SUR CERTAINS SOUS-ESPACES VECTORIELS DE L^p

A. GROTHENDIECK

Le théoréme qui suit résoud une question qui m'avait été posée indépendamment par M. H. Mirkil et Professeur E. Farah, dans le cas particulier de $p = 2$:

Théorème 1. *Soit M un espace localement compact muni d'une mesure bornée μ, et soit $1 \leqslant p < +\infty$. Soit H un sous-espace vectoriel de $L^\infty(\mu)$, fermé dans $L^p(\mu)$. Alors H est de dimension finie.*

Démonstration. — Du théorème du graphe fermé résulte que l'application identique de H, muni de la topologie induite par L^p, dans L^∞, est continue, donc sur H la topologie induite par L^p ou par L^∞ est la même, donc aussi identique à celle induite par L^q avec $p \leqslant q < +\infty$. Par suite, H est aussi un sous-espace vectoriel complet, donc fermé, de L^q. Cela nous permet déjà de supposer $p > 1$ (sinon on remplace par $q > p$). Alors L^p est réflexif, donc H est réflexif. Par suite, l'application identique de H dans L^∞ et de L^∞ dans L^p est faiblement compacte. Or on sait qu'une application linéaire faiblement compacte d'un espace L^∞ dans un espace localement convexe séparé transforme les parties faiblement compactes de l'espace de Banach L^∞ en des parties compactes (**2**, th. 1, page 139). Il en résulte que la boule unité de H est une partie compacte de L^p, donc de H. Par suite H est de dimension finie.

Corollaire. *Soit M un espace localement compact muni d'une mesure μ quelconque et soit $1 \leqslant p < +\infty$. Soit H un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$, et $f_0 \in L^p(\mu)$, tels que toute $f \in H$ soit majorée en module par un multiple de f_0. Alors H est de dimension finie.*

(Bien entendu, le th. 1 est un cas particulier du corollaire.) Soit $d\nu = (f_0)^p d\mu$ la mesure bornée de densité $(f_0)^p$ par rapport à μ. L'application $f \to f/f_0$ (où on convient de prendre $f(t)/f_0(t) = 0$ pour $f_0(t) = 0$) est manifestement un isomorphisme métrique de H dans $L^p(\nu)$, et l'image de H est contenue dans $L^\infty(\nu)$. D'après le théorème 1, cette image est donc de dimension finie, et par suite il en est de même de H.

Remarquons d'ailleurs que la conclusion du lemme subsiste si on suppose qu'il existe une suite (f_i) d'éléments positifs de $L^p(\mu)$ telle que toute $f \in H$ soit majoré en module par un multiple d'une des f_i. En effet, posant alors $f_0 = \sum_i 2^{-i} f_i/\|f_i\|$, f_0 est un élément de $L^p(\mu)$ satisfaisant aux conditions du corollaire.

Le théorème qui suit montre dans quelle mesure le théorème 1 est le meilleur de son genre:

Reçu le 27 octobre, 1953.

THÉORÈME 2. *Soit M un espace localement compact muni d'une mesure μ.*

(1) *Si μ n'est pas discrète (i.e. somme d'une famille de masses ponctuelles), alors il existe un espace vectoriel H formé de fonctions appartenant à tous les $L^p(\mu)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$, fermé dans tous ces espaces.*

(2) *Si μ est discrète, alors tout espace vectoriel H contenu et fermé à la fois dans $L^p(\mu)$ et $L^q(\mu)$, avec $1 \leqslant p,\ q < +\infty$ et $p \neq q$, est de dimension finie.*

DÉMONSTRATION. – (1) On sait qu'il existe une partie compacte de M, de mesure non nulle, dont tout point a une mesure nulle. Cela nous ramène aussitôt au cas où M est lui-même un compact de mesure non nulle, dont tous les points ont une mesure nulle. De plus, on peut évidemment supposer μ positive et de masse totale égale à 1. On montre alors qu'il existe une application continue ϕ de M sur l'intervalle $(0, 1) = M_0$, telle que $\phi(\mu)$ soit la mesure de Lebesgue μ_0. (Nous admettrons ce fait, probablement connu, qui se démontre de même façon que le théorème d'Urysohn sur l'existence de fonctions continues sur un espace normal.) Alors, pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \to f_0\phi$ est un isomorphisme métrique de $L^p(\mu_0)$ dans $L^p(\mu)$, on est par suite aussitôt ramené au cas où $M = M_0$, $\mu = \mu_0$. Mais soit alors (n_k) une suite d'entiers tels que $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda$, où λ est une constante >1, soit H le sous-espace vectoriel fermé de $L^1(\mu)$ engendré par les fonctions $\exp(2i\pi n_k x)$, i.e. l'espace des fonctions sommables dont les coefficients de Fourier sont nuls pour les indices différents des n_k. Il est bien connu (3) que toute $f \in H$ appartient à tout $L^p(\mu)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$. Il en résulte aussitôt que H est aussi fermé dans tous ces espaces (grâce au théorème du graphe fermé).

(2) On est ramené aussitôt au cas où M est un espace discret, chaque $m \in M$ étant muni d'une masse $c_m > 0$. Comme sur H les topologies induites par L^p et L^q sont identiques (th. du graphe fermé), on est ramené à prouver que le sous-espace vectoriel fermé H_0 de H engendré par une suite (f_i) quelconque est de dimension finie. Or, les f_i seront toutes nulles en dehors d'une même partie dénombrable M_0 de M, il en sera donc de même de toute $f \in H_0$. Cela nous ramène au cas où M est dénombrable, et on peut évidemment supposer M infini. Mais dans ce cas, L^p est isomorphe à l'espace l^p des suites de puissance p-ème sommable. C'est trivial si $p = +\infty$, et pour $p < +\infty$ l'égalité

$$(\sum_m f(m)^p c_m)^{1/p} = (\sum_m ({c_m}^{1/p} f(m))^p)^{1/p}$$

nous montre que l'application $f \to \gamma f$, où $\gamma(m) = {c_m}^{1/p}$, est un isomorphisme métrique de L^p sur l^p. D'autre part, d'après un théorème de Banach (1, chap. XII, §2, th. 1), tout sous-espace vectoriel fermé de dimension infinie de l^p contient un sous-espace vectoriel isomorphe à l^p. Donc si H était de dimension infinie, l^p serait isomorphe à un sous-espace vectoriel de H, donc de L^q, donc de l^q. Or cela est impossible d'après un théorème de Banach (1, chap. XII, §3, th. 7). Banach énonce seulement que l^p n'est pas isomorphe à un sous-espace vectoriel de l^q si $1 < p,\ q < +\infty$, $p \neq q$, mais le résultat reste valable si on admet que p et q puissent prendre la valeur 1. En effet, l^1 n'est pas isomorphe à un sous-espace vectoriel de l^p pour $1 < p < +\infty$, puisque l^p est réflexif et l^1 ne l'est pas; et l^p n'est pas isomorphe à un sous-espace vectoriel de l^1, car comme nous avons rappelé plus haut, il contiendrait alors un sous-espace vectoriel isomorphe à l^1, ce qui est impossible.

Notons en passant que le résultat auxiliaire utilisé dans la démonstration de (1) est commode pour réduire diverses questions relatives à des mesures non discrètes quelconques, aux questions analogues relatives à la mesure de Lebèsgue sur (0, 1). On trouve par exemple immédiatement: Si μ est un mesure non discrète sur l'espace localement compact M, alors il existe des parties de M non mesurables pour μ; on peut trouver dans $L^1(\mu)$ des suites qui convergent faiblement sans converger fortement; si μ est bornée l'application identique de $L^\infty(\mu)$ dans $L^1(\mu)$ n'est pas compacte; la convergence d'une suite dans $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ n'implique pas sa convergence presque partout, ni même qu'elle soit latticiellement bornée dans l'espace de toutes les classes de fonctions numériques partout finies mesurables (classes modulo l'égalité localement presque partout); à fortiori la boule unité de $L^p(\mu)$ n'est pas latticiellement bornée dans l'espace précédent, etc. Il suffit en effet de vérifier ces affirmations dans l'espace $L^1(\mu_0)$ construit sur la mesure de Lebèsgue. Comme pour une mesure *discrète* μ, le contraire de chacun des énoncés précédents est valable, on obtient autant de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une mesure soit discrète. On en tire par exemple que pour un espace compact M, le fait que toute mesure sur M soit discrète est une propriété vectorielle-topologique de l'espace $E = C(M)$ des fonctions continues sur M: elle signifie en effet que toute suite dans E' qui converge pour $\sigma(E', E'')$, converge fortement, ou encore que toute partie de E' compacte pour $\sigma(E', E'')$ est fortement compacte. Il est facile de s'assurer que si M est métrisable, la propriété envisagée signifie que M ne contient pas de partie fermée sans point isolé, i.e. que M est dénombrable.

Bibliographie

1. S. Banach, *Théorie des opérations linéaires* (Varsovie, 1932).
2. A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K).* Can. J. Math., *5* (1953), 129–173.
3. A. Zygmund, *Trigonometrical series* (Varsovie, 1935).

University of São Paulo