A. Grothendieck, Sur les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{DF})$, *Matematika*, 1958, Volume 2, Issue 3, 81–128

О ПРОСТРАНСТВАХ ($\mathcal{F}$) И ($\mathcal{DF}$)[1]

Александр Гротендик

ВВЕДЕНИЕ

1. Тема. Настоящая статья обязана своим возникновением фундаментальной работе [3] и имеет своей главной целью решение вопросов, поставленных в конце этой работы. Чтобы не слишком удлинять статью, мы не касаемся здесь различных дальнейших интересных развитий рассматриваемых вопросов. Последующая статья[2] будет содержать исследование обобщенных индуктивных пределов последовательностей пространств ($\mathcal{F}$) (по-видимому, чаще встречающихся на практике, чем ранее рассмотренные в [3] пространства ($\mathcal{LF}$)) с приложением к различным функциональным пространствам, введенным Л. Шварцем. Основное содержание § 1 этой работы было анонсировано в заметке [4] в Comptes Rendus[3].

Параграф 1 содержит систематическое исследование сильных сопряженных к пространствам ($\mathcal{F}$) или, точнее сказать, положительные результаты теории. Фундаментальное свойство этих пространств, могущее служить основой для большинства последующих их свойств, навело нас на введение нового типа пространств — пространств ($\mathcal{DF}$) (теорема 1 и определение 1), охватывающих, помимо сильных сопряженных к пространствам ($\mathcal{F}$), нормированные пространства и индуктивные пределы (в наиболее общем смысле) последовательностей нормированных пространств. Большинство результатов этого параграфа применимо к произвольным пространствам ($\mathcal{DF}$). Из интересных результатов отметим следующие: теорему 1 и ее следствия, в частности, сильное второе сопряженное к пространству ($\mathcal{F}$) есть пространство ($\mathcal{F}$); сильное сопряженное к *правильному* пространству ($\mathcal{F}$) ограниченно замкнуто[4]; пространство ($\mathcal{DF}$), все ограниченные подмножества которого метризуемы, бочечно, что, например, доставляет одно из наиболее удобных условий для установления правильности заданного пространства ($\mathcal{F}$); обычная теорема двойственности, дающая сопряженное к векторному подпространству F пространства E, справедлива, когда F — *правильное* пространство ($\mathcal{F}$) (теорема 8). Некоторые из этих результатов применяются в п. 5 к пространствам ($\mathcal{LF}$).

Параграф 2 содержит различные контрпримеры. В первых трех пунктах даются контрпримеры ко всем поставленным в [3] вопросам, не решаемым утвердительно в настоящей работе. Все эти примеры заимствованы из области «совершенных пространств» Кёте ([9] и [10]), которые

[1] G r o t h e n d i e k A., Sur les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{DF}$), *Summa Bras. Math.*, 3 (1954), 57—123.

[2] Не появилась.—*Прим. перев.*

[3] За время, протекшее после опубликования этой заметки, сообщенные в ней без доказательства результаты были заново (и независимо) доказаны Доногю и Смитом [D o n o g h u e W. F., S m i t h K. T., On the symmetry and bounded closure of locally convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73 (1952), 321—344] (доказательства которых оказались при этом совпадающими с моими). Кроме того, они вновь нашли предложение 4 настоящей статьи (содержавшееся в моей заметке лишь в неявном виде) и установили частный случай теоремы 10 (для рефлексивного E).

[4] См. ниже «Введение» по поводу терминологии.

благодаря удобству оперирования с ними представляются особенно хорошо приспособленными для такого рода применений. В части случаев нам пришлось лишь воспроизвести с некоторыми видоизменениями построения, уже выполненные этим автором для других целей. Пример из п. 1, дающий, среди прочего, не правильное пространство ($\mathscr{F}$), принадлежит в основном Кёте, любезно разрешившему мне опубликовать его здесь.

В § 3 в связи с вопросом 12 работы [3] вводятся два новых типа пространств: «квазинормируемые пространства» и «пространства Шварца». Для пространств ($\mathscr{F}$), являющихся пространствами Шварца, верны обычные теоремы двойственности. При этом указанные пространства образуют класс, замечательно устойчивый относительно обычных операций. В заключение приводится список нерешенных вопросов.

Я рад выразить Ж. Дьёдонне всю свою признательность за интерес, проявленный им к моим исследованиям, и за тщательность, с которой он любезно прочел рукописи этой и предыдущих моих статей, внеся улучшения в их редакцию, а также Л. Шварцу, которому я в значительной мере обязан своим интересом к функциональному анализу. Наконец, я обращаюсь с изъявлениями благодарности к Н. Бурбаки, предоставившему мне возможность прочесть его рукопись о топологических векторных пространствах и тем самым извлечь пользу из ясности и глубины взглядов знаменитого мэтра и в этой области.

2. Терминология. Мы придерживаемся общей терминологии «Элементов» Н. Бурбаки. Все рассматриваемые векторные пространства предполагаются локально выпуклыми, и в том, что их касается, мы следуем в основном терминологии и обозначениям, принятым в [3] и [2]. Однако в отличие от терминологии статьи [3] мы следуем второй из этих статей, называя *рефлексивными* (вместо полурефлексивных) пространства, ограниченные подмножества которых относительно слабо компактны, и *вполне рефлексивными* (вместо рефлексивных) — *бочечные рефлексивные* пространства, т. е. пространства E, естественное отображение которых в сильное сопряженное E'' к их сильному сопряженному E' является изоморфизмом на E''. Далее, мы называем пространством ($\mathscr{M}$) каждое пространство, ограниченные подмножества которого относительно компактны; для метризуемых пространств эта терминология совпадает с принятой в [3]. Наконец, опыт показывает, что во втором сопряженном E'' к пространству E есть основание рассматривать как «естественную» не сильную топологию пространства, сопряженного к сильному E' (т. е. топологию равномерной сходимости на *сильно ограниченных* множествах из E'), но топологию равномерной сходимости на *равностепенно непрерывных* множествах из E'; эта топология обладает фундаментальной системой окрестностей нуля, образованной слабыми замыканиями (в E'') окрестностей нуля из E, и индуцирует в E его исходную топологию. Всюду, где явно не оговорено противное, второе сопряженное E'', рассматриваемое как топологическое векторное пространство, будет считаться наделенным этой последней топологией. Напротив, там, где говорится о слабом E'', будет, конечно, иметься в виду слабая топология, определяемая двойственностью между E'' и E'. Отметим, что естественная и слабая топологии в E'' определяют одни и те же ограниченные множества, как это вытекает из того, что слабо замкнутые равностепенно непрерывные множества в E' слабо компактны и, значит, сильно полны, и из критерия Макки (приведенного к удобной форме теоремы 2 статьи [2]).

Согласно [2], локально выпуклое пространство E называется *бочечным*, если каждое слабо ограниченное множество в его сопряженном равностепенно непрерывно. Нам будет удобно называть E *квазибочечным*, если *сильно* ограниченные множества в его сопряженном равностепенно непрерывны[1]). Для полного пространства E эти два понятия совпадают (снова в силу теоремы 2 статьи [2]). Метризуемое пространство E квазибочечно, но в случае, если оно неполно, может и не быть бочечным.

Пусть A и B два множества в локально выпуклом пространстве E; мы говорим, что A *поглощает* B, если существует $\lambda > 0$ такое, что $A \supset \lambda B$. E называется *ограниченно замкнутым*, если каждое закругленное выпуклое множество в E, поглощающее все ограниченные множества, есть окрестность нуля. Это влечет *квазибочечность* пространства E (но обратное, вероятно, неверно[2])).

Пусть E — локально выпуклое пространство и E' — его сильное сопряженное; напомним, что *слабо* замкнутые закругленные выпуклые множества U, порождающие E', образуют в E' фундаментальную систему окрестностей нуля. Утверждать, что достаточно уже одной *сильной* замкнутости, чтобы U было окрестностью нуля, означает утверждать, что E' бочечно или еще что каждое ограниченное множество в его слабом сопряженном E'' равностепенно непрерывно. С другой стороны, слабые замыкания в E'' ограниченных множеств из E по «теореме о биполярах» ([3], предложение 1) образуют фундаментальную систему равностепенно непрерывных множеств в E'' (рассматриваемом как сопряженное к сильному E'). Поэтому предыдущее предположение означает также, что каждое ограниченное множество в E'' содержится в слабом замыкании некоторого ограниченного множества из E. В этом случае, следуя статье [3], мы называем E *правильным*.

Наконец, в п. 1 § 1 мы воспользуемся введенным в [2] понятием гипонепрерывного билинейного отображения $u(x, y)$ произведения двух локально выпуклых пространств E, F в третье, G. Это понятие зависит от задания множества $\mathfrak{G}_1$ ограниченных подмножеств из E и множества $\mathfrak{G}_2$ ограниченных подмножеств из F. Более общим образом естественно называть *множество* M билинейных отображений $u(x, y)$ произведения $E \times F$ в G равностепенно гипонепрерывным относительно $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, если для каждого $A \in \mathfrak{G}_1$ отображения $y \to u(x, y)$ $(x \in A,\ u \in M)$ образуют равностепенно непрерывное множество линейных отображений F в G, и аналогичное условие выполнено для каждого $B \in \mathfrak{G}_2$. Там, где $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ не будут явно указываться (так что u будет называться просто гипонепрерывным или M — равностепенно гипонепрерывным), под $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ будут подразумеваться множества *всех* ограниченных подмножеств из E, соответственно F. Наконец, когда $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ сводятся к множествам всех *конечных* подмножеств из E, соответственно F, мы говорим просто, что *u раздельно непрерывно* или *M раздельно равностепенно непрерывно.*

§ 1. ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВ $(\mathcal{DF})$

1. Одно свойство устойчивости совокупности окрестностей нуля сильного сопряженного к пространству $(\mathcal{F})$. Пространство $(\mathcal{DF})$.

Теорема 1. *Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство. Если последовательность (A_i) равностепенно непрерывных множеств в его втором сопряженном имеет ограниченное объединение A, то A равностепенно непрерывно.*

Двойственное утверждение таково: *Если пересечение U последовательности (U_i) сильно замкнутых закругленных выпуклых окрестностей нуля в сильном E' порождает E', то U есть сильная окрестность нуля в E'*. Это означает

[1]) Таким образом, E квазибочечно тогда и только тогда, когда сильная и «естественная» топологии в E'' совпадают. — *Прим. перев.*

[2]) См. «Замечание при корректуре» в конце статьи. — *Прим. перев.*

также, что U содержит *слабо* замкнутое закругленное выпуклое множество W, порождающее E'. Для построения множества W обозначим через (K_n) фундаментальную последовательность слабо замкнутых закругленных выпуклых сильно ограниченных множеств в E' и построим по индукции последовательность чисел $\lambda_i > 0$ и последовательность *слабо* замкнутых закругленных выпуклых окрестностей нуля W_i так, чтобы (в предположении, что первые n членов каждой последовательности уже построены) выполнялись следующие условия:

$$1)\ \lambda_i K_i \subset \frac{1}{2^{i+1}} U, \qquad 2)\ \lambda_i K_i \subset W_j, \qquad 3)\ W_i \subset U_i \qquad (i, j \leqslant n).$$

Если это построение может быть бесконечно продолжено, то множество $W = \bigcap W_i$ порождает E' (ибо содержит все $\lambda_i K_i$), является выпуклым, закругленным и слабо замкнутым (ибо все W_i таковы) и содержится в $\bigcap U_i = U$, т. е. обладает всеми требуемыми свойствами. Итак, покажем, что индукция от n к $n+1$ действительно может быть проведена. Выберем для этого λ_{n+1} столь малым, чтобы

$$\lambda_{n+1} K_{n+1} \subset \frac{1}{2^{n+2}} U \cap \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

(что возможно, поскольку K_{n+1} сильно полно; см. [2], теорема 2). Положим $K'_{n+1} = \lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_{n+1} K_{n+1}$; это — закругленное выпуклое слабо компактное множество в E', содержащееся в $\frac{1}{4} U + \ldots + \frac{1}{2^{n+2}} U \subset \frac{1}{2} U$, так что $K'_{n+1} \subset \frac{1}{2} U_{n+1}$. Пусть тогда W'_{n+1} — слабо замкнутая закругленная выпуклая окрестность нуля, содержащаяся в $\frac{1}{2} U_{n+1}$, и положим $W_{n+1} = K'_{n+1} + W'_{n+1}$. Это — сильная окрестность нуля, содержащая K'_{n+1} и содержащаяся в U_{n+1}; притом она слабо замкнута, поскольку K'_{n+1} слабо компактно, а W'_{n+1} слабо замкнуто. Следовательно, λ_{n+1} и W_{n+1} удовлетворяют всем вышеприведенным предположениям индукции 1), 2) и 3).

Следствие 1. *Каждое сепарабельное ограниченное множество в слабом E'' равностепенно непрерывно и тем самым слабо относительно компактно.*

Отсюда сразу вытекает

Следствие 2. *Каждая слабая последовательность Коши в E'' слабо сходится.*

Тогда в E'' тем более всякая сильная последовательность Коши слабо, а значит, и сильно сходится; так как E'' метризуемо в своей сильной топологии, то отсюда вытекает

Следствие 3. *Второе сопряженное E'' к метризуемому локально выпуклому пространству E полно и, значит, является пространством $(\mathcal{F})$.*

Следствие 4. *Каждое сепарабельное ограниченное множество в пополнении $\hat{E}$ пространства E содержится в замыкании некоторого ограниченного множества из E.*

Действительно, в силу следствия 3 $\hat{E} \subset E''$, а тогда достаточно применить следствие 1.

Все эти утверждения используют лишь ослабленную форму теоремы 1, данную в следствии 1. Остальная часть этого пункта будет посвящена применениям теоремы 1 в ее общей форме.

Предложение 1. *Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство, G — любое локально выпуклое пространство и (M_i) — после-*

довательность множеств в пространстве $L_s(E', G)$ непрерывных линейных отображений сильного E' в G, наделенном топологией простой сходимости. Для того чтобы объединение M множеств M_i было равностепенно непрерывным, (необходимо и) достаточно, чтобы оно было ограниченно, а каждое M_i равностепенно непрерывно.

Это предложение непосредственно сводится к менее общей на вид теореме 1 в силу следующей леммы, позволяющей сводить рассмотрение непрерывных линейных отображений к рассмотрению линейных *форм*.

Лемма 1. *Пусть E и G — локально выпуклые пространства и M — множество линейных отображений E в G.*

а) *Для того чтобы M было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы множество M' отображений u', сопряженных к всевозможным $u \in M$* (где u' априори — линейное отображение G' в *алгебраическое* сопряженное к E), *было таково, чтобы для каждого равностепенно непрерывного множества $B' \subset G'$ множество $M'(B')$ всех $u'(y')$ ($u' \in M'$, $y' \in B'$) было равностепенно непрерывно в E'.*

б) *Пусть $\mathfrak{S}$ — множество ограниченных подмножеств из E и все $u \in M$ непрерывны. Для того чтобы M было ограниченным в топологии $\mathfrak{S}$-сходимости[1]), необходимо и достаточно, чтобы множество M' было таково, чтобы для каждого равностепенно непрерывного множества $B' \subset G'$ множество $M'(B')$ было ограниченно в E', наделенном топологией $\mathfrak{S}$-сходимости.*

Мы не будем излагать здесь совершенно очевидное доказательство этой леммы. Ясно также, что она действительно сводит предложение 1 к теореме 1. Предложение 1 позволяет установить аналогичные следствия, например:

Следствие 1. *Каждая ограниченная последовательность в $L_s(E', G)$ равностепенно непрерывна (где E', как обычно, — сильное сопряженное к метризуемому пространству E). Следовательно, если последовательность (u_i) непрерывных линейных отображений E' в G сходится в каждой точке к некоторому пределу $u(x)$, то она равностепенно непрерывна, а ее предел и является непрерывным линейным отображением E' в G.*

Следствие 2. *Если G — пространство $(\mathcal{F})$, то $L(E', G)$ полно в топологии ограниченной сходимости и, следовательно, является пространством $(\mathcal{F})$.*

Действительно, так как это пространство метризуемо, то, чтобы убедиться в его полноте, достаточно убедиться в том, что каждая последовательность Коши в нем сходится.

Прежде чем обратиться к другим обобщениям теоремы 1, мы сформулируем эту теорему как аксиому замечательного класса пространств, обобщающего сильные сопряженные к метризуемым пространствам.

Определение 1. *Локально выпуклое пространство H называется пространством типа $(\mathcal{DF})$, если оно обладает фундаментальной последовательностью ограниченных множеств и каждое сильно ограниченное множество в его сопряженном, являющееся объединением последовательности равностепенно непрерывных множеств, само равностепенно непрерывно.*

Теорема 1 означает, что сильное сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству есть пространство типа $(\mathcal{DF})$; обратно, без труда устанавливается, что *сильное сопряженное к пространству типа $(\mathcal{DF})$ метризуемо и полно* (для чего достаточно убедиться в сходимости

[1]) То есть равномерной сходимости на всех множествах из $\mathfrak{S}$. — *Прим. перев.*

последовательностей Коши в сильном H'); это и оправдывает нашу терминологию. Если H к тому же квазибочечно, т. е. каждое сильно ограниченное множество в H' равностепенно непрерывно, то второе условие, наложенное в определении 1, очевидно, излишне. Отсюда вытекает, что каждое нормированное пространство или индуктивный предел последовательности нормированных пространств[1]) есть пространство типа $(\mathcal{DF})$.

Двойственная форма второго условия определения 1 такова: *Если пересечение последовательности замкнутых закругленных выпуклых окрестностей нуля пространства H поглощает все ограниченные множества, то оно является окрестностью нуля.* Нам потребуется также

Лемма 2. *Пусть H — пространство типа $(\mathcal{DF})$. Тогда для каждой последовательности (V_i) его окрестностей нуля существует окрестность нуля V, поглощаемая каждой из V_i* (по поводу терминологии см. Введение).

Действительно, преобразованное переходом к полярам, это утверждение означает, что для каждой последовательности (B_i) равностепенно непрерывных множеств из H существует последовательность чисел $\lambda_i > 0$ такая, что множество $\Gamma_i\lambda_i B_i$ равностепенно непрерывно. Но так как H', наделенное сильной топологией, метризуемо, то найдется последовательность чисел $\lambda_i > 0$ такая, что $\Gamma_i\lambda_i B_i$ будет ограниченным («первое условие счетности Макки»), а тем самым и равностепенно непрерывным, поскольку H есть пространство $(\mathcal{DF})$.

Наконец, предложение 1 и его следствия, очевидно, сохраняют силу и при замене E' любым пространством типа $(\mathcal{DF})$.

Теорема 2. *Пусть H_1 и H_2 — пространства типа $(\mathcal{DF})$, G — любое локально выпуклое пространство и M — множество билинейных отображений $H_1 \times H_2$ в G. Для равностепенной непрерывности множества M необходима и достаточна его равностепенная гипонепрерывность* (по поводу терминологии см. Введение).

Прежде всего, можно свести вопрос к рассмотрению того случая, когда G есть поле скаляров, благодаря следующей лемме, играющей роль, аналогичную роли леммы 1, и доказываемой таким же образом.

Лемма 3. *Пусть E, F, G — локально выпуклые пространства и M — множество билинейных отображений $E \times F$ в G. Пусть $u_{z'}$ для каждого $u \in M$ и $z' \in G'$ — билинейная форма на $E \times F$, определяемая формулой $u_{z'}(x, y) = \langle u(x, y), z' \rangle$, и $M_{C'}$ для любого $C' \subset G'$ — множество всех $u_{z'}$ $(u \in M, z' \in C')$.*

а) Для того чтобы M было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $M_{C'}$ для любого равностепенно непрерывного множества $C' \subset G'$ было равностепенно непрерывным множеством билинейных форм на $E \times F$.

б) Пусть $\mathfrak{S}_1$ — множество ограниченных подмножеств пространства E и $\mathfrak{S}_2$ — множество ограниченных подмножеств пространства F. Для того чтобы M было равностепенно гипонепрерывным относительно $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$, необходимо и достаточно, чтобы $M_{C'}$ было равностепенно гипонепрерывно для каждого равностепенно непрерывного множества $C' \subset G'$.

[1]) Очевидно, имеется в виду *строгий* индуктивный предел (см. начало п. 5 § 1), для которого существование фундаментальной последовательности ограниченных множеств тривиально (поскольку каждое ограниченное подмножество строгого индуктивного предела последовательности любых локально выпуклых пространств содержится и ограниченно в одном из этих пространств). Результат верен и для общих индуктивных пределов последовательностей нормированных пространств (где каждое ограниченное множество содержится в замкнутой выпуклой оболочке объединения конечного числа ограниченных множеств из составляющих пространств), но это — уже значительно более тонкий факт (см. теорему 9 в п. 4 § 1). — *Прим. перев.*

в) Пусть все $u \in M$ *раздельно непрерывны. Для того чтобы* M *было ограниченным в топологии* $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$*-сходимости*[1] *в пространстве* $L(E, F; G)$ *всех раздельно непрерывных билинейных отображений* $E \times F$ *в* G, *необходимо и достаточно, чтобы множество* $M_{C'}$ *билинейных форм на* $E \times F$ *было ограниченным в топологии* $\mathfrak{S}_1$-$\mathfrak{S}_2$*-сходимости для каждого равностепенно непрерывного множества* $C' \subset G'$.

Таким образом, при доказательстве теоремы 2 мы можем предполагать, что G есть поле скаляров. Очевидно, достаточно показать, что всякое равностепенно гипонепрерывное множество M билинейных форм на $H_1 \times H_2$ равностепенно непрерывно. Пусть (A_i) (соответственно (B_i)) — фундаментальная последовательность ограниченных множеств в H_1 (соответственно H_2). Пусть, далее, u' для каждого $u \in M$ — определяемое им отображение H_2 в H_1'[2] и A'—множество, которое пробегает u', когда u пробегает множество A. Мы хотим показать, что M равностепенно непрерывно, что означает также, что в H_2 существует окрестность нуля V, для которой множество $M'(V)$ всех $u'(y)$ $(u' \in M', y \in V)$ *равностепенно непрерывно* в H_1'. Прежде всего, известное рассуждение Дьёдонне и Шварца [3] показывает, что в H_2 существует окрестность нуля V, для которой $M'(V)$ *сильно ограниченно* в H_1'; действительно (как это сразу следует из равностепенной гипонепрерывности множества M), для каждого A_i существует сильная окрестность нуля V_i в H_2 такая, что множество чисел $\langle x, u'(y)\rangle$ $(x \in A_i, y \in V, u' \in M')$ ограниченно; но в силу свойства пространства H_2, выражаемого леммой 2, можно взять $V_i = V$ не зависящим от i, что как раз и означает, что $M'(V)$ ограниченно в H_1'. Докажем, что тогда $M'(V)$, более того, — *равностепенно непрерывное множество* в H_1'; действительно, $M'(V) = \bigcup M'(b_i)$, где $b_i = B_i \cap V$, а $M'(b_i)$ (вследствие равностепенной гипонепрерывности множества M) — *равностепенно непрерывные* множества в H_1', объединение которых ограниченно; так как H_1 — пространство типа $(\mathcal{DF})$, то отсюда следует, что это объединение $M'(V)$ тем самым равностепенно непрерывно.

Следствие. *Если* H_1 *и* H_2 — *бочечные пространства типа* $(\mathcal{DF})$, *то множество* M *билинейных отображений* $H_1 \times H_2$ *в* G *равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно раздельно равностепенно непрерывно* (по поводу терминологии см. Введение).

Действительно, если H_1 и H_2 бочечны, то для равностепенной гипонепрерывности множества M, как известно, достаточно, чтобы оно было раздельно равностепенно непрерывно.

Замечание 1. Если в качестве M взять множество, сводящееся к одному единственному билинейному отображению u, то теорема 2 дает простой признак непрерывности последнего. Теоремы 8 и 9 работы [3] являются его частными случаями, соответствующими двум случаям, где можно очевидным образом утверждать, что данное раздельно непрерывное билинейное отображение на самом деле гипонепрерывно.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 2 вместо предположения, что H_2 — пространство типа $(\mathcal{DF})$, было бы достаточно предполагать лишь, что H_2 обладает фундаментальной системой ограниченных множеств и свойством, утверждаемым в лемме 2. Заметим, что такое пространство действительно может не быть пространством типа $(\mathcal{DF})$ (так что сказанное действительно является усилением теоремы 2); в самом деле, ясно, что если H — локально выпуклое пространство, обладающее фундаментальной последовательностью ограниченных множеств и, кроме

---

[1] То есть равномерной сходимости на всевозможных произведениях $A \times B$ $(A \in \mathfrak{S}_1, B \in \mathfrak{S}_2)$. — *Прим. перев.*

[2] То есть отображение $y \to u(x, y)$ $(x \in H_1, y \in H_2)$. — *Прим. перев.*

того, свойством, рассматриваемым в лемме 2, то и каждое векторное подпространство пространства H обладает теми же свойствами; но мы увидим, что векторное подпространство пространства H типа $(\mathcal{DF})$ может не быть пространством типа $(\mathcal{DF})$ и что в сопряженном к этому подпространству могут даже существовать слабые последовательности Коши, не являющиеся слабо сходящимися (см. § 2, п. 3).

Замечание 3. Теорема 2 распространяется на множества *полилинейных* отображений произведения любого конечного числа пространств H_i типа $(\mathcal{DF})$.

Замечание 4. Пусть E — не правильное пространство $(\mathcal{F})$ (в § 2 мы увидим, что такие пространства существуют) и A — не равностепенно непрерывное слабо замкнутое закругленное выпуклое ограниченное множество в E''. Пусть, далее, H — порожденное им векторное пространство $\mathbf{C}.A$, наделенное нормой, определяемой «шаром» A. Так как A полно[1]), то, как легко видеть, и H полно[2]). Тождественное отображение H в E'' отождествимо с билинейной формой на $E' \times H$[3]); *эта билинейная форма раздельно непрерывна, но не непрерывна.* Поэтому нельзя рассчитывать на возможность существенного усиления утверждения теоремы 2, и описанное построение дает отрицательное решение вопроса 11 работы [3]. Правда, для этого нужно еще, чтобы и H было сильным сопряженным к пространству F типа $(\mathcal{F})$, но весьма легко свести дело к этому следующим образом: как известно, каждое банаховское пространство H изоморфно фактор-пространству пространства $l^1(I)$ всех суммируемых семейств скаляров на достаточно большом множестве индексов I[4]), с другой же стороны $l^1(I)$ изоморфно сопряженному к пространству $c_0(I)$ комплексных функций на множестве I (рассматриваемом как дискретное топологическое пространство), «стремящихся к нулю на бесконечности»; а тогда H, очевидно, можно заменить сопряженным к $c_0(I)$.

Предложение 3. *Пусть H_1, H_2 — пространства типа $(\mathcal{DF})$ и G — любое локально выпуклое пространство. Каждое множество M билинейных отображений $H_1 \times H_2$ в G, являющееся объединением последовательности равностепенно непрерывных множеств M_i и ограниченное в топологии ограниченной сходимости, равностепенно непрерывно.*

Лемма 3 сразу сводит дело к случаю, когда G — поле скаляров. В силу теоремы 2 достаточно убедиться в том, что M равностепенно гипонепрерывно, т. е. что для каждого ограниченного множества B из (например) H_2 множество $M'(B)$ линейных форм $x \to u(x, y)$ $(y \in B, u \in M)$ на H_1 является равностепенно непрерывным подмножеством сопряженного пространства H_1'. Но так как M ограниченно, то $M'(B)$ ограниченно в сильном H_1'; при этом $M'(B)$ является объединением множеств $M_i'(B)$, равностепенно непрерывных, поскольку равностепенно непрерывны множества M_i; а отсюда и следует справедливость доказываемого предложения (поскольку H — пространство $(\mathcal{DF})$).

Мы предоставим читателю самому сформулировать следствия этого предложения, аналогичные следствиям теоремы 1. Разумеется, предложе-

[1]) В силу следствия 3 теоремы 1.—*Прим. перев.*

[2]) По теореме 2 статьи [2].—*Прим. перев.*

[3]) А именно, с $\langle x', h\rangle$, где $x' \in E'$, а $h \in H$ рассматривается как элемент из E''.—*Прим. перев.*

[4]) Этот факт, по-видимому уже известный Банаху, доказывается следующим образом: выберем в единичном шаре пространства H всюду плотное семейство элементов (x_i) и определим формулой $u((\lambda_i)) = \Sigma \lambda_i x_i$ непрерывное линейное отображение $l^1(I)$ в H; весьма легко видеть, что u является гомоморфизмом *на* и осуществляет отождествление H *вместе с его нормой* с фактор-пространством пространства $l^1(I)$. Отметим, что если H сепарабельно, то I можно взять счетным.

ние 3 справедливо также для множеств полилинейных функций на произведении любого конечного числа пространств $(\mathscr{DF})$.

2. Свойство сильных окрестностей нуля в пространстве $(\mathscr{DF})$. Применение к установлению правильности некоторых пространств $(\mathscr{F})$.

Теорема 3. *Пусть H — пространство типа $(\mathscr{DF})$ (определение 1). Для того чтобы выпуклое множество U было окрестностью нуля, (необходимо и) достаточно, чтобы его пересечение с каждым закругленным выпуклым ограниченным множеством $A \subset H$ было окрестностью нуля в топологии, индуцируемой в A из H.*

Необходимость условия очевидна. Чтобы убедиться в его достаточности, рассмотрим фундаментальную систему (A_n) замкнутых закругленных выпуклых ограниченных множеств в H и построим по индукции последовательность (λ_i) положительных чисел и последовательность (V_i) замкнутых закругленных выпуклых окрестностей нуля так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$1)\ \lambda_i A_i \subset \frac{1}{3} U,\quad 2)\ \lambda_i A_i \subset V_j,\quad 3)\ V_i \cap A_i \subset U \text{ (для всех } i, j).$$

Тогда $\bigcap_i V_i$ в силу 2) и определения пространств $(\mathscr{DF})$ будет сильной окрестностью нуля и в силу 3) будет содержаться в U. Для доказательства возможности индукции допустим, что она уже проведена до n-го шага включительно. Выберем $\lambda_{n+1} > 0$ так, чтобы $\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset \frac{1}{3} U$, что дозволительно, поскольку (в силу предположения относительно U) существует окрестность нуля V, для которой $V \cap A_{n+1} \subset U$, так что достаточно взять λ_{n+1} так, чтобы $3\lambda_{n+1} \leqslant 1$ и $3\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset V$. Выбрав λ_{n+1} достаточно малым, можно, кроме того, считать, что $\lambda_{n+1} A_{n+1} \subset V_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Покажем, что тогда можно найти замкнутую закругленную выпуклую окрестность нуля V_{n+1}, удовлетворяющую условиям $\lambda_i A_i \subset V_{n+1}$ для $i = 1, \ldots, n+1$ и $V_{n+1} \cap A_{n+1} \subset U$, чем и будет доказана возможность индукции. Положим $A = \Gamma_{i=1}^{n+1} \lambda_i A_i$ и $V_{n+1} = \overline{A + V}$, где V — закругленная выпуклая окрестность нуля, подлежащая определению. Так как $A \subset V_{n+1} \subset 2(A+V) = 2A + 2V$, то достаточно, чтобы $(2A + 2V) \cap A_{n+1} \subset U$. Положив $B = A_{n+1} \cap \complement U$, можно записать это также в виде $(2A + 2V) \cap B = \varnothing$ или, наконец, $2V \cap (B + 2A) = \varnothing$ (замечая, что так как A — закругленное выпуклое множество, то $-A = A$). Тем самым существование такой окрестности нуля V равносильно тому, что 0 не является точкой прикосновения для $C = B + 2A$. Но $C \subset \complement\left(\frac{1}{3} U\right)$. Действительно, в противном случае в $B + 2A$ существовала бы точка из $\frac{1}{3} U$ и, значит, в B — точка из $\frac{1}{3} U + 2A$; но в силу 1) $A \subset \frac{1}{3} U$, откуда $\frac{1}{3} U + 2A \subset \frac{1}{3} U + \frac{2}{3} U \subset U$ (поскольку U выпукло), а, с другой стороны, $B \subset \complement U$. Итак, $C \subset \complement\left(\frac{1}{3} U\right)$, или $3C \subset \complement U$. Так как, кроме того, $3C$ ограниченно и, таким образом, содержится в замкнутом закругленном выпуклом ограниченном множестве, то из предположения относительно U вытекает, что 0 не является точкой прикосновения для $3C$, а тем самым и для C, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть H — пространство $(\mathscr{DF})$ и G — любое локально выпуклое пространство. Для того чтобы линейное отображение u пространства H в G было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы были непрерывны его сужения на ограниченные множества из H. Для того* *чтобы множество M линейных отображений H в G было равностепенно непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы было равностепенно непрерывно множество сужений отображений $u \in M$ на любое ограниченное множество $A \subset H$.*

Действительно, непосредственно видно, что, каково бы ни было закругленное выпуклое множество $A \subset H$, равностепенная непрерывность множества сужений отображений $u \in M$ на A означает также, что для любой окрестности нуля V в G множество $U = \bigcap_{u \in M} \overset{-1}{u}(V)$ индуцирует окрестность нуля в A; приняв за A сначала H, а затем произвольное ограниченное множество из H и применив теорему 3, мы и получим утверждение следствия. Заметим, что, как легко убедиться, утверждения теоремы 3 и указанного ее следствия совершенно *равносильны* в любом локально выпуклом пространстве H. Кроме того, они влекут такое следствие (обобщающее следствие 2 предложения 1):

Следствие 2. *Пусть H — пространство $(\mathcal{DF})$ и G — полное отделимое локально выпуклое пространство. Тогда пространство $L(H, G)$ всех непрерывных линейных отображений H в G, наделенное топологией ограниченной сходимости, полно.*

Справедливость этого утверждения прямо вытекает из следствия 1. Последнее, по-видимому, может быть использовано также для применения теоремы 2, сводящего проверку непрерывности билинейного отображения к проверке равностепенной непрерывности некоторых множеств линейных отображений H_1 или H_2 в локально выпуклое пространство. Отметим, однако, что *не*верно, будто бы для непрерывности билинейной формы на $H_1 \times H_2$ (где H_1 и H_2 - пространства $(\mathcal{DF})$) достаточно непрерывности ее сужений на произведения $A \times B$ любых двух ограниченных множеств из H_1, соответственно H_2; действительно, контрпример доставляется построением замечания 4 (после теоремы 2), причем одно из входящих в него пространств H_1, H_2 - даже банаховское.

В том случае, когда H — сильное сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству, теорема 3, как получается переходом к полярам, равносильна следующему утверждению (которое нам, однако, в дальнейшем не понадобится): *для того чтобы множество $A \subset E''$ было равностепенно непрерывным, (необходимо и) достаточно, чтобы, какова бы ни была окрестность нуля V из E, существовало ограниченное множество $B \subset E$, для которого A содержалось бы в слабом замыкании $B + V$ в E''.*

Замечание 5. Теорема 3 могла бы навести на мысль, что аналогично имеющему место для топологии компактной сходимости в сопряженном к пространству $(\mathcal{F})$ ([3], теорема 5), топология пространства H типа $(\mathcal{DF})$ есть сильнейшая из всех топологий в H, индуцирующих в каждом ограниченном множестве из H ту же топологию, что и H, и что всякое множество $M \subset H$, имеющее замкнутое пересечение с каждым замкнутым ограниченным множеством, замкнуто. Однако мы увидим, что это отнюдь не так, даже когда M есть векторное подпространство сильного сопряженного H к пространству $(\mathcal{F})$ (§ 2, п. 3)[1]).

Теорема 4. *Пусть H — пространство типа $(\mathcal{DF})$, M — множество в H, содержащее всюду плотную последовательность, и T_0 — топология в H равномерной сходимости на всех сильно ограниченных множествах из H'. Тогда T_0 индуцирует в M топологию пространства H.*

---

[1]) Теорема 3 означает, что топология пространства H типа $(\mathcal{DF})$ есть сильнейшая из всех *локально выпуклых* топологий в H, индуцирующих в каждом ограниченном множестве из H ту же топологию, что и H. — *Прим. перев.*

Очевидно, можно предполагать, что M — *векторное* подпространство пространства H. Так как топология, которую в M индуцирует T_0, мажорирует топологию, индуцируемую в M из H, то достаточно показать, что для каждого замкнутого закругленного выпуклого множества $U \subset H$, поглощающего все ограниченные множества в H, существует окрестность нуля V в H такая, что $V \cap M \subset U$, или $V \cap \complement U \cap M = \varnothing$. Если V открыта, то для этого достаточно, чтобы ни одна из точек x_i всюду плотной в M последовательности не содержалась в множестве $V \cap \complement U$ (поскольку последнее открыто); тем самым дело сводится к доказательству того, что для любой последовательности $(x_i) \subset \complement U$ существует окрестность нуля V в H, не содержащая ни одной из точек x_i. Для этой цели, взяв фундаментальную последовательность (A_n) ограниченных множеств из H, построим по индукции одновременно последовательность замкнутых закругленных выпуклых окрестностей нуля V_i и последовательность чисел $\lambda_i > 0$ так, чтобы

$$1)\ \lambda_i A_i \subset V_j, \quad 2)\ \lambda_i A_i \subset U, \quad 3)\ x_i \in \complement V_i \quad (\text{для всех } i, j).$$

Возможность индукции устанавливается очень легко: нужно лишь по заданному замкнутому закругленному выпуклому множеству $A = \overline{\Gamma_{i=1}^{n} \lambda_i A_i}$ найти замкнутую закругленную выпуклую окрестность нуля V_{n+1}, содержащую A, но не x_{n+1}, что возможно, поскольку $x_{n+1} \in \complement A$. Тогда $V = \bigcap_i V_i$ будет пересечением последовательности замкнутых закругленных выпуклых окрестностей нуля, в силу 1) поглощающим все ограниченные множества и тем самым являющимся окрестностью нуля, поскольку H — пространство $(\mathcal{DF})$; при этом V в силу 3) не содержит ни одного x_i.

Следствие 1. *Топология T_0 дает те же самые сходящиеся и слабо сходящиеся последовательности, что и заданная топология пространства H, и индуцирует в метризуемых подмножествах пространства H ту же топологию, что и H.*

Действительно, первые два утверждения непосредственно содержатся в теореме 4, последнее же есть следствие первого. Заметим, что из первого утверждения следствия 1 вытекает также, что в случае отображения *метризуемого* топологического пространства в H все равно, непрерывно ли оно при заданной топологии пространства H или же при топологии T_0.

Следствие 2. *Пространство $(\mathcal{DF})$, содержащее всюду плотную последовательность, квазибочечно.*

Из соединения теорем 3 и 4 получается

Теорема 5. *Пространство $(\mathcal{DF})$, все ограниченные подмножества которого метризуемы, квазибочечно.*

Действительно, в силу теоремы 3 достаточно показать, что T_0 индуцирует во всех ограниченных множествах из H топологию пространства H, а это вытекает из следствия 1 теоремы 4.

Теорема 5 дает удобный признак для установления квазибочечности пространства $(\mathcal{DF})$. Если E — пространство $(\mathcal{F})$, то оно правильное тогда и только тогда, когда его сильное сопряженное бочечно (что равносильно здесь квазибочечности); а отсюда — достаточный признак правильности пространства $(\mathcal{F})$: достаточно, чтобы ограниченные множества в его сильном сопряженном были метризуемы. По-видимому, все пространства типа $(\mathcal{F})$, встречающиеся в анализе, подпадают под этот признак, поскольку они входят даже в более узкую категорию «квазинормируемых» пространств $(\mathcal{F})$ § 3.

3. Бочечная топология, ассоциированная с сопряженным к пространству ($\mathscr{F}$), и теоремы двойственности.

Лемма 4. *Пусть H — пространство ($\mathscr{D}\mathscr{F}$) и (A_i) — возрастающая последовательность замкнутых закругленных выпуклых ограниченных множеств в H такая, что каждое ограниченное множество в H поглощается одним из A_i. Тогда сильное замыкание $\overline{U}$ объединения U множеств A_i совпадает с его «алгебраическим» замыканием $\widetilde{U}$* (т. е. с совокупностью всех $x \in H$, для которых $\lambda x \in U$, каково бы ни было λ такое, что $0 < \lambda < 1$).

Очевидно, $\widetilde{U} \subset \overline{U}$. Для доказательства того, что $\overline{U} \subset \widetilde{U}$, достаточно показать, что, каково бы ни было $x \in \complement\widetilde{U}$, существует форма $x' \in U^\circ$ (где U° — поляра U в H'), для которой $|\langle x, x'\rangle| > 1$. Итак, пусть $\lambda > 1$ таково, что $x \in \complement\lambda U$; покажем, что найдется $x' \in U^\circ$, для которого $\langle x, x'\rangle = \lambda$. Действительно, для каждого n, поскольку $x \in \complement\lambda A_n$, существует $x'_n \in A_n^\circ$ такое, что $\langle x, x'_n\rangle = \lambda$. Последовательность (x'_n), очевидно, сильно ограниченна в H' и тем самым равностепенно непрерывна, поскольку H — пространство типа ($\mathscr{D}\mathscr{F}$). Поэтому она имеет слабую предельную точку x', и ясно, что $x' \in U^\circ$, $\langle x, x'\rangle = \lambda$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть $E' = H$ — сильное сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству E, (K_i) — фундаментальная последовательность слабо замкнутых закругленных выпуклых ограниченных множеств в E' и (λ_i) — последовательность положительных чисел. Тогда сильное замыкание множества $U = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\Gamma}} \lambda_i K_i$ совпадает с его «алгебраическим» замыканием.*

Действительно, так как K_i слабо компактны, то множества $A_n = \overset{n}{\underset{i=1}{\Gamma}} \lambda_i K$ слабо компактны и тем самым сильно замкнуты, так что к $U = \bigcup A_n$ применима лемма 4.

Из этого следствия непосредственно вытекает

Теорема 6. *Пусть $H = E'$ — сильное сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству E. Тогда каждое закругленное выпуклое множество $V \subset H$, поглощающее все ограниченные множества, содержит замкнутое закругленное выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества.*

Действительно, $\frac{1}{2}V$ содержит множество U вида $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Gamma}} \lambda_i K_i$, сильное замыкание которого совпадает с его «алгебраическим» замыканием (следствие леммы 4) и потому содержится в V.

Следствие 1. *Пусть H_0 — пространство H, наделенное топологией T_0 равномерной сходимости на ограниченных множествах из $H' = E''$. H_0 обладает теми же ограниченными множествами, что и H, и является полным ограниченно замкнутым и, следовательно, бочечным пространством ($\mathscr{D}\mathscr{F}$). Его сопряженным служит пространство H^* всех линейных форм на H, ограниченных на всех ограниченных множествах из H.*

То, что H_0 обладает теми же ограниченными множествами, что и H, — тривиально. Так как H полно, а топология T_0 пространства H_0 определена как топология равномерной сходимости на множестве ограниченных подмножеств из H' и мажорирует топологию пространства H, то H_0 полно. Ограниченная замкнутость пространства H_0 есть не что иное, как теорема 6 (поскольку замкнутые закругленные выпуклые множества из H, поглощающие все ограниченные множества, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля для T_0); а будучи полным, H_0 также бочечно. Из ограниченной замкнутости пространства H_0 следует, в частности, что непрерывные линейные формы на H_0 — это линейные формы, ограниченные на каждом ограниченном множестве. Наконец, H_0, будучи бочечным и обладая фундаментальной последовательностью ограниченных множеств, есть пространство типа $(\mathcal{DF})$.

Следствие 2. *Каждое слабо ограниченное множество A в пространстве H^* всех линейных форм на H, ограниченных на каждом ограниченном множестве, содержится в слабом замыкании некоторого ограниченного множества из H'.*

Важным частным случаем теоремы 6 является

Теорема 7. *Пусть E — метризуемое локально выпуклое пространство. Следующие три условия равносильны:*

а) *E — правильное;*

б) *его сильное сопряженное $E' = H$ бочечно;*

в) *H ограниченно замкнуто.*

Равносильность условий а) и б) — факт общий (см. Введение); при их выполнении топология пространства H совпадает с топологией равномерной сходимости на каждом ограниченном множестве из H', откуда вытекает (следствие 1 теоремы 6), что H также ограниченно замкнуто. Обратно, так как H полно, то его ограниченная замкнутость влечет бочечность.

Замечание 6. Мне неизвестно, не будут ли теорема 6 с ее следствиями и теорема 7 справедливы для всех пространств $(\mathcal{DF})$. Трудность состоит в том, что следствие леммы 4 возможно не обобщается на все пространства $(\mathcal{DF})$, поскольку уже нельзя, апеллируя к соображениям компактности, утверждать *замкнутость* множества $\Gamma_{i=1}^{n} \lambda_i K_i$ в H.

Замечание 7. По-видимому, неизвестны локально выпуклое пространство H и линейная форма на нем, ограниченная на каждом ограниченном множестве, которая не содержалась бы в слабом замыкании сильно ограниченного множества из H' в алгебраическом сопряженном к H; как, тем более, неизвестно квазибочечное пространство, которое не было бы ограниченно замкнутым[1]).

Замечание 8. Если E — метризуемое локально выпуклое пространство и H — его сильное сопряженное, то все равно, сказать ли, что всякая линейная форма на H, ограниченная на каждом ограниченном множестве, непрерывна, или же что ограниченные множества в H' слабо относительно компактны. Действительно, как легко вытекает из «теоремы о биполярах», первое из этих условий влечет второе, каково бы ни было локально выпуклое пространство H, второе же влечет первое в силу следствия 2 теоремы 6. Для того чтобы эти условия были выполнены, *достаточно*, чтобы H было ограниченно замкнутым (т. е. E — правильным: теорема 7). Верно ли обратное — неясно, ибо мне неизвестно, каждое ли слабо относительно компактное закругленное выпуклое множество в H' равностепенно непрерывно, другими словами, обязательно ли топология в H есть топология Макки $\tau(H, H')$. Но даже если бы и так, все равно это было бы, во всяком случае, особенностью пространств $(\mathcal{DF})$, являющихся сильными сопряженными к метризуемым пространствам, поскольку легко привести примеры пространств H типа $(\mathcal{DF})$, топология кото-

[1]) См. «Замечание при корректуре» в конце статьи. — *Прим. перев.*

рых отлична от $\tau(H, H')$. Например, достаточно рассмотреть на несепарабельном рефлексивном банаховском пространстве топологию равномерной сходимости на сепарабельных ограниченных подмножествах его сопряженного.

Замечание 9. Следствие 2 теоремы 6 в соединении с тем, что каждое ограниченное множество в H' относительно полукомпактно (т. е. каждая последовательность его точек обладает слабой предельной точкой в H'), позволяет заключить, что, как это следует из одной теоремы общей топологии (см. [6], теорема 1), какова бы ни была линейная форма на H, ограниченная на каждом ограниченном множестве, ее сужения на закругленные выпуклые $\sigma(H, H')$-компактные множества из H непрерывны. С другой стороны, очевидно, что, обратно, каждая линейная форма на H, сужения которой на закругленные выпуклые $\sigma(H, H')$-компактные множества непрерывны, ограничена на каждом ограниченном множестве, ибо в противном случае существовала бы даже сильно сходящаяся к нулю последовательность, на которой эта форма не оставалась бы ограниченной. Но из одной общей теоремы (см. [7]) вытекает, что пополнение пространства H' по топологии $\tau(H', H)$ как раз и отождествимо с пространством всех линейных форм на H, сужения которых на закругленные выпуклые $\sigma(H, H')$-компактные множества непрерывны. Таким образом, пространство H^* всех линейных форм на H, ограниченных на каждом ограниченном множестве, интересная характеристика которого уже содержалась в следствии 1 теоремы 6, может быть отождествлено также с пополнением H' по топологии $\tau(H', H)$. В частности, H^* совпадает с H' тогда и только тогда, когда H' полно в топологии $\tau(H', H)$. Впрочем, ясно, что во всем сказанном топологию $\tau(H', H)$ можно также заменить, например, топологией *компактной* сходимости на H.

Пользуясь теоремой 7, мы установим, при некоторых условиях, справедливость обычной теоремы о сопряженном к векторному подпространству. Отметим прежде всего следующее общее предложение:

Предложение 4. *Пусть E — локально выпуклое пространство и F — его векторное подпространство. Если F квазибочечно, а его сильное сопряженное ограниченно замкнуто, то в E'/F° фактор-топология сильной топологии пространства E' совпадает с сильной топологией сопряженного к F. Обратно, если две сильные топологии в E'/F° совпадают и если, кроме того, сильное сопряженное к E ограниченно замкнуто, то сильное F' ограниченно замкнуто.*

Вторая часть предложения вытекает из того, что фактор-пространство ограниченно замкнутого пространства ограниченно замкнуто. Для доказательства первой части достаточно показать, что топология T_d сильного сопряженного F' мажорирует фактор-топологию, или также, поскольку T_d ограниченно замкнута, что каждое множество $A \subset E'/F^\circ$, ограниченное в топологии T_d, ограниченно в фактор-топологии. Но так как F квазибочечно, то A будет равностепенно непрерывным подмножеством сопряженного к F, значит, в силу теоремы Хана — Банаха, — каноническим образом равностепенно непрерывного множества из E' и, значит, — ограниченным в фактор-топологии сильного E'.

Принимая во внимание теорему 7, получаем теперь:

Теорема 8. *Пусть E — произвольное локально выпуклое пространство и F — его правильное метризуемое векторное подпространство. Тогда сильное сопряженное к F отождествимо с E'/F°, наделенным фактор-топологией сильного E'.*

При этом, как видно из последней части предложения 4 и того, что каждое пространство F типа $(\mathscr{F})$ изоморфно векторному подпространству пространства E, являющегося топологическим произведением банаховских пространств (и, следовательно, обладающего ограниченно замкнутым сопряженным), *теорема* 8 *может уже стать неверной, если за* F *принято не правильное пространство* $(\mathscr{F})$ (см. § 2, п. 1).

Замечание 10. Мне неизвестно, не является ли предположение квазибочечности F в предложении 4 излишним. Это связано со следующим вопросом: не дают ли обе сильные топологии в E'/F^0 одни и те же ограниченные множества, каковы бы ни были локально выпуклое пространство E и его замкнутое векторное подпространство F? Заметим, что предложение 5 даст другой случай справедливости рассматриваемой теоремы двойственности.

4. Различные дополнения относительно пространств типа $(\mathscr{DF})$.

Предложение 5. *Пусть* E — *локально выпуклое пространство и* F — *его векторное подпространство.*

а) *Если* F — *пространство типа* $(\mathscr{DF})$, *то две сильные топологии в* E'/F° *совпадают* (*и обращают* E'/F° *в пространство* $(\mathscr{F})$).

б) *Если* E — *пространство типа* $(\mathscr{DF})$ *и* F *замкнуто, то* E/F — *также типа* $(\mathscr{DF})$ *и две сильные топологии в* F° (топология, индуцированная из сильного E', и сильная топология сопряженного к E/F) *совпадают.*

Доказательство. а) Топология T_d сильного сопряженного в E'/F° есть топология пространства $(\mathscr{F})$. Чтобы показать, что тождественное отображение этого пространства на фактор-пространство сильного E' по F° непрерывно, достаточно убедиться в том, что каждая сходящаяся к нулю последовательность в сильном сопряженном к F ограниченна в фактор-топологии. Но так как F — пространство типа $(\mathscr{DF})$, то ограниченная последовательность в сильном F' равностепенно непрерывна, значит, является каноническим образом равностепенно непрерывного множества из E' [1]) и потому тем более ограниченна в фактор-топологии.

б) Чтобы показать, что две сильные топологии в F° совпадают, очевидно, достаточно показать, что тождественное отображение пространства F°, наделенного топологией T_i, индуцированной из сильного E', в сильное сопряженное к E/F непрерывно. Так как E', а значит, и его подпространство F°, есть пространство типа $(\mathscr{F})$, то, как и выше, достаточно показать, что каждая последовательность в F°, сходящаяся к нулю по топологии T_i, ограниченна в топологии сильного сопряженного. Но эта последовательность ограниченна, а значит, равностепенно непрерывна *в* E' (поскольку E — пространство $(\mathscr{DF})$), следовательно, равностепенно непрерывна в сильном сопряженном к E/F и тем более ограниченна в этом сопряженном. Тем самым две сильные топологии в F° действительно совпадают, или, что то же, каждое ограниченное подмножество пространства E/F содержится в замыкании канонического образа некоторого ограниченного множества из E. Отсюда сразу следует, что E/F обладает счетной фундаментальной системой ограниченных множеств. Поэтому, чтобы убедиться в том, что E/F — пространство типа $(\mathscr{DF})$, достаточно установить, что каждое ограниченное множество в его сопряженном, являющееся объединением последовательности равностепенно непрерывных множеств, равностепенно непрерывно. Но это тривиально, если учесть, что этим свойством обладает E.

---

[1]) Это — непосредственное следствие теоремы Хана — Банаха: равностепенная непрерывность множества $A \subset F'$ означает, что оно содержится в поляре некоторой окрестности нуля из F, причем эту окрестность можно считать заданной в форме $V \cap F$, где V — замкнутая закругленная выпуклая окрестность нуля в E. Теорема Хана — Банаха и выражает тогда как раз то, что A содержится в каноническом образе поляры V° окрестности V в E'.

Следствие 1. *Пусть E — локально выпуклое пространство, F — его векторное подпространство типа $(\mathcal{DF})$ и A — ограниченное подмножество замыкания F в E. Тогда существует ограниченное множество $B \subset F$, замыкание которого содержит A.*

Действительно, очевидно, можно считать E пополнением пространства F, а тогда наше утверждение равносильно тому факту, что в общем сопряженном к E и F две сильные топологии совпадают. В частности:

Следствие 2. *Для того чтобы пространство F типа $(\mathcal{DF})$ было полным, необходимо и достаточно, чтобы были полными его замкнутые ограниченные подмножества.*

Отметим также

Следствие 3. *Для того чтобы пространство F типа $(\mathcal{DF})$ было квазибочечным, необходимо и достаточно, чтобы его пополнение было бочечным.*

Необходимость очевидна без всяких предположений относительно F, достаточность же сразу вытекает из следствия 1.

Заметим, что в противоположность доказанному для фактор-пространств, замкнутое векторное подпространство пространства типа $(\mathcal{DF})$ может не быть пространством типа $(\mathcal{DF})$ (п. 1, замечание 2). Напротив, тривиальным образом проверяется, что произведение конечного числа пространств типа $(\mathcal{DF})$ есть пространство типа $(\mathcal{DF})$ и что строгий индуктивный предел последовательности пространств типа $(\mathcal{DF})$ есть снова пространство типа $(\mathcal{DF})$. Можно показать, что аналогичное верно и для широкого топологического тензорного произведения[1] (см. [5]) двух пространств типа $(\mathcal{DF})$. Второе сопряженное к пространству H типа $(\mathcal{DF})$, наделенное сильной топологией сопряженного к сильному H', есть пространство типа $(\mathcal{DF})$, поскольку H' — пространство $(\mathcal{F})$ (см. теорему 1); мне неизвестно, не будет ли H'' пространством типа $(\mathcal{DF})$ и в «естественной топологии», определенной во Введении (вопрос, не возникающий, когда H бочечно, ибо тогда указанные две топологии в H'' совпадают). Наконец, следующий результат, обобщающий часть б) предложения 5, заслуживает особого упоминания по контрасту с *обобщенными* индуктивными пределами пространств $(\mathcal{F})$ (где основная трудность состоит как раз в том, что ограниченные множества плохо изучены):

Теорема 9. *Пусть E — векторное пространство, (E_i) — последовательность пространств типа $(\mathcal{DF})$ и (u_i) — последовательность линейных отображений E_i в E такая, что векторное пространство, порожденное образами $u_i(E_i)$, совпадает с E. Тогда E, наделенное сильнейшей из локально выпуклых топологий, при которых все u_i непрерывны, есть пространство типа $(\mathcal{DF})$, и сильная топология его сопряженного есть также топология равномерной сходимости на множествах вида $u_i(B_i)$, где B_i — ограниченные множества в E_i. Каждое ограниченное множество в E содержится в замкнутой закругленной выпуклой оболочке конечного числа таких множеств $u_i(B_i)$.*

Последнее из этих утверждений, очевидно, равносильно предшествующему. Доказательство можно провести путем почти точного повторения рассуждений, доказывающих предложение 5б). Можно также прямо свести доказательство к предложению 5б) и уже отмеченному (но, по правде сказать, не намного более простому) случаю строгого индуктивного предела, заметив, что E отождествимо также с фактор-пространством топо-

[1] Впоследствии названного Гротендиком *проективным* топологическим тензорным произведением (Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc., № 16, 1955). — *Прим. перев.*

логической прямой суммы H пространств E_i по ядру ее естественного линейного отображения $(x_i) \to \sum_i u_i(x_i)$ на E [1]).

Следствие. *Если* E_i — *рефлексивные пространства* $(\mathscr{DF})$ *и* E *отделимо, то* E — *рефлексивное пространство* $(\mathscr{DF})$.

Действительно, каждое ограниченное подмножество пространства E содержится в замкнутой закругленной выпуклой оболочке объединения конечного числа множеств $u_i(B_i)$, которые можно считать выпуклыми и слабо компактными (беря такими B_i), так что и эта оболочка слабо компактна.

E называется (обобщенным) индуктивным пределом последовательности пространств E_i относительно отображений u_i. Теорема 9 применима, в частности, к обобщенным индуктивным пределам последовательностей нормированных пространств (по-видимому, довольно часто встречающимся; см. ниже примеры), но заметим, что утверждение, аналогичное приведенному следствию, уже неверно для обобщенных индуктивных пределов последовательностей рефлексивных пространств $(\mathscr{F})$: действительно, в п. 2 § 2 мы построим фактор-пространство рефлексивного пространства $(\mathscr{LF})$ (и даже пространства типа $(\mathscr{M})$), не являющееся уже рефлексивным. Отметим еще следующий, зачастую удобный, хотя и тривиальный факт: *индуктивный (обобщенный!) предел последовательности бочечных (квазибочечных, ограниченно замкнутых) пространств есть бочечное (квазибочечное, ограниченно замкнутое) пространство.*

Конец этого пункта мы посвятим некоторым типичным примерам пространств $(\mathscr{DF})$.

а) Пространства $(\mathscr{E}'^m)$, $(\mathscr{E}')$, $(\mathscr{D}'^{(m)}_{L_p})$, $(\mathscr{D}'_{L_p})$, введенные Л. Шварцем в [12] (см. т. 2, стр. 165), являются пространствами типа $(\mathscr{DF})$, поскольку они определены как сильные сопряженные к пространствам $(\mathscr{F})$. В § 3 будет показано в качестве применения теорем 5 и 7, что все эти пространства $(\mathscr{DF})$ бочечны и ограниченно замкнуты. Равным образом и пространство $(\mathscr{C})$ непрерывных функций с компактным носителем, введенное там же, есть ограниченно замкнутое бочечное пространство $(\mathscr{DF})$, как строгий индуктивный предел последовательности банаховских пространств.

б) Пространства локально аналитических функций. Пусть V — комплексное аналитическое многообразие, K — его компактное подмножество и $\mathscr{H}(K)$ — пространство классов аналитических функций f, определенных каждая на окрестности множества K, причем две такие функции отождествляются тогда и только тогда, когда они совпадают на некоторой такой окрестности («локально аналитические функции на K»). Пусть $J(F)$ для каждой компактной окрестности F множества K — пространство непрерывных функций на F, аналитичных внутри F, наделенное топологией равномерной сходимости (обращающей его в банаховское пространство), и φ_F — естественное отображение $J(F)$ в $\mathscr{H}(K)$. Наделим $\mathscr{H}(K)$ сильнейшей из локально выпуклых

[1]) По поводу понятия топологической прямой суммы последовательности локально выпуклых пространств см. [3], п. 3. Предложение 5 б) непосредственно применимо, когда ядро отображения $(x_i) \to \sum_i u_i(x_i)$ замкнуто в H, т. е. E отделимо (хаусдорфово). Если E не отделимо, то следует рассмотреть сначала ассоциированное с ним отделимое локально выпуклое пространство (фактор-пространство пространства E по замыканию нуля). Оно отождествимо с фактор-пространством пространства H по замыканию ядра указанного отображения и, следовательно, является пространством $(\mathscr{DF})$ по предложению 5 б). А отсюда легко следует, что и E — пространство $(\mathscr{DF})$. — *Прим. перев.*

топологий, при которых все отображения φ_F непрерывны; очевидно, эта топология не изменится, если F будет пробегать лишь фундаментальную систему окрестностей множества K, например фундаментальную *последовательность* окрестностей. Из теоремы 9 следует тогда, что $\mathscr{H}(K)$ — пространство типа $(\mathscr{DF})$. Причем легко видеть, что оно отделимо, ибо его топология мажорирует топологию «равномерной сходимости на K функции f со всеми ее последовательными производными» (допускающую очевидное точное определение). Далее, если F_1 и F_2 — компактные окрестности множества K такие, что F_2 принадлежит внутренности F_1, и φ_{F_1,F_2} — естественное отображение $J(F_1)$ в $J(F_2)$, то из классической теоремы Монтеля сразу следует, что образ единичного шара B_{F_1} пространства $J(F_1)$ при отображении φ_{F_1,F_2} относительно компактен в $J(F_2)$. Так как $\varphi_{F_1}=\varphi_{F_2}\circ\varphi_{F_1,F_2}$, то отсюда вытекает, что $\varphi_{F_1}(B_{F_1})$ — относительно компактное множество в $\mathscr{H}(K)$, откуда следует (теорема 9), что каждое ограниченное множество в $\mathscr{H}(K)$ относительио компактно, т. е. $\mathscr{H}(K)$ — *пространство* $(\mathscr{M})$ (по поводу терминологии см. Введение). При этом $\mathscr{H}(K)$, как индуктивный предел последовательности бочечных пространств, *бочечно* и тем самым *вполне рефлексивно*, а его сильное сопряженное есть пространство $(\mathscr{F})$, являющееся также пространством типа $(\mathscr{M})$; следовательно, $\mathscr{H}(K)$ есть сильное сопряженное к пространству E типов $(\mathscr{F})$ и $(\mathscr{M})$. Отметим, что, как также нетрудно вывести из теоремы Монтеля, E есть даже «пространство Шварца» (см. определение 5, § 3), а из этого следует, что *все замкнутые векторные подпространства пространства* $E'=\mathscr{H}(K)$ *также являются бочечными пространствами* $(\mathscr{DF})$ *типа* $(\mathscr{M})$, *сопряженными к пространствам Шварца* (§ 3, теорема 12). На самом деле это — даже «ядерные» пространства (см. [5] и [8], § 7).

Если K — компактное множество в $\mathbf{R}^n$, то пространство классов аналитических функций *вещественного переменного*, определенных на окрестностях множества K в $\mathbf{R}^n$, отождествимо с пространством $\mathscr{H}(K)$ классов аналитических функций *комплексного переменного*, определенных на окрестностях множества K в $\mathbf{C}^n$. Тогда естественно наделить его определенной выше топологией пространства $\mathscr{H}(K)$, тем самым превратив его в бочечное пространство $(\mathscr{DF})$ типа $(\mathscr{M})$.

Пространства $\mathscr{H}(K)$, где K — подмножество римановой сферы, а также аналогичные более общие пространства были подробно изучены Г. Кёте и мною ([11] и [8]).

в) Многочисленные функциональные пространства, определяемые требованием, чтобы их элементы принадлежали хотя бы к одному из некоторой последовательности нормированных пространств (например, требованием удовлетворять «условиям возрастания на бесконечности»), естественным образом оказываются пространствами $(\mathscr{DF})$. Например, пространство H целых аналитических функций экспоненциального типа, т. е. целых функций, мажорируемых по модулю кратным хотя бы одной из функций сравнения $\varphi_k(z)=e^{k|z|}$, наделяется сильнейшей из локально выпуклых топологий, при которых непрерывны естественные отображения в H банаховских пространств H_k, где H_k — пространство, образованное теми целыми функциями $f(z)$, для которых $\sup\left|\frac{f(z)}{\varphi_k(z)}\right|=M_k(f)<+\infty$, наделенное нормой $f\longrightarrow M_k(f)$. Рассуждение, аналогичное примененному в примере б), показало бы при этом, что H бочечно и типа $(\mathscr{M})$, а тем самым есть сильное сопряженное к полному метризуемому пространству $(\mathscr{M})$. Но можно также заметить, что, как хорошо известно, H векторно изоморфно пространству $\mathscr{H}(\{0\})$ функций, локально аналитических в начале, причем изоморфизм осуществляется путем отнесения последовательности (a_n) коэффициентов Тейлора функции $f\in H$ (т. е. последовательности, мажорируемой по модулю некоторым кратным последовательности вида $1, \frac{k}{1!}, \frac{k^2}{2!}, \ldots$) последовательности $(b_n) = (n! a_n)$, рассматриваемой как последовательность коэффициентов Тейлора функции $\tilde{f}$, определенной в окрестности начала. Нетрудно видеть, что введенная нами в H топология совпадает тогда с топологией, определенной в б) для пространства $\mathscr{H}(K)$, где $K = \{0\}$. (Впрочем, введение билинейной формы $\langle (b_n), (c_n) \rangle = \sum b_n c_n$ позволяет рассматривать это пространство также как сопряженное к пространству *всех* целых функций $g(z) = \sum c_n z^n$, наделенному топологией компактной сходимости; более подробно и обще об этом см., например, [11] и [8].)

Другим примером, аналогичным предыдущему, но уже не сводящимся к примеру б), является пространство целых функций конечного порядка, т. е. целых функций, мажорируемых по модулю некоторым кратным хотя бы одной из функций сравнения $\phi_k(z) = e^{|z|^k}$, с естественной топологией индуктивного предела. Читатель легко убедится в том, что и оно—бочечное пространство ($\mathscr{DF}$) типа ($\mathscr{M}$). Более того, можно показать, что оно также является сопряженным к пространству Шварца (определение 5 в § 3) и даже «ядерным» пространством [5].

Другие аналогичные примеры: пространство непрерывных функций на $\mathbf{R}^n$, обладающих медленным ростом, т. е. мажорируемых по модулю полиномом; пространство локально суммируемых функций (или мер) на $\mathbf{R}^n$, «медленно растущих по мере», т. е. таких, что $\lambda(r) = \int\limits_{|x| \leq r} |f(x)|\, dx$ как функция от r мажорируется полиномом от r; более обще, пространство функций, локально принадлежащих L^p и «медленно растущих в смысле L^p», что означает: мажорируемых по модулю произведением полинома на функцию из L^p. Все эти пространства также бочечны и ограниченно замкнуты, как индуктивные пределы нормированных пространств, но уже не рефлексивны, за исключением последнего примера при $p \neq 1$ и $p \neq \infty$.

г) Пространства линейных отображений. Есть основание ожидать, что, по крайней мере при достаточно общих предположениях, пространство $L(E, H)$ всех непрерывных линейных отображений пространства E типа ($\mathscr{F}$) в пространство H типа ($\mathscr{DF}$) будет в топологии ограниченной сходимости пространством типа ($\mathscr{DF}$). Во всяком случае, хорошо известно, что если E метризуемо, а H обладает фундаментальной последовательностью ограниченных множеств (т. е. сильное H' метризуемо), то для каждого ограниченного подмножества M пространства $L(E, H)$ существуют окрестность нуля U в E и ограниченное множество A в H такие, что $u(U) \subset A$ для каждого $u \in M$ (для этого рассматриваем отображения u как билинейные формы на $E \times H'$ [1]), сводя тем дело к классической теореме), а это влечет, что $L(E, H)$ обладает при указанных условиях фундаментальной последовательностью ограниченных множеств. Тогда можно рассматривать в $L(E, H)$ ограниченно замкнутую топологию, ассоциированную с семейством его ограниченных множеств, т. е. топологию, для которой закругленные выпуклые множества, поглощающие каждое ограниченное множество, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Эта топология, во всяком случае мажорирующая топологию ограниченной сходимости, превращает тогда $L(E, H)$ в ограниченно замкнутое пространство ($\mathscr{DF}$). К сожалению, не ясно, даже когда H—ограниченно замкнутое пространство (а тем более пространство типа ($\mathscr{DF}$)), совпадают ли указанные две топологии в $L(E, H)$; я не знаю этого даже в том случае, когда одно из пространств E или H—банаховское, положитель-

---

[1]) То есть отождествляем u с билинейной формой $\langle u(x), y' \rangle$ ($x \in E$, $y' \in H'$). — *Прим. перев.*

ные же результаты мне известны лишь при чересчур ограничительных условиях («ядерности» пространств E и H).

Один из частных случаев проблемы: «будет ли $L(E, H)$ в топологии ограниченной сходимости пространством типа $(\mathcal{DF})$, когда E — типа $(\mathcal{F})$ и H — типа $(\mathcal{DF})$?» таков: будет ли пространство непрерывных билинейных форм на произведении двух пространств E и F типа $(\mathcal{F})$, наделенное топологией равномерной сходимости на произведениях всевозможных пар ограниченных множеств, пространством типа $(\mathcal{DF})$ (т. е. обобщается ли теорема 1 на случай пространств билинейных форм)? В такой форме мы еще встретимся с этим вопросом в последующих статьях.

5. Применение к пространствам $(\mathcal{LF})$. В этом пункте мы обобщим на пространства $(\mathcal{LF})$ Дьёдонне и Шварца некоторые результаты предыдущих пунктов. В последующей статье будут изложены некоторые результаты, относящиеся к более общим индуктивным пределам пространств $(\mathcal{F})$, с применениями к различным функциональным пространствам, введенным Шварцем[1]). Обобщенные индуктивные пределы, несомненно, чаще встречаются на практике, чем индуктивные пределы, первоначально рассмотренные этими авторами; мы оставим за последними индуктивными пределами наименование *строгих индуктивных пределов*, не требуя, однако, от пространств E_n (образующих возрастающую последовательность векторных подпространств пространства E, наделенных согласованными локально выпуклыми топологиями и замкнутых каждое в E_{n+1}), чтобы они были пространствами $(\mathcal{F})$. Тогда E_n замкнуто и в E, его исходная топология совпадает с топологией, индуцируемой из E, и каждое ограниченное подмножество пространства E содержится[2]) в одном из E_n (доказательства чего совпадают с данными в [3]). Наименование пространство $(\mathcal{LF})$ мы сохраним за строгими индуктивными пределами последовательностей пространств типа $(\mathcal{F})$.

Пусть E — строгий индуктивный предел возрастающей последовательности локально выпуклых пространств E_n. Так как тождественное отображение φ_n пространства E_n в E есть изоморфизм в, то второе сопряженное к нему φ_n'' есть изоморфизм E_n'' в E'' при «естественных» топологиях последних пространств (см. Введение). С другой стороны, так как $\varphi_n = \varphi_{n+1} \circ u_n$, где u_n — тождественное отображение E_n в E_{n+1}, то $\varphi_n'' = \varphi_{n+1}'' \circ u_n''$, так что пространства E_n'' отождествимы с топологическими векторными подпространствами пространства E'', образующими возрастающую последовательность. Наконец, объединение этих подпространств E_n'' есть E''; действительно, каждое $x \in E''$ принадлежит слабому замыканию некоторого ограниченного множества A из E, а так как A есть ограниченное подмножество одного из E_n, то отсюда сразу следует, что $x \in E_n''$. Пусть T_l — топология пространства E'', рассматриваемого как индуктивный предел последовательности пространств E_n''. Из самого определения топологии индуктивного предела явствует, что T_l мажорирует топологию второго сопряженного в E''. Совпадают ли эти топологии — неизвестно. Но во всяком случае справедливо

Предложение 6. *Пусть E — строгий индуктивный предел последовательности своих векторных подпространств E_n. Тогда слабо непрерывные линейные формы на E'' — это линейные формы, сужения которых на все пространства E_n'' слабо непрерывны.* (Заметим, что собственная слабая топология пространства E_n'', очевидно, совпадает с топологией, индуцированной из слабого E''.)

1) См. сноску 2) на стр. 81. — *Прим. перев.*
2) И ограниченно. — *Прим. перев.*

Действительно, пусть X' — линейная форма на E'', сужения которой на все подпространства E''_n слабо непрерывны, и x' — сужение X' на E; очевидно, $x' \in E'$. Покажем, что $\langle x, x'\rangle = \langle x, X'\rangle$ для всех $x \in E''$. В самом деле, по слабой непрерывности эти две формы от x совпадают на каждом E''_n, а, значит, также на их объединении E''.

Следствие 1. *Предположим, что каждое* E''_n *слабо замкнуто в* E''_{n+1}. *Тогда слабая топология, естественная топология и топология* T_l *индуктивного предела в* E'' *дают одни и те же ограниченные множества.*

Действительно, так как предложение 6 означает, что слабая топология в E'' дает те же непрерывные линейные формы, что и топология индуктивного предела *слабых* E''_n, то заключаем, что ограниченные множества в обеих топологиях одни и те же и, следовательно, каждое ограниченное подмножество пространства E'' содержится в некотором E''_n и ограниченно в слабом E''_n, значит, ограниченно также в E''_n, наделенном его топологией второго сопряженного (см. Введение), а потому ограниченно в топологии T_l пространства E'', рассматриваемого как индуктивный предел пространств E''_n (наделенных их топологией второго сопряженного).

Следствие 2. *Если каждое* E''_n *слабо замкнуто в* E''_{n+1}, *а пространства* E_n — *правильные, то* E — *правильное пространство.*

Непосредственно вытекает из следствия 1.

Заметим, что слабая замкнутость E''_n в E''_{n+1} в силу классических теорем теории слабой двойственности означает, что каноническое отображение E'_{n+1} на E'_n есть гомоморфизм при топологиях $\sigma(E'_{n+1}, E''_{n+1})$ и $\sigma(E'_n, E''_n)$, для чего тем более достаточно, чтобы оно было гомоморфизмом при сильных топологиях. Принимая во внимание теорему 8, мы получаем тем самым первую часть следующей теоремы.

Теорема 10. *Строгий индуктивный предел* E *последовательности правильных метризуемых локально выпуклых пространств есть правильное локально выпуклое пространство, обладающее ограниченно замкнутым бочечным сильным сопряженным.*

Правильность пространства E вытекает из предыдущего; она означает также, что сильное E' бочечно — факт, который, впрочем (поскольку сильное E' полно), можно было бы рассматривать также как следствие того, что сильное E' ограниченно замкнуто. А этот последний результат вытекает как непосредственное следствие из теоремы 7 и следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть* E — *локально выпуклое пространство, являющееся строгим индуктивным пределом последовательности пространств* E_n, *и* U — *закругленное выпуклое множество в* E', *поглощающее все равностепенно непрерывные множества. Тогда существует номер* n *такой, что* U *содержит поляру* E°_n *подпространства* E_n *в* E'. *Множество* U_n *тех* $x' \in E'_n$, *для которых* $\overset{-1}{\varphi}_n(x') \subset U$, *где* φ_n — *каноническое отображение* E' *на* E'_n, *есть тогда закругленное выпуклое множество в* E'_n, *поглощающее все равностепенно непрерывные множества.*

(При предположениях теоремы 10 отсюда следует, таким образом, что U_n — окрестность нуля в сильном E'_n,—ибо сильное E'_n ограниченно замкнуто в силу теоремы 7,—и значит, что $U \supset \overset{-1}{\varphi}_n(U_n)$ есть сильная окрестность нуля в E'.) Действительно, если бы E°_n не содержалось в U ни при каком n, то для каждого n существовало бы $x'_n \in E^\circ_n \cap \complement U$. Но тогда последовательность (nx'_n) была бы равностепенно непрерывной вследствие равностепенной непрерывности последовательности сужений на каждое E_n (поскольку каждая такая последовательность с некоторого места состояла бы из нулей); а с другой стороны, U не поглощало бы этой последовательности, в противоречие с предположением. Закругленность и выпуклость множества U_n очевидны; то же, что оно поглощает каждое равностепенно непрерывное множество $A \subset E'_n$, сразу следует из того, что A содержится в образе некоторого равностепенно непрерывного множества из E' при отображении φ_n (см. сноску на стр. 95).

Заметим, что теорема 10 и ее доказательство сохраняют силу и *в случае, когда E_n — любые квазибочечные пространства, сильные сопряженные к которым ограниченно замкнуты: тогда сильное E' ограниченно замкнуто и бочечно.*

Лемма 5 позволяет также легко доказать следующее обобщение теоремы 6.

Предложение 7. *Пусть E — локально выпуклое пространство, являющееся строгим индуктивным пределом последовательности метризуемых пространств E_n. Тогда каждое закругленное выпуклое множество в сильном E', поглощающее все ограниченные множества, содержит замкнутое закругленное выпуклое множество, поглощающее все ограниченные множества. Тем самым каждое множество линейных форм на E', равномерно ограниченное на всяком ограниченном множестве из E', содержится в слабом замыкании некоторого ограниченного множества из E''. Кроме того, каждое ограниченное подмножество пространства E'' содержится в одном из пространств E''_n.*

Достаточно применить лемму 5 и теорему 6.

Приведем, наконец, случай, правда, пожалуй, слишком частный, где второе сопряженное к индуктивному пределу отождествимо с индуктивным пределом вторых сопряженных.

Предложение 8. *Пусть E — локально выпуклое пространство, являющееся строгим индуктивным пределом последовательности нормируемых пространств. Тогда топология второго сопряженного в E'' совпадает с топологией индуктивного предела пространств E''_n.*

Достаточно показать, что каждое закругленное выпуклое множество $V \subset E''$, являющееся окрестностью нуля в топологии T_l индуктивного предела, т. е. отсекающее на каждом E''_n окрестность нуля, содержит поляру некоторого сильно ограниченного множества из E', т. е. *слабо замкнутое* закругленное выпуклое множество U, порождающее E''. Так как сильное E' есть пространство типа $(\mathcal{F})$, то из одной теоремы Банаха (см. теорему 5 в [3], дающую этот результат, поскольку U выпукло) вытекает, что для того, чтобы U было слабо замкнутым, достаточно, чтобы было слабо замкнуто его пересечение с каждым слабо компактным ограниченным множеством, а, значит, также его пересечение с каждым E''_n. Построим тогда по индукции последовательность *слабо компактных* сильных окрестностей нуля U_n в пространствах E''_n так, чтобы $U_n \subset V$ и $U_{n+1} \cap E''_n = U_n$ для каждого n, а затем достаточно будет положить $U = \bigcup_n U_n$. Для доказательства возможности индукции предположим, что построение уже выполнено до n-го шага включительно, и для построения U_{n+1} выберем сначала слабо компактную сильную окрестность нуля V_{n+1} в E''_{n+1}, выпуклую, закругленную, содержащуюся в V и такую, что $V_{n+1} \cap E''_n \subset U_n$, что, очевидно, возможно; положив затем $U_{n+1} = \Gamma(U_n, V_{n+1})$, будем иметь $U_{n+1} \cap E''_n \subset U_n$ и $U_{n+1} \subset V$, причем U_{n+1} будет слабо компактно, как закругленная выпуклая оболочка двух слабо компактных закругленных выпуклых множеств. Тем самым предложение 8 доказано.

Следствие. *Сильное сопряженное к строгому индуктивному пределу последовательности нормируемых пространств есть правильное пространство $(\mathcal{F})$.*

Действительно, сопряженное к этому сильному сопряженному бочечно. Впрочем этот результат содержится также в значительно более общей теореме 5.

Замечание 11. Есть основание поставить вопрос, не сохраняет ли предложение 8 силу и для *обобщенного* индуктивного предела последовательности нормируемых пространств, что при этом равносильно вопросу: правильно ли сопряженное к квазибочечному пространству $(\mathcal{DF})$, или также: бочечно ли второе сопряженное к этому пространству? Причем легко свести дело к случаю, когда рассматриваемое пространство полно. Заметим, что если ограниченные множества в H метризуемы, то ответ будет утвердительным (см. § 3, замечание 13), и что, с другой стороны, представляется вероятным, что ограниченные множества в квазибочечном пространстве $(\mathcal{DF})$ всегда метризуемы (что было бы обращением теоремы 5) [1]).

§ 2. РАЗЛИЧНЫЕ ПРИМЕРЫ

1. Не правильное пространство $\mathcal{F}$. Г. Кёте дал весьма простой пример пространства E типа $(\mathcal{F})$, *в сопряженном к которому сильная топология не является ограниченно замкнутой*, откуда вследствие теоремы 7 вытекает, что E — *не правильное*. Мы воспроизведем, с разрешения Кёте, его построение, слегка видоизменив рассуждение с тем, чтобы получить заодно *линейную форму на E', ограниченную на всех ограниченных множествах, но не являющуюся сильно непрерывной*; согласно следствию 2 теоремы 6, это равносильно *существованию в E'' ограниченного множества, не являющегося слабо относительно компактным.*

Пусть E — «эшелонированное» пространство, построенное на множестве индексов $N \times N$ (где N—совокупность всех положительных целых чисел) и определяемое последовательностью двойных последовательностей $a^{(n)}$, где

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} j, & \text{если} \quad i \leqslant n, \\ 1, & \text{если} \quad i > n, \end{cases}$$

т. е. пространство двойных последовательностей (x_{ij}), дающих в произведении с каждым $a^{(n)} = (a_{ij}^{(n)})$ суммируемую последовательность, наделенное своей естественной топологией пространства $(\mathcal{F})$. Пусть C_n — ограниченное множество в E', образованное двойными последовательностями (x'_{ij}), в которых $|x'_{ij}| \leqslant a_{ij}^{(n)}$ для всех (i, j). Гомотетичные образы множеств C_n, как легко убедиться, образуют фундаментальное семейство ограниченных множеств в E' (по поводу теории эшелонированных пространств Кёте см. [10]). Пусть $M(i_0, (k_i))$ для каждого «номера строки» i_0 и каждой последовательности целых положительных чисел (k_i) — множество всех индексов (i, j) с $i > i_0$, $j \geqslant k_i$. Эти множества $M(i_0, (k_i))$, очевидно, образуют базис фильтра Φ в $N \times N$, и для каждого $(x'_{ij}) = x' \in C_n$ существует $M \in \Phi$ такое, что $|x'_{ij}| \leqslant 1$, каково бы ни было $(i, j) \in M$. Отсюда следует, что если Ψ — ультрафильтр, мажорирующий Φ, то для каждого $x' = (x'_{ij}) \in E'$ существует $\lim_\Psi x'_{ij} = \varphi(x')$ [2]), причем когда $x' \in C_n$, то $|\varphi(x')| \leqslant 1$. С другой стороны, $\varphi(x')$, очевидно, является линейной формой на E', как слабый предел линейных (а именно, координатных) форм; таким образом, это — линейная

---

[1]) См. сноску [3]) на стр. 127.—*Прим. перев.*

[2]) То есть для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $P \in \Psi$ такое, что $|x'_{ij} - \varphi(x')| < \varepsilon$, каково бы ни было $(i, j) \in P$. Действительно, след Ψ на M есть ультрафильтр в M. Сужение x' на M отображает его в базис ультрафильтра в пространстве K точек $z \in C$ с $|z| \leqslant 1$ (образ базиса ультрафильтра есть базис ультрафильтра: Bourbaki N., Topologie générale, ch. I, § 5, n° 9). Но базис ультрафильтра в бикомпактном пространстве K сходится.— *Прим. перев.*

форма, ограниченная на всех ограниченных множествах из E'. Покажем, что она не является сильно непрерывной, т. е. что в E' не существует сильной окрестности нуля V, для которой бы $|\varphi(x')| \leqslant 1$ при всех $x' \in V$. Можно предполагать, что V — слабое замыкание некоторого множества $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} \varepsilon_n C_n$, где ε_n образуют произвольную последовательность положительных чисел. Так как $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\Gamma}} \varepsilon_n C_n \supset \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} C_n$ (где символ $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ обозначает совокупность сумм всевозможных конечных наборов элементов из множеств A_n с различными номерами), то можно также предполагать V слабым замыканием множества $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n C_n$ (где $\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2^n}$). Пусть e'_{nj} — элемент из E', все координаты которого равны нулю, кроме координаты с индексом (n, j), равной 1; далее k_n для каждого n — столь большой номер, что $2e'_{nj} \in \alpha_n C_n$ для всех $j \geqslant k_n$ (что возможно: достаточно, чтобы $2 \leqslant \alpha_n k_n$), и $x'_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} e'_{nj}$ (слабая сумма по $j \geqslant k_n$). Имеем $x'_n \in \alpha_n C_n$, с другой стороны, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ слабо сходится в E', ибо его частичные суммы остаются в слабо компактном множестве $2C_1$ и ряд сходится по каждой координате (а тем самым на тотальном множестве из E). Сумма x' этого ряда содержится тогда в V, как слабый предел некоторой последовательности из $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n C_n$, а, с другой стороны, $\varphi(x') = 2$, чем наше утверждение и доказано.

Принимая во внимание предложение 4, мы видим, кроме того, что если считать E погруженным в топологическое произведение F последовательности банаховских пространств (каждое из которых можно при этом взять изоморфным пространству l^1 суммируемых последовательностей), то *сильная топология сопряженного к E не будет совпадать с фактор-топологией сильного F'. При этом последняя даст даже строго большее сопряженное*, ибо так как эта топология ограниченно замкнута, поскольку сильное F' (как топологическая прямая сумма банаховских пространств) ограниченно замкнуто, то непрерывные в ней линейные формы — это как раз линейные формы, ограниченные на всех ограниченных множествах из E', а среди них имеются и не непрерывные в топологии сильного сопряженного.

2. Контрпримеры, относящиеся к пространствам $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. Нижеследующий пример, обобщающий и упрощающий одно построение Кёте ([9], § 5), даст нам большое число контрпримеров, относящихся к пространствам $(\mathscr{L}\mathscr{F})$.

Пусть I — некоторое множество индексов. Рассмотрим пространства комплексных функций, определенных на I, содержащие все функции, отличные от нуля лишь для конечного числа индексов. Два таких пространства E, E' будем считать образующими дуальную пару, если ряд $\sum_i x_i x'_i$ сходится, каковы бы ни были $x \in E$, $x' \in E'$, и в этом случае будем полагать $\langle x, x' \rangle = \sum_i x_i x'_i$. Пусть тогда (E, E'), (λ, λ') и (μ, μ') — три такие дуальные пары пространств, причем

$$1)\ E = \lambda \cap \mu, \quad 2)\ E' \supset \lambda' + \mu', \quad 3)\ E' \neq \lambda' + \mu'.$$

Рассмотрим линейное отображение u: $x \to (x, x)$ пространства E в произведение $F = \lambda \times \mu$ (отождествленное с пространством функций на произведении J множества I с двухиндексным множеством $\{0, 1\}$ и сопряженное в дуальную пару с пространством $F' = \lambda' \times \mu'$ последовательностей на J). В силу условия 2 это отображение слабо непрерывно. Область U его значений есть множество всех элементов (x, x) с $x \in E$, так что для каждого индекса i и каждого $(y, z) \in U$ имеем $y_i = z_i$, и так как y_i и z_i — непрерывные линейные формы от пары $(y, z) \in F$ (поскольку λ' и μ' содержат все координатные формы), то равенство сохраняется и для элементов, принадлежащих замыканию множества U, откуда сразу следует (в силу условия 1), что U замкнуто. Таким образом, u есть взаимно однозначное слабо непрерывное линейное отображение пространства E на слабо замкнутое подпространство U пространства F. Поэтому сопряженное отображение u' есть слабый гомоморфизм пространства F' на слабо плотное подпространство V пространства E'[1]), *отличное от* E' (что как раз и выражается условием 3, поскольку, как показывает непосредственная проверка, u' есть отображение $(y', z') \to y' + z'$). Предположим теперь, что E' метризуемо в топологии $\tau(E', E)$; так как каждый слабый гомоморфизм локально выпуклого пространства, наделенного топологией типа τ, в метризуемое локально выпуклое пространство есть сильный гомоморфизм (см. [3], стр. 92[2])), то u' будет также гомоморфизмом при топологиях τ. При этих условиях мы укажем некоторые факты, носящие по сравнению с известными свойствами пространств $(\mathcal{F})$ патологический характер и притом имеющие место уже при выборе в качестве E, λ, μ довольно простых пространств.

Покажем прежде всего, что данные можно выбрать так, чтобы F и F' были сепарабельными рефлексивными пространствами $(\mathcal{LF})$, а E' — сепарабельным рефлексивным пространством $(\mathcal{F})$, сильное сопряженное к которому есть пространство $(\mathcal{LF})$. Для этого возьмем $I = N \times N$ (где N — совокупность всех положительных целых чисел) и условимся в следующих обозначениях: если α — некоторое пространство последовательностей *на* N, то под $\Pi\alpha$ (соответственно $\Sigma\alpha$) будем понимать пространство всех *двойных* последовательностей, каждая строка которых принадлежит α (соответственно каждая строка принадлежит α и имеется лишь конечное число ненулевых строк). Эти пространства отождествимы соответственно с произведением или прямой суммой пространств, совпадающих каждое с α и зависящих от индекса, пробегающего N. Если α и α' образуют дуальную пару, то то же верно также для $\Pi\alpha$ и $\Sigma\alpha'$. Если α' в топологии $\tau(\alpha', \alpha)$ — пространство $(\mathcal{F})$, а $\Sigma\alpha'$ наделено топологией топологической прямой суммы, то его сопряженное отождествимо как раз с $\Pi\alpha$, а топология $\tau(\Sigma\alpha', \Pi\alpha)$ есть как раз топология прямой суммы и тем самым — топология пространства $(\mathcal{LF})$. Точно так же, если α — пространство $(\mathcal{F})$ в топологии $\tau(\alpha, \alpha')$, то $\tau(\Pi\alpha, \Sigma\alpha')$ есть не что иное, как произведение топологий пространств-сомножителей α, так что $\Pi\alpha$ в этой топологии — пространство $(\mathcal{F})$.

Пусть теперь (α, α'), (β, β') и (γ, γ') — три дуальные пары пространств последовательностей на N, причем α' — пространство $(\mathcal{F})$ в топологии $\tau(\alpha', \alpha)$. Положим

$$E = \Sigma\alpha, \quad \lambda = \Sigma\beta, \quad \mu = \Pi\gamma, \quad F = \lambda \times \mu,$$
$$E' = \Pi\alpha', \quad \lambda' = \Pi\beta', \quad \mu' = \Sigma\gamma', \quad F' = \lambda' \times \mu'.$$

Ясно, что $\lambda \cap \mu = \Sigma(\beta \cap \gamma)$ и $\lambda' + \mu' \subset \Pi(\beta' + \gamma')$, так что, следовательно, вышеуказанные условия 1), 2) и 3) выполнены, если

$$1')\ \alpha = \beta \cap \gamma, \quad 2')\ \alpha' \supset \beta' + \gamma', \quad 3')\ \beta' \neq \alpha'.$$

Наконец, E' автоматически будет пространством $(\mathcal{F})$.

---

[1]) См. [3], теорема 7. — *Прим. перев.*

[2]) Стр. 100 русского перевода. — *Прим. ред.*

Здесь условие 3′) на α', β' выглядит явно менее ограничительным, чем условие 3), наложенное непосредственно на E', λ', μ', и мы легко сможем удовлетворить этим новым условиям, взяв три дуальные пары банаховских пространств, например

$$\beta = L^p(N), \quad \alpha = \gamma = L^r(N),$$
$$\beta' = L^q(N), \quad \alpha' = \gamma' = L^s(N),$$

где

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \; 1 < r < p < +\infty.$$

Тогда $\lambda \times \mu$ и $\lambda' \times \mu'$ будут в своих топологиях τ сепарабельными рефлексивными пространствами типа $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ — прямыми суммами пространств типа $(\mathscr{F})$.

Мы выведем теперь из рассмотренных вначале общих условий обещанные патологические следствия, а указанная только что специализация позволит, в частности, получить соответствующие контрпримеры в случае сепарабельных рефлексивных пространств типа $(\mathscr{L}\mathscr{F})$.

1. Фактор-пространство пространства F', наделенного своей топологией τ, по замкнутому подпространству U° неполно, будучи изоморфным незамкнутому подпространству пространства E'. В частности, *фактор-пространство рефлексивного пространства типа $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ может не быть полным и тем более не быть пространством $(\mathscr{L}\mathscr{F})$.*

2. В F'/U° (изоморфном незамкнутому подпространству пространства $(\mathscr{F})$) существуют ограниченные множества, не являющиеся слабо относительно компактными, так что это фактор-пространство нерефлексивно, хотя F' можно было бы выбрать вполне рефлексивным; и точно так же замкнутое подпространство U вполне рефлексивного пространства F не является вполне рефлексивным, поскольку его сильное сопряженное нерефлексивно. *Кроме того, в предположении, что F' рефлексивно, в F'/U° существуют ограниченные множества, не содержащиеся в каноническом образе никакого ограниченного множества из F'* (иначе все они были бы слабо относительно компактны), *так что сильное сопряженное к этому фактор-пространству не отождествимо с подпространством U пространства F, наделенным топологией, индуцируемой сильной топологией из F.*

В частности, фактор-пространство рефлексивного пространства $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ может не быть рефлексивным, а замкнутое векторное подпространство рефлексивного пространства $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ может не быть вполне рефлексивным и, значит, не будучи бочечным, не будет пространством типа $(\mathscr{L}\mathscr{F})$. В последнем можно убедиться и другим способом:

3. Сопряженное к подпространству U пространства F, наделенное топологией $\tau(U', U)$, неполно (ибо изоморфно пространству F'/U°, наделенному фактор-топологией топологии τ пространства F'). *Таким образом, в рефлексивном пространстве $(\mathscr{L}\mathscr{F})$ может существовать замкнутое подпространство, не являющееся пространством типа $(\mathscr{L}\mathscr{F})$, поскольку его сопряженное даже неполно.*

Пусть теперь $x' \in E' \cap \complement V$; x' определяет не непрерывную линейную форму $\tilde{x}'$ на U, сужения которой на ограниченные множества из U, однако, слабо непрерывны; действительно, $\tilde{x}'$ (принадлежа пополнению сильного U') является равномерным на ограниченных множествах из U пределом непрерывных линейных форм. Таким образом, ядро формы $\tilde{x}'$ есть незамкнутое подпространство в F, имеющее замкнутое пересечение с каждым замкнутым ограниченным множеством. Это приводит к следующим двум выводам:

4. *Подпространство рефлексивного пространства типа* $(\mathcal{LF})$ *может иметь замкнутое пересечение со всеми подпространствами типа* $(\mathcal{F})$, *не будучи замкнутым.*

5. *В сопряженном к рефлексивному пространству* $(\mathcal{LF})$ *может существовать незамкнутое подпространство, пересечение которого с каждым слабо компактным множеством слабо компактно.* Тем более, *топология T компактной сходимости в сопряженном пространстве не является сильнейшей из топологий, индуцирующих в каждом ограниченном множестве слабую топологию.*

6. Можно найти непрерывное линейное отображение рефлексивного пространства $(\mathcal{LF})$ на замкнутое подпространство рефлексивного пространства $(\mathcal{LF})$, не являющееся слабым гомоморфизмом[1]. Можно найти сильный и слабый гомоморфизм рефлексивного пространства $(\mathcal{LF})$ на *незамкнутое* подпространство рефлексивного пространства $(\mathcal{F})$.

По указанному образцу можно строить контрпримеры, относящиеся и к другим замечательным классам пространств. Так, довольно легко осуществить построение, где F' будет пространством $(\mathcal{LM})$ (т. е. пространством $(\mathcal{LF})$ типа $(\mathcal{M})$), причем F' можно будет выбрать даже изоморфным счетной бесконечной прямой сумме счетных бесконечных топологических произведений любых одинаковых пространств последовательностей χ, лишь бы только χ не совпадало с пространством ω *всех* последовательностей; а E' будет как раз изоморфно ω. (В частности, можно будет тогда принять за χ пространство $(\mathcal{F})$ типа $(\mathcal{M})$, так что F' будет пространством типа $(\mathcal{LM})$.) Чтобы убедиться в этом, примем снова рассмотренные выше условия $1'$, $2'$, $3'$, но предполагая их относящимся к пространствам *двойных* последовательностей, что, очевидно, ничего не изменит в проведенных рассмотрениях. Если тогда χ — пространство простых последовательностей, обозначим через $\Pi'\chi$, соответственно $\Sigma'\chi$, пространство двойных последовательностей, все *столбцы* которых принадлежат χ (соответственно все столбцы принадлежат χ и имеется лишь конечное число ненулевых столбцов); эти пространства канонически получаются из аналогичных пространств $\Pi\chi$ и $\Sigma\chi$ посредством симметрии относительно диагонали в множестве индексов $N\times N$, и все сказанное по поводу этих последних, очевидно, слово в слово переносится и на пространства $\Pi'\chi$ и $\Sigma'\chi$. Для произвольной дуальной пары (χ, χ') положим тогда

$$\beta=\Sigma\chi',\quad \gamma=\Sigma'\chi',\quad \beta'=\Pi\chi,\quad \gamma'=\Pi'\chi.$$

Ясно, что $\alpha=\beta\cap\gamma=\varphi(N\times N)$ (где $\varphi(N\times N)$ — множество всех двойных последовательностей, лишь конечное число координат которых отлично от нуля), так что можно взять $\alpha'=\omega(N\times N)$ (где $\omega(N\times N)$ — множество *всех* двойных последовательностей); α' — пространство $(\mathcal{F})$ типа $(\mathcal{M})$[2], и если $\chi\neq\omega(N)$, то все требуемые условия выполнены. Тогда по выражению $F'=\Pi\beta'\times\Sigma\gamma'$ видно, что F' изоморфно счетной прямой сумме счетных топологических произведений пространств, каждое из которых совпадает с χ.

Укажем также, что в следующем пункте мы среди прочего построим *замкнутое векторное подпространство топологической прямой суммы последовательности гильбертовых пространств, не являющееся простран-*

[1]) Имеется в виду отображение u пространства E на подпространство U пространства F. Если эти пространства выбраны указанным выше образом, то их топологии будут совпадать соответственно с $\tau(E, E')$ и $\tau(F, F')$, а потому слабая непрерывность отображения u влечет его непрерывность ([3], предложение 19). Если бы u было слабым гомоморфизмом, то $V=u'(F')$ должно было бы быть слабо замкнутым в E' (см. [3], теорема 7) в противоречие с показанным выше. — *Прим. перев.*

[2]) В топологии покоординатной сходимости. — *Прим. перев.*

ством $(\mathcal{LF})$. Приведем, наконец, весьма простые рассмотрения, дающие большое число примеров фактор-пространств пространств $(\mathcal{LF})$, не являющихся пространствами $(\mathcal{LF})$. Любое пространство E типа $(\mathcal{F})$ изоморфно векторному подпространству пространства F, являющегося топологическим произведением последовательности банаховских пространств F_i. При надлежащих условиях (например, когда пространства F_i рефлексивны, более обще, когда E — правильное: см. теорему 8) можно поэтому утверждать, что сильное сопряженнное к E отождествимо с фактор-пространством сильного F'. Но сильное F' изоморфно топологической прямой сумме $\sum\limits_i F_i'$ пространств F_i', так что E' изоморфно фактор-пространству строгого индуктивного предела последовательности банаховских пространств. Однако легко выбрать данные так, чтобы сильное E' не было пространством $(\mathcal{LF})$; достаточно, например, чтобы в сильном E' существовало ограниченное множество, порождающее плотное векторное подпространство (предполагая при этом, что сильное E' не есть пространство типа $(\mathcal{F})$, т. е. что E не нормируемо). Так, пространство $(\mathcal{E})$ Л. Шварца, построенное на отрезке $[0,1]$, изоморфно векторному подпространству произведения гильбертовых пространств, и в его сопряженном существует тотальное ограниченное множество (например, множество единичных масс, сосредоточенных во всевозможных точках отрезка), а порождаемое им подпространство сильно плотно, поскольку E рефлексивно. Следовательно, *фактор-пространство прямой суммы последовательности гильбертовых пространств может не быть пространством* $(\mathcal{LF})$.

3. Ограниченные множества в фактор-пространстве. Пусть E — локально выпуклое пространство и F — его замкнутое векторное подпространство. Сопряженное к фактор-пространству E/F как векторное пространство отождествимо с подпространством $F^\circ \subset E'$, ортогональным к F. Сказать, что сильная топология этого сопряженного совпадает при этом с топологией, индуцируемой сильной топологией пространства E', все равно что сказать, что каждое ограниченное множество в E/F содержится в замыкании канонического образа некоторого ограниченного множества из E. Если E рефлексивно, то это влекло бы тем самым рефлексивность E/F. Мы увидим, что это может не иметь места, даже когда E — пространство $(\mathcal{F})$ типа $(\mathcal{M})$ (т. е. такое, ограниченные множества в котором относительно компактны). Действительно, нижеследующее построение дает *пространство E типов $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{M})$, обладающее фактор-пространством E/F, изоморфным нерефлексивному пространству l^1 суммируемых последовательностей; поэтому сильная топология сопряженного к E/F не совпадает с топологией, индуцируемой сильной топологией пространства E', причем эти две топологии дают даже различные сопряженные*; в самом деле, *второе сопряженное к каноническому отображению E на E/F не есть отображение E'' на $(E/F)''$* (поскольку его областью значений служит, очевидно, E/F). Более обще, мы построим *для каждого p такого, что $1 \leqslant p < +\infty$, пространство E_p типов $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{M})$, обладающее фактор-пространством E/F, изоморфным пространству l^p последовательностей с суммируемой p-й степенью; тем самым при $p > 1$ в E/F будут существовать слабо компактные множества, не содержащиеся в каноническом образе никакого ограниченного множества из E* (поскольку они были бы тогда компактны).

Для этой цели рассмотрим «эшелонированное пространство p-го порядка» E_p на множестве индексов $N \times N$ (где N — совокупность всех положительных целых чисел), определяемое двойными последовательностями $a^{(n)}$, где

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} j^n, & \text{если } \; i < n. \\ i^n, & \text{если } \; i \geqslant n, \end{cases}$$

т. е. пространство всех двойных последовательностей $(x_{ij})=x$, произведение которых с любым $a^{(n)}$ суммируемо в p-й степени, наделенное своей естественной топологией пространства $(\mathscr{F})$. Из довольно тонкого признака Кёте ([10], стр. 324[1]) следует тогда, что E — пространство типа $(\mathscr{M})$. Пространство E'_p, сопряженное к E_p, отождествимо с пространством всех двойных последовательностей $x'=(x'_{ij})$, мажорируемых по модулю произведением надлежащей последовательности $a^{(n)}$ на какую-нибудь двойную последовательность с суммируемой q-й степенью (где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)[2].

Пусть l^p — пространство всех *простых* последовательностей с суммируемой p-й степенью, так что его сопряженное отождествимо с l^q. Пусть $u_p(x)$ для каждого $x=(x_{ij})\in E_p$ — простая последовательность, определяемая формулой $(u_p(x))_j=\sum_i x_{ij}$. Для всякой последовательности $(y'_j)\in l^q$ имеем $\sum_j |y'_j(u_p(x))_j|\leqslant\sum_{i,j}|y'_jx_{ij}|$, и так как двойная последовательность $u'_p(y')$, определяемая формулой

$$(u'_p(y'))_{ij}=y'_j, \tag{1}$$

очевидно, $\in E'_p$, откуда $\sum_{i,j}|y'_jx_{ij}|<+\infty$, то $\sum_j|y'_j(u_p(x))_j|<+\infty$. Так как это верно для каждого $y'\in l^q$, то заключаем, что $u_p(x)\in l^p$; кроме того, из проведенного вычисления сразу видно, что

$$\langle u_p(x),\ y'\rangle=\langle x,\ u'_p(y')\rangle$$

для всех $x\in E_p$, $y'\in l^q$, откуда следует, что линейное отображение $x\to u_p(x)$ пространства E_p в l^p непрерывно и имеет своим сопряженным отображение u'_p, задаваемое формулой (1). Покажем, что u_p является даже *гомоморфизмом* E_p *на* l^p, чем и будут оправданы утверждения, сделанные в начале этого пункта.

Это равносильно утверждению, что u'_p есть *взаимно однозначное* отображение пространства l^q на *слабо замкнутое* подпространство пространства E'_p (см. [3], теорема 7). Взаимная однозначность явствует из выражения (1). С другой стороны, каждая двойная последовательность (x'_{ij}) в образе пространства l^q при отображении u'_p, очевидно, постоянна относительно i. Но верно и обратное, ибо, поскольку последовательность $x'=(x'_{ij})$ из E'_p, постоянная относительно i, мажорируется по модулю произведением некоторой $a^{(n)}$ на двойную последовательность с суммируемой q-й степенью, то на строке с номером $i=n$ (где $a^{(n)}$ постоянна) x'_{ij} должно иметь суммируемую q-ю степень, откуда сразу следует, что x' имеет вид $u'_p(y')$. Так как пространство всех $x'\in E'_p$, постоянных на каждом столбце, очевидно, слабо замкнуто, то это и завершает доказательство.

Пусть F — ядро u_p в $E=E_p$. Легко видеть, что *рассматриваемые две сильные топологии не совпадают даже на «единичном шаре» подпространства* $F^\circ\subset E'$. В противном случае в E' существовала бы сильная окрестность нуля V такая, что $V\cap B\subset\frac{1}{2}B$, откуда сразу следовало бы, что $V\cap F^\circ\subset B$, т. е. что топология, индуцируемая в F° сильной топологией пространства E', мажорирует топологию, определяемую шаром B, что, однако, неверно.

---

[1]) Кёте сформулировал свою теорему лишь для случая $p=1$. Обобщение на любое p не представляет трудности и рассмотрено Ж. Дьёдонне и А. Перрейра Гомесом в *Comptes rendus*, **230** (1950), 1129—1130.

[2]) Под двойной последовательностью «с суммируемой q-й степенью» при $p=1$ надо разуметь, как обычно, *ограниченную* двойную последовательность.—*Прим. перев.*

Можно также заметить, что вследствие сепарабельности единичного шара пространства l^p на F° существует ограниченная последовательность линейных форм, непрерывных в топологии, индуцируемой из сильного E', но не равностепенно непрерывная в этой топологии. Таким образом, F° *есть подпространство ограниченно замкнутого бочечного пространства* $(\mathcal{DF})$ *типа* $(\mathcal{M})$, *не являющееся само ни пространством типа* $(\mathcal{DF})$, *ни бочечным, ни ограниченно замкнутым* (см. замечание 2 после теоремы 2).

Отправляясь от предыдущих контрпримеров, можно получить ряд других, применяя следующее предложение:

Предложение 9. *Пусть G — метризуемое локально выпуклое пространство и F — его замкнутое векторное подпространство, в поляре $F^\circ \subset G'$ которого две естественные сильные топологии совпадают* (*соответственно дают одно и то же сопряженное*). *Тогда то же верно для пары* (E, F), *где E — любое правильное векторное подпространство пространства G, содержащее F.*

Доказательство. Пусть E°, F° — поляры E, F *в* G' $(E^\circ \subset F^\circ)$. E' *как векторное пространство* отождествимо с G'/E°, а поляра F *в* E' — с подпространством F°/E° пространства $E' = G'/E^\circ$. Так как, по предположению, две сильные топологии в F° — топология, индуцируемая из сильного G', и топология сильного сопряженного к G/F — совпадают (соответственно дают одно и то же сопряженное), то то же верно и для их фактор-топологий по E°. Первая из этих фактор-топологий, T_1, есть также топология, индуцируемая в F°/E°, рассматриваемом как подпространство пространства G'/E°, фактор-топологией топологии сильного G' по E°; но так как E — правильное, то эта топология в G'/E° есть также топология сильного сопряженного к E (теорема 8), так что T_1 есть *не что иное, как топология в поляре* F°/E° *подпространства* F *в* $E' = G'/E^\circ$, *индуцируемая из сильного* E'. Вторая фактор-топология T_2 в F°/E° есть фактор-топология топологии F° как сильного сопряженного к G/F; но $G/F \supset E/F$, а поляра E/F в сопряженном F° к G/F отождествима с E°; следовательно, T_2 *мажорирует топологию* T_2' *сильного сопряженного* F°/E° к E/F. Тем самым, по предположению относительно T_1 и T_2, T_1 мажорирует T_2' (соответственно дает большее сопряженное, чем T_2'). Но, с другой стороны, известно, что T_2' при самых общих условиях мажорирует T_1 (и, в частности, дает сопряженное, содержащее сопряженное, которое дает T_1). Следовательно, $T_1 = T_2'$ (соответственно T_1 и T_2' дают одно и то же сопряженное), что и требовалось доказать.

В начале этого пункта мы построили пару (E, F), где $E = E_p$ — пространство типов $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{M})$ (следовательно, правильное), а F — его замкнутое подпространство такое, что в ортогональном к нему подпространстве пространства E' две сильные топологии различны (и при $p = 1$ не дают одного и того же сопряженного). Если тогда «погрузить» E в какое-либо пространство G типа $(\mathcal{F})$, то из последнего предложения будет следовать, что в подпространстве *пространства* G', ортогональном к F, две сильные топологии будут различны и при $p = 1$ также дадут различные сопряженные. Например, из того, что E_p — «эшелонированное пространство p-го порядка», явствует, что E_p изоморфно подпространству счетного топологического произведения пространств, каждое из которых изоморфно l^p. Следовательно, если $1 \leqslant p < +\infty$, *произведение* $G = \Pi l^p$ *счетной последовательности пространств, изоморфных* l^p, *содержит векторное подпространство* F, *в поляре которого* F° *в* G' *две сильные топологии различны и при* $p = 1$ *дают даже различные сопряженные*. При этом F можно выбрать так, чтобы оно было пространством типа $(\mathcal{M})$. Так как сильное сопряженное к G отождествимо с прямой суммой Σl^q последовательности пространств, изоморфных l^q, то мы видим, таким образом, что *топология, индуцируемая в замкнутом подпространстве F° пространства $(\mathcal{LF})$ $G' = \Sigma l^q$ (прямой суммы последовательности пространств l^q) топологией этого пространства, отлична от естественной топологии индуктивного предела в F° и при $p = 1$ дает даже другое сопряженное* (так как эта последняя топология во всяком случае мажорирует топологию пространства F° как сильного сопряженного к G/F). Взяв при $p = 1$ линейную форму на F°, непрерывную в топологии индуктивного предела, но не в топологии, индуцированной из G', получим *незамкнутое подпространство N*[1]) *пространства $(\mathcal{LF})$ $G' = \Sigma l^\infty$, пересечение которого с каждым подпространством типа $(\mathcal{F})$ замкнуто.* Таким образом, это вновь дает контрпримеры к вопросам, уже разрешенным в п. 2, но на этот раз образованные посредством прямых сумм банаховских пространств (и даже гильбертовых для первого из этих вопросов). Заметим еще, что из того, что каждое ограниченное подмножество пространства $G' = \Sigma l^\infty$ содержится в сумме H некоторого конечного числа составляющих l^∞ этого пространства, сразу следует, что в каждом ограниченном множестве из F° две сильные топологии (индуцированная топология и топология сильного сопряженного) совпадают, ибо в $H \cap F^\circ$ эти две топологии (будучи обе нормированными), очевидно, тождественны. Указанное выше пространство N доставляет тогда нам пример *незамкнутого подпространства сильного сопряженного к пространству $G = \Pi l^1$, имеющего замкнутое пересечение с каждым замкнутым ограниченным множеством из G.* Тогда *сильная топология в G' тем более не является сильнейшей из топологий, индуцирующих сильную топологию во всех ограниченных множествах* (см. замечание 5 после теоремы 3).

Вместо того чтобы погружать E_p в пространство Πl^p, можно было бы погрузить его также в пространство $C(I)$ всех непрерывных функций на открытом интервале $(0, 1)$, наделенное топологией компактной сходимости, ибо, как легко убедиться, каждое сепарабельное пространство $(\mathcal{F})$ изоморфно векторному подпространству пространства $C(I)$[2]). Мы видим, таким образом, что в $C(I)$ существует замкнутое векторное подпространство F, в поляре F° которого две сильные топологии различны и дают различные сопряженные.

Выше мы видели, что фактор-пространство рефлексивного пространства $(\mathcal{F})$ (даже типа $(\mathcal{M})$) может не быть рефлексивным. Однако возможно выделить те довольно распространенные случаи, когда это не имеет места, введя

Определение 2. *Локально выпуклое пространство E называется совершенно рефлексивным, если его фактор-пространство по каждому замкнутому векторному подпространству F рефлексивно.*

Следует обратить внимание на то, что это определение отнюдь не влечет совпадения двух сильных топологий в F° для каждого замкнутого векторного подпространства F, гарантируя лишь, что они дают одно и то же сопряженное. Так, мы видели, что даже когда E есть построен-

[1]) Ядро этой линейной формы. — *Прим. перев.*

[2]) Действительно, легко видеть, что каждое сепарабельное пространство $(\mathcal{F})$ изоморфно подпространству произведения последовательности сепарабельных банаховских пространств E_i. Так как каждое сепарабельное банаховское пространство изоморфно векторному подпространству пространства E_0 всех непрерывных функций на *компактном* отрезке $[0, 1]$, то можно предполагать все E_i изоморфными E_0. Наконец, это произведение легко погрузить в $C(I)$, рассмотрев последовательность (K_i) $(i = \ldots -1, 0, 1, 2, \ldots)$ компактных отрезков в I, попарно не имеющих общих точек и сгущающихся к 0 и 1, отождествив каждое E_i с $C(K_i)$, а E — с пространством всех непрерывных функций на локально компактном пространстве $M = \bigcup K_i$ и затем погрузив $C(M)$ в $C(I)$ путем линейного продолжения каждой функции $f \in C(M)$ на интервалы, смежные к M.

ное выше пространство E_p или пространство Πl^p, две сильные топологии в F° могут различаться, но, как будет вытекать из нижеследующего, E_p и Πl^p при $p > 1$ тем не менее совершенно рефлексивны. Заметим также, что хотя E_p есть пространство типа $(\mathscr{M})$ и совершенно рефлексивно, оно обладает фактор-пространством, не являющимся пространством типа $(\mathscr{M})$.

Введение определения 2 оправдывается следующим предложением.

Предложение 10. *Фактор-пространство и замкнутое векторное подпространство совершенно рефлексивного пространства совершенно рефлексивны. Топологическое произведение $E = \Pi E_i$ последовательности (E_i) пространств $(\mathscr{F})$, каждое конечное число которых обладает совершенно рефлексивным произведением, совершенно рефлексивно.*

Справедливость первых двух утверждений очевидна, поскольку фактор-пространство фактор-пространства пространства E изоморфно фактор-пространству пространства E, а фактор-пространство замкнутого векторного подпространства пространства E изоморфно замкнутому векторному подпространству фактор-пространства пространства E. Что касается последнего утверждения, то нужно доказать, что если F — замкнутое векторное подпространство произведения $E = \Pi E_i$, то каждая линейная форма φ на F°, непрерывная в топологии сильного сопряженного, определяется некоторым элементом из E/F, т. е. непрерывна в топологии, индуцированной из слабого E'. Это равносильно также тому, что ее ядро $\overset{-1}{\varphi}(0)$ есть *слабо замкнутое* подпространство в E' или еще, согласно одному тонкому результату Банаха (см. [3], теорема 5), что пересечение этого подпространства с каждым слабо компактным множеством A слабо компактно. Так как E' — топологическая прямая сумма пространств E'_i, то A содержится в прямой сумме $H' = E'_1 + \ldots + E'_n$ некоторого конечного числа этих пространств, так что дело сводится к доказательству слабой замкнутости пересечения $\overset{-1}{\varphi}(0) \cap H'$. Но введением пространства $F^\circ \cap H'$, являющегося слабо замкнутым подпространством пространства H' и, значит, полярой в H' некоторого замкнутого векторного подпространства $F_1 \subset H = E_1 + \ldots + E_n$, вопрос сводится, поскольку H по предположению совершенно рефлексивно, к доказательству того, что сужение $\tilde{\varphi}$ формы φ на $F^\circ \cap H'$ непрерывно в сильной топологии пространства F_1°, рассматриваемого как сопряженное к H/F. Однако H/F, очевидно, отождествимо с $E/\overline{F+G}$, где G — произведение всех E_i с $i > n$, а отсюда сразу вытекает, что в $F^\circ \cap H'$ сильная топология сопряженного к H/F мажорирует топологию, индуцируемую из F°, рассматриваемого как сильное сопряженное к E/F, что и завершает доказательство.

Следствие. *Каждое замкнутое векторное подпространство и каждое фактор-пространство произведения последовательности рефлексивных банаховских пространств совершенно рефлексивно.*

Действительно, рефлексивное банаховское пространство, очевидно, совершенно рефлексивно.

Из этого следствия, например, сразу вытекает, что *пространства* $(\mathscr{D}_{L^p})$ *Л. Шварца* ([12], т. 2) *совершенно рефлексивны*. Другой интересный признак совершенной рефлексивности, вновь доставляющий этот результат, даст теорема 11 (§ 3, п. 3). Неизвестно, всегда ли произведение двух совершенно рефлексивных пространств $(\mathscr{F})$ совершенно рефлексивно.

4. О недостаточности сходящихся последовательностей в сопряженном к пространству $(\mathscr{F})$. Использование теоремы Хана — Банаха позволяет во многих вопросах анализа утверждать, что некий элемент x' сопряженного E' к локально выпуклому векторному пространству E принадлежит слабому замыканию заданного векторного подпространства $V \subset E'$, не устанавливая существования в V ограниченного множества, к слабому замыканию которого принадлежал бы x', и тем более не устанавливая того, что x' есть слабый предел последовательности, выбранной из V (что, впрочем, одно и то же, если E бочечно и сепарабельно). Действительно, даже в случае столь простого банаховского пространства, как пространство c_0 последовательностей, стремящихся к нулю, Банах установил [1], что в его сопряженном существуют векторные подпространства V, слабые замыкания которых не совпадают с совокупностью слабых пределов всевозможных последовательностей элементов из V. Можно лишь сказать, что каждая точка, принадлежащая *сильному* замыканию V в E', является сильным (и тем более слабым) пределом последовательности элементов из V, если только предположить, например, E нормируемым (и, значит, его сильное сопряженное метризуемым); в частности, если E — *рефлексивное* банаховское пространство, то, поскольку тогда слабое замыкание векторного подпространства $V \subset E'$ совпадает с его сильным замыканием, каждый элемент этого слабого замыкания есть даже сильный (и тем более слабый) предел последовательности элементов из V. Но мы покажем, что это уже не имеет места, если E — ненормируемое пространство $(\mathscr{F})$, точнее — что справедливо

Предложение 11. *Пусть E — пространство $(\mathscr{F})$, не нормируемое и не изоморфное ни топологическому произведению прямых, ни произведению нормированного пространства на топологическое произведение прямых. Тогда в E' существуют векторное подпространство V и его сильная точка прикосновения x', не содержащаяся в слабом замыкании никакого ограниченного множества из V и тем более не являющаяся слабым пределом никакой последовательности элементов из V. Если (K_i) — фундаментальная последовательность ограниченных множеств в E' и M_i — векторное подпространство, порожденное множеством K_i, то x' можно при этом выбрать так, чтобы она не являлась слабой точкой прикосновения ни для одного из множеств $V \cap M_i$.*

Условие предложения означает, что в E' можно найти возрастающую фундаментальную систему (K_i) $(i = 0, 1, \ldots)$ ограниченных множеств такую, что M_i будет иметь бесконечную фактор-размерность в M_{i+1} для каждого i[1]. Очевидно, можно считать тогда M_0 бесконечномерным.

Тогда в каждом M_i $(i > 0)$ можно найти сильно сходящуюся к нулю последовательность $(e_j^{(i)})_{j \geq 1}$, элементы которой линейно независимы по модулю M_{i-1}. Действительно, при заданном i строим элементы $e_j^{(i)}$ по индукции так, чтобы $e_j^{(i)} \in \frac{1}{j} K_i$ и $e_j^{(i)}$ не принадлежало векторному пространству, порожденному пространством M_{i-1} и элементами $e_1^{(i)}, \ldots, e_{j-1}^{(i)}$. Пусть

[1]) Достаточность этого очевидна. Но это также необходимо. Действительно, в противном случае в E' существовало бы слабо компактное закругленное выпуклое множество K такое, что $M = \mathbf{C}.K$ обладало бы счетной фактор-размерностью в E'; пусть тогда (e_i') — базис дополнения к M, u — отображение $x \to (\langle x, e_i' \rangle)$ пространства E в $\mathbf{R}^I$, v — непрерывное линейное отображение пространства E в банаховское пространство F, такое, что ${}^t v$ есть векторный изоморфизм F' на M, наконец, w — отображение $E \to \mathbf{R}^I \times F = P$, определяемое отображениями u и v. Тогда ${}^t w$ есть векторный изоморфизм P' на E', значит w — слабый, а потому и сильный изоморфизм E на P, т. е. E изоморфно P, что и требовалось доказать. [Пусть φ — каноническое отображение E на E/M°, где M° — поляра M в E. F есть пополнение E по норме, определяемой «шаром» $\varphi(K^\circ)$, а $v = \psi \circ \varphi$, где ψ — вложение E/M° в F. Изоморфизм пространств F' и M есть не что иное, как известная теорема Шмульяна: Шмульян В. Л., О линейных топологических пространствах, *Матем. сборник*, 7 (49) : 3 (1940), 445, теорема 1 (п. 3). — *Прим. перев.*]

аналогично $(e_j)_{j\geqslant 0}$ — сильно сходящаяся к нулю последовательность линейно независимых элементов в M_0. Для каждого $i\geqslant 1$ положим $a_j^{(i)}=e_0+e_i+e_j^{(i)}$ и пусть V — векторное пространство, порожденное элементами $a_j^{(i)}$ $(i\geqslant 1)$, а W — его сильное замыкание. Для каждого i имеем $e_0+e_i=$ сильному пределу $a_j^{(i)}$, откуда $e_0+e_i\in W$, далее, $e_0=$ сильному пределу e_0+e_i, откуда $e_0\in W$. Покажем, что при этом $e_j^{(i)}$, e_i можно выбрать так, чтобы e_0 не принадлежало замыканию ни одного из множеств $M_n\bigcap V$. Так как элементы $a_j^{(i)}$ по построению линейно независимы, то каждое $x'\in M_n\bigcap V$ имеет вид $x'=\sum\limits_{i,j}\lambda_j^{(i)}a_j^{(i)}$ с $i\leqslant n$. Пусть L_n — слабо замкнутое векторное пространство, порожденное элементами $e_j^{(i)}$ с $i\leqslant n$, и N_n — пространство, натянутое на $e_0, e_1, \ldots, e_n$. Предположим, что нам уже известно существование *слабо непрерывной* проекции p_n пространства E' на N_n, аннулирующейся на L_n. Если бы тогда $x'=\sum\limits_{i\leqslant n}\lambda_j^{(i)}a_j^{(i)}$ слабо сходилось к e_0, то p_nx' слабо сходилось бы к e_0 в конечномерном пространстве N_n; но $p_nx'=\sum\limits_{i\leqslant n}\lambda_j^{(i)}(e_0+e_i)$ есть линейная комбинация элементов e_0+e_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, а совокупность всех их линейных комбинаций образует векторное подпространство в N_n, не содержащее e_0, так что мы получили бы противоречие.

Покажем, таким образом, что e_i, $e_j^{(i)}$ действительно можно построить так, чтобы проекция p_n существовала для каждого n. Для этого выберем в M_0 произвольное $e_0\neq 0$ и далее построим по индукции одновременно последовательности $(e_i, e_1^{(i)}, \ldots, e_j^{(i)}, \ldots)$ и слабо непрерывные проекции p_i, $i=1, 2, \ldots$, так, чтобы на каждом (n-м) шаге индукции были выполнены следующие условия:

1) $e_i\in\frac{1}{i}K_0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$; $e_0, e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы;

2) $e_j^{(i)}\in\frac{1}{j}K_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$; $e_1^{(i)}, \ldots, e_j^{(i)}, \ldots$ линейно независимы по модулю M_{i-1};

3) $p_n(e_j^{(i)})=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$; $p_n(e_i)=e_i$ $(0\leqslant i\leqslant n)$;

4) $L_n\bigcap M_0$ обладает бесконечной фактор-размерностью в M_0.

Для этого начнем с выбора $e_1\in K_0$, не пропорционального e_0, возьмем произвольную слабо непрерывную проекцию p_1 пространства E' на пространство, натянутое на e_0 и e_1, и построим по индукции последовательность элементов $e_j^{(1)}$ $(j=1, 2, \ldots)$, *линейно независимых по модулю* M_0, и последовательность *слабо непрерывных линейных форм* φ_j *на* E', *линейно независимых на* M_0 *и таких, что* $\varphi_j(e_k^{(1)})=0$ *для всех* j *и* k *и* $p_1(e_j^{(1)})=0$ *для всех* j. В самом деле, предположим, что две последовательности, удовлетворяющие указанным условиям, уже построены до k-го члена включительно, возьмем слабо непрерывную линейную форму φ_{k+1}, равную 0 в точках $e_1^{(1)}, \ldots, e_k^{(1)}$ и 1 в произвольно выбранной точке, принадлежащей пересечению M_0 с ядрами форм $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (ненулевому, поскольку M_0 бесконечномерно), далее выберем $e=e_{k+1}^{(1)}\in M_1$ так, чтобы $p_1(e)=0$, $\varphi_\alpha(e)=0$ для $\alpha=1, \ldots, k+1$ и, кроме того, e не принадлежало пространству, порожденному пространством M_0 и элементами $e_1^{(1)}, \ldots, e_k^{(1)}$; так как M_0 имеет бесконечную фактор-размерность в M_1, то такое e, очевидно, существует и удовлетворяет тогда всем предположениям индукции. Построив так e_0, e_1 и последовательности $(e_j^{(1)})$ и (φ_j), без труда убеждаемся в том, что условия 1, 3 и 4 выполнены для $n=1$ (причем выполнение условия 4 вытекает из того, что $L_1\bigcap M_0$ содержится в пересечении ядер слабо непрерывных форм φ_j). Умножив затем элементы $e_j^{(1)}$ на надлежащие скаляры, можно удовлетворить также условию 2.

Предположив тогда, что последовательности p_i, $(e_i, e_1^{(i)}, \ldots, e_j^{(i)}, \ldots)$, удовлетворяющие условиям 1) — 4), уже построены для $i = 1, \ldots, n$, нетрудно видеть, что, применив изложенный метод, можно продолжить построение еще на один шаг: сначала выбираем $e_{n+1} \in \frac{1}{n+1} K_0$, не принадлежащее пространству, порожденному пространствами $L_n \cap M_0$ и N_n (что возможно в силу 4); тогда существует слабо непрерывная проекция p_{n+1} пространства E' на пространство N_{n+1}, натянутое на $e_0, \ldots, e_{n+1}$, аннулирующаяся на L_n, поскольку $L_n \cap N_{n+1} = \{0\}$ (действительно, вследствие существования p_n уже $L_n \cap N_n = \{0\}$). Затем строим по индукции две последовательности $(e_j^{(n+1)})$ и $(\varphi_j)_{j \geqslant 1}$, где $e_j^{(n+1)} \in \frac{1}{j} K_{n+1}$, $p_{n+1}(e_j^{(n+1)}) = 0$, $e_j^{(n+1)}$ линейно независимы по модулю M_n, а φ_j — слабо непрерывные линейные формы на E', равные нулю на L_n и всех $e_j^{(n+1)}$ $(j \geqslant 1)$ и имеющие линейно независимые сужения на M_0. Возможность этого построения обеспечена благодаря условию 4) и бесконечности фактор-размерности M_n в M_{n+1}.

Ясно, что в первых двух случаях, исключенных в формулировке предложения 11, а именно нормируемого E и E, изоморфного топологическому произведению прямых, каждая сильная точка прикосновения векторного подпространства V пространства E' действительно является пределом сильно сходящейся последовательности элементов из E'. Во втором случае это вытекает из того, что *каждое* векторное подпространство в E' (топологической прямой сумме последовательности прямых) замкнуто!

§ 3. КВАЗИНОРМИРУЕМЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ПРОСТРАНСТВА ШВАРЦА

1. Общие свойства квазинормируемых пространств. Макки ввел усиленный тип сходимости в локально выпуклых пространствах ([13], см. также Кёте [10]); будем говорить, что последовательность (x_i) в E сходится к нулю «в смысле Макки», если существуют ограниченное множество $A \subset E$ и последовательность чисел $\lambda_i > 0$, стремящаяся к нулю, такие, что $x_i \in \lambda_i A$ для каждого i; другими словами, должна существовать последовательность чисел $\lambda_i > 0$, стремящаяся к нулю, такая, что $\frac{x_i}{\lambda_i}$ остается ограниченным. Такая последовательность, очевидно, стремится к нулю в обычном смысле, но обратное, вообще говоря, неверно. Однако оно верно в важных частных случаях. Примем

Определение 3. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Будем говорить, что E удовлетворяет условию сходимости Макки, если каждая последовательность в E, сходящаяся к нулю, сходится к нулю в смысле Макки. Будем говорить, что E удовлетворяет строгому условию сходимости Макки, если для каждого ограниченного множества $A \subset E$ существует замкнутое закругленное выпуклое ограниченное множество $B \supset A$ такое, что топология, индуцируемая в A из E, совпадает с топологией, индуцируемой из нормированного пространства $\mathbf{C}.B$, порожденного множеством B и наделенного нормой, определяемой «шаром» B.*

Второе из этих условий влечет первое. Векторное подпространство пространства, удовлетворяющего одному из двух условий сходимости Макки, также удовлетворяет этому условию.

Если A и B — ограниченные закругленные выпуклые множества в E и $A \subset \mathbf{C}.B$, то топология, индуцируемая в A из E, во всяком случае мажорируется топологией, индуцируемой из $\mathbf{C}.B$, наделенного нормой, определяемой «шаром» B; для их совпадения необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\lambda > 0$ существовала окрестность нуля V в E такая, что $V \cap A \subset (\lambda B) \cap A$ или $V \cap A \subset \lambda B$, как это вытекает из следующего хорошо известного, часто удобного и тривиально устанавливаемого факта:

Лемма 5. *Локально выпуклая топология T' в локально выпуклом пространстве E индуцирует в закругленном выпуклом множестве $A \subset E$ топологию (равномерную структуру), мажорирующую топологию (равномерную структуру), индуцируемую топологией T пространства E, тогда и только тогда, когда определяемый ею фильтр окрестностей нуля в A мажорирует фильтр, определяемый топологией T.*

Это позволяет легко убедиться в том, что *каждое метризуемое локально выпуклое пространство E удовлетворяет строгому условию сходимости Макки*. Действительно, если A — закругленное выпуклое ограниченное множество в E и (V_n) — фундаментальная последовательность замкнутых окрестностей нуля в E, то при надлежащем выборе последовательности чисел $\lambda_i > 0$ имеем $A \subset \bigcap_i \lambda_i V_i$. Пусть (μ_i) — последовательность положительных чисел, для которой $\frac{\mu_i}{\lambda_i} \to +\infty$; положим $B = \bigcap_i \mu_i V_i$. Для каждого $\lambda > 0$ существует n такое, что $\frac{\mu_i}{\lambda_i} > \frac{1}{\lambda}$, т. е. $\lambda\mu_i > \lambda_i$ для всех $i > n$; тогда из $x \in A$, $x \in V = \bigcap_{i=1}^{n} \lambda\mu_i V_i$ следует $x \in \lambda B = \bigcap \lambda\mu_i V_i$, откуда $A \cap V \subset \lambda B$, чем и доказано, что B удовлетворяет условиям второй части определения 3. Таким же способом можно показать, что *произведение конечной или счетной последовательности пространств, удовлетворяющих одному и тому же из двух условий сходимости Макки, также удовлетворяет этому условию.*

Сильное сопряженное F' к метризуемому или, более обще, квазибочечному пространству F удовлетворяет условию сходимости Макки тогда и только тогда, когда каждая сильно сходящаяся к нулю последовательность в F' сходится к нулю равномерно на некоторой окрестности нуля V из F (ибо поляра ограниченного подмножества сильного F' будет окрестностью нуля в F). И сильное F' удовлетворяет строгому условию сходимости Макки тогда и только тогда, когда для каждого равностепенно непрерывного множества $A \subset F'$ существует окрестность нуля V в F такая, что сильная топология в A совпадает с топологией равномерной сходимости на V. Мы примем поэтому следующее определение, в известной мере «двойственное» определению 3.

Определение 4. *Локально выпуклое пространство E называется квазинормируемым, если для каждого равностепенно непрерывного множества $A \subset E'$ существует окрестность нуля V в E такая, что топология, индуцируемая в A сильной топологией пространства E', совпадает с топологией равномерной сходимости на V.* (Если E квазибочечно, то это тем самым означает, что сильное E' удовлетворяет строгому условию сходимости Макки.)

Таким образом, квазибочечное пространство $(\mathcal{DF})$ квазинормируемо, поскольку его сильное сопряженное метризуемо и, следовательно, удовлетворяет строгому условию сходимости Макки. Наиболее употребительные пространства $(\mathcal{F})$ квазинормируемы (см. [12]), но, как показывает один пример Кёте ([10], стр. 326), существуют пространства $(\mathcal{F})$ типа $(\mathcal{M})$, не являющиеся квазинормируемыми (а именно, «эшелонированное» пространство E_p, рассмотренное в начале п. 3 § 2; то, что это пространство не может быть квазинормируемым, будет вытекать, впрочем, также из теоремы 11 настоящего параграфа). Весьма легко убедиться в том, что *фактор-пространство квазинормируемого пространства квазинормируемо,* что *произведение любого семейства квазинормируемых пространств квазинормируемо,* а также что *индуктивный предел последовательности квазинормируемых пространств квазинормируем.* Напротив, подпространство квазинормируемого пространства (например, произведения банаховских пространств) может не быть квазинормируемым, поскольку существуют не квазинормируемые пространства $(\mathcal{F})$.

Как устанавливается путем перехода к полярам, квазинормируемость пространства E означает также, что для каждой окрестности нуля U пространства E существует окрестность нуля V такая, что, каково бы ни было $\lambda > 0$, можно найти ограниченное множество M, при котором $\lambda V \subset \overline{\Gamma(U, M)}$. Действительно, пусть A, B и W — поляры множеств U, V и M. Если ограничиться рассмотрением лишь замкнутых закругленных выпуклых множеств, то соотношение $\lambda V \subset \overline{\Gamma(U, M)}$ равносильно соотношению $\frac{1}{\lambda} B \supset A \cap W$, и так как множества W образуют фундаментальную систему сильных окрестностей нуля в E', то последнее означает (лемма 5), что в (заданном) A топология, индуцируемая из сильного E', совпадает с топологией, индуцируемой из нормированного пространства $C.B$ (наделенного топологией, определяемой шаром B), т. е. топологией равномерной сходимости на $V = B^{\circ}$. При этом в полученном условии соотношение $\lambda V \subset \overline{\Gamma(U, M)}$ можно, очевидно, заменить на $\lambda V \subset \Gamma(U, M)$ (поскольку U и V можно считать открытыми) или также на $\lambda V \subset U + M$ (поскольку $\frac{1}{2}(U + M) \subset \Gamma(U, M) \subset U + M)$. Поделив, наконец, полученное соотношение на λ, получаем:

Лемма 6. *Для квазинормируемости пространства E необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности нуля U существовала окрестность нуля V такая, чтобы, каково бы ни было $\alpha > 0$, можно было найти ограниченное множество M, при котором $V \subset \alpha U + M$.*

Если E метризуемо и, следовательно, обладает счетной фундаментальной системой (V_n) окрестностей нуля, то полученное условие принимает следующий вид: для каждого целого $n > 0$ существует целое $m(n)$ такое, что, каково бы ни было целое $k > 0$, существует ограниченное множество $M_{n,k} \subset E$, при котором $V_{m(n)} \subset \frac{1}{k} V_n + M_{n,k}$. Применяя к последовательности множеств $M_{n,k}$ результат Макки, по которому должно существовать фиксированное ограниченное множество M, поглощающее все $M_{n,k}$, получаем

Предложение 12. *Для квазинормируемости метризуемого локально выпуклого пространства E необходимо и достаточно, чтобы в E существовало ограниченное множество M, обладающее следующим свойством: для каждой окрестности нуля U пространства E существует окрестность нуля V такая, что, каково бы ни было $\alpha > 0$, существует $\beta > 0$, при котором $V \subset \alpha U + \beta M$.*

В качестве другого следствия леммы 6 укажем

Предложение 13. *Второе сопряженное к квазинормируемому пространству квазинормируемо.*

Действительно, так как слабые замыкания $\overline{U}$ в E'' окрестностей нуля U из E образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в E'', то достаточно доказать, что для каждого U существует окрестность нуля V в E такая, что, каково бы ни было $\alpha > 0$, $\overline{V} \subset \alpha \overline{U} + M_1$, где M_1 — надлежащее ограниченное множество в E'', зависящее от α. Но вследствие квазинормируемости пространства E в нем существует ограниченное множество M такое, что $V\subset\alpha U+M$; так как слабое замыкание $\overline{M}$ множества M в E'' слабо компактно, то $\alpha\overline{U}+\overline{M}$ слабо замкнуто в E'', откуда $\overline{V}\subset\alpha\overline{U}+\overline{M}$, так что можно взять $M_1=\overline{M}$.

Если E квазинормируемо, то равностепенно непрерывные подмножества его сильного сопряженного, очевидно, метризуемы. Точно так же метризуемы и ограниченные подмножества пространства H, удовлетворяющего строгому условию сходимости Макки. Применяя тогда теорему 5, получаем

Предложение 14. *Квазинормируемое метризуемое локально выпуклое пространство правильно и его второе сопряженное удовлетворяет тем же условиям* (предложение 13). *Пространство H типа* ($\mathcal{DF}$), *удовлетворяющее строгому условию сходимости Макки, квазибочечно и его сильное сопряженное есть квазинормируемое и потому правильное пространство* ($\mathcal{F}$)*; следовательно, второе сопряженное к H есть бочечное пространство* ($\mathcal{DF}$)*, удовлетворяющее строгому условию сходимости Макки.*

Замечание 13. Если H — пространство ($\mathcal{DF}$) с метризуемыми множествами (следовательно, квазибочечное), то легко видеть, дважды преобразуя это условие переходом к полярам, что второе сопряженное H'' к H обладает тем же свойством и, следовательно, бочечно. Отсюда следует также, что если E — пространство ($\mathcal{F}$), в сильном сопряженном к которому ограниченные множества метризуемы (так что E — правильное), то этим свойством обладает и E''. Таким образом, при наложении условия метризуемости ограниченных подмножеств пространства H (соответственно сильного E'), более слабого, чем условие предложения 14, и, по-видимому, всегда удовлетворяющегося на практике, вопрос, поставленный в замечании 11, § 1, решается утвердительно.

Нижеследующее предложение часто позволяет вывести строгое условие сходимости Макки из условия сходимости для последовательностей.

Предложение 15. *Пусть E — локально выпуклое пространство, обладающее фундаментальной последовательностью ограниченных множеств и удовлетворяющее условию сходимости Макки* (*определение* 3). *Если Φ — фильтр в E со счетным базисом, сходящийся к $x\in E$, то существует закругленное выпуклое ограниченное множество $A\subset E$ такое, что $A\in\Phi$* (*т. е. фильтр Φ — ограниченный*) *и след Φ на пространстве* C.*A сходится к x в смысле нормированной топологии в* C.*A, определяемой шаром A.*

Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x=0$. Пусть (A_α) фундаментальная последовательность замкнутых закругленных выпуклых ограниченных подмножеств пространства E и Φ_α для каждого α — фильтр с базисом, образованным множествами λA_α $(\lambda>0)$. Нужно показать, что Φ мажорирует один из фильтров Φ_α, а это будет вытекать из следующей леммы:

Лемма 7. *Пусть Φ — фильтр со счетным базисом в множестве E и (Φ_α)—счетная последовательность фильтров в E. Если тогда каждая последовательность в E, сходящаяся по Φ*[1]*, сходится хотя бы по одному из Φ_α, то Φ мажорирует хотя бы один из Φ_α.*

Действительно, если бы это было не так, то для каждого α можно было бы найти множество $V\subset E$, принадлежащее Φ_α и не принадлежащее Φ,

[1]) Последовательность элементов множества называется сходящейся по определенному в нем фильтру, если каждое множество из фильтра содержит все члены последовательности, начиная с некоторого. — *Прим. перев.*

а значит (поскольку Φ имеет счетный базис), — последовательность $x^{(\alpha)} = (x_i^{(\alpha)})$, сходящуюся по Φ и не сходящуюся по Φ_α. Покажем, что в таком случае можно было бы построить единую последовательность (y_i), сходящуюся по Φ и содержащую для каждого α подпоследовательность, получающуюся путем удаления из последовательности $x^{(\alpha)} = (x_i^{(\alpha)})$ лишь некоторого конечного числа членов. Тогда (y_i) сходилась бы по Φ, но не сходилась ни по какому Φ_α, что, однако, противоречит предположению леммы. Итак, остается по последовательности последовательностей $x^{(\alpha)} = (x_i^{(\alpha)})$, сходящихся по Φ, построить единую последовательность (y_i), обладающую указанным выше свойством. Пусть (V_n) — базис фильтра Φ и n_m для каждого целого $m > 0$ — наименьший номер такой, что в каждой из последовательностей $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ все члены, начиная с $(n_m + 1)$-го, $\in V_m$. Положив $n_0 = 0$, будем иметь $n_0 \leqslant n_1 \leqslant \ldots$. Пусть тогда X_m будет конечная — возможно, пустая — последовательность $[x^{(1)}]_{n_{m-1}}^{n_m} \ldots [x^{(m)}]_{n_{m-1}}^{n_m}$, где $[x^{(i)}]_\alpha^\beta$ означает конечную последовательность $x_{\alpha+1}^{(i)} \ldots x_\beta^{(i)}$. Так как $X_m \subset V_{m-1}$, то последовательность Y, получаемая путем выписывания друг за другом всех X_m, сходится по Φ. При этом ясно, что для каждого α можно выбрать из Y подпоследовательность, получающуюся из $x^{(\alpha)}$ путем удаления лишь конечного числа членов.

Следствие 1 предложения 15. *Пусть E удовлетворяет условиям предложения 15 и M — закругленное выпуклое множество в E, метризуемое в индуцированной топологии. Тогда существует замкнутое закругленное выпуклое ограниченное множество $A \subset E$ такое, что $M \subset \mathbf{C}.A$ и топология в M совпадает с нормированной топологией, которую индуцирует в M нормированная топология пространства $\mathbf{C}.A$, определяемая «шаром» A.*

Действительно, чтобы A обладало требуемым свойством, достаточно, чтобы фильтр с базисом, образованным множествами $(\lambda A) \cap M$, мажорировался фильтром окрестностей нуля в M (лемма 5).

Следствие 2. *Пусть E — локально выпуклое пространство, обладающее счетной фундаментальной системой ограниченных множеств. Для того чтобы E удовлетворяло строгому условию сходимости Макки, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию сходимости Макки и ограниченные множества в E были метризуемыми.*

Необходимость очевидна, а достаточность есть частный случай следствия 1.

Я не знаю, может ли пространство E, обладающее счетной фундаментальной системой ограниченных множеств, удовлетворять условию сходимости Макки, не удовлетворяя при этом строгому условию сходимости Макки.

2. Продолжение сходящейся последовательности линейных форм с подпространства. Квазинормируемость пространства особенно полезна для следующего применения (продолжения сходящихся последовательностей линейных форм).

Предложение 16. *Пусть E — локально выпуклое пространство, F — его векторное подпространство и (x_i') — равностепенно непрерывная последовательность линейных форм на F, сильно сходящаяся к нулю. Если тогда F квазинормируемо, то каждую из форм x_i' можно продолжить до линейной формы $\widetilde{x}_i'$ на E так, что последовательность $(\widetilde{x}_i')$ будет равностепенно непрерывной и сильно сходящейся к нулю в E'. При этом последовательность $(\widetilde{x}_i')$ можно даже выбрать так, чтобы она сходилась к нулю равномерно на некоторой окрестности нуля в E.*

Действительно, так как F квазинормируемо, то в F существует окрестность нуля, на которой последовательность (x'_i) сходится к нулю равномерно. Эту окрестность можно предполагать заданной в виде $V \cap F$ (где V — замкнутая закругленная выпуклая окрестность нуля в E); таким образом, существует последовательность чисел $\lambda_i > 0$, стремящаяся к нулю и такая, что $|\langle x, x'_i\rangle| \leqslant \lambda_i$ для всех $x \in V \cap F$. В силу теоремы Хана - Банаха тогда можно продолжить x'_i до формы $\tilde{x}'_i$ на E так, чтобы $|\langle x, \tilde{x}'_i\rangle| \leqslant \lambda_i$ для всех $x \in V$, чем предложение и доказано.

Следствие. *Предположим, что топология локально выпуклого пространства F определена как слабейшая из топологий, при которых непрерывны линейные отображения f_α $(\alpha \in \mathrm{A})$ пространства F в локально выпуклые пространства E_α. Пусть (x'_i)—равностепенно непрерывная последовательность линейных форм на F, сильно сходящаяся к нулю. Если тогда F квазинормируемо, то существуют конечное подмножество J множества индексов A и для каждого $\alpha \in J$ — равностепенно непрерывная последовательность $(x_i'^{(\alpha)})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ линейных форм на E_α, равномерно сходящаяся к нулю на некоторой окрестности нуля, такие, что $x'_i = \sum x_i'^{(\alpha)} \circ f_\alpha$ для всех i и $\alpha \in J$.*

Достаточно обычным образом отождествить F с топологическим векторным подпространством пространства $E = \prod\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} E_\alpha$ и применить предложение 16.

Именно в этой форме и доказано в [12] свойство квазинормируемости для пространств $(\mathscr{E})$, $(\mathscr{S})$ и $(\mathscr{D}_{L^p})$.

Замечание 14. Предложение 16 можно было бы также сформулировать для равностепенно непрерывного *фильтра* линейных форм на F, сходящегося к нулю в сильной топологии; этот фильтр является тогда каноническим образом равностепенно непрерывного фильтра линейных форм на E, сходящегося к нулю в сильной топологии (и даже равномерно на надлежащей окрестности нуля в E). В такой форме предложение 16 допускает при этом обращение: если сформулированное утверждение справедливо, каково бы ни было локально выпуклое пространство E, в которое «погружено» F (или лишь для *одного* такого пространства E, если только оно квазинормируемо, например, для произведения банаховских пространств), то F квазинормируемо. Доказательство этого очевидно.

Замечание 15. В порядке идей предложения 16 отметим, что Кёте доказал в [10] (стр. 335) замечательный результат (сформулированный им лишь для «эшелонированных» пространств), относящийся к продолжению *слабо* сходящихся последовательностей линейных форм с подпространства. В общей форме этот результат формулируется так: *Пусть E — сепарабельное локально выпуклое пространство, F — его векторное подпространство и (x'_i) — равностепенно непрерывная последовательность линейных форм на F, слабо сходящаяся к нулю. Тогда для каждого i можно выбрать продолжение $\tilde{x}'_i$ формы x'_i на всё E так, что $(\tilde{x}'_i)$ также будет равностепенно непрерывной последовательностью, слабо сходящейся к нулю.* При этом предположение сепарабельности пространства E существенно, даже если E — банаховское пространство. Если, например, E — пространство l^∞ ограниченных последовательностей, наделенное своей обычной топологией, F — подпространство c_0 последовательностей, стремящихся к нулю, и (x'_i) — последовательность координатных форм на c_0, то, как хорошо известно, не существует слабо сходящейся к нулю последовательности непрерывных линейных форм $\tilde{x}'_i$ на l^∞, являющихся продолжениями форм x'_i.

Замечание 16. «Двойственная» форма проблемы продолжения последовательности линейных форм с векторного подпространства F пространства

E, стремящейся к нулю в какой-нибудь из обычных топологий, такова: рассмотрим в фактор-пространстве H/L локально выпуклого пространства H последовательность (x_i), сходящуюся к нулю; будет ли она каноническим образом некоторой сходящейся к нулю последовательности из H? Как хорошо известно, если H метризуемо, то это верно (см. [1]). Предложение 16 и приведенная выше менее очевидная теорема Кёте позволяют дать и другие условия, при которых поставленный вопрос решается утвердительно (так, например, он решается утвердительно, когда H — слабое сопряженное к сепарабельному локально выпуклому пространству и рассматриваемая последовательность содержится в каноническом образе слабо компактного закругленного множества из H). Но, разумеется, требуемое продолжение возможно не всегда. Так, существуют фактор-пространства банаховского пространства l^1 суммируемых последовательностей и в них слабо сходящиеся к нулю последовательности, не являющиеся каноническими образами никакой слабо сходящейся последовательности из l^1, как это вытекает из соединения следующих трех замечаний: а) в l^1 каждая слабо сходящаяся последовательность сильно сходится; б) каждое сепарабельное банаховское пространство изоморфно фактор-пространству пространства l^1 (см. сноску[4]) на стр. 88); в) существуют сепарабельные банаховские пространства, обладающие слабо сходящимися последовательностями, не являющимися сильно сходящимися.

3. Квазинормируемость и слабая компактность. Нам потребуется

Лемма 8. *Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство и A — замкнутое выпуклое ограниченное множество в E. Для того, чтобы множество A было слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое убывающее фильтрующееся семейство его непустых замкнутых выпуклых подмножеств имело непустое пересечение.*

Необходимость условия очевидна. Так как A уже ограниченно, т. е. слабо предкомпактно, то чтобы убедиться в достаточности условия, достаточно показать, что A полно в слабой топологии, т. е. что каждый слабый фильтр Коши Φ в A имеет предел в A. Пусть Ψ — базис фильтра, образованный замкнутыми выпуклыми оболочками множеств $B \in \Phi$; из предположения относительно A сразу следует, что Ψ имеет в A предельную точку x, а так как Ψ — также фильтр Коши, то x является его пределом. Тогда x тем более будет пределом фильтра Φ (мажорирующего Ψ).

Теорема 11. *Пусть E — квазинормируемое локально выпуклое пространство и A — закругленное выпуклое равностепенно непрерывное множество в E', компактное в топологии $\sigma(E', E'')$. Тогда в E' существует слабо замкнутое закругленное выпуклое равностепенно непрерывное множество $B \supset A$ такое, что A слабо компактно в банаховском пространстве* C.B *(наделенном топологией, определяемой «шаром» B).*

Действительно, пусть $B \supset A$ — слабо замкнутое закругленное выпуклое равностепенно непрерывное множество в E' такое, что сильная топология и топология пространства C.B индуцируют в A одну и ту же топологию. Тогда замкнутые выпуклые подмножества в A — одни и те же в обеих топологиях, и прямое применение леммы 8 показывает, что A слабо компактно в C.B.

Следствие 1. *Непрерывное линейное отображение u квазинормируемого локально выпуклого пространства E в банаховское пространство F, преобразующее ограниченные множества из E в слабо относительно компактные множества в F, слабо компактно, т. е. преобразует некоторую окрестность нуля V из E в слабо относительно компактное множество в F.*

Действительно, то, что u преобразует ограниченные множества в слабо относительно компактные, означает, что ${}^t u$ преобразует единичный шар пространства F' в множество $A \subset E'$, компактное в топологии $\sigma(E', E'')$ (см. лемму 1 в [8а][1])). Пусть тогда B — множество, обладающее свойством, утверждаемым в теореме 11, и V — его поляра в E. u порождает непрерывное линейное отображение $\tilde{u}$ нормированного пространства E_V, определяемого закругленной выпуклой окрестностью V начала, в F[2]), и, очевидно, достаточно показать, что $\tilde{u}$ — слабо компактное отображение. Но сопряженное к E_V очевидным образом отождествимо с $\mathbf{C}.B$[3]), образ же единичного шара пространства F' при отображении ${}^t\tilde{u}$ есть не что иное как A[4]). А тогда лемма, уже использованная в начале доказательства, показывает также, что $\tilde{u}$ — слабо компактное отображение.

Частный случай следствия 1 представляет собой

Следствие 2. *Каждое непрерывное линейное отображение рефлексивного квазинормируемого пространства в банаховское пространство слабо компактно.*

Заметим, что для не квазинормируемых рефлексивных пространств, даже если они — пространства типов $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{M})$, это следствие уже теряет силу, поскольку такое пространство может обладать нерефлексивным нормируемым фактор-пространством (§ 2, п. 3).

Следствие 3. *Рефлексивное квазинормируемое пространство $(\mathcal{F})$ совершенно рефлексивно* (§ 2, определение 2).

Действительно, это вытекает из теоремы 11 и следующей леммы:

Лемма 9. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Следующие три условия равносильны:*

---

[1]) Вот полный ее текст:

Лемма 1. *Пусть u — линейное отображение локально выпуклого пространства E в отделимое локально выпуклое пространство F. Следующие четыре условия равносильны.*

(1) *u преобразует ограниченные множества из E в слабо относительно компактные множества в F.*

(2) *Его второе сопряженное u'' отображает E'' в F.*

(3) *u'' преобразует равностепенно непрерывные множества из E'' (рассматриваемого как сопряженное к сильному E') в слабо относительно компактные множества в F.*

(4) *Отображение u', сопряженное к u, есть непрерывное отображение F', наделенного топологией Макки $\tau(F', F)$, в сильное E' (или также слабого F' в E', наделенное топологией $\sigma(E', E'')$).*

Это влечет

(5) *u' преобразует слабо компактные множества из F' в $\sigma(E', E'')$-компактные множества в E'.*

Обратно, если F полно, то для выполнения равносильных условий (1) — (4) *достаточно выполнения условия*

(5а) *u' преобразует слабо замкнутые равностепенно непрерывные множества из F' в $\sigma(E', E'')$-компактные множества в E'.*

(Следовательно, *если F полно, то все перечисленные условия равносильны.*)

Эта лемма используется и дальше. — *Прим. перев.*

[2]) E_V есть фактор-пространство E/N, где N — поляра $\mathbf{C}.B$ в E, наделенное нормой, определяемой «шаром» $W = \varphi(V)$, где φ — каноническое отображение E на E/N. Пусть S — замкнутый единичный шар пространства F и, значит, S° — замкнутый единичный шар пространства F'. По условию, ${}^t u(S^\circ) = A$; отсюда следует, что $u(A^\circ) \subset S$ (где A° — поляра A в E), и так как $A \subset B$, то подавно $u(V) \subset S$. Но тогда $u(N) = 0$, так что u постоянно на смежных классах по N, образующих E_V. Относя каждому такому классу значение, которое принимает на нем u, мы и получаем отображение $\tilde{u}$ пространства E_V в F. Так как при этом $u = \tilde{u} \circ \varphi$, то $\tilde{u}(W) = u(V) \subset S$, значит, $\tilde{u}$ непрерывно. — *Прим. перев.*

[3]) См. конец примечания к сноске [1]) на стр. 113. — *Прим. перев.*

[4]) Действительно, так как $u = \tilde{u} \circ \varphi$, то ${}^t u = {}^t\varphi \circ {}^t\tilde{u}$; но ${}^t\varphi$ (по отождествлении E'_V с $\mathbf{C}.B$) есть не что иное, как вложение $\mathbf{C}.B$ в E'; и так как ${}^t u(S^\circ) = A$, то, следовательно, и ${}^t\tilde{u}(S^\circ) = A$. — *Прим. перев.*

а) *Каждое непрерывное линейное отображение пространства E в любое банаховское пространство F слабо компактно.*

б) *Для каждой закругленной выпуклой окрестности нуля V пространства E существует закругленная выпуклая окрестность нуля $U \subset V$ такая, что каноническое отображение банаховского пространства E_U, определяемого окрестностью U, в банаховское пространство E_V, определяемое окрестностью V, слабо компактно.*

в) *Для каждого слабо замкнутого выпуклого равностепенно непрерывного множества $A \subset E'$ существует слабо замкнутое закругленное выпуклое равностепенно непрерывное множество $B \subset E'$ такое, что A слабо компактно в банаховском пространстве $C.B$, определяемом множеством B.*

Если E обладает этими свойствами, то то же верно и для каждого его фактор-пространства и векторного подпространства. Если при этом E полно, то оно рефлексивно. В частности, каждое полное отделимое фактор-пространство E/F пространства E рефлексивно.

Доказательство. Равносильность условий а) и в) содержится в доказательстве следствия 1, а равносильность условий а) и б) очевидна. Тривиально также, что условие б) сохраняется при переходе к фактор-пространству или векторному подпространству. Остается показать, что если E полно, то оно рефлексивно, т. е. что тождественное отображение u пространства E на себя преобразует ограниченные множества в слабо относительно компактные. Но по лемме, уже использованной в начале доказательства следствия 1, это равносильно тому, что сопряженное отображение ${}^t u$ преобразует равностепенно непрерывные множества из E' в относительно компактные в топологии $\sigma(E', E'')$, а это есть следствие условия в). (Можно было бы также, заметив, что E изоморфно замкнутому векторному подпространству топологического произведения семейства банаховских пространств, применить условие а).)

Отметим, что топологическое произведение любого семейства пространств, обладающих свойством, рассматриваемым в лемме 9, также обладает этим свойством. Отсюда вновь получается следствие предложения 10 (§ 2).

4. Пространства Шварца.

Предложение 17. *Пусть E — локально выпуклое пространство. Следующие условия равносильны:*

1) *E квазинормируемо и его ограниченные подмножества предкомпактны.*

2) *Для каждой замкнутой закругленной выпуклой окрестности нуля U пространства E существует окрестность нуля V, предкомпактная в топологии T_U, определяемой окрестностью U и ее гомотетичными образами.*

Если E — пространство типа $(\mathcal{F})$, то эти условия равносильны условию

3) *E есть сепарабельное пространство $(\mathcal{M})$, и каждая сильно сходящаяся последовательность в E' равномерно сходится на некоторой окрестности нуля из E* (т. е. сильное E' удовлетворяет условию сходимости Макки).

Доказательство. Условие 1 влечет условие 2. Действительно, пусть U — замкнутая закругленная выпуклая окрестность нуля в E. Так как E квазинормируемо, то (лемма 6) существует окрестность нуля V такая, что для каждого $\alpha > 0$ найдется ограниченное множество $M \subset E$, при котором $V \subset \alpha U + M$. Но так как каждое ограниченное множество по предположению предкомпактно, то можно найти конечное число точек $x_i \in E$ таких, что $M \subset \bigcup_i (x_i + \alpha U)$, откуда $V \subset \bigcup_i (x_i + 2\alpha U)$, а вследствие произвольности α это как раз и выражает, что V предкомпактно в топологии T_U.

Условие 2 влечет условие 1. Действительно, E тогда квазинормируемо (поскольку условия леммы 6, очевидно, выполнены), а всякое ограниченное множество $M \subset E$ предкомпактно; в самом деле, последнее означает также, что M предкомпактно в каждой топологии T_U, но если V — окрестность нуля, предкомпактная в T_U, то M также предкомпактно в T_U, поскольку $M \subset \lambda V$.

Если E — пространство $(\mathcal{F})$, то условие 1 влечет условие 3. Достаточно убедиться в сепарабельности пространства E, т. е., поскольку E метризуемо, в том, что E сепарабельно в каждой топологии T_U, а это сразу вытекает из существования окрестности нуля V, предкомпактной и тем более сепарабельной в топологии T_U (поскольку T_U определяется единственной полунормой).

Наконец, если E — пространство $(\mathcal{F})$, то условие 3 влечет условие 1. Действительно, нужно лишь доказать, что сильное E' удовлетворяет строгому условию сходимости Макки. Но так как E — пространство $(\mathcal{M})$, то сильная топология на ограниченных множествах в E' совпадает со слабой, а поскольку E сепарабельно, последняя метризуема. Тогда достаточно применить следствие 2 предложения 15.

Я не знаю, нельзя ли в условии 3 опустить требование сепарабельности пространства E; по-видимому, неизвестно пространство $(\mathcal{M})$ типа $(\mathcal{F})$, которое не было бы сепарабельным[1]).

Определение 5. *Пространством Шварца* (*сокращенно*: *пространством типа* (S)) *называется всякое локально выпуклое пространство, удовлетворяющее следующему условию*: *для каждой замкнутой закругленной выпуклой окрестности нуля* U *существует окрестность нуля* V, *предкомпактная в топологии* T_U, *определяемой окрестностью* U *и ее гомотетичными образами* (т. е. второму из равносильных условий предложения 17).

Сформулированное здесь свойство было обнаружено Шварцем у таких пространств, как $(\mathcal{E})$ и $(\mathcal{S})$ (см. [12], т. 1 и 2), в форме условия сходимости Макки в сопряженном пространстве. Заметим, что доказательство этого последнего свойства, исходящее из принятого здесь определения, гораздо проще. Из других примеров укажем пространство аналитических функций на заданном комплексном аналитическом многообразии, наделенное топологией компактной сходимости; оно также является пространством типа (S), как топологическое векторное подпространство пространства $(\mathcal{E})$ бесконечно дифференцируемых функций, наделенного своей обычной топологией (см. предложение 18). Понятие пространства типа (S), по-видимому, особенно интересно для пространств типа $(\mathcal{F})$ (см. теорему 12); однако укажем также следующие пространства типа (S): каждое пространство, наделенное слабой топологией, есть пространство типа (S); сильное сопряженное к метризуемому пространству $(\mathcal{M})$ есть пространство типа (S) (ибо, как было уже сказано, сильное сопряженное к пространству $(\mathcal{F})$ квазинормируемо, а здесь, сверх того, его ограниченные множества относительно компактны). Как мы видели, метризуемое пространство $(\mathcal{M})$ может и не быть квазинормируемым, так что среди пространств $(\mathcal{F})$ класс пространств типа (S) строго у́же класса пространств $(\mathcal{M})$.

Класс пространств типа (S) обладает замечательной устойчивостью относительно обычных операций, резко выделяющей его среди большинства важных классов векторных пространств.

Предложение 18. *Фактор-пространство и топологическое векторное подпространство пространства типа* (S) *есть пространство*

[1]) См. «Замечание при корректуре» в конце статьи. — *Прим. перев.*

типа (S). *Произведение любого семейства пространств типа* (S) *есть пространство типа* (S). *Индуктивный предел последовательности пространств типа* (S) *есть пространство типа* (S)

Справедливость утверждения для подпространства, фактор-пространства и произведения устанавливается прямым применением определения. В случае *строгого* индуктивного предела последовательности пространств типа (S) применимо условие 1 предложения 17: условие предкомпактности каждого ограниченного множества, очевидно, выполнено, а, с другой стороны, мы уже говорили, что индуктивный предел последовательности квазинормируемых пространств квазинормируем. Случай же общего индуктивного предела E последовательности пространств типа (S) (см. определение после теоремы 9) сводится к предыдущему, ибо E будет фактор-пространством прямой суммы последовательности пространств типа (S) (см. доказательство теоремы 9).

Предложение 18 показывает, в частности, что подпространство пространства E типа (S) квазинормируемо, тогда как мы знаем, что подпространство квазинормируемого пространства может и не быть квазинормируемым. Точно так же фактор-пространство пространства $(\mathcal{F})$ типа (S) рефлексивно и даже является пространством типа $(\mathcal{M})$, тогда как мы знаем, что фактор-пространство пространства типов $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{M})$ может даже не быть рефлексивным. Более того, здесь имеет место

Теорема 12. *Пусть E — полное метризуемое пространство типа (S) и F — его замкнутое векторное подпространство. Тогда F и E/F являются пространствами типа (S), а их сильные сопряженные отождествимы соответственно с пространствами E'/F° и F°, наделенными соответственно фактор-топологией и индуцированной топологией сильного E'. При этом каждое ограниченное множество в E/F содержится в каноническом образе некоторого компактного множества из E.*

Что F и E/F — пространства типа (S), было уже сказано в предложении 18. Отождествимость сильного F' с E'/F° хорошо известна, поскольку E рефлексивно (см. [3]). Для доказательства совпадения обеих сильных топологий в F° достаточно доказать последнее утверждение теоремы. Но так как E/F — полное пространство типа (S), то каждое ограниченное множество в E/F относительно компактно, а хорошо известно, что каждое компактное подмножество фактор-пространства пространства E типа $(\mathcal{F})$ содержится в каноническом образе некоторого компактного множества из E (что справедливо и доказывается «прямым методом» независимо от какой бы то ни было векторной структуры для фактор-пространства всякого *метризуемого* пространства по *открытому* отношению эквивалентности).

Однако следует иметь в виду, что если пространство E типа (S) не метризуемо, а, например, является пространством $(\mathcal{LF})$ типа (S) (т. е. строгим индуктивным пределом последовательности полных метризуемых пространств типа (S)), уже, вообще говоря, неверно, что в F° две сильные топологии совпадают. Действительно, в конце п.2 § 3 мы видели, что в каждой прямой сумме E прямых произведений пространств, совпадающих с одним и тем же пространством последовательностей χ (которое можно выбрать так, чтобы оно было пространством типа (S)), существует подпространство F, для которого указанное свойство не имеет места, если только χ не изоморфно топологическому произведению прямых.

НЕРЕШЕННЫЕ ВОПРОСЫ

Напомним нерешенные вопросы, встретившиеся в ходе изложения.

1) Всякое ли ограниченное подмножество пополнения $\hat{E}$ метризуемого локально выпуклого пространства E содержится в замыкании в $\hat{E}$ ограни-

ченного множества из E? (Известно, что в случае сепарабельного E это верно — следствие 4 теоремы 1.)[1]).

2) Совпадает ли сильная топология сопряженного к пространству E типа $(\mathcal{F})$ с $\tau(E', E'')$? Если линейные формы на E', ограниченные на ограниченных множествах, сильно непрерывны, то будет ли сильное E' бочечным, т. е. E правильным?

3) Справедливы ли теорема 6 и теорема 7 (являющаяся ее следствием) для каждого пространства H типа $(\mathcal{DF})$ (не обязательно являющегося сильным сопряженным к пространству $(\mathcal{F})$)? В частности, будет ли квазибочечное H ограниченно замкнутым?

Напомним, что неизвестен пример квазибочечного не ограниченно замкнутого H, равно как и линейной формы на локально выпуклом пространстве H, которая была бы ограниченной на каждом ограниченном множестве и не принадлежала бы к слабому замыканию в алгебраическом сопряженном к H никакого сильно ограниченного множества из H'[2]).

4) Для всякого ли правильного пространства E типа $(\mathcal{F})$ ограниченные подмножества сильного E' метризуемы? Более обще, верно ли обращение теоремы 5?[1]).

5) Всякое ли квазибочечное пространство H типа $(\mathcal{DF})$ обладает правильным сильным сопряженным, т. е. бочечным вторым сопряженным? Верно ли это, хотя бы когда H — сильное сопряженное к пространству E типа $(\mathcal{F})$, т. е. будет ли второе сопряженное к правильному пространству $(\mathcal{F})$ правильным? — Ответ был бы утвердительным при утвердительном ответе на вопрос 4 (см. замечания 11 и 13)[1]).

6) Пусть E — локально выпуклое пространство и F — его замкнутое векторное подпространство. Дают ли обе сильные топологии в E'/F° одни и те же ограниченные множества? (См. замечание 10 после теоремы 8.)

7) Пусть E и F — пространства $(\mathcal{F})$ и $B(E, F)$ — пространство всех непрерывных билинейных форм на $E \times F$, наделенное топологией равномерной сходимости на произведениях пар переменных ограниченных множеств из E и F. Будет ли $B(E, F)$ пространством типа $(\mathcal{DF})$? Более обще, если E — пространство типа $(\mathcal{F})$ и H — пространство типа $(\mathcal{DF})$, то будет ли пространство $L(E, H)$ всех непрерывных линейных отображений E в H, наделенное топологией ограниченной сходимости, пространством типа $(\mathcal{DF})$? Было бы интересно знать это уже в случае нормируемых E и H. (См. конец п. 4 § 1.)

8) Отождествимо ли второе сопряженное к строгому индуктивному пределу E последовательности локально выпуклых пространств E_n с индуктивным пределом вторых сопряженных? Верно ли это, когда E_n — пространства $(\mathcal{F})$ или правильные пространства $(\mathcal{F})$? (Я высказал в устном сообщении последний результат, но не восстановил его доказательство, быть может, содержавшее ошибку.) Полно ли E''? (Если E_n — правильные пространства $(\mathcal{F})$, то это верно, поскольку тогда сильное E' ограниченно замкнуто — теорема 10.)

9) Будет ли произведение двух совершенно рефлексивных (определение 2, п. 3 § 2) пространств типа $(\mathcal{F})$ совершенно рефлексивным?

10) Сепарабельно ли метризуемое пространство $(\mathcal{M})$[3])?

Из всех этих вопросов седьмой представляется мне наиболее важным.

Укажем еще, что для значительного числа свойств пространств типа $(\mathcal{DF})$, рассмотренных в этой работе (а именно, главного содержания п. 4 § 1), были бы достаточны менее сильные предположения, чем входящие в определение пространств $(\mathcal{DF})$, а именно следующие: *H обладает счетной фундаментальной системой ограниченных множеств и сильно сходя-*

[1]) См. сноску [3]) на стр. 127.—*Прим. перев.*

[2]) См. ниже «Замечание при корректуре». — *Прим. перев.*

[3]) См. ниже «Замечание при корректуре».—*Прим. перев.*

щаяся последовательность в его сопряженном равностепенно непрерывна. Определенный так класс пространств интересен, кроме того, тем, что он устойчив относительно перехода как к замкнутым векторным подпространствам, так и к фактор-пространствам.

Замечание при корректуре. Л. Нахбин[1]) построил не ограниченно замкнутое полное бочечное пространство, а Ж. Дьёдонне[2]) сообщил мне доказательство утвердительного ответа на вопрос 10. Другого прогресса в решении поставленных выше вопросов, по-видимому, достигнуто не было[3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warzawa, 1932. [Украинский перевод: Банах С. С., Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.]
2. Bourbaki N., Sur certains espaces vectoriels topologiques, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **2** (1951), 5—16. [Есть русский перевод. См. сб. *Математика*, **2 : 2** (1958), 109—117.]
3. Dieudonné J., Schwartz L., La dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ et $(\mathcal{LF})$, *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), **1** (1950), 61—101. [Есть русский перевод. См. сб. *Математика*, **2 : 2** (1958), 77—107.]
4. Grothendieck A., Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces $(\mathcal{F})$ *C. r. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 1561—1563.
5. Grothendieck A., Sur une notion de produit tensoriel topologique, *C. r. Acad. Sci. Paris*, **233** (1951), 1556—1558.
6. Grothendieck A., Critères généraux de compacité dans les espaces fonctionnels, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 168—186.
7. Grothendieck A., Sur la complétion du dual d'un espace localement convexe, *C. r. Acad. Sci. Paris*, **230** (1950), 605—606.
8. Grothendieck A., Sur certains espaces de fonctions holomorphes, *J. reine angew. Math.*, **192** (1953), 35—64, 77—95.

8a. Grothendieck A., Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type *C (K)*, *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 129—173.

9. Köthe G., Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raumes, *Math. Z.*, **51** (1947), 17—35.
10. Köthe G., Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, *Math. Z.*, **51** (1948), 317—345.
11. Köthe G., Dualität in der Funktionentheorie, *J. reine angew. Math.*, **192** (1953), 30—49.
12. Schwartz L., Théorie des distributions, t. 1, 2, Act. sci. et ind., №№ 1091, 1122, Paris, 1950—1951.
13. Mackey G. W., On infinite-dimensional linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **57** (1945), 155—207.

[1]) И независимо от него Т. Сирота (Nachbin L., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 471—474; Shirota T., *Proc. Japan. Acad.*, **30** (1954), 294—298).—*Прим. перев.*

[2]) Dieudonné J. *C. r. Acad. Sci. Paris*, **238** (1594), 194—195.

[3]) Ихиро Амемия (Amemiya I., *Jroc. Papan Acad.*, **33** (1957), 169—171) дал отрицательное решение вопросов 1 и 4, а также указал пример ограниченно замкнутого пространства $(\mathcal{DF})$, второе сопряженное к которому не является ограниченно замкнутым (что делает весьма вероятным также отрицательное решение вопроса 5).—*Прим. перев.*