Alexander Grothendieck

Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux

Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1956__84__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Bull. Soc. Math. France,
84, 1956, p. 1 à 7.

THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LA COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX (*);

PAR A. GROTHENDIECK.

Soit F un faisceau sur l'espace paracompact X, on désigne par $\Gamma(U, F)$ le groupe des sections de F sur une partie U de X. Si $\mathbf{U}$ est un recouvrement de X, $C(\mathbf{U}, F)$ désigne le groupe des cochaînes de $\mathbf{U}$ à coefficients dans F, somme directe des $C^p(\mathbf{U}, F)$ formés des cochaînes homogènes de degré p. C'est un groupe gradué à dérivation, d'où un groupe gradué de cohomologie

$$H(C(\mathbf{U}, F)=\sum_p H^p(C(\mathbf{U}, F))=\sum_p Z(C^p(\mathbf{U}, F))/\delta C^{p-1}(\mathbf{U}, F)$$

(le signe Z indique qu'on prend le sous-groupe formé des cycles). Si $\mathbf{V}$ est un recouvrement plus fin que $\mathbf{U}$, on a des homomorphismes permis bien connus $C(\mathbf{U}, F)\rightarrow C(\mathbf{V}, F)$ donnant tous naissance au même homomorphisme $H(C(\mathbf{U}, F))\rightarrow H(C(\mathbf{V}, F))$: on les obtient en associant à tout $V\in\mathbf{V}$ un $U\in\mathbf{U}$ qui le contient. La limite inductive des $H(C(\mathbf{U}, F))$, quand $\mathbf{U}$ parcourt les recouvrements ouverts de X supposé paracompact, s'identifie au groupe de cohomologie $H(X, F)$ de X à coefficients dans F.

Si maintenant F est un complexe de faisceaux (« faisceau gradué à dérivation »)

$$(1) \qquad F:\quad 0\rightarrow F_0\rightarrow F_1\rightarrow\ldots,$$

on pose

$$H(\Gamma(X, F))=\sum_p H^p(\Gamma(X, F))=\sum_p Z(\Gamma(X, F_p)/d\Gamma(X, F_{p-1}).$$

(*) Le présent papier a été écrit en 1953, inspiré par le théorème de Cartan-Serre cité dans la bibliographie. Il avait été soumis aux *Anaïs da Academia Brasileira de Ciencias*, mais retiré à cause des longs délais de publication.

Supposons que (1) soit exacte pour les degrés > 0, alors on peut construire des homomorphismes canoniques

$$H^p(\Gamma(X, F)) \rightarrow H^p(X, N),$$

où N est le noyau de $F_0 \rightarrow F_1$ (*voir* Séminaire Cartan). Cet homomorphisme peut s'obtenir par la méthode qui suit (méthode de Weil). Pour tout recouvrement ouvert $\mathbf{U}$ de X, soit $E''_{\mathbf{U}}$ le sous-groupe de

$$C^0(U, F_{p-1}) \times C^1(U, F_{p-2}) \times \ldots \times C^{p-1}(U, F_0)$$

formé des systèmes w de cochaînes $w^{p-1}(S_0), \ldots, w^0(S_{p-1})$ (les S_i sont des simplexes génériques de dimensions i du nerf du recouvrement $\mathbf{U}$) tels que $w^h(\delta S_{p-h}) = dw^{h-1}(S_{p-h})$ dans star (S_{p-h}), pour $h = p-1, \ldots, 1$. Alors il existe une $w^p \in Z(\Gamma(X, F_p))$ et une seule telle que $w^p = dw^{p-1}(S_0)$ dans chaque star (S_0), soit $w^p = u(w)$; et $c^p(S_p) = w^0(\delta S_p)$ est une p-cochaîne *à coefficients dans* $N = Z(F_0)$, et même un cocycle, soit $c^p = v(w)$. On a donc deux homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} & E^p_{\mathbf{U}} & \\ {}^{u}\swarrow & & \searrow^{v} \\ Z(\Gamma(X, F_p)) & & Z(C^p(U, N)). \end{array}$$

On montre [1] : *a*. la réunion des images par u des $E^p_{\mathbf{U}}$, quand $\mathbf{U}$ varie, est $Z(\Gamma(X, F_p))$ tout entier; *b*. si $w \in E^p_{\mathbf{U}}$ est tel que $u(w)$ ait une image nulle dans $H^p(\Gamma(X, F))$, alors $v(w)$ définit un élément de $H^p(X, N)$ qui est nul. Il en résulte aussitôt une application naturelle $H^p(\Gamma(X, F) \rightarrow H^p(X, N)$, qui est l'application cherchée. Rappelons que cette application est un isomorphisme *sur* si les F_i sont fins, ou si seulement F est homotopiquement fin, etc.

Bien entendu, tout ce qui précède serait valable en introduisant des « familles Φ » avec les adaptations habituelles; nous nous dispensons par la suite d'envisager ce cas plus général. Des raisonnements élémentaires permettent de prouver le

Théorème 1. — *Soit F le complexe* (1) *de faisceaux* (*sur l'espace paracompact X*) *acyclique pour les degrés* > 0. *Soit p un entier* > 0 *tel que, pour* $1 \leq q \leq p$, *tout $x \in X$ et tout voisinage U de x, existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'application naturelle $H^q(\Gamma(U, F)) \rightarrow H^q(\Gamma(V, F)$ soit nulle. Alors il existe des recouvrements ouverts $\mathbf{U}$ de X localement finis aussi fins qu'on veut tels que l'application $E''_{\mathbf{U}} \rightarrow Z(\Gamma(X, F_p))$ soit* sur, *et pour un tel $\mathbf{U}$ on peut trouver un recouvrement ouvert $\mathbf{V}$ plus fin,*

---

[1] Par des raisonnements élémentaires calqués sur ceux de Weil.

tel que toute $w \in \mathrm{E}_{\mathbf{U}}^{p}$ *ayant une image nulle dans* $H^p(\Gamma(X, F))$, *ait une image nulle par l'application composée* $E_{\mathbf{U}}^{p} \to H^p(C(\mathbf{U}, N)) \to H^p(C(\mathbf{V}, N))$ (*N désignant encore le faisceau noyau de* $F_0 \to F_1$). *Par suite, l'application naturelle* $H^p(\Gamma(X, F)) \to H^p(X, N)$ *est une application composée*

$$H^p(\Gamma(X, F)) \to H^p(C(V, N)) \to H^p(X, N).$$

Corollaire 1. — *Si* $H^p(\Gamma(X, F)) \to H^p(X, N)$ *est* sur, *alors pour* $\mathbf{V}$ *recouvrement ouvert localement fini assez fin,* $H^p(\mathbf{V}, N) \to H^p(X, N)$ *est* sur.

De même, avec les notations du théorème 1, si $H^p(\Gamma(X, F)) \to H^p(X, N)$ est biunivoque, alors tout élément de $Z(C^p(\mathbf{U}, N))$ provenant de $E_{\mathbf{U}}^{p}$ et dont l'image dans $H^p(X, N)$ est nulle, a déjà une image dans $H^p(C^p(\mathbf{V}, N))$ nulle. Si l'on part d'un faisceau arbitraire N sur X, il peut toujours être considéré comme un $H^0(F)$, où F est un faisceau à dérivation fin, acyclique pour les dimensions > 0; l'hypothèse du théorème 1 signifie alors que pour tout q, avec $1 \leqq q \leqq p$, tout $x \in X$ et tout voisinage U de x, existe un voisinage $V \subset U$ de x tel que l'application canonique $H^q(U, N) \to H^q(V, N)$ soit nulle. Nous dirons alors que N est *calculable* en degrés $\leqq p$. Du théorème 1 résulte aussitôt que si N est calculable en degrés $\leqq p$, alors : *a*. pour tout recouvrement ouvert $\mathbf{U}$ assez fin de X, $H^p(C(\mathbf{U}, N)) \to H^p(X, N)$ est une application *sur*; *b*. pour tout recouvrement ouvert $\mathbf{U}$ de X en existe un autre $\mathbf{V}$ plus fin tel que tout élément de $H^p(C(\mathbf{U}, N))$ ayant une image nulle dans $H^p(X, N)$, a déjà une image nulle dans $H^p(C(\mathbf{V}, N))$ [on pourrait dire que la limite inductive des $H^p(C(\mathbf{U}, N))$ est « calculable », ponr exprimer *a* et *b*]. Cela signifie aussi que :

Corollaire 2. — *Soit N un faisceau calculable sur X. Alors il existe un recouvrement ouvert* $\mathbf{U}$ *sur X et un recouvrement ouvert plus fin* $\mathbf{V}$ *tel que* $H(X, N)$ *s'identifie exactement au quotient de* $H^p(C(\mathbf{U}, N))$ *par le noyau de*

$$H^p(C(\mathbf{U}, N)) \to H^p(C(\mathbf{V}, N)).$$

Bien entendu, on peut supposer $\mathbf{U}$ aussi fin qu'on veut, et $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ localement finis. Le corollaire 2 dispense de prendre une limite inductive pour calculer $H^p(X, N)$. Si, par exemple, X est HLC, il est immédiat que le faisceau des cochaînes singulières réduites de X est « calculable », d'où, compte tenu du corollaire 2, le classique

Corollaire 3. — *Soit X un espace compact* HLC, *A un anneau quelconque, alors les $H^p(X, A)$ sont des A-modules de type fini.*

Un faisceau $\mathbf{N}$ d'espaces vectoriels (réels ou complexes) sur X est dit *faisceau vectoriel topologique*, si les $\Gamma(U, N)$, espaces de sections sur les ouverts U, sont munis de topologies d'EVT de telle façon que pour tout recouvrement ouvert (U_i) de U, la topologie de $\Gamma(U, N)$ soit la moins fine des topologies rendant continues les $\Gamma(U, N) \to \Gamma(U_i, N)$. On dit que N est un faisceau du type (F) si les espaces de sections sur les ouverts sont du type (F). N est dit *compact*, si pour tout ouvert V relativement compact dans un ouvert U, l'application $\Gamma(U, N) \to \Gamma(V, N)$ est compacte (c'est-à-dire transforme un voisinage convenable de o en un ensemble relativement compact). La notion n'a d'intérêt que si X est localement compact; alors les $\Gamma(U, N)$ sont des espaces de Schwartz (*cf.* bibliographie) complets; si de plus U est dénombrable à l'infini, alors $\Gamma(U, N)$ est un espace (F). Ceci posé :

THÉORÈME 2. — *Soit N un faisceau compact sur l'espace compact X. Si N est « calculable » pour les degrés $\leq p$, alors $H^p(X, N)$ est de dimension finie.*

En effet, en vertu du théorème 1, corollaire 2, on peut trouver un recouvrement ouvert fini $\mathbf{U}$ de X tel que $H^p(C(\mathbf{U}, N)) \to H^p(X, N)$ soit *sur*, soit $\mathbf{V}$ un recouvrement ouvert fini subordonné (c'est-à-dire le recouvrement formé des adhérences des $V \in \mathbf{V}$ est plus fin que U), soit enfin W un recouvrement ouvert fini plus fin que V, et tel que $H^p(X, N)$ s'identifie au quotient de $H^p(C(\mathbf{V}, N))$ par le noyau de $H^p(C(\mathbf{V}, N)) \to H^p(C(\mathbf{W}, N))$. On a des applications linéaires

$$\begin{array}{ccccc} & & & & C^{p-1}(\mathbf{W}, N) \\ & & & & \downarrow d \\ Z(C^p(\mathbf{U}, N)) & \xrightarrow{\alpha} & Z(C^p(\mathbf{V}, N)) & \xrightarrow{\beta} & Z(C^p(\mathbf{W}, N)) \end{array}$$

et $\operatorname{Im}\alpha + \beta^{-1}(\operatorname{Im} d) = Z(C^p(\mathbf{V}, N))$. Or les espaces qui interviennent dans le diagramme sont des espaces (F) [2], les applications linéaires α, β, d sont continues, α est compacte, et $\beta^{-1}(\operatorname{Im} d)$ peut être regardé comme l'image d'un espace (F) par une application linéaire continue dans $Z(C^p(\mathbf{V}, N))$, savoir l'espace H des

$$(z, c) \in Z(C^p(\mathbf{V}, N)) \times C^{p-1}(\mathbf{W}, N)$$

tels que $\beta z = d(c)$. Un théorème de compacité de L. SCHWARTZ permet alors de conclure que $\beta^{-1}(\operatorname{Im} d)$ est de codimension finie dans $Z(C^p(\mathbf{V}, N))$, c'est-à-dire que

$$H^p(X, N) = Z(C^p(\mathbf{V}, N))/\beta^{-1}(\operatorname{Im} d)$$

est de dimension finie. On retrouve un résultat de CARTAN-SERRE :

---

[2] On peut le supposer même si X n'est pas métrisable, en prenant U, V, W convenablement : on se sert du fait immédiat que tout point de X admet un système fondamental de voisinages ouverts qui sont dénombrables à l'infini.

COROLLAIRE. — *Les espaces de cohomologie d'une variété holomorphe compacte, à coefficients dans un faisceau analytique cohérent, sont de dimension finie.*

En effet, la théorie des faisceaux analytiques cohérents permet de voir que ce sont là des faisceaux (F) compacts, et calculables (il suffit de connaître les théorèmes globaux A et B de CARTAN-SERRE pour les polydisques).

Dans le théorème 2, il est essentiel de spécifier que F est calculable. Ainsi, si X est un compact localement connexe, le faisceau des germes de fonctions réelles localement constantes est un faisceau compact pour la topologie de la convergence compacte, néanmoins les espaces $H^p(X, R)$ pour $p \geqq 1$ peuvent être de dimension infinie.

THÉORÈME 3. — *Soit X un espace compact métrisable, F un faisceau vectoriel à dérivation sur X,*

$$F: \quad 0 \to F_0 \to F_1 \to \ldots \to F_p \to F_{p+1} \to \ldots,$$

un complexe de faisceaux acyclique en dimensions > 0. On suppose les F_q avec $q \leqq p$ du type (F), les $F_{q-1} \to F_q$ continus (c'est-à-dire induisant des applications continues des espaces de sections sur un ouvert quelconque U) et pour tout ouvert U, le noyau de $\Gamma(U, F_p) \to \Gamma(U, F_{p+1})$ fermé [3]. *Si le faisceau $N = Z(F_0)$ est* compact, *et si l'application canonique $H^p(\Gamma(X, F)) \to H^p(X, N)$ est* sur, *alors $H^p(X, N)$ est de dimension finie.*

Dans le cas où les F_i sont fins pour $i \leqq p$, il suffit en vertu du théorème 2 de prouver que N est calculable pour les degrés $\leqq p$, ce qui résulte aussitôt du lemme suivant, intéressant en lui-même :

LEMME 1. — *Soient F, Z deux faisceaux du type (F) sur un espace X, soit $d: F \to Z$ un homomorphisme de faisceau vectoriel topologique, soit $x \in X$ tel que $d_x: F_x \to Z_x$ soit* sur. *Supposons que x admette un système fondamental dénombrable de voisinages. Alors pour tout voisinage U de x, il en existe un autre $V \subset U$ tel que pour $z \in \Gamma(U, Z)$ existe toujours $g \in \Gamma(V, G)$ telle que $z = dg$ sur V.*

Soit, en effet, (V_n) une suite fondamentale de voisinages de x contenus dans U, soit α_n l'application canonique $\Gamma(U, Z) \to \Gamma(V_n, Z)$; par hypothèse on aura

$$\Gamma(U, Z) = \bigcup \alpha_n^{-1} d(\Gamma(V_n, F)),$$

---

[3] Il suffit pour ceci que F_{p+1} soit aussi un faisceau vectoriel topologique séparé et $F_p \to F_{p+1}$ continu.

or les sous-espaces envisagés de $\Gamma(U, Z)$ peuvent être regardés comme des images d'espaces du type (F) par des applications linéaires continues, donc (Banach) sont maigres ou identiques à $\Gamma(U, Z)$. Comme l'un au moins n'est pas maigre (Baire), on aura

$$\Gamma(U, Z) = \alpha_n^{-1} d(\Gamma(V_n, G))$$

pour n convenable. C. Q. F. D.

Pour prouver le théorème 3 dans le cas général, on conjugue le corollaire 1 du théorème 1 (qui s'applique grâce au lemme 1) et le lemme suivant (qui contient le théorème 2 quand X est métrisable) :

Lemme 2. — *Soit* $\mathbf{N}$ *un faisceau compact sur l'espace compact métrisable* X, *supposons que pour un entier* $p > 0$, *il existe un recouvrement ouvert* $\mathbf{U}$ *de* K *tel que* $H^p(C(U, N)) \to H^p(X, N)$ *soit* sur. *Alors* $H^p(X, N)$ *est de dimension finie.*

En effet, on peut supposer $\mathbf{U}$ fini ; soit $\mathbf{V}$ un recouvrement ouvert fini subordonné à $\mathbf{U}$, et soit $(\mathbf{V}_n)$ une *suite* fondamentale croissante de recouvrements ouverts finis plus fins que $\mathbf{V}$. On a des applications linéaires continues

$$\begin{array}{ccccc} & & & & C^{p-1}(V_n, N) \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle d_n} \\ Z(C^p(\mathbf{U}, N)) & \xrightarrow[\alpha]{} & Z(C^p(\mathbf{V}, N) & \xrightarrow[\beta_n]{} & Z(C^p(\mathbf{V}_n, N) \end{array}$$

et l'hypothèse sur $\mathbf{U}$ implique

$$\operatorname{Im}\alpha + \bigcup \beta_n^{-1} \operatorname{Im}(d_n) = Z(C^p(\mathbf{V}, N)).$$

On en conclut encore qu'il existe n tel que

$$\operatorname{Im}\alpha + \beta_n^{-1}(\operatorname{Im} d_n) = Z(C^p(V, N)),$$

d'où résulte, par le théorème de compacité de Schwartz déjà utilisé, (α étant application compacte) que $\beta_n^{-1}(\operatorname{Im} d_n)$ est de codimension finie dans $Z(C^p(\mathbf{V}, N))$, c'est-à-dire que $H^p(X, N)$ est de dimension finie.

Appliquant le théorème 3 avec $p = 1$, on trouve le

Corollaire. — *Soient* G, H *deux faisceaux vectoriels topologiques du type* (F) *sur un espace compact métrisable* X, *soit* d *un homomorphisme de faisceau vectoriel topologique* $G \to H$. *On suppose que le noyau* N *de* d *est un faisceau compact, que pour tout ouvert* U, *le sous-espace* $Z(U)$ *des éléments de* $\Gamma(U, H)$ *qui sont localement dans l'image de* G *est fermé, enfin* G *fini. Alors* $Z(X)/d(\Gamma(X, C)) = H^1(X, N)$ *est de dimension finie.*

Ce corollaire s'applique en particulier aux opérateurs différentiels elliptiques sur une variété ind. diff. compacte. (Noter qu'il suffit de vérifier l'hypothèse sur U pour U petit.)

BIBLIOGRAPHIE.

H. Cartan, Séminaire Cartan, 1950-1951.

H. Cartan, Séminaire Cartan, 1951-1952.

J. P. Serre et H. Cartan, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 128.

L. Schwartz, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2472.

A. Weil, *Comm. Math. Helv.*, t. 26, 1952, p. 119.

A. Grothendieck, *Sur les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{DF}$*, *Summa Brasiliensis Mathematicæ*, Vol. 3, 1954.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1956.)