ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALEXANDER GROTHENDIECK

Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires

Annales de l'institut Fourier, tome 4 (1952), p. 73-112

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1952__4__73_0>

RESUME DES RESULTATS ESSENTIELS DANS LA THÉORIE DES PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES ET DES ESPACES NUCLÉAIRES

par A. GROTHENDIECK.

INTRODUCTION (1)

Sujet. — Cet article est destiné à donner un résumé, sans démonstration, des principaux résultats contenus dans mon travail « Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires » qui sera publié dans les *Mémoirs of the Amer Math. Society* (travail auquel je réfère comme PTT). Dans PTT prédominait le souci d'être exhaustif, tant pour traiter toutes les questions que posaient les sujets traités, que pour ramener les résultats les moins faciles à des théorèmes aussi généraux que possible. Aussi ce travail est-il assez touffu et les idées simples importantes risquent-elles d'être parfois obscurcies par les détails techniques. C'est pourquoi ce résumé expurgé n'est peut-être pas inutile pour donner un aperçu plus facilement assimilable de la théorie. Quelques compléments, intéressants mais non nécessaires pour la compréhension générale de ce résumé, ainsi que parfois des indications sur certaines démonstrations, ont été placés entre des astérisques, comme * ... *.

L'importance des produits tensoriels topologiques se manifeste dans diverses directions :

a) La notion de produit tensoriel topologique est à la base d'une bonne formulation générale et simple de la *théorie de Fredholm*, englobant en plus du cas classique d'un opérateur intégral défini par un noyau continu, beaucoup d'autres opérateurs définis dans les espaces fonctionnels les plus importants (2). Je donnerai ailleurs un développement systématique de cette théorie, qui est seulement effleurée dans ce travail.

b) Les diverses variantes de la notion de produit tensoriel topologique donnent lieu par dualité à la définition d'autant de classes remarquables de formes bilinéaires et d'opérateurs linéaires, dont

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

(2) Une telle formulation de la théorie de Fredholm semble avoir été aperçue pour la première fois par A. Ruston, Direct Product of Banach spaces and linear functional équations, *Proc. of the London Math. Soc.*, (3), 1, 1951. Mon travail sur ce sujet avait été conçu indépendamment du sien (en automne 1951), et en est assez différent.

l'étude est seulement amorcée dans PTT, chap. I, § 4. En particulier, les techniques exposées à cet endroit, convenablement systématisées et exploitées, permettent d'obtenir des résultats tout à fait inattendus dans la *théorie des transformations linéaires entre des espaces* L^1, L^2 *et* L^∞ et leurs analogues vectoriels-topologiques (résultats qui à l'heure actuelle ne sont pas encore définitifs, et pour cette raison non publiés). Je pense revenir sur ce sujet, et me borne à signaler, dans une voie assez différente, le travail systématique de von Neumann-Schatten sur les classes remarquables d'opérateurs compacts dans un espace de Hilbert [8], chap. 4.

c) Du point de vue du travail actuel, la plus importante application des produits tensoriels topologiques est la théorie des *espaces nucléaires*. On y parvient à expliquer, à généraliser de façon étendue, et à préciser en même temps le fameux « théorème des noyaux » de L. Schwartz, et de plus on trouve des propriétés nouvelles jusque dans les espaces les plus classiques. Ici le calcul tensoriel topologique prend son maximum de simplicité, car la plupart des variantes de la notion de produit tensoriel topologique coïncident, et leurs propriétés par suite s'ajoutent. Pour l'instant, les applications des théorèmes généraux que nous obtenons à des théories particulières ne sont pas encore nombreuses. La plus intéressante semble une variante vectoriel-topologique du « théorème de Künneth », donnant l'homologie d'un complexe défini comme produit tensoriel de deux complexes, variante qui semble utile en Topologie algébrique.

d) De façon générale, il me semble que les notions de produit tensoriel topologique sont tout indiquées pour fournir un *langage* suggestif et maniable, qui a intérêt à être utilisé dans beaucoup de situations en Analyse fonctionnelle, d'autant plus que nous avons à notre disposition des théorèmes (dont certains non triviaux) pour tirer profit de ce langage. J'espère que ce résumé, ou mieux le travail PTT, arrivera à donner au lecteur une impression analogue, avant la publication des articles promis ci-dessus.

Terminologie et notations. — De façon générale nous suivons la terminologie et les notations de [3], sauf que nous appelons *réflexifs* les espaces appelés semi-réflexifs dans [3]. Nous n'envisageons, sauf avis contraire, que des espaces *localement convexes* et *séparés* ; par espace quotient d'un espace E, nous entendons le quotient de E par un sous-espace vectoriel *fermé*. Le *dual* de E, noté E′, est supposé sauf avis du contraire muni de la topologie forte (*i. e.* la topologie de la convergence bornée). Le dual de E', ou *bidual* de E, noté E'', sera muni sauf avis du contraire de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E', topologie qui induit donc sur E la topologie initiale. Il nous arrivera de faire appel à des notions définies et étudiées dans [6], et notamment à la notion d'espace $(\mathfrak{DF})$. Il nous suffira ici de savoir que le dual d'un espace $(\mathfrak{F})$ est un espace $(\mathfrak{DF})$, que tout espace normé est un espace $(\mathfrak{DF})$, enfin que le dual d'un espace $(\mathfrak{DF})$ est un espace $(\mathfrak{F})$.

Soient E, F, G des espaces localement convexes. $B(E, F; G)$ (resp. $\mathfrak{B}(E, F; G)$) désigne l'espace des applications bilinéaires continues (resp. séparément continues, *i. e.* continues par rapport à chaque variable) de $E \times F$ dans G, $L(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F. $\mathfrak{B}_e(E'_s, F'_s)$ désigne l'espace des formes bilinéaires séparément continues sur le produit des duals faibles E'_s et F'_s de E et F, muni de la topologie de la *convergence biéquicontinue*, *i. e.* la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'une partie équicontinue de E' par une partie équicontinue de F'. Cet espace est complet si et seulement si les espaces E, F sont complets.

On appelle *application linéaire bornée* (*resp. compacte, resp. faiblement compacte*) de E dans F, toute application linéaire de E dans F transformant un voisinage convenable de O en une partie bornée (resp. relativement compacte, resp. relativement faiblement compacte) de F.

Pour abréger, si E est un espace vectoriel, nous appelons *disque* ou ensemble *disqué* dans E, une partie convexe et cerclée de E([3]). Soit E un espace localement convexe, A un disque borné de E, on désigne par E_A l'espace vectoriel engendré par A, muni de la norme $\|x\|_A = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda A} |\lambda|$. Si A est fermé alors la boule unité de E_A est A. Si A est complet, alors E_A est complet. Soit V un voisinage disqué de O dans E, E_V désignera l'espace normé obtenu par passage au quotient à partir de la semi-norme $\|x\|_V = \operatorname{Inf}_{x \in \lambda V} |\lambda|$.

Rappelons qu'un espace localement convexe est dit *quasi-complet* si ses parties fermées et bornées sont complètes, *tonnelé* (resp. *quasi-tonnelé*) si les parties bornées de son dual faible (resp. de son dual fort) sont équicontinues, *bornologique* si tout ensemble de formes linéaires sur E, uniformément bornées sur toute partie bornée, est équicontinue. Si E est quasi-complet, tonnelé équivaut à quasi-tonnelé; en tout cas bornologique implique quasi-tonnelé.

([3]) Cette terminologie m'a été suggérée par R.E. Edwards.

CHAPITRE PREMIER

PRODUITS TENSORIELS TOPOLOGIQUES

1. Généralités sur $E \hat{\otimes} F$ (PTT chap. I, § 1, n° 1 et n° 3). — La définition axiomatique du produit tensoriel algébrique $E \otimes F$ de deux espaces vectoriels E et F, et de l'application bilinéaire canonique $(x, y) \rightarrow x \otimes y$ de $E \times F$ dans $E \otimes F$, [1], pose que pour tout espace vectoriel G, les applications bilinéaires de $E \times F$ dans G correspondent biunivoquement aux applications linéaires f de $E \otimes F$ dans G, lorsqu'à f on fait correspondre l'application $(x, y) \rightarrow f(x \otimes y)$.

THÉORÈME 1. — *Si* E *et* F *sont deux espaces localement convexes, alors on peut munir* $E \otimes F$ *d'une topologie localement convexe et d'une seule, telle que pour tout espace localement convexe* G, *les applications bilinéaires* continues *de* $E \times F$ *dans* G *correspondent exactement aux applications linéaires* continues *de* $E \otimes F$ *dans* G.

Alors les parties *équicontinues* de B(E, F ; G) et de L($E \otimes F$; G) se correspondent aussi exactement. Sauf mention du contraire, $E \otimes F$ sera supposé muni de la topologie précédente, appelée produit tensoriel projectif des topologies de E et F ; muni de cette topologie, $E \otimes F$ prend le nom de *produit tensoriel topologique projectif* de E et F.

Si E et F sont normés, $E \otimes F$ est normable, et on peut même y trouver une norme et une seule telle que, pour tout espace *normé* G, l'isomorphisme ci-dessus entre B(E, F ; G) et L($E \otimes F$; G) conserve les normes naturelles. Cette norme sur $E \otimes F$, notée $u \rightarrow \|u\|_1$ quand les normes de E et F sont sous-entendues, est la borne inférieure des quantités $\sum_i \|x_i\| \|y_i\|$, pour toutes les représentations de u sous la forme $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ (norme déjà considérée dans [8]). C'est aussi la jauge de l'ensemble $\Gamma(U \otimes V)$, où U (resp. V) est la boule unité de E (resp. F), et où $U \otimes V$ désigne l'ensemble des $x \otimes y$ avec $x \in U$, $y \in V$

(Γ désignant comme d'habitude l'enveloppe disquée). Dans le cas où E et F sont des espaces localement convexes généraux, un système fondamental de voisinages de O dans $E \otimes F$ est obtenu en prenant les ensembles $\Gamma(U \otimes V)$, ou U (resp. V) parcourt un système fondamental de voinages de O dans E (resp. F).

On peut introduire le complété de $E \otimes F$, noté $E \widehat{\otimes} F$, et appelé *produit tensoriel projectif complété* de E et F. Si E et F sont des espaces normés, $E \widehat{\otimes} F$ est un espace de Banach (avec une norme bien définie !). Si E et F sont métrisables, $E \widehat{\otimes} F$ est du type $(\mathcal{F})$. On a par définition le *Scholie* : Si E et F sont deux espaces localement convexes, G un espace localement convexe *complet*, alors les applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G correspondent biunivoquement aux applications linéaires continues de $E \widehat{\otimes} F$ dans G.

Cet énoncé reste valable pour les ensembles équicontinus d'applications. En particulier, le dual de $E \widehat{\otimes} F$ est B(E, F), avec correspondance entre les parties équicontinues (ce qui suffit déjà à caractériser la topologie induite sur $E \otimes F$).

J'ignore, si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, si cet isomorphisme algébrique du dual de $E \widehat{\otimes} F$ sur B(E, F) est un isomorphisme topologique, quand on munit B(E, F) de la topologie de la convergence bibornée, *i, e*, de la convergence uniforme sur les produits de deux bornés (« Problème des topologies »). Question équivalente : Toute partie bornée de $E \widehat{\otimes} F$ est-elle contenue dans l'enveloppe disquée fermée d'un ensemble $A \widehat{\otimes} B$, où A (resp. B) est une partie bornée de E (resp. F) ?

* Donnons quelques indications générales sur le calcul avec $E \widehat{\otimes} F$ (PTT, chap. I, § I, n° 3). Si $E = \prod_i E_i$, $F = \prod_j F_j$ (produits vectoriels-topologiques) alors $E \widehat{\otimes} F$ s'identifie à $\prod_{i,j} E_i \widehat{\otimes} F_j$. Si $E = \sum_i E_i$ (somme directe topologique) et si F est un espace normable, alors $E \widehat{\otimes} F$ s'identifie à la somme directe topologique $\sum_i (E_i \widehat{\otimes} F)$. Cela reste vrai si F est un espace $(\mathcal{DF})$ quelconque, pourvu que I soit dénombrable, et ces énoncés se généralisent aussi au cas où E est la limite inductive (au sens le plus général) d'une famille d'espaces E_i. Si E et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$ (resp. $(\mathcal{DF})$), il en est de même de $E \widehat{\otimes} F$. De même, si E et F sont des espaces quasi-normables, ou des espaces de Schwartz (voir définitions dans [6], § 3), il en est de même de $E \widehat{\otimes} F$. *

2. L'espace $E \widehat{\otimes} F$ quand E et F sont du type $(\mathcal{F})$ (PTT, chap. 1, § 2, N° 1).

Théorème 2. — *Soient* E *et* F *deux espaces* $(\mathcal{F})$. *Alors tout élément de* $E \widehat{\otimes} F$ *est la somme d'une série absolument convergente de la forme*

$$u = \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$$

où (x_i) *(resp.* (y_i)*) est une suite bornée dans* E *(resp.* F*), et* (λ_i) *une suite sommable de scalaires.*

(D'ailleurs, si (x_i), (y_i) et (λ_i) sont donnés comme ci-dessus, la série $\sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$ est toujours absolument convergente dans $E \widehat{\otimes} F$, de sorte que nous avons une *caractérisation* des éléments de $E \widehat{\otimes} F$.) Si E et F sont normés, on peut supposer ci-dessus que $\|x_i\| \leqslant 1$, $\|y_i\| \leqslant 1$, $\sum_i |\lambda_i| \leqslant \|u\|_1 + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est donné arbitrairement à l'avance. Dans ces deux énoncés, si u parcourt un compact de $E \widehat{\otimes} F$, on peut supposer que les suites (x_i) et (y_i) restent fixes (et on peut supposer même que ce sont des suites convergeant vers 0), et que (λ_i) parcourt une partie compacte de l^1 (espace des suite sommables). On a un énoncé analogue pour la représentation concrète des suites convergentes dans $E \widehat{\otimes} F$. Le théorème 2 et ses variantes précédentes servent surtout par l'intermédiaire du

Corollaire. — *Soient* E *et* F *deux espaces du type* $(\mathcal{F})$. *Toute partie compacte* K *de* $E \widehat{\otimes} F$ *est contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace* $E_A \widehat{\otimes} F_B$, *où* A *(resp.* B*) est une partie compacte disquée de* E *(resp.* F*). A fortiori,* K *est contenu dans l'enveloppe convexe fermée de* $A \otimes B$.

Ce dernier fait signifie aussi que sur B(E, F), la topologie de la « convergence bicompacte » est identique à la topologie de la convergence compacte dans le dual de $E \widehat{\otimes} F$.

* Pour la preuve du théorème 2, supposons pour simplifier que E et F sont des espaces de Banach, soit I le produit de leurs boules unité, soient $i \to x_i$ et $i \to y_i$ les projections de I sur les ensembles facteurs. Il est facile de voir que l'application linéaire $(\lambda_i) \to \sum_i \lambda_i x_i \otimes y_i$ de $l^1(I)$ dans $E \widehat{\otimes} F$ est un homomorphisme métrique du premier espace sur un sous-espace dense du second, donc en fait *sur* le second, d'où résulte bien que $E \widehat{\otimes} F$ s'identifie à un espace quotient de $l^1(I)$.

On peut tirer du th. 2 des résultats du genre suivant : soit $\mathcal{G}$ un groupe localement compact (resp. un groupe de Lie), alors toute fonction f sommable (resp. indéf. diff. et à support compact) sur $\mathcal{G}$ est de la forme $\Sigma\lambda_i g_i * h_i$, où $(\lambda_i) \in l^1$, et où (g_i) et (h_i) sont des suites bornées dans $L^1(\mathcal{G})$ (resp. dans $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, espace des fonctions ind. diff. à support compact sur $\mathcal{G}$); on en conclut aussitôt que f est combinaison linéaire de fonctions de type positif qui sont $\in L^1(\mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{D}(\mathcal{G})$). Dans le premier cas, on peut aussi se borner à des fonctions qui soient toutes à support compact (les supports de g_i, h_i étant contenus dans un compact ne dépendant que du support compact de f). Il y a une démonstration directe simple dans le cas de $L^1(\mathcal{G})$, mais je ne pense pas qu'il y en ait pour $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, où la question présente des difficultés même pour $\mathcal{G} = R$ (en se servant alors de la transformation de Fourier). $_*$

3. **Calcul de $L^1 \hat{\otimes} E$** (PTT, chap. I, § 2, N° 2). — Soit M un espace localement compact muni d'une mesure $\mu \geqslant 0$, soit E un espace de Banach, soit $L^1_E(\mu)$ l'espace des applications μ-intégrables de M dans E [2], muni de sa norme usuelle $\|f\|_1 = \int \|f(t)\|\, d\mu(t)$. $L^1(\mu)$ désigne l'espace des fonctions scalaires sommables pour μ. Alors il existe une application bilinéaire $(\varphi, a) \rightarrow \varphi . a$ évidente de $L^1(\mu) \times E$ dans $L^1_E(\mu)$, qui est de norme $\leqslant 1$, et définit donc une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ dans $L^1_E(\mu)$.

Théorème 3. — *L'application précédente de* $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ *dans* $L^1_E(\mu)$ *est un isomorphisme métrique du premier espace sur le second.*

Pour le voir, on se ramène aussitôt au cas où E est de dimension finie, puis on procède par transposition. Il suffit alors d'appliquer le théorème classique de Dunford-Pettis, caractérisant les applications linéaires continues de $L^1(\mu)$ dans E'.

Si E est un espace localement convexe quelconque, on désigne par $L^1_E(\mu)$ l'espace complété de l'espace séparé associé à l'espace des applications continues à support compact de M dans E, muni de la famille des semi-normes $f \rightarrow \int p(f(t))\, d\mu(t)$ (où p parcourt une famille fondamentale de semi-normes continues dans E). Alors le théorème 3 implique facilement que $L^1_E(\mu)$ soit encore isomorphe à $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$.

Corollaire. — *Si* E *est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach* F, *alors l'application linéaire canonique de* $L^1(\mu) \hat{\otimes} E$ *dans* $L^1(\mu) \hat{\otimes} F$ *est un isomorphisme métrique.*

Cela redonne par exemple le fait bien connu que toute application linéaire continue de E dans le dual $L^\infty(\mu)$ de $L^1(\mu)$ peut se prolonger en une application linéaire de même norme de F dans $L^\infty(\mu)$; ou dualement, que toute application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace quotient F'/E^0 d'un dual de Banach par un sous-espace vectoriel faiblement fermé, provient d'une application linéaire de norme égale de $L^1(\mu)$ dans F'.

* L'analogue du théorème 3 pour les espaces L^p est faux pour tout $p > 1$. Le théorème 3 s'applique de façon essentielle à divers endroits importants de la théorie exposée ici. Donnons quelques applications moins importantes (voir PTT, chap. 1, § 2, n° 2 pour des détails). Prenant, dans le théorème 3, $E = c_0$, espace des suites scalaires qui tendent vers O, et notant que $L^1_E(\mu)$ s'identifie alors à l'espace des suites latticiellement bornées dans $L^1(\mu)$ qui tendent vers O presque partout, on voit que de telles suites dans $L^1(\mu)$ forment une catégorie de suites invariante au point de vue vectoriel-topologique. En particulier, une application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace $L^1(\nu)$ transforme les suites latticiellement bornées convergeant presque partout vers O, en des suites de même type. On en déduit aussi que les parties latticiellement bornées de $L^1(\mu)$ forment une catégorie invariante au point de vue vectoriel-topologique. Prenant $F = l^p$, avec $1 \leqslant p < +\infty$, on obtient de même une interprétation vectorielle-topologique des suites (f_i) dans $L^1(\mu)$ telles que

$$\int \Bigl(\sum_i |f_i(t)|^p\Bigr)^{1/p} d\mu(t) < +\infty .$$

De telles suites sont transformées en des suites de même type par toute application linéaire continue de $L^1(\mu)$ dans un espace $L^1(\nu)$. Une autre application intéressante du théorème 3 est la suivante : Toute partie bornée M de $L^1(\mu) \widehat{\otimes} E$ est contenue dans l'image canonique de la boule unité d'un espace $L^1(\mu) \widehat{\otimes} E_A$, où A est un disque borné fermé de l'espace E du type $(\mathcal{F})$; à fortiori M est contenue dans l'enveloppe disquée fermée de $B \otimes A$, où B est la boule unité de $L^1(\mu)$, ce qui résoud ici le « Problème des topologies » signalé au n° 1. *

4. Autres exemples. — Si H est un espace de Hilbert, les éléments de $H' \widehat{\otimes} H$, identifiés à des endomorphismes de H (les *applications de Fredholm* ou *applications nucléaires* de H dans H — voir n° 7 —) sont exactement les endomorphismes u tels que l'opérateur hermitien positif $\sqrt{u^*u}$ soit compact et ait une suite de valeurs propres sommable, et $||u||_1$ est alors égal à la somme des valeurs propres de $\sqrt{u^*u}$ (répétées bien entendu chacune selon sa multiplicité). On obtient les opérateurs déjà étudiés dans [4] et [8]. u est aussi un opérateur de Fredholm si et seulement si ses composantes hermitiennes $\frac{1}{2}(u+u^*)$ et $\frac{1}{2i}(u-u^*)$ le sont, *i. e.* si ce sont des hermitiens compacts dont la suite des valeurs propres est sommable. *Relation avec les opérateurs de Hilbert-Schmidt : Si* A *et* B *sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt, alors* AB *est un opérateur de Fredholm, et* $||AB||_1 \leqslant ||A||_2||B||_2$; et réciproquement, d'ailleurs, tout opérateur de Fredholm u est le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt A et B de norme $||A||_2 = ||B||_2 = \sqrt{||u||_1}$. Tous ces faits sont élémentaires (une fois connue la décomposition spectrale des opérateurs hermitiens compacts dans un espace de Hilbert) et bien connus.

De nombreux autres exemples de produits $E \hat{\otimes} F$, relatifs aux *espaces nucléaires*, seront vus au chapitre II, n° 5.

★ Dans le cadre des espaces de Banach de dimension infinie, je ne connais pas, même dans des cas particuliers, d'autres caractérisations concrètes des éléments de $E \hat{\otimes} F$ que celles que nous avons données. Ainsi, les éléments de $c_0 \hat{\otimes} E$ (où E pourra être un espace localement convexe complet quelconque) s'identifient à *certaines* suites dans E tendant vers O, que l'on pourra appeler les suites *nucléairement convergentes* vers O ; mais si E est un espace de Banach de dimension infinie, on obtient toujours là une classe strictement plus petite que la classe de toutes les suites convergentes vers O (voir chap. II, n° 2, th. 2). On montre même que (si E est un espace de Banach de dimension infinie), pour toute suite (λ_i) de scalaires positifs qui n'est pas de carré sommable, il existe dans E une suite (x_i) qui ne converge pas nucléairement vers O, et telle que $||x_i|| = \lambda_i$ pour tout i. Cependant, si E est l'espace C(K) des fonctions continues sur un espace compact par exemple, on montre que toute suite de carré sommable dans C(K) converge nucléairement vers O. Signalons aussi que dans un espace localement convexe complet quelconque, toute suite sommable converge nucléairement vers O. ★

5. Espaces $E \check{\otimes} F$ (PTT, chap. I, § 3, N° 3). — Si E et F sont deux espaces de Banach, alors $E \otimes F$ peut être considéré comme un sous-espace vectoriel de l'espace de Banach B(E', F') des formes biliné-

aires continues sur $E' \times F'$. Le complété de $E \otimes F$ pour la norme induite par $B(E', F')$ se note $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$, c'est donc un sous-espace vectoriel normé complet de $B(E', F')$. Toute topologie normée raisonnable sur $E \otimes F$ est comprise entre la topologie induite par $E \widehat{\otimes} F$ et celle induite par $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$. Si maintenant E et F sont deux espaces localement convexes quelconques, on peut encore considérer $E \otimes F$ comme un espace de formes bilinéaires sur $E' \times F'$, et le munir de la topologie de la convergence biéquicontinue (i. e. la topologie de la convergence uniforme sur les produits d'une partie équicontinue de E' par une partie équicontinue de F') : le complété de $E \otimes F$ pour cette topologie sera encore noté $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$. Quand E et F sont complets, l'espace $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$ des formes bilinéaires séparément continues sur le produit $E'_s \times F'_s$ des duals faible E'_s et F'_s, muni de la topologie de la convergence biéquicontinue, est complet, donc $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ s'identifie alors à un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{L}_e(E'_s, F'_s)$. Alors les éléments de $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ s'identifient donc à certaines applications bilinéaires séparément faiblement continues sur $E' \times F'$, ou encore à certaines applications linéaires faiblement continues de E' dans F ; ces applications linéaires transforment les parties équicontinues de E' en des parties relativement compactes de F, et la réciproque est vraie dans tous les cas connus (voir Appendice 2, Chapitre 1).

La topologie sur $E \otimes F$ induite par $E \widehat{\otimes} F$ est plus fine que celle induite par $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$, d'où une application linéaire continue canonique

$$E \widehat{\otimes} F \to E \widehat{\widehat{\otimes}} F.$$

Un important problème, non résolu, est si cette application est toujours biunivoque, voir Appendice 2. Signalons qu'il semble extrêmement plausible que si E et F sont deux espaces de Banach tels que l'application précédente $E \widehat{\otimes} F \to E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ soit un isomorphisme topologique (ou même seulement un homomorphisme topologique, *i. e.* ici une application du premier espace *sur* le second), alors E ou F est de dimension finie. C'est vrai par exemple si E contient un sous-espace vectoriel isomorphe à un espace l^p ou à c_0.

Soient E et F deux espaces de Banach. La norme induite par le dual de $E \widehat{\otimes} F$ sur $E' \otimes F'$ est évidemment la norme induite par $E' \widehat{\widehat{\otimes}} F'$. D'autre part la norme induite sur $E' \otimes F'$ par le dual de $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$ est dans tous les cas connus (voir Appendice 2) identique à la norme induite par $E' \widehat{\otimes} F'$. Cette dualité, qui n'apparaît guère dans le présent résumé, est un outil précieux dans diverses questions (p. ex.

PTT, chap. I, § 4, N° 6). Le théorème qui suit. à vrai dire trivial, peut être regardé comme la contre-partie duale du th. 3 :

THÉORÈME 4. — *Soit* M *un espace localement compact,* $C_0(M)$ *l'espace des fonctions scalaires continues sur* M « *nulles à l'infini* », *muni de la norme de la convergence uniforme, soit* E *un espace localement convexe complet. Alors* $C_0(M) \widehat{\otimes} E$ *est canoniquement isomorphe à l'espace* $C_0(M, E)$ *des applications continues de* M *dans* E *qui sont nulles à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme (et de la norme uniforme quand* E *est un espace de Banach). En particulier,* $c_0 \widehat{\widehat{\otimes}} E$ *est isomorphe à l'espace des suites dans* E *qui tendent vers* O.

Comme plus bas les espaces $C(K) \widehat{\otimes} E$, ici les espaces $L^1(\mu) \widehat{\widehat{\otimes}} E$ n'ont en général pas d'interprétation spéciale simple comme espaces fonctionnels. Signalons cependant que *l'espace* $l^1 \widehat{\widehat{\otimes}} E$ *peut s'interpréter comme l'espace des suites sommables dans* E (i. e. des suites « commutativement convergentes » dans E).

6. Produit tensoriel d'applications linéaires (PTT. chap. I, § I, N° 2). — Soient E_i, F_i $(i = 1, 2)$ des espaces localement convexes, soit u_i une application linéaire continue de E_i dans F_i. Alors on définit en algèbre une application linéaire $u_1 \otimes u_2$ de $E_1 \otimes E_2$ dans $F_1 \otimes F_2$, par la formule $(u_1 \otimes u_2).(x_1 \otimes x_2) = u_1x_1 \otimes u_2x_2$. Cette application est continue quand on munit $E_1 \otimes E_2$ et $F_1 \otimes F_2$ des topologies induites par $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ et $F_1 \widehat{\otimes} F_2$ (resp. par $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}} E_2$ et $F_1 \widehat{\widehat{\otimes}} F_2$). Il en résulte que $u_1 \otimes u_2$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ de $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \widehat{\otimes} F_2$, et une application linéaire continue $u_1 \widehat{\widehat{\otimes}} u_2$ de $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}} E_2$ dans $F_1 \widehat{\widehat{\otimes}} F_2$ (ces applications seront encore simplement notées $u_1 \otimes u_2$ quand il n'y a pas de confusion à craindre).

THÉORÈME 5. — *Si chaque* u_i *est un homomorphisme topologique de* E_i *sur un sous-espace dense de* F_i, *alors* $u_1 \widehat{\otimes} u_2$ *est un homomorphisme topologique de* $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ *sur un sous-espace dense de* $F_1 \widehat{\otimes} F_2$. *Si chaque* u_i *est un isomorphisme topologique de* E_i *dans* F_i, *alors* $u_1 \widehat{\widehat{\otimes}} u_2$ *est un isomomorphisme topologique de* $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}} E_2$ *dans* $F_1 \widehat{\otimes} F_2$.

Ces énoncés subsistent si les E_i, F_i sont normés et s'il s'agit d'homomorphismes et isomorphismes *métriques*. Particulièrement intéressant est le corollaire suivant, qui pourrait aussi s'obtenir par application du th. 2 :

COROLLAIRE. — *Si les* E_i, F_i *sont des espaces* $(\mathcal{F})(i = 1, 2)$, u_i *un* *homomorphisme de* E_i sur F_i, *alors* $u_1 \hat{\otimes} u_2$ *est un homomorphisme de* $E_1 \hat{\otimes} E_2$ sur $F_1 \hat{\otimes} F_2$.

Comme cas particuliers de ce corollaire, on obtient des propriétés intéressantes de relèvement de fonctions vectorielles à valeurs dans un espace quotient d'un espace E du type ($\mathcal{F}$). Si p. ex. f est une application indéfiniment différentiable d'un ouvert de R^n dans E/F, alors elle provient d'une application indéfiniment différentiable de cet ouvert dans E. Résultat analogue pour les fonctions holomorphes, ou les fonctions sur R^n indéfiniment différentiables à décroissance rapide, ou les fonctions sommables pour une certaine mesure, etc. (⁴). Autre application : soit D un opérateur différentiel dans l'espace $\mathcal{E}(U)$ des fonctions indéfiniment différentiables dans un ouvert U de R^n, soit E un espace ($\mathcal{F}$), soit $\mathcal{E}(U, E)$ l'espace des applications indéfiniment différentiables de U dans E. On a $\mathcal{E}(U, E) = \mathcal{E}(U) \hat{\otimes} E = \mathcal{E}(U) \hat{\hat{\otimes}} E$ (voir Chap. 2, N° 5). Soit D_E l'opérateur défini dans $\mathcal{E}(U, E)$ à partir de D, on a $D_E = D \hat{\otimes} I$, I étant l'identité dans E. Si alors D est un homomorphisme topologique (resp. un homomorphisme topologique *sur*), il en est de même de D_E. En effet, dans le cas d'un homomorphisme sur, c'est là un cas particulier du corollaire du th. 5, et dans le cas général, on utilise le th.5 et le fait que pour tout espace quotient F de $\mathcal{E}(U)$, on a $F \hat{\otimes} E = F \hat{\hat{\otimes}} E$ ($\mathcal{E}(U)$ donc F étant nucléaire, voir Chap. 2, N° 2 définition 1 et Chap. 2, N° 3, th. 3, 2°).

On notera que si u_1 et u_2 sont des isomorphismes topologiques, alors $u_1 \hat{\otimes} u_2$ n'est pas un isomorphisme topologique en général (ni $u_1 \hat{\hat{\otimes}} u_2$ un homomorphisme topologique, en général, quand u_1 et u_2 sont des homomorphismes topologiques *sur*). Si chaque E_i est identifié à un sous-espace vectoriel topologique de F_i par u_i, alors l'application canonique $u_1 \hat{\otimes} u_2$ de $E_1 \hat{\otimes} E_2$ dans $F_1 \hat{\otimes} F_2$ est un isomorphisme topologique si et seulement si tout ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des restrictions d'un ensemble équicontinu de formes bilinéaires sur $F_1 \times F_2$. Quand F_1

(⁴) Signalons à ce propos qu'on démontre par une méthode toute différente l'assertion suivante, qui peut être regardée comme duale du corollaire du th. 3 : Soit M un espace localement compact et paracompact (p. ex. un espace compact), f une application continue de M dans un espace quotient E/F d'un espace E du type ($\mathcal{F}$) : alors f provient d'une application continue de M dans E. Comme l'espace $\mathcal{E}^{(m)}(V)$ des fonctions m fois continûment différentiables sur une variété indéfiniment différentiable paracompacte V, est isomorphe à un facteur direct d'un espace du type C(M) (comme je l'ai signalé dans : Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K), *Can. J. Math.* 5, p. 144 (1953)), il en résulte que le théorème de relèvement analogue vaut aussi pour les applications m fois continûment différentiables de V dans E/F.

et F_2 sont du type ($\mathcal{F}$), il suffit d'ailleurs de considérer les ensembles réduits à *une* forme bilinéaire. En général ce critère ne sera pas vérifié, mais est lié à un problème d'existence de supplémentaires topologiques.

* De façon précise, si E_1 et E_2 sont facteurs directs, alors $E_1 \widehat{\otimes} E_2$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique de $F_1 \widehat{\otimes} F_2$. D'autre part, si E est un sous-espace vectoriel topologique de l'espace de Banach F, et si l'application canonique $E \widehat{\otimes} G \to F \widehat{\otimes} G$ est un isomorphisme topologique quand $G = F'$, alors E'' est facteur direct dans F'' ; donc dans le cas fréquent où E est déjà facteur direct dans E'', E sera facteur direct de F.

Un cas utile où le produit tensoriel $u \widehat{\otimes} v$ de deux isomorphismes topologiques est un isomorphisme topologique est le suivant : Si E'' est le bidual de E, alors $E \widehat{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique (resp. un sous-espace vectoriel normé si E et F sont normés) de $E'' \widehat{\otimes} F$. *

7. **Applications nucléaires** (PTT, chap. I, § 3 N° 2). — Soient E et F deux espaces de Banach. L'application bilinéaire continue $(x', y) \to x' \otimes y$ de $E' \times F$ dans L(E, F) définit une application linéaire continue naturelle de $E' \widehat{\otimes} F$ dans L(E, F) ; les éléments de l'image de $E' \widehat{\otimes} F$ dans L(E, F) sont dits *applications nucléaires* de E dans F. (On définit aussi, entre espaces localement convexes quelconques, les notions *d'application à trace* et *d'application de Fredholm* — voir Appendice I — , qui coïncident avec la notion d'application nucléaire quand E et F sont des espaces de Banach ; dans ce dernier cas, on pourra donc parler indifféremment d'applications nucléaires, d'applications à trace ou d'applications de Fredholm.) Les applications nucléaires de E dans F forment un espace vectoriel, qui s'identifie à un espace quotient de $E' \widehat{\otimes} F$ (et à $E' \widehat{\otimes} F$ dans tous les cas connus — voir « Problème de biunivocité » au N° 1). La norme quotient, notée encore $u \to \|u\|_1$, est appellée *norme-trace* de l'opérateur nucléaire u.

Si E et F sont deux espaces localement convexes quelconques, une application linéaire u de E dans F est dite *nucléaire*, si elle est la composée d'une séquence de trois opérateurs

$$E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\beta} F_1 \xrightarrow{\gamma} F$$

où E_1 et F_1 sont des espaces de Banach, β une application nucléaire de E_1 dans F_1, et α et γ des applications linéaires continues. Il revient au même de dire qu'il existe une partie équicontinue disquée faiblement fermée A de E', et une partie bornée disquée B dans F telle que F_B soit complet, enfin un $u_0 \in E'_A \hat{\otimes} F_B$, tels que u soit l'opérateur de E dans F défini par u_0 (à priori, u_0 définit une application nucléaire de $\widehat{E}_{A^0}$ dans F_B). *Une application nucléaire est toujours compacte* (*i. e.* transforme un voisinage convenable de O en un ensemble relativement compact). Mieux : à cause du corollaire du théorème 2, on peut supposer ci-dessus que A resp. B sont des parties *compactes* de E' fort resp. F. Le théorème 2, appliqué directement, donne aussi : les applications nucléaires de E dans F sont les applications qui sont sommes des séries (toujours absolument convergentes dans L (E, F) muni de la topologie de la convergence bornée) $u = \Sigma \lambda_i x'_i \otimes y_i$, où (x'_i) est une suite équicontinue dans E', (y_i) une suite extraite d'un disque compact de F, enfin (λ_i) une suite sommable de scalaires. En composant une application nucléaire, à droite ou à gauche, avec une application linéaire continue, on obtient encore une application nucléaire. La transposée d'une application nucléaire de E dans F est une application nucléaire de F' fort dans E' fort (et même de F' muni de la convergence uniforme sur les disques compacts de F, dans E' fort).

Les applications nucléaires de E dans lui-même (plus précisément la catégorie un peu plus large des applications de Fredholm de E dans E), forment le domaine naturel de la *théorie de Fredholm*. Ici, notre intérêt se porte sur d'autres propriétés de ces opérateurs, résultant directement soit du th. 2, soit du th. 5, corollaire.

THÉORÈME 6. — *Soient* E, G *deux espaces localement convexes*, F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors :*

a) *Toute application nucléaire de* F *dans* G *est la restriction d'une application nucléaire de* E *dans* G.

b) *Supposons que* F *soit fermé, et que tout disque compact de* E/F *soit contenu dans l'image canonique d'un disque borné* A *de* E *tel que* E_A *soit complet* (*par exemple d'un disque borné* complet *de* E). (*Il suffit par exemple que* E *soit du type* ($\mathcal{F}$), *ou que ce soit le dual d'un espace du type* ($\mathcal{F}$) *et que* F *soit* faiblement *fermé.*) *Alors toute application nucléaire de* G *dans* E/F *peut s'obtenir par passage au quotient à partir d'une application nucléaire de* G *dans* E.

On a des énoncés analogues pour les ensembles « équinucléaires » d'applications, si on entend par là un ensemble d'applications d'un espace localement convexe M dans un autre N, contenu dans l'ensemble d'applications défini par la boule unité d'un espace $M'_A \hat{\otimes} N_B$, où A est un disque équicontinu faiblement fermé de M', B un disque borné dans N tel que N_B soit complet.

On fera attention que si u est une application nucléaire de E dans F, M un sous-espace vectoriel fermé de E contenu dans le noyau du u, N un sous-espace vectoriel fermé de F contenant $u(E)$, alors en général l'application linéaire de E/M dans F ou de E dans N définie par *u n'est pas nucléaire*, même si E et F sont des espaces de Banach réflexifs. Cependant, si M (resp. N) admet un supplémentaire topologique, alors l'application de E/M dans F (resp. de E dans N) définie par u sera encore nucléaire. Il en est en particulier ainsi si E (resp. F) est un espace de Hilbert.

8. Applications linéaires intégrales, formes bilinéaires intégrales (PTT. § 4, N° 3 et N° 4).

THÉORÈME 7. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes* (*resp. normés*), v *une forme bilinéaire séparément continue sur* $E \times F$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $u \rightarrow \langle u, v \rangle$ *est une forme linéaire sur* $E \otimes F$ *continue pour la topologie induite par* $E \hat{\hat{\otimes}} F$ (*resp.* $u \rightarrow \langle u, v \rangle$ *est une forme linéaire sur* $E \otimes F$ *de norme* $\leqslant 1$, *quand* $E \otimes F$ *est muni de la norme induite par* $E \hat{\hat{\otimes}} F$).

b) v *est contenue dans l'enveloppe disquée fermée dans* $\mathfrak{B}_s(E, F)$ (*espace* $\mathfrak{B}(E, F)$ *muni de la topologie de la convergence simple*) *d'un ensemble* $M \otimes N$, *où* M *est une partie équicontinue de* E', N *une partie équicontinue de* F' (*resp.* M *la boule unité de* E', N *la boule unité de* F').

c) *Il existe une mesure* μ *sur l'espace produit d'une partie équicontinue faiblement compacte* M *de* E' *par une partie équicontinue faiblement compacte* N *de* F' (*resp. une mesure* μ *de norme* $\leqslant 1$ *sur le produit de la boule unité de* E' *par la boule unité de* F', *muni du produit des topologies faibles*) *telle que l'on ait la formule*

$$v = \int_{M \times N} x' \otimes y' \, d\mu(x', y')$$

(*intégrale faible dans* $\mathfrak{B}(E, F)$, *mis en dualité avec* $E \otimes F$).

d) *Il existe un espace compact muni d'une mesure positive* μ *de norme* $\leqslant 1$, *une application linéaire continue* α *de* E *dans* $L^\infty(\mu)$ *et une application linéaire continue* β *de* F *dans* $L^\infty(\mu)$(*resp. et* α *et* β

de norme $\leqslant 1$), *tels que l'on ait* $u(x, y) = \langle \alpha x, \beta y \rangle$ *pour* $x \in E$, $y \in E$.

Une forme bilinéaire sur $E \times F$ est dite *intégrale* si elle satisfait aux conditions équivalentes *a*) à *d*) du théorème 7. En particulier, le dual de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ s'identifie à l'espace $J(E, F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$. Si E et F sont des espaces de Banach, $J(E, F)$ sera muni de la norme du dual de l'espace de Banach $E \hat{\hat{\otimes}} F$, appelée *norme intégrale* et notée $\|v\|'_1$. De même, une application linéaire v d'un espace localement convexe E dans un autre G est dite *intégrale*, si la forme bilinéaire sur $E \times G'$ qui lui correspond est intégrale.

Si E et G sont des espaces de Banach, on appelle encore norme intégrale de v, la norme intégrale de la forme bilinéaire qui lui correspond.

Rappelons que dans tous les cas connus, quand E et F sont des espaces de Banach, l'application linéaire naturelle de $E' \hat{\otimes} F'$ dans $J(E, F)$ est un isomorphisme métrique du premier espace dans le second (voir n° 5), c'est pourquoi nous employons pour la norme intégrale la notation $\|v\|'_1$ voisine de la notation $\|v\|_1$ pour la norme-trace. Le critère *d*) du th. 7 prend pour les applications linéaires intégrales la forme suivante (que nous énonçons pour les espaces de Banach pour fixer les idées) : Soit v une application linéaire d'un espace de Banach E dans un autre F, alors v est intégrale et de norme intégrale $\leqslant 1$ si et seulement si l'application de E dans F'' qu'elle définit peut s'obtenir en composant une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de E dans un espace $L^\infty(\mu)$ construit sur une mesure positive convenable de norme $\leqslant 1$ sur un espace compact, l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$, et enfin une application linéaire de norme $\leqslant 1$ de $L^1(\mu)$ dans F''. De même, le critère *b*) du th. 7 donne facilement : l'application linéaire v de E dans F est intégrale et de norme intégrale $\leqslant 1$ si et seulement si elle est adhérente dans $L_s(E, F_s)$ à l'enveloppe disquée de l'ensemble des $x' \otimes y$, où x' (resp. y) parcourt la boule unité de E' (resp. de F) ; ou encore si elle est adhérente à l'ensemble des opérateurs nucléaires de norme-trace $\leqslant 1$ (F_s désigne F muni de la topologie faible, et $L_s(E, F_s)$ désigne $L(E, F_s)$ muni de la convergence simple).

Exemples. — Soient E et F des espaces localement convexes quelconques, alors toute forme bilinéaire sur $E \times F$ définie par un élément d'un espace $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, où A (resp. B) est une partie équicontinue disquée faiblement fermée de E' (resp. F'), est intégrale. Donc toute application nucléaire de E dans F est intégrale. La réciproque est fausse même pour les espaces de Banach, puisque l'application identique de $L^{\infty}(\mu)$ dans $L^{1}(\mu)$ est intégrale, mais n'est en général pas même compacte. Si $E = C(M)$, $F = C(N)$, espace des fonctions scalaires continues sur l'espace compact M resp. N, on a vu (N° 5, th. 4) que $C(M) \hat{\otimes} C(N)$ s'identifie avec sa norme à l'espace $C(M \times N)$, donc l'espace des formes bilinéaires intégrales sur $C(M) \times C(N)$ s'identifie avec sa norme à l'espace des mesures de Radon sur l'espace compact $M \times N$. D'autres exemples seront vus au N° 9.

En composant à gauche ou à droite une application linéaire intégrale avec une application linéaire continue, on obtient encore une application linéaire intégrale. La transposée d'une application intégrale de E dans F est une application intégrale de F' fort dans E' fort.

Utilisant par exemple le critère *a*) du th. 7, on trouve que si E_1 et E_2 sont des espaces localement convexes, F_1 (resp. F_2) un sous-espace vectoriel topologique de E_1 (resp. E_2), alors toute forme bilinéaire intégrale sur $F_1 \times F_2$ peut se prolonger en une forme bilinéaire intégrale sur $E_1 \times E_2$, de norme intégrale égale si E_1 et E_2 sont normés (comparer th. 6). Les propriétés les plus importantes des supposés applications intégrales sont résumées dans le

Théorème 8. — *Soit u une application linéaire intégrale d'un espace localement convexe* E *dans un autre* F.

1° *Si* F *est quasi complet, alors u est faiblement compacte, et transforme les parties faiblement compaetes de* E *en des parties compactes de* F. *Si v est une application linéaire de* F *dans un espace localement convexe* G, *transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes alors $v \circ u$ est une application compacte.*

2° *Soit v une application linéaire de* F *dans un espace* G *du type* ($\mathcal{F}$), *transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes (resp. une application linéaire d'un espace* G *du type* ($\mathcal{DF}$) *dans* E, *transformant les parties bornées en des parties faiblement relativement compactes de* E). *Alors $v \circ u$ (resp. $u \circ v$) est une application* nucléaire *de* E *dans* G *(resp. de* G *dans* F''). *Si* E, F, G *sont des espaces de Banach, on a* $\|v \circ u\|_1 \leqslant \|v\| \, \|u\|'$.

Corollaire 1. — *L'application composée de deux applications intégrales est nucléaire.*

Autres corollaires : Une application intégrale de E dans F est nucléaire si F est un espace ($\mathcal{F}$) réflexif, et c'est une application nucléaire de E dans F$''$ si E est un espace ($\mathcal{DF}$) réflexif. Une application intégrale de E dans F transforme les suites sommables en des suites absolument sommables, les suites faiblement convergentes en des suites nuclairement convergentes (voir fin du n° 4).

★ Ainsi, considérant la circonférence unité T du plan complexe, muni de sa mesure de Haar μ, supposons que la suite (a_n) sur l'ensemble Z des entiers soit telle que $(\varepsilon_n a_n)$ soit la suite des coefficients d'une fonction $\in L^\infty(\mu)$, quelle que soit la suite (ε_n) de nombres égaux à $+1$ ou -1 : alors on voit facilement que la suite des $a_n z^n \in L^\infty(\mu)$ est sommable, donc c'est une suite absolument sommable dans $L^1(\mu)$, d'où aussitôt $(a_n)\in l^1$. On a obtenu un analogue d'un théorème bien connu de Littlewood (dans lequel L^∞ est remplacé par L^1, et l^1 par l^2). Signalons que le théorème de Littlewood peut être obtenu de la même façon, comme conséquence du théorème suivant, de portée bien plus générale (et qui sera publié ultérieurement ainsi que diverses conséquences) : Toute suite sommable dans un espace $L^1(\mu)$ (construit sur une mesure quelconque) a une suite de normes qui est de carré sommable (et même, appartient à $l^2 \widehat{\otimes} L^1(\mu)$; c'est le théorème dual de celui, signalé à la fin du n° 4, affirmant que toute suite de carré sommable dans un espace du type C(K) — et même toute suite appartenant à $l^2 \widehat{\otimes} C(K)$ — est nucléairement convergente vers 0).

Donnons quelques indications sur la preuve du théorème 8, qui s'appuie essentiellement sur le critère *d*) du théorème 7. Que u soit une application faiblement compacte résulte aussitôt du fait qu'il en est de même de l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$. Les autres assertions du théorème résultent facilement de la seconde partie, qui est plus difficile. On est ramené à prouver que toute application linéaire faiblement compacte de $L^1(\mu)$ dans un espace G du type ($\mathcal{F}$) induit une application nucléaire de $L^\infty(\mu)$ dans G, donc (th. 3) provient d'une $f\in L^1_G(\mu)$. Or un théorème de Dunford-Pettis-Philipps nous apprend qu'une telle application est même donnée par une application *fortement mesurable et bornée* f de M dans G. Notons que le corollaire 1, qui est important à cause de son application dans la théorie des espaces nucléaires, admet une démonstration directe plus simple : on est ramené à montrer que si μ et ν sont des mesures sur des compacts M et N, une application linéaire continue u de $L^1(\mu)$ dans $L^\infty(\nu)$ définit une application *nucléaire* de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\nu)$. Or u s'identifie à une forme linéaire continue sur $L^1(\mu) \widehat{\otimes} L^1(\nu)$, espace isomorphe à $L^1(\mu \otimes \nu)$ (th. 3), donc u est définie par une fonction mesurable et bornée f sur $M \times N$, qui s'identifie à fortiori à un élément de $L^1(\mu \otimes \nu) = L^1(\mu) \hat{\otimes} L^1(\nu)$. Ce dernier élément définit bien une application nucléaire de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, qui d'ailleurs n'est autre que l'application induite par u, c. q. f. d.

Dans PTT, nous déduisons le théorème 8 de résultats plus généraux (voir PTT, chap. I, § 4, n° 2). L'essentiel du § 4 de PTT, chap. I (le plus touffu de tout le travail), est consacré à l'exposé de ces résultats et de leurs diverses conséquences, que nous ne pouvons donner dans ce résumé. *

* 9. **Applications linéaires intégrales dans un espace L^1, ou d'un espace $C_0(M)$ (PTT chap. I, § 4, n° 4).** — On peut caractériser les applications linéaires intégrales d'un espace localement convexe E dans un espace $L^1(\mu)$ (où μ est une mesure quelconque sur un espace localement compact M). Ce sont les applications linéaires appliquant un voisinage convenable V de O dans E en une partie *latticiellement bornée* de $L^1(\mu)$. Si E est normé, V sa boule unité, et et $h = \operatorname{Sup}_{x \in V} |ux|$ (donc h est un élément positif de $L^1(\mu)$), alors on a $\|u\|_1' = \|h\|_1$. Si E ou $L^1(\mu)$ est séparable, le théorème de Dunford-Pettis donne un critère équivalent (que nous énonçons par exemple en supposant E normé) : il existe une application faiblement mesurable f de M dans E', telle que $\|f(t)\|$ soit fonction sommable de t, et que pour $x \in E$, ux soit la classe dans $L^1(\mu)$ de la fonction $t \rightarrow \langle x, f(t) \rangle$; alors $\|u\|_1' \leq \int \|f(t)\| \, d\mu(t)$ (et on a l'égalité pour un choix convenable de f). On peut aussi caractériser les applications *nucléaires* d'un espace localement convexe E dans $L^1(\mu)$: ce sont celles qui transforment un voisinage convenable V de O dans E en une partie A de $L^1(\mu)$ qui est latticiellement bornée et de plus *équimesurable* (par quoi on entend que pour tout compact $K \subset M$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact K_0 tel que $\mu\left(K \cap \complement K_0\right) \leq \varepsilon$, et que les $\varphi \in A$ coïncident presque partout sur K_0 avec les fonctions d'un ensemble équicontinu et uniformément borné de fonctions sur K_0). Supposant encore que E est un espace de Banach pour fixer les idées, il revient au même de dire que l'application envisagée est donnée par une application *intégrable* [2] f de M dans E' (et en effet, il résulte aussitôt du théorème 3 que cela signifie bien que u est nucléaire).

De façon duale, soit M un espace localement compact, E un espace de Banach (pour fixer les idées), on suppose M métrisable et dénombrable à l'infini, ou E séparable. Alors les applications intégrales u de $C_0(M)$ (espace des fonctions continues sur M « nulles à l'infini ») dans E', *i. e.* les formes linéaires continues sur $C_0(M, E) = C_0(M) \hat{\hat{\otimes}} E$, sont celles données par une mesure μ sur M et une application faiblement μ-mesurable et bornée f de M dans E', par la formule $u\varphi = \int \varphi(t) f(t)\, d\mu(t)$. On peut de plus supposer que $\|f(t)\| = 1$ pour tout t, et que $\|\mu\|_1 = \|u\|_1'$. En utilisant le théorème 3, on trouve d'ailleurs que les applications *nucléaires* de $C_0(M)$ dans E', ou même de $C_0(M)$ dans un espace de Banach F quelconque, sont celles données par un couple (μ, f) comme ci-dessus, mais f étant même une application *intégrable* de M dans F ; il n'est plus nécessaire ici de faire des hypothèses de séparabilité. En particulier, si K et L sont deux espaces compacts, μ une mesure sur K, $N(x, y)$ une fonction scalaire continue sur $K \times L$, alors l'application $f \to \int f(x) N(x, y)\, d\mu(x)$ de $C(K)$ dans $C(L)$, définie par le noyau continu N, est nucléaire. Notons que nous venons d'interpréter deux catégories remarquables de « mesures vectorielles » sur M, que l'on pourra appeler respectivement *mesures vectorielles intégrales* et *mesures vectorielles nucléaires* sur M.

Le fait que l'on puisse caractériser les applications intégrales et nucléaires d'un espace de Banach (par exemple) E dans $L^1(\mu)$, par des propriétés de l'image de la boule unité, est tout à fait spécial à $L^1(\mu)$ (voir fin n° 7) et lié d'ailleurs au corollaire du théorème 3. De même, on peut montrer que les applications linéaires intégrales de $L^1(\mu)$ dans un espace localement convexe E peuvent se caractériser par des propriétés de l'image de la boule unité de $L^1(\mu)$, particularité que nous ne développerons pas ici (voir PTT, chap. I, § 4, n° 6). $_\star$

APPENDICE I. — **Variantes diverses de la notion de produit tensoriel topologique (PTT, chap. I, § 3).**

Sur $E \otimes F$, on peut introduire un grand nombre de topologies intéressantes distinctes (même quand E et F sont des espaces de Banach). Nous nous bornons ici à noter l'existence d'une topologie localement convexe unique sur $E \otimes F$ telle que, pour tout espace localement convexe G, les applications bilinéaires *séparément continues* de $E \times F$ dans G correspondent exactement aux applications linéaires *continues* de $E \otimes F$ dans G. Aux ensembles séparément équicontinus d'applications bilinéaires de $E \times F$ correspondent alors les ensembles équicontinus d'applications linéaires de $E \otimes F$. Muni de cette topologie, $E \otimes F$ est appelé *produit tensoriel inductif* de E et F, et son complété, noté $E \overline{\otimes} F$, est appelé produit tensoriel inductif complété de E et F. Son dual est donc l'espace $\mathcal{B}(E, F)$, les parties équicontinues du dual sont les ensembles séparément équicontinus de formes bilinéaires sur $E \times F$ (ce qui suffit déjà à déterminer la topologie du produit tensoriel inductif). La topologie produit tensoriel inductif sur $E \otimes F$ est plus fine que la topologie produit tensoriel projectif, et ces deux topologies sont identiques si et seulement si les ensembles séparément équicontinus de formes bilinéaires sur $E \times F$ sont déjà équicontinus (par exemple si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, ou si E et F sont du type $(\mathcal{DF})$ et tonnelés). Ainsi, si E est un espace non normable, les deux topologies précédentes sur $E \otimes E'$ donnent même des duals distincts (car la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$ est séparément continue et non continue). — Si E est la limite inductive (au sens général) d'une famille d'espaces E_i, F la limite inductive d'une famille d'espaces F_j, alors le sous-espace vectoriel topologique H de $E \overline{\otimes} F$ engendré par les images canoniques des espaces $E_i \overline{\otimes} F_j$ est la limite inductive de ces derniers (d'où le nom de produit tensoriel inductif). Malheureusement, l'espace H précédent se trouvera souvent être non complet, c'est-à-dire distinct de $E \overline{\otimes} F$. — L'énoncé analogue au précédent, quand E et F sont des espaces *produits*, n'est valable que sous des conditions assez restrictives, p. ex. si F est le produit vectoriel topologique d'une famille d'espaces *du type* $(\mathcal{F})$. — Remarquons enfin que la notation de produit tensoriel topologique qu'on vient de développer donne lieu à une notion de produit tensoriel de deux applications linéaires continues, toute analogue à la notion développée au n° 6.

Il y a lieu de définir un sous-espace dense remarquable de $E \overline{\otimes} F$ plus important que $E \otimes F$ lui-même (bien qu'il ne soit souvent pas complet, car distinct de $E \overline{\otimes} F$) : c'est le sous-espace réunion des images canoniques des espaces $E_A \overline{\otimes} F_B = E_A \hat{\otimes} F_B$, où A (resp. B) est un disque borné de E (resp. F) tel que E_A (resp. F_B) soit complet. Les éléments de ce sous-espace sont appelés *noyaux de Fredholm* dans $E \overline{\otimes} F$, ils interviennent par exemple dans la théorie des espaces nucléaires (voir chap. 2, n° 2 th. 1, corollaire 3). Les sous-espaces des noyaux de Fredholm se transforment les uns dans les autres par les produits tensoriels d'applications linéaires continues. — Le th. 2 du n° 2 montre que si E et F sont du type $(\mathcal{F})$, alors tout élément de $E \overline{\otimes} F = E \hat{\otimes} F$ est déjà un noyau de Fredholm ; il donne de plus un théorème de structure explicite pour les noyaux de Fredholm dans le cas général : les noyaux de Fredholm dans $E \overline{\otimes} F$ peuvent se représenter par des séries

$$u = \sum \lambda_i x_i \otimes y_i$$

où (x_i) resp. (y_i) est une suite extraite d'un disque compact de E (resp. F), et ou (λ_i) est une suite sommable de scalaires. Ainsi, u provient même d'un élément d'un espace $E_A \hat{\otimes} F_B$, ou A et B sont des disques *compacts*.

On appelle *application de Fredholm* de E dans F une application définie par un noyau de Fredholm de $E' \overline{\otimes} F$. Une telle application est faiblement continue, mais pas toujours continue ; mais si tout disque fortement compact de E′ est équicontinu, en particulier si la topologie de E est la topologie de Mackey $\tau(E, E')$, alors toute application de Fredholm de E dans F est déjà nucléaire, et à fortiori continue. — Notons que ce sont les noyaux de Fredholm de $E' \overline{\otimes} E$ qui forment le domaine naturel de la théorie de Fredholm.

Soit E un espace localement convexe, prenons sur son dual E′ une topologie localement convexe plus fine que la topologie faible. Alors la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$ est séparément continue, donc définit une forme linéaire continue sur $E \overline{\otimes} E'$ appelée forme *trace*. Soit F un autre espace localement convexe, soit $A \in \mathcal{B}(E, F)$, supposons que l'application linéaire ${}^tA$ de F dans E′ qui lui correspond soit continue (ce qui est par exemple le cas en prenant sur E′ la topologie forte, si on suppose F tonnelé), alors $1 \otimes {}^tA$ est une application linéaire continue de $E \overline{\otimes} F$ dans $E \overline{\otimes} E'$, notée aussi $u \to {}^tA.\, u$. Alors un passage à la limite trivial donne, pour tout $u \in E \overline{\otimes} F$:

$$\langle u, A \rangle = \mathrm{Tr.}\, {}^tA.\, u.$$

Cela explicite la dualité entre $E \overline{\otimes} F$ et $\mathcal{B}(E, F)$ au moyen de la forme trace. Cette formule se généralise immédiatement pour l'accouplement naturel correspondant à n'importe quelle espèce « raisonnable » de produit tensoriel topologique complété (PTT, § 3, N° 3, prop. 17). — Si K est un espace compact muni d'une mesure μ, on a vu que l'opérateur intégral défini par un noyau continu $N(x, y)$ (défini sur $K \times K$) est un opérateur nucléaire dans C(K) (N° 9). On montre facilement que sa trace n'est autre que $\int N(x, x)\, d\mu(x)$.

Appendice 2. — Les propriétés et les problèmes d'approximation (PTT, Chap. I, § 5).

Le problème le plus important qui reste à résoudre dans la théorie des produits tensoriels topologiques est le suivant « *Problème de biunivocité* » : l'application canonique de $E\hat{\otimes}F$ dans $E\hat{\hat{\otimes}}F$ est-elle toujours biunivoque? Par le théorème de Hahn-Banach, ce problème se transforme en une des variantes du « *Problème d'approximation* » : Toute forme bilinéaire continue sur $E \times F$ est-elle limite, pour la topologie faible définie par $E\hat{\otimes}F$, de formes bilinéaires continues dégénérées, *i.e.* provenant de $E'\otimes F'$? Sous cette forme du problème, on voit qu'on peut se ramener au cas où E et F sont des espaces de Banach. Comme alors la topologie de la convergence bicompacte (*i.e.* convergence uniforme sur les produits d'un compact de E par un compact de F) sur $B(E, F)$ donne pour dual $E\hat{\otimes}F$ (N° 2, th. 2), on peut remplacer dans le « Problème d'approximation » la topologie faible définie par $E\hat{\otimes}F$ par la topologie de la convergence bicompacte. Cela prouve aussi que l'on peut supposer E et F séparables. En continuant par de tels procédés (notamment utilisation systématique du th. 2), nous avons donné dans PTT, Chap. I, § 5, prop. 37, un grand nombre d'autres formulations équivalentes de la conjecture précédente. Il suffit par exemple de supposer dans ce qui précède que E est un sous-espace vectoriel topologique de c_0, et que F est son dual. Il suffit même de prouver que si $u \in E'\hat{\otimes}E$ définit un opérateur nucléaire nul, alors $\mathrm{Tr}.u = 0$. Une formulation plus concrète de ce dernier énoncé est la suivante : soit $u = (u_{ij})$ une matrice représentant un élément de $l^1\hat{\otimes}c_0$ (*i.e.* telle que $\sum\limits_i \operatorname{Sup}\limits_j |u_{ij}| < +\infty$), et telle que $u^2 = 0$, alors $\mathrm{Tr}.u = \sum u_{ii} = 0$. Autres formulations : Soit $K(x, y)$ un noyau continu sur $X \times X$, (où X est un espace compact muni d'une mesure positive μ), tel que $K \circ K = 0$, alors $\mathrm{Tr}.K = \int K(x, x)\, d\mu(x) = 0$. Ou : soit $f(x, y)$ une fonction continue sur le produit de deux compacts X et Y, alors f est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions du type $f(x, b) f(a, y)$. Dans ces deux derniers exemples, il suffit de faire la preuve dans *un* seul cas pour que la conjecture générale soit prouvée, pourvu que μ ne soit pas somme d'une suite de masses discrètes dans le premier cas, et pourvu que X et Y soient infinis dans le second cas. D'autres formulations sont contenues dans ce qui suit.

On dira qu'un espace localement convexe E satisfait à la *condition d'approximation,* si l'application identique de E dans lui-même est limite, pour la convergence uniforme sur toute partie précompacte, d'applications linéaires continues de rang fini. Alors, pour *tout* espace localement convexe F, *toute* application linéaire continue de E dans F ou de F dans E est limite, pour la convergence précompacte, d'applications linéaires continues de rang fini. Si E est un espace de Banach, cela signifie aussi que pour tout espace de Banach F, toute application linéaire compacte de F dans E est limite, au sens de la *norme*, d'applications linéaires continues de rang fini : ou encore que pour tout espace de Banach G, $G\widehat{\otimes}E$ est identique à l'espace des applications linéaires compactes et faiblement continues de G' dans E. On montre, par utilisation du th. 2, que cela équivaut au fait que pour tout espace de Banach F, l'application canonique de $E\widehat{\otimes}F$ dans $B(E', F')$ est biunivoque ; et dans cette condition il suffit de faire $F = E'$ (on a donc ici une *condition de biunivocité*), et même de supposer que la trace d'un $u \in E'\widehat{\otimes}E$ qui définit un opérateur nul, est nulle. — On montre que le dual E' d'un espace de Banach E satisfait à la condition d'approximation, si et seulement si toute application linéaire compacte de E dans un espace de Banach F est limite, au sens de la norme, d'applications linéaires continues de rang fini, et que cela implique que E lui-même satisfait à la condition d'approximation. — Le « Problème d'approximation » envisagé plus haut peut aussi s'énoncer : tout espace localement convexe satisfait-il à la condition d'approximation ? On a vu d'ailleurs qu'on peut alors se borner aux sous-espaces vectoriels fermés de c_0.

Les espaces L^p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ construits sur une mesure quelconque, les espaces C(K) (espace des fonctions continues sur l'espace compact K), ainsi que les duals, biduals, etc. de ces espaces, satisfont à la condition d'approximation (et même à la « condition d'approximation métrique » plus forte, voir ci-dessous). Les espaces nucléaires satisfont à la condition d'approximation (voir chap. 2), il en est ainsi plus généralement des espaces qui sont isomorphes à des sous-espaces de produits d'espaces de Hilbert (espaces assez fréquents en pratique). Je donne d'autres exemples dans PTT, chap. 1, § 5, N° 3, englobant notamment les plus importants parmi les espaces de Banach formés de distributions sur R^n (essentiellement ceux qui sont intermédiaires entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, et qui sont stables par translation, et par multiplication par les $\varphi \in (\mathcal{D})$).

On dit qu'un espace de Banach satisfait à la *condition d'approximation métrique*, si l'application identique de E dans lui-même est limite, uniforme sur tout compact, d'applications linéaires de rang fini *et de normes* $\leqslant 1$. C'est un renforcement de nature métrique de la condition d'approximation, et on peut en donner des reformulations analogues (PTT, chap. I, § 5 N° 2). Signalons notamment la suivante : pour tout espace de Banach F, l'application canonique de $E \widehat{\otimes} F$ dans l'espace $J(E', F')$ des formes bilinéaires intégrales sur $E' \times F'$, est un isomorphisme métrique. Il suffit d'ailleurs encore de prouver que l'application canonique de $E \widehat{\otimes} E'$ dans $J(E', E)$ est un isomorphisme métrique. On ne connaît pas d'espace de Banach qui ne satisfasse à la condition d'approximation métrique.

On prouve encore que E' satisfait à la condition d'approximation métrique si et seulement si pour tout espace de Banach F, l'application canonique de $E' \widehat{\otimes} F'$ dans l'espace $J(E, F)$ des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$ est un isomorphisme métrique, et qu'alors E satisfait aussi à la condition d'approximation métrique. Plus profond est le résultat suivant :

THÉORÈME 9. — *Soient* E, F, G *des espaces de Banach, u une application linéaire continue de* E *dans* F, *v une application linéaire continue de* F *dans* G. *On suppose l'une des applications u, v faiblement compacte, l'autre limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires continues de rang fini. Alors* $w = v \circ u$ *est limite uniforme sur tout compact d'applications linéaires continues, de rang fini* et de norme $\leqslant \|w\|$.

COROLLAIRE. — *Soit* E *un espace de Banach réflexif. Pour que* E *satisfasse à la condition d'approximation métrique, il suffit déjà qu'il satisfasse à la condition d'appproximation.*

Ces énoncés, à partir d'hypothèses purement topologiques, donnent des conclusions de nature métrique, qui resteront donc valables en remplaçant les normes données par des normes équivalentes. A ce titre, le corollaire du th. 9 donne, même pour l'espace de Hilbert, un résultat d'approximation nouveau.

CHAPITRE II

ESPACES NUCLÉAIRES

1. Introduction des espaces nucléaires. — Dans la plupart des exemples où E est un espace localement convexe complet concrètement donné (espace de fonctions ou de distributions, par exemple), F un espace localement convexe complet arbitraire, on ne sait pas caractériser de façon concrète à la fois $E \hat{\otimes} F$, $E \hat{\hat{\otimes}} F$ et son extension vectorielle topologique $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ (par exemple interpréter ces espaces comme des espaces de fonctions ou distributions à valeurs vectorielles. caractérisées de façon simple). Mais on sait souvent expliciter de façon concrète un espace localement convexe P compris entre $E \hat{\otimes} F$ et $E \hat{\hat{\otimes}} F$ ou du moins entre $E \hat{\otimes} F$ et $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ (« compris entre » signifiant ici : les applications $E \hat{\otimes} F \to P$ et $P \to \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ sont continues).

Exemple 1. — Soit $E = L^p(\mu)$, où $1 \leqslant p < +\infty$; si F est un espace de Banach (et par extension si F est un espace localement convexe complet quelconque) on définit de façon naturelle l'espace $L^p_F(\mu)$ des applications « de puissance $p^{\text{ème}}$ intégrable » de l'espace mesuré M dans F (voir [2]), et on voit facilement que

$$L^p \hat{\otimes} F \subset L^p_F \subset L^p \hat{\hat{\otimes}} F.$$

L^p_F est en général différent de $L^p \hat{\otimes} F$ et de $L^p \hat{\hat{\otimes}} F$, et les éléments de $L^p \hat{\hat{\otimes}} F$ n'admettent pas de caractérisation interne apparente en tant qu'applications de M dans F (sauf si $p = 1$, voir chap. I, th. 3), tandis que les éléments de $L^p \hat{\otimes} F$ ne peuvent même plus s'interpréter en général par des applications mesurables ou scalairement mesurables de M dans F.

Exemple 2. — Pour des espaces E formés d'authentiques fonctions (et non seulement de classes de fonctions comme L^p) on peut caractériser le plus souvent $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ grâce au

LEMME. — *Soit* E *un espace de fonctions sur un ensemble* M, *muni d'une topologie localement convexe plus fine que la topologie de la convergence simple. Alors pour tout espace localement convexe complet* F, $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ *s'interprète comme l'espace des applications* f *de* M *dans* F *telles que, pour tout* $y' \in F'$ *la fonction* $f_{y'}(t) = \langle f(t), y' \rangle$ *appartienne à* E (f *appartient scalairement à* E), *et que* $f_{y'}$, *parcoure une partie faiblement relativement compacte de* E *quand* y' *parcourt une partie équicontinue de* F'. (*Cette deuxième condition est d'ailleurs surabondante quand* E *est réflexif et du type* ($\mathcal{F}$) *ou* ($\mathcal{LF}$).)

Mais dans un cas comme le précédent, on n'a en général pas prise sur l'espace $E \widehat{\otimes} F$.

On conçoit donc les simplifications qui se présentent dans les cas où l'on sait à l'avance que $E \widehat{\otimes} F = E \widehat{\widehat{\otimes}} F$, ou même que $E \widehat{\otimes} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$ (ces égalités étant d'ailleurs supposées impliquer les topologies). Alors on pourra le plus souvent déterminer de façon concrète $E \widehat{\otimes} F = E \widehat{\widehat{\otimes}} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$, par exemple si on connaît à priori un espace intermédiaire P entre $E \widehat{\otimes} F$ et $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$. Du même coup, on aura déterminé l'espace des applications linéaires faiblement continues de E' dans F ou de F' dans E, espaces qui s'identifient en effet à $\mathcal{B}_e(E'_s, F'_s)$. Et le dual B(E, F) de $E \widehat{\otimes} F$, *i. e.* l'espace des formes bilinéaires continues sur $E \times F$, sera identique au dual de $E \widehat{\widehat{\otimes}} F$, ou aussi au dual de P, et pourra souvent grâce à cela s'interpréter de façon concrète.

Par exemple, l'essentiel du « théorème des noyaux » de L. Schwartz affirme que l'espace des formes bilinéaires continues sur $\mathcal{E}(R^m) \times \mathcal{E}(R^n)$ est identique à l'espace des formes bilinéaires définies par les distributions à support compact sur $R^m \times R^n$. Ces dernières sont à priori les formes linéaires continues sur $\mathcal{E}(R^m \times R^n)$, or on voit directement (cas particulier du lemme ci-dessus) que $\mathcal{E}(R^m \times R^n)$ s'identifie à l'espace

$$E \widehat{\widehat{\otimes}} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F'_s), \quad \text{où} \quad E = \mathcal{E}(R^m) \quad \text{et} \quad F = \mathcal{E}(R^n)$$

donc à priori, les distributions sur $R^m \times R^n$ sont les formes bilinéaires *intégrales* (chap. I, n° 8) sur $\mathcal{E}(R^m) \times \mathcal{E}(R^n)$. Le théorème des noyaux, qui dit qu'on obtient ainsi *toutes* les formes bilinéaires continues sur $\mathcal{E}(R^m) \times \mathcal{E}(R^n)$, *i. e.* que l'application transposée de l'application canonique de $\mathcal{E}(R^m) \widehat{\otimes} \mathcal{E}(R^n)$ dans $\mathcal{E}(R^m) \widehat{\widehat{\otimes}} \mathcal{E}(R^n)$ est une application *sur*, signifie donc aussi (par un théorème classique de la théorie des espaces ($\mathcal{F}$)) que l'on a en fait

$$\mathcal{E}(R^m) \widehat{\otimes} \mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R^m) \widehat{\widehat{\otimes}} \mathcal{E}(R^n).$$

En fait, la démonstration de ce théorème montre même que

$$\mathcal{E}(R^m) \overset{\frown}{\otimes} F = \mathcal{E}(R^m) \hat{\hat{\otimes}} F$$

(espace isomorphe, quand F est complet, à l'espace des applications indéfiniment différentiables de R^m dans F) pour *tout* espace localement convexe F.

On voit donc que de façon générale, *l'assertion que l'on a* $E \overset{\frown}{\otimes} F = E \hat{\otimes} F$ *pour deux espaces donnés* E *et* F, *doit être regardé comme un équivalent algébrico-topologique du théorème des noyaux de L. Schwartz*. Dans la suite nous étudions les espaces E, tels que $\mathcal{E}(R^m)$, pour lesquels on ait $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ pour *tout* espace localement convexe F : ce sont les *espaces nucléaires*.

2. Caractérisations des espaces nucléaires (PTT, chap. 2, § 2, n° 1). — D'après n° 1, un espace localement convexe est dit *nucléaire*, si pour tout espace localement convexe F, l'application canonique de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est un isomorphisme vectoriel topologique du premier espace sur le second (ou, ce qui revient au même, si ces deux espaces induisent la même topologie sur $E \otimes F$). Il suffit d'ailleurs de le vérifier quand F est un espace de Banach. E est nucléaire si et seulement si son complété l'est.

Théorème 1. — *Soit* E *un espace localement convexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) E *est nucléaire.*

b) Toute application linéaire continue de E *dans un espace de Banach* F *est nucléaire* (Chap. 1, N° 7).

c) Pour tout disque équicontinu faiblement fermé A *dans* E′, *en existe un autre* B ⊃ A *tel que l'application identique de* E'_A *dans* E'_B *soit nucléaire.*

Si alors E *est complet, on a pour tout espace localement convexe complet* F : $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F = \mathcal{B}_e(E'_s, F')$ (*isomorphisme vectoriel-topologique*).

★ La partie difficile de la démonstration consiste à prouver que *a* implique *c*. En transformant la condition *a* par dualité, on trouve que pour tout disque équicontinu faiblement fermé A de E′, en existe un autre B ⊃ A tel que l'application identique de E'_A dans E'_B soit *intégrale* (chap. 1, n° 8). Appliquant le même résultat à B, et utilisant le corollaire du chap. 1, théorème 8, on trouve *c*. Remarquons qu'on a seulement utilisé le fait que pour tout espace de

Banach, l'application canonique de $E \hat{\otimes} F$ dans $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est un isomorphisme *faible*. ★

Comme une application nucléaire est à fortiori compacte, c donne le

Corollaire 1. — *Soit* E *un espace nucléaire. Les parties bornées de* E *sont précompactes* (*et* E *est même un espace de Schwartz, voir* [6]). *A fortiori, si* E *est quasi complet,* E *est du type* ($\mathcal{M}$), *donc réflexif.*

On en conclut aussi qu'un espace de Banach nucléaire est de dimension finie. De plus :

Corollaire 2. — *Soit* E *un espace nucléaire,* F *un espace localement convexe quelconque. Si* F *est quasi complet, toute application linéaire bornée de* E *dans* F *est nucléaire. Si* E *est tonnelé* (*p. ex. si* E *est du type* ($\mathcal{F}$)), *toute application linéaire bornée de* F *dans* E′ *est nucléaire.*

Corollaire 3. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes,* E *nucléaire. Alors les formes bilinéaires continues sur* E × F *sont les formes bilinéaires « nucléaires », i.e. qui proviennent d'un élément d'un espace* $E'_A \hat{\otimes} F'_B$, *où* A (*resp.* B) *est un disque équicontinu faiblement fermé dans* E′ (*resp.* F′).

On ne connaît pas de cas où on ait $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ sans que E ou F soit déjà nucléaire (dans ce problème, on peut se ramener facilement au cas où E et F sont tous deux du type ($\mathcal{F}$)). On peut montrer que si F est l'espace c_0 ou l^1, plus généralement si F admet un espace quotient isomorphe à c_0 ou à l^1, alors $E \hat{\otimes} F = E \hat{\hat{\otimes}} F$ implique déjà que E est nucléaire. Conjuguant avec le classique « théorème des isomorphismes » de Banach, on obtient :

Théorème 2. — *Soit* E *un espace* ($\mathcal{F}$). *Pour que* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que toute suite sommable dans* E *soit absolument sommable ou aussi que toute suite dans* E *qui converge vers zéro, converge vers zéro nucléairement* (*voir fin du n° 4*).

En particulier, si E est un espace de Banach, chacune des deux conditions précédentes impliquent que E est de dimension finie : dans le premier cas, on retrouve donc un théorème récent de Dvoretzky-Rogers.

3. Propriétés de permanence, exemples d'espaces nucléaires (PTT, chap. 2, § 2, n^{os} 2 et 3). — La classe des espaces nucléaires jouit d'une stabilité remarquable exprimée dans le

THÉORÈME 3. — 1° *Soit* E *un espace* ($\mathcal{F}$) *ou* ($\mathcal{DF}$). *Pour que* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que* E' *soit nucléaire.*

2° *Soit* E *un espace nucléaire. Tout sous-espace vectoriel, tout espace quotient de* E *est nucléaire.*

3° *Le produit vectoriel-topologique d'une famille quelconque d'espaces nucléaires, la somme vectorielle-topologique d'une famille dénombrable d'espaces nucléaires, sont nucléaires.*

4° *Soient* E *et* F *deux espaces nucléaires, alors* $E \hat{\otimes} F$ *est nucléaire.*

5° *Soit* E *un espace nucléaire du type* ($\mathcal{F}$), F *un espace réflexif dont le dual est nucléaire. Alors le dual de* $E \hat{\otimes} F$ *est nucléaire.*

* De ces assertions, 2 et 5 sont les plus difficiles (les autres résultent assez simplement des critères du théorème 1). La démonstration donnée dans PTT, qui repose sur des techniques assez fines, peut se remplacer par l'utilisation systématique du théorème 1, critère *c*, et des deux faits suivants : 1) Si E est un espace nucléaire, alors il existe une famille fondamentale de parties équicontinues A de E' telles que E'_A soit un espace de Hilbert (*i. e.* E est isomorphe à un sous-espace vectoriel du produit d'une famille d'espaces de Hilbert) ; 2) la remarque faite à la fin du chap. 1, n° 7. *

Du théorème 3, on déduit les résultats suivants : Si E est un espace vectoriel muni de la topologie la moins fine rendant continues des applications linéaires f_i de E dans des espaces nucléaires E_i, alors E est nucléaire ; soit E un espace vectoriel muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications linéaires u_i d'une suite d'espaces nucléaires E_i dans E, telles que E soit engendré par la réunion des $u_i(E_i)$, alors E est nucléaire ; soit E un espace nucléaire du type ($\mathcal{F}$) ou ($\mathcal{DF}$), F un espace nucléaire, alors $L_b(E, F)$ est nucléaire, il en est de même du dual de $L_b(E, F)$ si F est aussi du type ($\mathcal{F}$) ou ($\mathcal{DF}$).

Le théorème 3, joint au fait que l'espace $\mathcal{E}(U)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur un ouvert U de R^n est nucléaire (n° 1), permet de montrer facilement le

COROLLAIRE. — *Les espaces* $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, *construits sur une partie ouverte* U *de* R^n ; *les espaces* ($\mathcal{S}$), ($\mathcal{S}'$), ($\mathcal{O}_M$) *et* ($\mathcal{O}'_C$) *construits sur* R^n, *et les duals forts de ces deux derniers espaces, sont nucléaires. Il en est de même de l'espace* $\mathcal{H}$ *des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe. (Pour la définition des espaces précédents voir* [9].)

* Considérons une suite croissante de suites positives $a^{(n)} = (a_i^{(n)})$,

soit E l'espace « échelonné » correspondant (voir [7]), *i. e.* l'espace des suites (x_i) telles que $\sum\limits_i x_i a_i^{(n)}$ soit absolument sommable pour tout n. E est muni d'une topologie naturelle d'espace $(\mathcal{F})$. *Pour que* E *soit nucléaire, il faut et il suffit que pour tout n, existe un $m \geqslant n$ tel que la suite $a^{(n)}/a^{(m)} = (a_i^{(n)}/a_i^{(m)})$, soit sommable* (où on convient de regarder comme nul un quotient dont les deux termes sont nuls). Ainsi l'espace (s) des suites à décroissance rapide, donc aussi son dual (s') (espace des suites à croissance lente), est nucléaire. (Cela redonnerait facilement, grâce à la transformation de Fourier, que $\mathcal{E}(R_n)$ et plus généralement $\mathcal{E}(U)$, est nucléaire.) L'énoncé précédent permet aussi de construire des espaces échelonnés qui sont du type $(\mathcal{M})$ (et même du type $(\mathcal{S})$, voir [6], § 3), mais non nucléaires. ✱

4. **Propriétés de relèvement** (PTT, chap. 2, § 3, n° 1). — Le théorème 6 du chap. 1, n° 7, se spécialise ainsi :

Théorème 4. — 1° *Soient* E_1, E_2 *deux espaces localement convexes,* F_1 *(resp.* F_2*) un sous-espace vectoriel de* E_1 *(resp.* E_2*). On suppose* F_1 *ou* F_2 *nucléaire. Alors toute forme bilinéaire continue sur* $F_1 \times F_2$ *est la restriction d'une forme bilinéaire nucléaire sur* $E_1 \times E_2$.

2° *Soient* E, G *deux espaces localement convexes,* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Supposons que* F *est nucléaire et* G *quasi complet, ou que* G *est le dual fort d'un espace nucléaire quasi tonnelé (par exemple que* G *est un espace nucléaire complet du type* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{DF})$*). Alors toute application linéaire bornée de* F *dans* G *est la restriction d'une application nucléaire de* E *dans* G.

3° *Soient* E, G *deux espaces localement convexes,* F *un sous-espace vectoriel fermé de* E, *tel que tout disque compact de* E/F *soit contenu dans l'image canonique d'un disque borné et complet de* E. *On suppose que* G *est nucléaire, ou que* E/F *est isomorphe au dual fort d'un espace nucléaire quasi tonnelé (p. ex. que* E *est un espace* $(\mathcal{F})$ *ou* $(\mathcal{DF})$ *nucléaire et complet). Alors toute application linéaire bornée de* G *dans* E/F *provient d'une application nucléaire de* G *dans* E.

Une variante des propriétés précédentes est la suivante : Soit E un espace localement convexe, F un sous-espace vectoriel nucléaire, A un disque équicontinu dans E'. Alors il existe une application linéaire de F'_A dans E' inverse à droite de l'application canonique de E' sur F', et appliquant A dans une partie équicontinue de E'.

Signalons encore la propriété de « relèvement » suivante, conséquence facile des résultats précédents :

THÉORÈME 5. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes, tous deux du type* ($\mathcal{F}$) *ou tous deux du type* ($\mathcal{DF}$). *Supposons* E *nucléaire, et soit* A *un disque borné de* $P = E \hat{\otimes} F$. *Alors il existe une suite* (x_i) *tendant vers* 0 *dans* E, *et une suite équicontinue d'applications linéaires* $u \to y_i(u)$ *de* P_A *dans* F, *enfin une suite sommable fixe* (λ_i), *tels que pour* $u \in P_A$, *on ait*

$$u = \Sigma \lambda_i x_i \otimes y_i(u)$$

COROLLAIRE. — A *est contenu dans l'enveloppe disquée fermée d'un ensemble* $B \otimes C$, *où* B (*resp.* C) *est une partie bornée de* E (*resp.* F). *Donc sur* B(E, F), *la topologie de la convergence bibornée, et la topologie du dual fort de* $E \hat{\otimes} F$, *sont identiques.*

Signalons encore que l'analogue du th. 5 relatif à la représentation des *suites convergentes* de $E \hat{\otimes} F$, est aussi valable.

5. **Compléments sur le produit tensoriel d'un espace nucléaire par un espace localement convexe quelconque** (PTT, chap. 2, § 3, n^os 2 et 3). — La théorie de la dualité pour $E \hat{\otimes} F$ est particulièrement simple quand E est nucléaire, et quand E et F sont tous deux du type ($\mathcal{F}$), ou tous deux du type ($\mathcal{DF}$). Les résultats précédents donnent en effet facilement :

THÉORÈME 6. — *Soient* E *et* F *deux espaces localement convexes, tous deux du type* ($\mathcal{F}$), *ou tous deux du type* ($\mathcal{DF}$). *Si* E *est nucléaire, le dual fort de* $E \hat{\otimes} F$ *qui s'identifie à* B(E, F) *muni de la convergence bibornée (voir Corollaire du th.* 5), *s'identifie à* $E' \hat{\otimes} F'$.

Par suite si E est complet, donc réflexif, le bidual de $E \hat{\otimes} F$, muni de la topologie forte du dual de $(E \otimes F)'$, s'identifie à $E \hat{\otimes} F''_b$, où F''_b désigne le dual fort de F'.

En général, si E est nucléaire et complet, mais E et F par ailleurs quelconques, et si on prend de nouveau sur les biduals les topologies « naturelles » — voir Introduction — on prouve que le bidual de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique dense de $E \hat{\otimes} F''$ (voir PTT, chap. 1, § 4, n° 2, prop. 25, où on donne un énoncé plus général). Quant au dual de $E \hat{\otimes} F$, dont les éléments sont caractérisés par le cor. 3 du th. 1, il ne sera plus du tout en général identique à $E' \hat{\otimes} F'$, mais ce sera sous des conditions assez larges, par exemple si F est réflexif, un sous-espace vectoriel topologique dense de $E' \overline{\otimes} F$

(voir définition au chap. I, appendice I). Mais même dans le cas du produit tensoriel $E' \widehat{\otimes} E$, ou E est du type $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$ nucléaire, le dual fort de $E \widehat{\otimes} F$ sera souvent non complet (donc distinct de $E' \overline{\otimes} F'$) : voir appendice.

Le produit $E \widehat{\otimes} F$ (E nucléaire) donne lieu à divers théorèmes de permanence : pour que $E \widehat{\otimes} F$ soit réflexif (resp. du type $(\mathcal{M})$, ou du type $(\mathcal{S})$, ou quasi normable) il suffit (et il faut quand F est complet) que F le soit. Mais E et F peuvent être bornologiques et tonnelés sans que $E \widehat{\otimes} F$ le soit (voir appendice).

D'après les réflexions du n° I, la détermination concrète de $E \widehat{\otimes} F$, quand E est nucléaire, n'offre le plus souvent aucune difficulté. Donnons quelques exemples (où F est supposé un espace localement convexe complet).

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}(V)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur une variété indéfiniment différentiable donnée V. Alors $\mathcal{E} \widehat{\otimes} F$ est l'espace des applications indéfiniment différentiables de V dans F (muni de sa topologie naturelle). Enoncé analogue quand on remplace $\mathcal{E}$ par le sous-espace E des fonctions satisfaisant à un certain système d'équations aux dérivées partielles $D_i f = 0$.

Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}(V)$ l'espace des fonctions holomorphes sur une variété analytique complexe donnée V. Alors $\mathcal{H} \widehat{\otimes} F$ est l'espace des applications holomorphes de V dans F, avec la topologie de la convergence compacte.

En particulier, on trouve que

$$\mathcal{E}(U) \widehat{\otimes} \mathcal{E}(V) = \mathcal{E}(U \times V), \qquad \mathcal{H}(U) \widehat{\otimes} \mathcal{H}(V) = \mathcal{H}(U \times V),$$

quand U et V sont deux variétés indéfiniment différentiables (resp. analytiques complexes) données.

Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ l'espace des fonctions sur R^n « indéfiniment différentiables à décroissance rapide » ([9], t. 2). Alors $\mathcal{S} \widehat{\otimes} F$ est l'espace des applications de R^n dans F qui sont « indéfiniment différentiables à décroissance rapide », i. e. indéfiniment différentiables, et telles que pour tout indice de dérivation multiple D^p et tout polynome P sur R^n, $PD^p f$ soit fonction bornée sur R^n. En particulier

$$\mathcal{S}(R^m) \widehat{\otimes} \mathcal{S}(R^n) = \mathcal{S}(R^m \times R^n).$$

On a des énoncés analogues en faisant $E = (\mathcal{O}_M)$ (espace des fonctions « indéfiniment différentiables à croissance lente ») ou $E = (\mathcal{O}_C)$ (espace des fonctions « indéfiniment différentiables à croissance très lente », dual fort de l'espace $(\mathcal{O}'_C)$ des distributions à décroissance rapide [9]), etc. Signalons d'ailleurs qu'en utilisant le lemme du n° 1, on trouve qu'une application f à valeurs dans F est indéfiniment différentiable, resp. holomorphe, resp. « indéfiniment différentiable à décroissance rapide », resp. « indéfiniment différentiable à croissance lente », etc. si et seulement si elle l'est « scalairement », *i. e.* si pour tout $y' \in F'$, la fonction $\langle f(t), y' \rangle$, à valeurs scalaires, possède la même propriété.

6. **Opérateurs de puissance p.ème sommable. Application aux espaces nucléaires** (PTT, chap. 2, § 1, N°s 1 à 6 et § 2, N° 4). — Soient E et F deux espaces localement convexes. Parmi les éléments de $E \overline{\otimes} F$ (voir définition au Chap. 1, Appendice 1) on a distingué sous le nom de *noyaux de Fredholm* ceux qui proviennent d'un élément de quelque espace $E_A \hat{\otimes} F_B$, où A (resp. B) est un disque borné de E (resp. F) tel que E_A (res. F_B) soit complet; alors on peut même supposer que A et B sont compacts (Chap. 1, Appendice 1). Plus généralement, si $0 < p \leqslant 1$, on appelle *noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable* dans $E \overline{\otimes} F$, tout élément de $E \overline{\otimes} F$ de la forme $\Sigma \lambda_i x_i \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in l^p$, et où (x_i) (resp. (y_i)) est une suite extraite d'un compact de E (resp, F). (Si $p = 1$, on retrouve les noyaux de Fredholm). L'ensemble des noyaux de Fredholm de puissance p.ème sommable dans $E \overline{\otimes} F$ est noté $E \overset{(p)}{\otimes} F$. — On appelle *application de puissance p.ème sommable* de E dans F toute application linéaire de E dans F qui provient d'un noyau de Fredholm de puissance p.ème sommable de $E' \overline{\otimes} F$ (si $p = 1$, on retrouve la notion d'application de Fredholm, introduite au Chap. 1, Appendice 1). L'espace de ces applications, noté $L^{(p)}(E, F)$, s'identifie donc à un espace quotient de $E' \overset{(p)}{\otimes} F$ et s'identifie même à $E' \overset{(p)}{\otimes} F$ dans tous les cas connus (voir « problème de biunivocité » au Chap. 1, Appendice 2) ; il en est toujours ainsi par exemple quand $p \leqslant 2/3$. Quand E et F sont des espaces de Banach, on introduit sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ une fonction « distance à l'origine »

$$S_p(u) = \operatorname{Inf} \Sigma |\lambda_i|^p$$

le inf étant pris pour toutes les représentations $u = \Sigma \lambda_i x_i \otimes y_i$, avec $\|x_i\| \leqslant 1$, $\|y_i\| \leqslant 1$. $E \overset{(p)}{\otimes} F$ devient ainsi un espace vectoriel topologique métrisable et complet, en général *non localement convexe*. Quand E et F sont des espaces localement convexes quelconques, les semi-normes de E et de F permettent de définir sur $E \overset{(p)}{\otimes} F$ un système d' « écarts à l'origine », qui en font encore un espace vectoriel topologique (non localement convexe en général) ; cet espace est métrisable et complet si E et F sont métrisables et complets. Par suite, si E est du type $(\mathcal{DF})$, F du type $(\mathcal{F})$, alors $L^{(p)}(E, F)$ est un espace vectoriel topologique métrisable et complet (en général non localement convexe), isomorphe à un espace quotient de $E' \overset{(p)}{\otimes} F$.

On peut aussi, pour $0 \leqslant p < 1$, introduire l'espace $E \overset{[p]}{\otimes} F$ des *noyaux de Fredholm d'ordre* $\leqslant p$, qui est par définition l'intersection des espaces $E \overset{(q)}{\otimes} F$ pour $p < q \leqslant 1$. Muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les espaces $E \overset{(q)}{\otimes} F$, c'est un espace vectoriel topologique (non localement convexe en général), qui est métrisable et complet si E et F sont métrisables et complets. On définit de façon analogue les espaces vectoriels topologiques $L^{[p]}(E, F)$, intersection des espaces $L^{(q)}(E, F)$ pour $p < q \leqslant 1$. L'introduction de ces topologies permet de prouver ceci : Soient E et F deux espaces du type $(\mathcal{F})$. Tout élément de $E \overset{[p]}{\otimes} F$ (où $0 \leqslant p < 1$) est de la forme $\Sigma\lambda_i x_i \otimes y_i$, où $(\lambda_i) \in l^{[p]}$, et où (x_i)(resp. (y_i)) est une suite bornée dans E (resp. F). Si (u_α) est une suite tendant vers 0 dans $E \overset{(p)}{\otimes} F$ (resp. dans $E \overset{[p]}{\otimes} F$), alors on a $u_\alpha = \Sigma\lambda_i^\alpha x_i \otimes y_i$, où les suites bornées (x_i) et (y_i) sont fixes, et où $\lambda^\alpha = (\lambda_i^\alpha)$ tend vers 0 dans l^p (resp. $l^{[p]}$). (On désigne par $l^{[p]}$ l'espace intersection des espaces l^q avec $p < q \leqslant 1$, muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les l^q, topologie qui en fait un espace métrisable et complet). L'application la plus importante de ces résultats est dans le

THÉORÈME 7. — *Soit* E *un espace* $(\mathcal{DF})$, F *un espace* $(\mathcal{F})$, *alors toute application d'ordre* 0 *de* E *dans* F *est de la forme* $\Sigma\lambda_i x_i' \otimes y_i$, *où* (λ_i) *est une suite de scalaires à* décroissance rapide, *et où* (x_i')(*resp.* (y_i)) *est une suite tendant vers* 0 *dans* E′ (*resp.* F).

Soit E un espace localement convexe quelconque. Tout noyau de Fredholm élément de $E' \overline{\otimes} E$ admet un *déterminant de Fredholm* $\det(1 - zu)$, fonction entière de la variable complexe z, dont les zéros sont les inverses des valeurs propres z_i de l'opérateur de Fredholm défini par u (les zéros et les valeurs propres étant comptées suivant leur ordre de multiplicité). On a le

THÉORÈME 8. — *Si* $u \in E' \overset{(p)}{\otimes} E$, *le déterminant de Fredholm de u est une fonction entière d'ordre* $\leqslant q$, *où* $1/q = 1/p - 1/2$, *et la suite des* *valeurs propres de u est de puissance* $q^{\text{ème}}$ *sommable. Si* $p \leqslant 2/3$, *d'où* $q \leqslant 1$, $det(1 - zu)$ *est une fonction entière de* genre O, *donc identique au produit infini* $\prod (1 - zz_i)$, (*où les* z_i *sont les valeurs propres de* u, *répétées suivant leur ordre de multiplicité*). *Si* E *est un espace de Banach, on a*

$$(\Sigma |z_i|^q)^{1/q} \leqslant (S_p(u))^{1/p}$$

Corollaire 1. — *La suite des valeurs propres d'un opérateur de Fredholm est de carré sommable.*

Corollaire 2. — *Si u est un opérateur de Fredholm de puissance* $2/3$ *sommable, alors* Tr. $u = \sum_i z_i$ (*où les* z_i *sont les valeurs propres de* u).

Corollaire 3. — *La suite des valeurs propres d'un opérateur de Fredholm d'ordre* O *dans* E, *rangée par ordre de modules décroissants, est à décroissance rapide.*

De plus, on peut montrer que sous les conditions du théorème 8, quand E est un espace de Banach, alors la suite des valeurs propres de $u \in E' \overset{(p)}{\otimes} E$, en tant que suite non ordonnée de puissance $q^{\text{ème}}$ sommable, dépend continûment de u. Cela signifie que si $u_\alpha \to u_0$ dans $E' \overset{(p)}{\otimes} E$, alors on peut ranger les valeurs propres de u_α en une suite $\lambda^{(\alpha)} = (\lambda_i^{(\alpha)})$ de telle façon que $\lambda^{(\alpha)} \to \lambda^{(0)}$ dans l^q. On a un résultat analogue pour $E' \overset{[p]}{\otimes} E$.

Par itération de noyaux de Fredholm, on obtient des noyaux ayant des « propriétés de décroissance » de plus en plus fortes :

Théorème 9. — *Soit u un noyau de Fredholm composé de n noyaux de Fredholm* u_i, u_i *étant de puissance* p_i.$^{\text{ème}}$ *sommable* ($0 < p_i \leqslant 1$). *Alors u est de puissance* p.$^{\text{ème}}$ *sommable, où*

$$1/p = (\Sigma 1/p_i) - (n+1)/2.$$

Si $u_i \in E'_i \overset{(p_i)}{\otimes} E_{i+1}$, *où les* E_i *sont des espaces de Banach, on a*

$$(S_p(u)^{1/p}) \leqslant \prod (S_{p_i}(u_i))^{1/p_i}$$

En tous cas, le composé de n opérateurs de Fredholm, où $n \geqslant 3$, est de puissance $(2/(n-1))$.$^{\text{ème}}$ sommable. Pour $n = 2$ ou 3, la formule $1/p = \Sigma 1/p_i - (n+1)/2$ ne donne pas de renseignement, mais il semble qu'on doive pouvoir y remplacer $n+1$ par $n-1$

Pour plus de détails sur les classes d'opérateurs précédentes, je renvoie à PTT, chap. 2, § 1. Signalons seulement qu'on peut montrer que, à un petit flottement numérique près dans la valeur des exposants (flottement qui est dans la nature des choses), le fait pour un opérateur d'être de puissance p.ème sommable se reconnaît dans les propriétés de l'image d'un voisinage convenable de O dans E (la boule unité si E est un espace de Banach). Le flottement disparaît pour les opérateurs d'ordre O, qui sont exactement caractérisés par le fait de transformer un voisinage convenable de O dans E en une partie de F qui est « d'ordre O ». PTT, chap. 2, § 1, n° 5. Quand F est du type $(\mathcal{F})$, les parties de F d'ordre O sont les parties contenues dans l'enveloppe disquée fermée d'une suite « à décroissance rapide » dans F.

La conjonction du th. 1, et du th. 9 donne le.

Théorème 10. — *Soit* E *un espace nucléaire. Pour tout* $\varepsilon > 0$, *et tout disque équicontinu faiblement fermé* A *dans* E′, *il existe un disque équicontinu faiblement fermé* $B \supset A$ *tel que l'application identique de* E'_A *dans* E'_B *soit de puissance* ε.ème *sommable.*

Corollaire 1. — *Soit* E *un espace nucléaire,* F *un espace localement convexe. Toute application linéaire bornée de* E *dans* F *supposé quasi complet, toute application linéaire de* F *dans* E′ *transformant un voisinage convenable de* O *en une partie équicontinue, est d'ordre* O. *Toute forme bilinéaire continue sur* $E \times F$ *provient d'un élément de* $E' \overset{[0]}{\otimes} F'$, (*i.e. est un noyau de Fredholm d'ordre* O).

Corollaire 2. — *Soit* E *un espace nucléaire quasi complet. Tout opérateur borné dans* E *est un opérateur de Fredholm d'ordre* O, *dont le déterminant de Fredholm est donc d'ordre* O, *et la suite des valeurs propres, rangées par ordre de modules décroissants, est à décroissance rapide.*

D'autres corollaires sont obtenus en tenant compte des autres résultats donnés dans ce n°. Ainsi, si E et F sont deux espaces du type $(\mathcal{F})$, E nucléaire, alors tout élément de $E \hat{\otimes} F$ est de la forme $\sum \lambda_i x_i \otimes y_i$, où (x_i) (resp. (y_i)) est une suite bornée dans E (resp. F), et où (λ_i) est une suite *à décroissance rapide*. Quand E et F sont du type $(\mathcal{DF})$, E nucléaire, on peut seulement supposer que $\sum |\lambda_i|^{\varepsilon} < +\infty$, $\varepsilon > 0$ étant donné à l'avance. De même, le théorème 5 peut se préciser de façon analogue. Plus généralement, si E et F sont deux espaces localement convexes, E nucléaire, toute forme bilinéaire continue u sur $E \times F$ est de la forme $\sum \lambda_i x'_i \otimes y'_i$, où $(\lambda_i) \in l^1$, et où (x'_i) (resp. (y'_i)) est une suite équicontinue dans E' (resp. F'). Si u varie dans un disque équicontinu faiblement fermé M de formes bilinéaires, on peut prendre ci-dessus (x'_i) et (λ_i) fixes, et $y'_i = \varphi_i(u)$, où les φ_i forment une suite équicontinue d'applications linéaires de l'espace de Banach engendré par M, dans un espace F'_B, où B est un disque équicontinu faiblement fermé dans F'. Quand F est lui aussi nucléaire (il suffit même que ce soit un espace de Schwartz), on peut aussi supposer dans ce qui précède les suites (x'_i) et (y'_i) fixes, et $\lambda = (\lambda_i)$ variable avec u, $\lambda = \varphi(u)$, où φ est une application linéaire continue de l'espace de Banach engendré par M dans l'espace l^ε; on peut même supposer que la restriction de u à M muni de la topologie de la convergence simple soit continue, ce qui donne alors une autre représentation commode des suites équicontinues de formes bilinéaires sur $E \times F$, tendant vers O au sens de la convergence simple. Signalons enfin que si M est un ensemble d'endomorphismes d'un espace nucléaire E, appliquant un voisinage fixe de O en une partie bornée fixe de E, alors l'application qui à tout $u \in M$ fait correspondre la suite non ordonnée de ses valeurs propres, est une application continue de M, muni de la convergence simple, dans l'espace des suites non ordonnées à décroissance rapide (muni de sa topologie métrisable naturelle): cette assertion s'explicite comme l'assertion analogue, vue après le th. 8.

Appendice. — **Sur les espaces $E \hat{\otimes} F$, avec E du type $(\mathcal{DF})$, F du type $(\mathcal{F})$ (PTT, Chap. 2, § 4).**

La théorie de la dualité pour les espaces $E \hat{\otimes} F$, très simple quand E est nucléaire et quand E et F sont tous deux du type $(\mathcal{F})$, ou tous deux du type $(\mathcal{DF})$ (voir th. 6) devient plus compliquée dans le cas général. On peut montrer, quand E est nucléaire, que le dual fort $B(E, F)$ de $E \hat{\otimes} F$ s'identifie à un sous-espace vectoriel dense de $E' \overline{\otimes} F'$, mais avec une topologie à priori *moins fine* (et parfois strictement moins fine) que la topologie induite par $E' \overline{\otimes} F'$. Quand F est réflexif (par exemple) ces topologies coïncident; et quand de plus E et F sont chacun du type $(\mathcal{F})$ ou $(\mathcal{DF})$, alors $B(E, F)$ est un espace $(\mathcal{LF})$ au sens général (limite inductive généralisée d'une suite d'espaces du type $(\mathcal{F})$, voir PTT, Introduction, IV). Mais souvent, même si E et F sont tous deux nucléaires, E du type $(\mathcal{DF})$ et F du type $(\mathcal{F})$, le dual $B(E, F)$ de $E \hat{\otimes} F$ est distinct de $E' \overline{\otimes} F'$, *i.e.* $B(E, F)$ n'est pas complet (à fortiori $E \hat{\otimes} F$ n'est alors pas bornologique).

Par exemple, si E est la somme directe topologique d'une suite de droites, la situation désagréable qu'on vient de nommer se présente chaque fois que F est un espace $(\mathcal{F})$ non normable, admettant une vraie norme continue. Dans PTT, Chap. 2, § 4, N° 1, Prop. 14, nous donnons un cas plus général, impliquant par exemple que pour l'espace $\mathcal{E}'\hat{\otimes}\mathcal{E} = L(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ (où $\mathcal{E} = \mathcal{E}(R^n)$, espace de Schwartz), les mêmes désagréments ont lieu. D'autres espaces analogues importants, tels $\mathcal{S}'\hat{\otimes}\mathcal{S} = L(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ (où $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ est l'espace des fonctions « indéfiniment différentiables à décroissance rapide » sur R^n) sont au contraire bornologiques ; mais on ne discerne pas de critère simple permettant de reconnaître en général si $E\hat{\otimes}F$ est bornologique ou non. Sans supposer E ou F nucléaire, si E est du type $(\mathcal{DF})$, F du type $(\mathcal{F})$, on peut sous des hypothèses très suffisantes en pratique, affirmer l'équivalence des conditions suivantes : a. $E\hat{\otimes}F$ est bornologique ; b. $E\hat{\otimes}F$ est tonnelé ; c. B(E, F) est complet ; d. B(E, F) est quasi complet (ou seulement complet pour les suites). Il se trouve que les hypothèses de validité de ce théorème sont vérifiées quand F est l'espace « échelonné » construit par le procédé de G. Köthe à partir d'une suite croissante de suites positives $b^{(n)} = (b_i^{(n)})$ [7]. Quand de plus E est le dual d'un espace échelonné nucléaire, plus généralement, si E est la limite inductive (au sens général) d'une suite d'espaces normés $a^{(n)}l^1$ (où, pour une suite $a^{(n)} = (a_i^{(n)})$ donnée, $a^{(n)}l^1$ désigne l'ensemble des suites qui sont produit d'une suite sommable par $a^{(n)}$), alors on peut donner un critère explicite exact pour que $E\hat{\otimes}F$ soit bien bornologique : Pour que $E\hat{\otimes}F$ soit bornologique, il faut et il suffit que pour tout entier $n_0 > 0$ existe un entier $n > 0$ tel que, pour tout entier $m > 0$ et toute suite positive $\lambda = (\lambda_i) \in E'$, il existe un $R > 0$, tel que pour tout couple (i, j) d'indices, on ait l'une des deux inégalités

$$\lambda_i a_i^{(m)} b_j^{(m)} \leqslant R b_j^{(n)} \qquad \text{ou} \qquad R a_i^{(n)} b^{(n)} \geqslant a_i^{(m)} b_j^{(n_0)}$$

Cet énoncé est parfaitement maniable dans tous les cas particuliers, malgré son aspect barbare. Dans PTT, chap. 2, § 4, n° 4 j'applique ce critère à une classe intéressante d'espaces échelonnés, comprenant plusieurs espaces intéressants en analyse. On trouve par exemple que si F est l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert U du plan complexe, alors $F'\hat{\otimes}F = L(F, F)$ est bornologique quand $U = \mathbf{C}$, non bornologique quand U est le cercle unité !

La conséquence la plus importante du critère obtenu est que l'espace $(s')\hat{\otimes}(s)$, où (s) est l'espace des suites à décroissance rapide, est bornologique. Puisque (s) est isomorphe, par transformation d'Hermite, à l'espace $\mathcal{S}(R^n)$ des fonctions « indéfiniment différentiables à décroissance rapide » sur R^n, $\mathcal{S}' \otimes \mathcal{S}$ est aussi bornologique. On peut par exemple en conclure que les espaces $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ de L. Schwartz sont bornologiques (PTT, chap. 2, § 4, n° 4). Ainsi, conjuguant avec les résultats du n° 3, on obtient le

Théorème 11. — $(\mathcal{O}_M)$ *et* $(\mathcal{O}'_C)$ *sont des espaces nucléaires bornologiques et complets, dont les duals sont des espaces* $(\mathcal{LF})$ *nucléaires, bornologiques et complets.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, Algèbre multilinéaire, *Act. Sc. Ind.*, 1044, Paris (Hermann).

[2] N. Bourbaki, Intégration, *Act. Sc. Ind.*, 1175, Paris (Hermann).

[3] J. Dieudonné et L. Schwartz, La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, *Annales de Grenoble*, 1, (1949), pp. 61-101.

[4] J. Dixmier, Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, *Annals of Math.*, 51 (1950), pp. 387-408.

[5] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires à paraître aux *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*

[6] A. Grothendieck, Sur les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{DF})$, à paraître dans *Summa Brasiliensis Mathematicae.*

[7] G. Köthe, Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, *Math. Zeitschrift*, 51 (1948), pp. 317-345.

[8] R. Schatten, A theory of cross-spaces, *Princeton University Press*, 1950.

[9] L. Schwartz, Théorie des distributions, t. 1 et 2, *Act. Sc. et Ind.*, 1091 et 1122, Paris (Hermann).