$ la topologie T' la moins fine qui rende continue les applications $\varphi_{\Omega_1, K}$ de cet espace dans les $P(K, E)$, où K parcourt les compacts contenus dans Ω_1. Cette topologie sera à priori moins fine que la topologie propre T de $P(\Omega_2, E)$. Mais en vertu du théorème 2 bis, on voit immédiatement que toute forme linéaire sur $P(\Omega_1, E)$ continue pour T l'est déjà pour T', de sorte que T et T' donnent le même dual. De plus, la proposition 2 bis montre qu'une partie du dual, équicontinue pour T, est déjà équicontinue pour T', car elle provient d'un ensemble équicontinu de formes linéaires sur un même espace $P(K, E)$, où K est un compact $\subset \Omega_1$. Par suite, les topologies T et T' sont identiques, d'où la première partie de la

Proposition 14. *La topologie de $P(\Omega_1, E)$ est identique à la topologie la moins fine rendant continues les opérations de restrictions aux parties compactes K de Ω_1 (considérées* *comme application linéaires dans $P(K, E)$); en d'autres termes, l'application $f \to (f_K)$ qui à toute $f \in P(\Omega_1, E)$ fait correspondre le système de ses restrictions aux compacts $K < \Omega_1$, est un isomorphisme vectoriel topologique de $P(\Omega_1, E)$ dans le produit topologique $\prod_K P(K, E)$. De plus, l'image de $P(\Omega_1, E)$ est une partie fermée de ce produit topologique.*

Pour établir que l'image de $P(\Omega_1, E)$ dans $\prod_K P(K, E)$ est fermée, on peut appliquer le lemme 1 du § 6. Il suffit donc de montrer que toute famille (f_K) de fonctions holomorphes locales sur les compacts $K < \Omega_1$, telles que $K' < K$ implique que $f_{K'}$ est la restriction de f_K à K', est la famille des restrictions aux compacts K d'une $f \in P(\Omega_1, E)$. Mais ce n'est autre que le lemme 1 du § 5.

Corollaire 1. *Pour que $P(\Omega_1, E)$ soit complet, il suffit que les $P(K, E)$ (pour K compact $< \Omega_2$) le soient.*

Corollaire 2. *Pour que $A < P(\Omega_2, E)$ soit partie bornée (resp. relativement compacte, resp. relativement faiblement compacte) il faut et il suffit que pour tout compact $K < \Omega_1$, l'image de A dans $P(K, E)$ le soit.*

En particulier, pour que dans $P(\Omega_1, E)$, les parties bornées soient relativement compactes (resp. relativement faiblement compactes), il suffit qu'il en soit ainsi dans les espaces $P(K, E)$.

Ces corollaires permettent de démontrer les propositions suivantes.

Proposition 15. *Si E est un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, ou un sous-espace fermé d'un tel espace (en particulier si E est un espace de Banach) $P(\Omega_1, E)$ est complet.*

En effet, on est ramené grâce au corollaire 1 au cas où Ω_1 est un compact K. Mais si E est dual fort de l'espace F de type $(\mathfrak{F})$, on a vu (proposition 13) que $P(K, E)$ est le dual fort de l'espace $P(\Omega_1, F)$ qui est du type $(\mathfrak{F})$, donc $P(K, E)$ est complet. Si E_1 est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors $P(K, E_1)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $P(K, E)$. Ce sous-espace vectoriel est fermé, car supposant $\infty \in \complement K$ pour simplifier, il est défini par les conditions: $f^{(n)}(\xi) \in E_1$ pour tout entier $n \geqq 0$ et tout $\xi \in K$. Il suffit maintenant de démontrer le lemme:

Lemme 1. *Si E est un sous-espace vectoriel fermé d'un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, et E_1 un sous-espace vectoriel fermé de E, alors la topologie de $P(\Omega_1, E_1)$ est la topologie induite par $P(\Omega_1, E)$.*

On est immédiatement ramené au cas où E est lui-même le dual fort de l'espace F du type $(\mathfrak{F})$. — L'application identique de $P(\Omega_1, E_1)$ dans $P(\Omega_1, E)$ étant évidemment continue, la topologie de $P(\Omega_1, E_1)$ est à priori plus fine que celle induite par $P(\Omega_1, E)$. Dire qu'elle est aussi moins fine, revient à dire que tout ensemble équicontinu de formes linéaires sur $P(\Omega_1, E_1)$ provient d'un ensemble équicontinu de formes linéaires sur $P(\Omega_1, E)$. Explicitant ceci au moyen de la proposition 2 bis, on est ramené à montrer ceci: $G = (E_1)^0$ étant un sous-espace vectoriel faiblement fermé du bidual F'' de l'espace F du type $(\mathfrak{F})$, A un ensemble d'applications holomorphes de l'ouvert $O (= \complement K)$ dans le quotient F''/G, tel que pour tout compact $K' < O$, $\bigcup_{f \in A} f(K')$ soit l'image d'une partie équicontinue de F'' considéré comme dual de F' fort (i. e. une partie de F'' contenue dans l'adhérence faible d'une partie bornée de F), montrer que A provient d'un ensemble B d'applications holomorphes de O dans F'', tel que pour tout compact $K' < O$, $\bigcup_{f \in B} f(K')$ soit partie équicontinue de F''.

Soit (K_i') une suite de compacts dans O telle que tout autre compact $K' < O$ soit contenu dans l'un des K_i', et soit pour tout i, M_i une partie équicontenue de F'' dont l'image dans F''/G contienne $\bigcup_{f \in A} f(K_i')$. On sait qu'il existe une suite (λ_i) de nombres > 0 telle que $\bigcup_i \lambda_i M_i$ soit partie bornée de F'' («première condition de dénombrabilité de Mackey»). Je montrerai ailleurs[4]) que toute réunion bornée d'une suite de parties équicontinues du bidual F'' d'un Fréchet F est elle même équicontinue, donc $M = \bigcup_i \lambda_i M_i$ est partie équicontinue de F''. Soit N l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée de M, N_1 son image canonique dans F''/G, c'est une partie convexe cerclée *fermée* du quotient F''/G, grâce au fait que G est faiblement fermé (car, N étant faiblement compact, $N + G$ sera partie faiblement fermée de F'', et à fortiori fortement fermée). Donc les espaces $\boldsymbol{C} \cdot N$ et $\boldsymbol{C} \cdot N_1$, munis respectivement des normes définies par les «boules» N et N_1, sont des espaces de *Banach* (voir note en bas de la page 54), et on a une application linéaire continue de $\boldsymbol{C} \cdot N$ *sur* $\boldsymbol{C} \cdot N_1$. Il suffit maintenant de considérer A comme un ensemble borné d'applications de O dans $\boldsymbol{C} \cdot N_1$, et d'appliquer le corollaire 3 de la proposition 8, pour que le résultat voulu apparaisse aussitôt.

Proposition 16. *Si E est un dual fort d'un espace* $(\mathfrak{M})$ *(resp. d'un espace* $(\mathfrak{F})$ *réflexif), ou plus généralement un sous-espace vectoriel fermé d'un tel espace, alors dans* $P(\Omega_1, E)$ *toute partie bornée est relativement compacte (resp.* $P(\Omega_1, E)$ *est semi-réflexif).*

Ici encore, on se ramène grâce au corollaire 2 de la proposition 14, au cas où Ω_1 est un compact K. Le lemme 1 ci-dessus permet de même de se ramener au cas où E est lui-même le dual fort d'un espace F du type $(\mathfrak{F})$. Mais alors, $P(K, E)$ est le dual fort de l'espace $P(\complement K, F)$ (prop. 13). Or ce dernier espace est un espace $(\mathfrak{M})$ (resp. un espace $(\mathfrak{F})$ réflexif) en vertu du théorème 5 du § 7, corollaire 1 (resp. le th. 6 du § 7, corollaire 1).

En particulier, il résulte des propositions qui précèdent que $P(\Omega_1)$ et $P(\Omega_2)$ sont des espaces réflexifs et complets, duals forts l'un de l'autre, dans chacun desquels les parties bornées sont relativement compactes («espaces $(\mathfrak{M})$ généralisés» complets). Ainsi c désignant la puissance du continu, on obtient une classe de 2^c «espaces $(\mathfrak{M})$ généralisés» complets remarquables, ne se réduisant pas à des espaces classiques.

3. Un exemple. L'exemple qui suit montrera que même dans les cas les plus simples, les propositions 11, 12, 13, 15, 16 ne sont plus valables en dehors des hypothèses restrictives que nous y avons posées.

Prenons pour E l'espace du type $(\mathfrak{M})$ ω, produit topologique d'une suite de droites complexes, et pour Ω_1 l'ensemble réduit au point origine 0. ω s'identifie à l'espace de toutes les suites complexes, son dual ω' est *somme directe* d'une suite de droites (c. f. [4]), et s'identifie donc à l'espace des suites de nombres complexes dont tous les termes à l'exception d'un nombre fini sont nuls, la dualité entre ω et ω' se concrétisant de façon évidente. — $P(\{0\}, \omega)$ s'identifie à l'espace des suites $(\bar{f}_i)$ de fonctions holomorphes complexes locales au point 0, telles que les rayons d'holomorphie des $\bar{f}_i$ au point 0 aient une borne inférieure non nulle. C'est donc une partie effective d'un produit direct $\prod_i H_i$ d'espaces H_i tous identiques à l'espace $H = P(\{0\})$.

Le dual de $P(\{0\}, \omega)$ est $P(O, \omega')$, où $O = \complement\{0\}$ (complémentaire pris par rapport à la sphère de Riemann). Or il est immédiat que toute fonction holomorphe à valeurs dans ω', définie dans un ouvert *connexe* O, prend toutes ses valeurs dans un sous-espace vectoriel de dimension finie de ω' (car toute partie bornée de ω' est de dimension finie). On peut donc identifier $P(O, \omega')$ à la somme directe d'une suite d'espaces H_i' tous identiques à l'espace $H' = P(O)$. D'autre part, cette somme directe s'identifie au dual du produit vectoriel topologique $\prod_i H_i$ des espaces H_i (c. f. [4]).

[4]) Voir note [3]) en bas de la page 90.

Les parties bornées de $P(\{0\}, \omega)$ étant identiques aux parties faiblement bornées, il suit que la partie A de $P(\{0\}, \omega)$ est bornée si et seulement si elle est bornée dans le produit topologique ΠH_i, i. e. si pour tout indice i l'ensemble des projections $\overline{f}_i$ $(f \in A)$ est borné dans $H = P(\{0\})$. Mais cela n'implique évidemment nullement que les rayons d'holomorphie des $\overline{f}_i$ (correspondants à tous les indices i et toutes les $f \in A$) aient une borne inférieure non nulle, à fortiori A *peut ne pas être image canonique d'une partie bornée d'un* $P(U, \omega)$, où U serait un voisinage de 0 dans Ω. Il en résulte aussitôt que $P(O, \omega')$ *n'est pas tonnelé, et à fortiori non réflexif, bien que* ω' *soit réflexif.* On voit de plus immédiatement que toute partie bornée du produit topologique ΠH_i est contenue dans l'adhérence d'une partie bornée de $P(\{0\}, \omega)$ (car elle est même contenue dans l'adhérence d'une partie bornée contenue dans le sous-espace somme des H_i — fait tout à fait général aux produits vectoriels topologiques, et trivial); *par suite* $P(\{0\}, \omega)$ *n'est pas semi-réflexif, bien que* ω *soit un espace* $(\mathfrak{M})$. Enfin, notons que la topologie de $P(\{0\}, \omega)$ est la topologie forte dans sa dualité avec $P(O, \omega')$ (prop. 10), mais il est d'autre part immédiat que toute partie bornée de $P(O, \omega')$ est même bornée en tant que partie de la somme directe *topologique* $\Sigma H_i'$, toujours parceque O est connexe et les parties bornées de ω' sont de dimension finie. Par suite la topologie de $P(\{0\}, \omega)$ est aussi celle induite par le produit topologique ΠH_i. Comme $P(\{0\}, \omega)$ est dense dans ce produit (car il contient la *somme* des H_i) il suit que $P(\{0\}, \omega)$ n'*est pas complet* (ω *étant un espace* $(\mathfrak{M})$).

Eingegangen 7. November 1951.

Note ajoutée après la correction des épreuves. Je viens de prendre connaissance d'un travail sur le même sujet que le mien: *C. L. da Silva Dias*, Espaços Vectoriais Topológicos E Sua Applicação Nos Espaços Funcionais Analíticos, in Boletin Da Sociedade De Matemática De São Paulo, Vol 5 (1952), 10 et 20. L'auteur y fait un emploi systématique de la théorie moderne des espaces localement convexes.