SUR LA CLASSIFICATION DES FIBRES HOLOMORPHES SUR LA SPHERE DE RIEMANN.*

par A. GROTHENDIECK.[1]

Par. 1. Enoncé du théorême principal. Soit X une variété holomorphe (ou plus généralement un "espace analytique" [6]), nous considérons des fibrés holomorphes sur X, de groupe structural un groupe de Lie complexe G. Soit $\boldsymbol{O}_X(G)$ le faisceau des germes d'applications holomorphes de X dans G, (c'est un faisceau de groupes, en général non commutatifs), nous désignerons par $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$ l'ensemble des classes de fibrés holomorphes sur X, de groupe structural G. (Pour tout ce qui concerne la notation $H^1(X, \boldsymbol{F})$—où $\boldsymbol{F}$ est un faisceau de groupes non nécessairement commutatifs sur X—et son mécanisme algébrique, voir [4]). Nous n'exigeons pas que G soit connexe, et désignerons par G_0 la composante connexe de l'élément neutre, par $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie. G est dit *réductif* si son algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ est réductive, c'est à dire somme directe de son centre et d'une algèbre semi-simple. Par abus de langage, nous appellerons *sous-groupe de Cartan* H de G un sous-groupe holomorphe *connexe* ayant pour algèbre de Lie une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{G}$. Si G est un groupe algèbrique connexe, cette terminologie coïncide avec elle de [3]. Si Z est le centre de G_0, alors H contient Z_0, et H est l'image réciproque d'un sous-groupe de Cartan H_1 du groupe $G_1 = G_0/Z_0$ (qui est semi-simple dans le cas où G est réductif), D'après la définition générale des sous-algèbres de Cartan [3], si N est le normalisateur de H dans G, le quotient $W = N/H$ est un groupe discret (et même fini si G/G_0 est fini), on l'appelle le *groupe de Weyl* de G.

Tout fibré holomorphe de groupe structural H définissant un fibré holomorphe associé de groupe structural G, on obtient une application canonique $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H)) \to H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$. D'autre part, N opère par automorphismes intérieurs dans G et H est stable sous ces opérations, d'où d'ensuit que N opère aussi dans les ensembles $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))$ et $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$ et l'application précédente est compatible avec ces opérations. D'ailleurs les opérations sur le deuxième ensemble, correspondant à des automorphismes

* Received October 12, 1956.

[1] La majeure partie de ce travail a été faite en 1955 alors que l'auteur était Visiting Associate Professor à l'Université de Kansas, USA.

intérieurs de G, sont triviales, et pour la même raison les éléments de H opèrent trivialement sur $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))$, de sorte qu'en fait le groupe de Weyl $W = N/H$ opère sur cet ensemble. On en déduit une application canonique

$$H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))/W \to H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G)) \tag{1}$$

où le premier membre désigne l'ensemble des trajectoires dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))$ sous le groupe de Weyl. L'image de cette application est l'ensemble des classes de fibrés holomorphes de groupe G dont le groupe structural peut se réduire au sous-groupe de Cartan H. Le but du présent travail est la démonstration du

THÉORÈME 1.1. *Soit G un groupe de Lie complexe réductif, soit X la sphère de Riemann (c'est à dire une courbe algèbrique complète de genre 0). Alors l'application* (1) *est bijective, en d'autres termes: Pour tout fibré holomorphe sur X de groupe structural G, le groupe structural peut se réduire au sous-groupe de Cartan H de G, et ceci de façon unique à une opération du groupe de Weyl W près.*

On peut expliciter ce résultat ainsi. On sait, puisque G est réductif, que H est abélien, soit $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. L'homomorphisme $h \to \exp. 2i\pi h$ de $\mathfrak{h}$ sur H identifie l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ à un groupe de recouvrement de H, soit P son noyau ("réseau unité" de $\mathfrak{h}$). La suite exacte $0 \to P \to \mathfrak{h} \to H \to 0$ donne une suite exacte de faisceaux abéliens $0 \to P \to \boldsymbol{O}_X(\mathfrak{h}) \to \boldsymbol{O}_X(H) \to 0$ d'où une suite exacte de cohomologie

$$H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\mathfrak{h})) \to H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H)) \to H^2(X, P) \to H^2(X, \boldsymbol{O}_X(\mathfrak{h})).$$

Or il est bien connu que $H^i(X, \boldsymbol{O}_X) = 0$ pour $i \geqq 1$ ($\boldsymbol{O}_X$ étant le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X) : c'est vrai chaque fois que X est un espace projectif complexe [5]. Par suite on a aussi $H^i(X, \boldsymbol{O}_X(\mathfrak{h})) = 0$, d'où

$$H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H)) \approx H^2(X, P) \approx P. \tag{2}$$

Ces isomorphismes sont "fonctoriels," et en particulier compatibles avec les opérations de W, donc on obtient:

COROLLAIRE 1. *Sous les conditions du théorème* 1.1, *l'ensemble $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$ s'identifie à l'ensemble P/W, où P est le réseau unité dans l'algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ correspondant au groupe de Cartan H, et W le groupe de Weyl correspondant à H.*

Supposons pour simplifier que G est connexe et semi-simple, considérons un système fondamental de racines $(\alpha_i)_{1 \leqq i \leqq r}$ sur $\mathfrak{h}$ [2], et la "chambre de Weyl" C formée des $h \in \mathfrak{h}$ tels que $\alpha_i(h) \geqq 0$ pour tout i. On sait que tout élément h de $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha_i(h)$ soit réel pour tout i, est conjugué sous W à un élément et un seul de C (savoir le plus grand des transformés de h par W, dans l'ordre lexicographique relatif à une certaine base de $\mathfrak{h}$ [2]). Donc:

Corollaire 2. *Si G est connexe semi-simple, alors $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$ s'identifie à l'ensemble des éléments du réseau unité P de G relativement à $\mathfrak{h}$ qui sont dans le chambre de Weyl C.*

En un certain sens, la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann X, de groupe G, est duale de la classification des représentations linéaires de dimension finie de G [2]. On peut préciser ce point en donnant un énoncé équivalent du théorème 1.1 ne faisant plus intervenir de sous-group de Cartan. Pour ceci, rappelons d'abord que le groupe $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{C}^*))$ des classes de fibrés de groupe $\boldsymbol{C}^*$ [2] sur une variété projective X, s'identifie au groupe des classes de diviseurs sur X mod les diviseurs principaux, donc au group Z des entiers rationnels quand X est la sphère de Riemann. Soit dans ce cas L_1 le fibré vectoriel holomorphe sur X, de fibré $\boldsymbol{C}$ et de groupe $\boldsymbol{C}^*$, correspondant à un diviseur de degré 1. Si G est un groupe de Lie complexe quelconque, et u un homomorphisme complexe de $\boldsymbol{C}$ dans G, on peut considérer le fibré holomorphe de groupe structural G associé à L_1 et à u. La classe de ce fibré ne change évidemment pas si on remplace u par ${}^g u(t) = g u(t) g^{-1}$ (car, comme on l'a déjà remarqué, la permutation de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$ définie par un automorphisme intérieur de G est l'identité). En d'autres termes, désignant par $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, G)/G$ l'ensemble des classes de homomorphismes complexes de $\boldsymbol{C}^*$ dans G, mod composition avec des automorphismes intérieurs de G, on obtient une application naturelle

$$\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, G)/G \to H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G)). \tag{3}$$

Théorème 1.2. *Soit X la sphère de Riemann, G un groupe de Lie complexe réductif. Alors l'application* (3) *est bijective. En d'autres termes, tout fibré holomorphe sur X de groupe G est associé au fibré fondamental L_1 et à un homomorphisme complexe u de $\boldsymbol{C}^*$ dans G, et ce dernier est unique mod. composition avec un automorphisme intérieur de G.*

La démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2 sera développée dans les par. 2, 3, 4. Nous allons ici d'abord montrer que le théorème 1.2 est bien

[2] C désigne le corps des complexes, C^* le groupe complexe multiplicatif des nombres complexes $\neq 0$.

équivalent au théorème 1.1. Prouvons d'abord que le th. 1.2 est vrai si G est un groupe *abélien connexe* H. Considérons alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, H) \arrow[rr] & & H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H)) \arrow[dl] \\ & P \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

où P est le réseau unité de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H, où l'homomorphisme horizontal est celui envisagé dans le th. 1.2, et l'homomorphisme vertical droit est l'isomorphisme (2). Le troisième homomorphisme $P \to \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, H)$ est aussi un isomorphisme, obtenu en remarquant que les homomorphismes complexes de $\boldsymbol{C}^* \approx \boldsymbol{C}/\boldsymbol{Z}$ dans $H \approx \mathfrak{h}/P$ correspondent biunivoquement aux homomorphismes de $\boldsymbol{C}$ dans $\mathfrak{h}$ appliquant Z dans P, c'est-à-dire aux éléments de P. Le diagramme ainsi obtenu est commutatif, comme on voit aussitôt, d'où résulte que l'homomorphisme horizontal est lui aussi bijectif.—Passons au cas général où on a un groupe de Lie complexe réductif G quelconque. On a un diagramme commutatif d'applications naturelles:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, H)/W \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] & \mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, G)/G \arrow[d, "\beta"] \\ H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))/W \arrow[r, "\alpha"] & H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G)) \end{tikzcd}$$

Le théorème 1.1 (resp. 1.2) signifie que α (resp. β) est bijectif. Nous venons de voir que $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{C}^*, H) \to H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))$ donc aussi β' est bijectif, et nous allons démontrer ci-dessous que α' est aussi bijectif. Il en résulte bien que les théorêmes 1.1 et 1.2 sont équivalents. Il reste donc seulement à prouver l'énoncé suivant, sans doute bien connu, de la théorie des groupes de Lie:

PROPOSITION 1.3. *Soit G un groupe de Lie complexe réductif, H un sous-groupe de Cartan, N le normalisateur de H dans G et $W = N/H$ le groupe de Weyl correspondant. Alors tout homomorphisme complexe de $\boldsymbol{C}^{*n}$ dans G est conjugué par automorphisme intérieur dans G à un homomorphisme complexe de $\boldsymbol{C}^{*n}$ dans H, qui est unique à une opération de W près.*

Pour montrer que tout homomorphisme u de $A = C^{*n}$ dans G est conjugué à un homomorphisme complexe à valeurs dans H, on peut évidemment supposer G connexe (puisque $u(A) \subset G_0$), et ensuite G semi-simple (puisque H est l'image réciproque d'un sous-groupe de Cartan de G/Z_0, où Z est le centre de G). Alors G peut être regardé comme un groupe algébrique linéaire [3]. Comme toute représentation linéaire holomorphe de A est semi-simple (puisque A est la complexification d'un groupe compact T^n), $u(A)$ est une partie de G formée d'opérateurs semi-simples deux à deux permutables, donc est contenu dans un sous-groupe de Cartan de G [3, Chap. 6, prop. 18], donc, puisque tous les sous-groupes de Cartan de G sont conjugués (loc. cité, th. 4), il existe un $g \in G$ tel que $gu(A)g^{-1} \subset H$, ce qui établit notre assertion. Prouvons maintenant que deux homomorphismes u, u' de A dans H qui sont conjugués dans G, sont conjugués par un élément de N. Il revient au même de dire que si A, B sont deux parties de H et $g \in G$ tels que $gAg^{-1} = B$, alors il existe un $n \in N$ tel que $nan^{-1} = gag^{-1}$ pour tout $a \in A$. (La démonstration très simple qui suit m'a été signalée par A. Borel). Ceci signifie qu'il existe $n \in N$ tel que $m = g^{-1}n$ appartienne au centralisateur M de A. Or $A = g^{-1}Bg$ est contenu dans H et $H' = g^{-1}Hg$, donc M contient H et H', qui sont évidemment encore des sous-groupes de Cartan de M. Il s'ensuit (loc. cité) que l'on peut trouver un $m \in M$ tel que $m^{-1}H'm = H$, et il suffit de poser $n = gm$.

Nous aurons besoin plus bas du résultat suivant, sans doute bien connu; et qui contient prop. 1.3 dans le cas où G est semi-simple connexe:

PROPOSITION 1.4. *Soit G un groupe de Lie complexe connexe semi-simple, H un sous-groupe de Cartan, x et y deux éléments de H tels que pour toute représentation linéaire complexe irreductible de dimension finie U de G, on ait* $\mathrm{Tr}\, U(x) = \mathrm{Tr}\, U(y)$. *Alors x et y sont conjugués sous le groupe de Weyl.*

Donnons la démonstration de ce résultat pour la commodité du lecteur. H est une variété algébrique affine (isomorphe à $\boldsymbol{C}^{*r}$, où r est le rang de G). Soit A l'algèbre des fonctions rationelles sur H, elle s'identifie à l'algèbre du groupe $P^0 \subset \mathfrak{h}'$, réseau du dual $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{h}$ "polaire" du réseau unité P de $\mathfrak{h}$, à $\lambda \in P^0$ correspondant la fonction $f_\lambda(\exp 2i\pi h) = \exp 2i\pi\langle h, \lambda\rangle$. W est un groupe d'automorphismes de l'algèbre affine A, que peut se définir soit directement à partir des opérations de W sur H, soit par l'intermédiaire des opérations de W sur le groupe P^0. Soit A^W la sous-algèbre des éléments de A invariants sous W, comme W est fini elle "sépare" les trajectoires de W dans H, en d'autres termes deux points x et y de H sont conjugués sous W si et seulement si on a $f(x) = f(y)$ pour toute $f \in A^W$. La proposition sera donc prouvée si nous prouvons que les restrictions à H des caractères des représentations linéaires irréductibles de dimension finie de G engendrent l'espace vectoriel A^W. Or A^W est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\phi_\lambda = \sum_{w \in W} w^*.\ f_\lambda$, où $\lambda \in P^0$. Choisissons une systême fondamental de racines relatif à H, alors tout élément de P^0 est transformé par W d'un poids dominant d'une représentation linéaire irréductible de G [2], on peut donc se borner à prendre les λ qui sont de tels poids dominants. Or on voit facilement qu'une telle ϕ_λ est bien combination linéaire à coéfficients entiers de caractères de représentations linéaires irréducibles, grâce au fait que dans la représentation linéaire irréductible de poids dominant donné λ, la multiplicité de λ (donc le coéfficient de f_λ dans l'expression du caractère de la représentation envisagée) est 1.

COROLLAIRE. *Soient u, u' deux homomorphismes complexes de $A = \boldsymbol{C}^{*n}$ dans H tels que pour toute représentation linéaire holomorphe irréducible U de dimension finie de G, on ait* $\operatorname{Tr} U \circ u = \operatorname{Tr} U \circ u'$. *Alors u et u' sont conjuguées par une opération du groupe de Weyl.*

Soit T *la circonférence unité dans* $\boldsymbol{C}^*$, soit t un élément de T^n engendrant un sous-groupe dense, il suffit alors d'appliquer la prop. 1.4 à $u(t)$ et $u'(t)$.

Par. 2. Fibrés vectoriels. Nous allons prouver le théorème 1.1 quand G est le groupe linéaire $\boldsymbol{Gl}(r, \boldsymbol{C})$ des automorphismes de l'espace vectoriel complexe $\boldsymbol{C}^r$. Alors la classification des fibrés holomorphes de groupe $\boldsymbol{Gl}(r, \boldsymbol{C})$ est aussi elle des fibrés vectoriels holomorphes. Notons que le sous-groupe H de $\boldsymbol{Gl}(r, \boldsymbol{C})$ formé des matrices diagonales est un sous-groupe de Cartan. Les fibrés holomorphes vectoriels à groupe structural H s'identifient aux fibrés vectoriels E avec une décomposition donnée $E = \sum_{i=1}^{r} E_i$ de E en somme directe de sous-fibrés vectoriels holomorphes à fibre de dimension 1. Le théorême 1.1 s'énonce maintenant ainsi:

THÉORÈME 2.1. *Soit X la sphère de Riemann. Tout fibré vectoriel holomorphe E sur X est somme directe de sous-fibrés vectoriels holomorphes F_i $(1 \leqq i \leqq r)$ à fibres de dimension 1. Les classes des fibrés F_i sont bien déterminées à une permutation près.*

Si on se rappelle que la classe d'un fibré vectoriel holomorphe à fibre $\boldsymbol{C}^*$ est définie par son degré, qui est un entier rationel arbitraire, on obtient le

COROLLAIRE. *L'ensemble $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{Gl}(r, \boldsymbol{C})))$ des classes de fibrés vectoriels holomorphes sur la sphère de Riemann X, s'identifie à l'ensemble des suites décroissantes $n_1 \geqq n_2 \geqq \cdots \geqq n_r$ de r entiers rationnels, a une telle suite correspondant la classe du fibré $\sum L_{n_i}$, où L_n est le fibré vectoriel holomorphe de fibre C sur X ayant le degré n.*

La démonstration qui va suivre s'applique aussi bien dans le cadre de la Géométrie Algébrique sur un corps de base algébriquement clos quelconque.

Notons d'abord que d'après Serre [6] la classification des fibrés vectoriels analytiques, ou des fibrés vectoriels algébriques au sens de Weil [8], au dessus d'une variété holomorphe projective (donc algébrique), est la même. Dans le cas où X est une courbe sans singularités, toute application rationelle de X dans une variété projective est régulière (résultat élémentaire purement local) d'où il résulte que plus généralement, toute section rationelle d'un fibré algébrique localement trivial sur X de fibre une variété projective, est en fait régulière. Appliquant ceci au fibré associé au fibré vectoriel algébrique E, de fibré l'espace projectif défini par $\boldsymbol{C}^r$, on voit qu'on peut trouver un sous-fibré vectoriel algébrique E_1 de E à fibre de dimension 1: il suffit de prendre une section rationelle $s \neq 0$ de E, c'est aussi la section rationelle d'un fibré E_1 du type cherché, évidemment unique. (Le fait que E est un fibré *algébrique* nous sert précisément pour assurer l'existence de sections méromorphes non identiquement nulles!). Appliquant ce résultat au fibré vectoriel E/E_1, on construit de proche en proche une "suite de composition" $E_0 = \{0\} \subset E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_r = E$ de E par des sous-fibrés vectoriels holomorphes tels que les E_i/E_{i-1} aient des fibres de dimension 1 $(1 \leqq i \leqq r)$. Soit $d_i = d(E_i/E_{i-1})$ le degré de fibré E_i/E_{i-1}, on va pouver que l'on peut choisir la suite de composition de telle sorte que la suite des d_i soit décroissante.

LEMME 2.2. *Les degrés des sous-fibrés vectoriels holomorphes L de E à fibre de dimension 1 sont bornés supérieurement.*

De façon précise, on a $d(L) \leqq \operatorname{Sup}_i d_i$. En effet, soit i le premier indice tel que $L \subset E_i$, soit $s \neq 0$ une section méromorphe de L, s' la section méromorphe de E_i/E_{i-1} qu'elle définit. Les diviseurs de s et s' satisfont évidemment à $(s) \leqq (s')$, d'où $\deg(s) \leqq \deg(s')$ c'est à dire $d(L) \leqq d(L_i)$, cqfd.

Pour construire maintenant les E_i de façon que la suite d_i soit décroissante, prenons d'abord pour E_1 un sous-fibré vectoriel holomorphe de E, de fibré C, de telle façon que $d(E_1)$ soit le plus grand possible, construisons de même le sous-fibré E_2/E_1 de E/E_1, etc. Je dis que la suite des $d_i = d(E_i/E_{i-1})$ est alors décroissante. On est ramené aussitôt à prouver que $d_2 \leqq d_1$, puis en remplaçant E par E_2, au cas où la fibré de E est de dimension 2. On doit donc prouver:

LEMME 2.3. *Soit E un fibré vectoriel holomorphe de fibre C^2 sur la sphère de Riemann X, soit E_1 un sous-fibré vectoriel holomorphe à fibré C, tel que $d(E_1)$ soit le plus grand possible. Alors $d(E_1) \geqq d(E/E_1)$.*

Nous allons prouver en effet que si $d_1 < d_2$, alors il existe un sous-fibré vectoriel holomorphe de E de degré $> d_1$, c'est à dire qu'il existe une section méromorphe $s \neq 0$ de E telle que $\deg(s) > d_1$. Pour ceci, on peut supposer $d_1 = -1$ d'où $d_2 \geqq 0$, en remplaçant au besoin E par son produit tensoriel avec un fibré vectoriel holomorphe L_{-1-d_1} de degré $-1-d_1$. (En effet, les sous-fibrés vectoriels holomorphes de E et de $L \otimes E$ sont en correspondance biunivoque par $E_1 \to L \otimes E_1$, et $L \otimes E/E_1$ est isomorphe à $(L \otimes E)/(L \otimes E_1)$, enfin le degré de $L \otimes E_1$ resp. $L \otimes E/E_1$ est égal à celui de E_1 resp. E/E_1 augmenté de $n = -1 - d_1$). Pour un fibré vectoriel holomorphe M quelconque, désignons par $\boldsymbol{O}_X(M)$ le faiseau des germes de sections holomorphes de M. On a alors une suite exacte de faisceaux $0 \to \boldsymbol{O}_X(E_1) \to \boldsymbol{O}_X(E) \to \boldsymbol{O}_X(E/E_1) \to 0$, d'où une suite exacte de cohomologie

$$H^0(X, \boldsymbol{O}_X(E)) \to H^0(X, \boldsymbol{O}_X(E/E_1)) \to H^1(X, \boldsymbol{O}_X(E_1)).$$

Or d'après le théorème de dualité [7], $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(E_1))$ a même dimension que $H^0(X, \boldsymbol{O}_X(L_{k-d_1}))$ où $k = 2g - 2$ est le degré de la "classe canonique" de diviseurs (g désigne le genre de X). Or on a $g = 0$, $d_1 = -1$, d'où $L_{k-d} = L_{-1}$; le diviseur d'une section méromorphe de L_{-1} a pour degré -1, donc ne peut être $\geqq 0$, donc $H^0(X, \boldsymbol{O}_X(L_{-1})) = 0$ et par suite $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(E_1)) = 0$, donc la suite exacte précédente prouve que toute section holomorphe de E/E_1 provient d'une section holomorphe de E. Or, comme E/E_1 a un degré $d_2 \geqq 0$, il admet une section holomorphe non nulle, il en est donc de même de E. Une section holomorphe non nulle s de E a un diviseur de degré $\geqq 0$ donc de degré $> d_1 = -1$, ce qui achéve la démonstration du lemme 2. 3.[3]

Soit donc (E_i) une suite de composition du fibré vectoriel E, telle que la suite des degrés d_i des E_i/E_{i-1} $(1 \leqq i \leqq r)$ soit décroissante, nous allons prouver que E est isomorphe à la somme directe des E_i/E_{i-1}. On procède par récurrence sur r, l'assertion étant triviale pour $r = 1$. Supposons la démontrée pour des fibrés vectoriels de fibre $\boldsymbol{C}^{r'}$ avec $r' \leqq r - 1$ (r étant un entier $\geqq 2$), prouvons la pour E de fibre $\boldsymbol{C}^r$. D'après l'hypothèse de récurrence, E_{r-1} est isomorphe à $\sum_{i=1}^{r-1} E_i/E_{i-1}$, nous allons prouver que l'extension E du fibré vectoriel $Q = E/E_{r-1}$ par le fibré vectoriel $P = E_{r-1}$ est triviale, c'est à dire qu'il existe un homomorphisme holomorphe de Q dans E qui, composé avec l'homomorphisme canonique $E \to Q$, donne l'identité. Soit Q'

[3] Cette démonstration est due à J. P. Serre. La démonstration originale était beaucoup moins transparente.—Le referee fait remarquer que ce résultat figure aussi, sous une forme différente, dans Atiyah, Proc. L. M. S. 1955.

le fibré dual de Q. La suite exacte $0 \to Q' \otimes P \to Q' \otimes E \to Q' \otimes Q \to 0$ donne naissance à une suite exacte de cohomologie

$$H^0(X, \boldsymbol{O}_X(Q' \otimes E)) \to H^0(X, \boldsymbol{O}_X(Q' \otimes Q)) \to H^1(X, \boldsymbol{O}_X(Q' \otimes P)).$$

Or on a

$$Q' \otimes P \approx \sum_{i=1}^{r-1} (E/E_{r-1})' \otimes (E_i/E_{i-1}) \approx \sum_{i=1}^{r-1} L_{d_i - d_r}$$

d'où $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(Q' \otimes P)) \approx \sum_{i=1}^{r-1} H^1(X, \boldsymbol{O}_X(L_{d_i-d_r}))$, et comme $d_i - d_r \geqq 0 > -1$, un calcul déjà fait montre que $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(L_{d_i-d_r})) = 0$, d'où $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(Q' \otimes P)) = 0$. Donc le premier homomorphisme de la suite exacte écrite plus haut est surjectif, en particulier l'automorphisme identique de Q (considéré comme section holomorphe du fibré $Q' \otimes Q$) appartient à cette image, i. e., peut se remonter en un homomorphisme holomorphe de Q dans E.[4]

On a démontré la première partie du théorème 2. 1. Reste à prouver que dans une décomposition en somme directe $E = \sum F_i$, les degrés des fibrés F_i de fibré C sont bien déterminés à l'ordre près. Ce fait pourrait se déduire d'un théorème du type Remak-Krull, dû à Atiyah (non publié), affirmant que la décomposition d'un fibré vectoriel holomorphe, sur un espace analytique compact X, en somme directe de fibrés vectoriels "indécomposables," est essentiellement unique. Mais nous aurons besoin dans le cas actuel d'un résultat plus précis, que voici:

PROPOSITION 2. 4. *Soit* $E = \sum_{i=1}^{r} F_i$ *un fibré vectoriel holomorphe sur la sphère de Riemann* X, *somme directe de sous-fibrés vectoriels holomorphes à fibré* $\boldsymbol{C}$, *de degrés* d_i. *Soit, pour tout entier rationnel* k, E_k *le sous-fibré vectoriel de* E, *somme directe des* F_i *tels que* $d_i \geqq k$. *Alors* E_k *est égal au plus petit sous-fibré vectoriel holomorphe de* E *contenant les sections méromorphes* s *de* E *dont le diviseur est de degré* $\geqq k$ *(en particulier,* E_k *est défini indépendamment de la décomposition donnée de* E*).*

COROLLAIRE. *Le nombre d'indices* i *tels que* $d_i = k$ *est égal à la dimension de la fibre du fibré vectoriel* E_k/E_{k+1}, *donc ne dépend pas de la décomposition choisie de* E.

La démonstration de la proposition 2. 4 est immédiate, et laissée au lecteur.

[4] Nous avons montré que si P et Q sont deux fibrés vectoriels holomorphes sur l'espace analytique X, tels que $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(Q' \otimes P)) = 0$, alors toute extension holomorphe de Q par P est triviale. En fait, il n'est pas difficile de se convaincre que dans tous les cas, les classes d'extensions holomorphes de Q par P correspondent biunivoquement aux éléments de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(Q' \otimes P))$ (Serre).

Par. 3. Fibrés orthogonaux.

PROPOSITION 3.1. *Soit X un espace analytique compact. L'application canonique de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{O}(r,C)))$ dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{Gl}(r,\boldsymbol{C})))$ déduite de l'injection naturelle $\boldsymbol{O}(r,\boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{Gl}(r,\boldsymbol{C})$ est injective.*

En d'autres termes, deux fibrés vectoriels orthogonaux holomorphes sur X, isomorphes en tant que fibrés vectoriels holomorphes, sont aussi isomorphes en tant que fibrés vectoriels orthogonaux holomorphes. Pour le prouver, on peut supposer que sur le fibré vectoriel holomorphe E, on a deux structures orthogonales holomorphes définies par la donnée sur toute fibre E_x $(x \in X)$ de deux formes quadratiques (a,b) et $(a,b)_1$ non dégénérées, (fonctions holomorphes du point x), et il faut montrer qu'il existe un automorphisme holomorphe u du fibré vectoriel E, transformant la première forme en la seconde, c'est à dire tel que $(a,b)_1 = (ua,ub)$ pour $a,b \in E_x$. Pour toute fibre E_x, on peut écrire $(a,b)_1 = (A_x a, b)$, où A_x est un endomorphisme de E_x tel que $A = A^*$ (où A^* est l'adjoint de A relativement à la première forme quadratique: $(A^*a,b) = (a,Ab)$ pour $a,b \in E_x$). A_x est inversible, et pour x variable, est une fonction holomorphe de x, donc définit un automorphisme A du fibré vectoriel E. On cherche donc un automorphisme vectoriel holomorphe u de E tel que $(ua,ub) = (Aa,b)$ c'est à dires $A = u^*u$. On va voir qu'on peut même choisir u tel $u = u^*$, et $A = u^*u = u^2$. Pour ceci, considérons le polynôme caractéristique $\det(A - z\cdot 1)$ de A, ses coéfficients sont des fonctions holomorphes sur X, donc constantes puisque X est compacte, pourvu qu'on suppose X connexe, ce qui est loisible. Donc le polynôme caractéristique de A_x est indépendant de x. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ ses racines distinctes, de multiplicités $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$. Pour tout $x \in X$, E_x est somme directe de sous-espaces $E^i{}_x$ bien déterminés, de dimension α_i, sur chacun desquels A_x induit un opérateur de la form $\lambda_i(\mathbf{1} + u^i{}_x)$, où $u^i{}_x$ est nilpotent. Les $E^i{}_x$ sont orthogonaux deux à deux puisque $A = A^*$. Les $E^i{}_x$ et les $u^i{}_x$ sont fonction holomorphes de x, donc E est somme directe de sous-fibrés vectoriels holomorphes E^i $(1 \leqq i \leqq k)$, tels que la fibre de E^i en x soit $E^i{}_x$. Soit μ_i une racine carrée de λ_i, posons

$$v^i{}_x = \mu_i(\mathbf{1} + u^i{}_x)^{\frac{1}{2}}$$

où on pose $(\mathbf{1} + u^i{}_x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} (1/k!)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2} - 1)\cdots(\tfrac{1}{2} - k + 1)(u^i{}_x)^k$. Alors $v^i{}_x$ est un endomorphisme de $E^i{}_x$ fonction holomorphe de x, de plus on a $v^i{}_x = (v^i{}_x)^*$. Soit v^i l'endomorphisme de E^i défini par les $v^i{}_x$, u leur somme directe, on a $u = u^*$ puisque les v^i sont autoadjoint et les E^i orthogonaux deux à deux, et de plus $u^2 = A$ par construction, ce qui achève la démonstration.

Remarques 1. La démonstration qui précède est encore valable en Géométrie Algébrique sur un corps algébriquement clos quelconque de caractéristique $p \neq 2$. Une démonstration exactement analogue prouverait de même que l'application canonique

$$H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{Sp}(r, \boldsymbol{C}))) \rightarrow H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{Gl}(2r, \boldsymbol{C})))$$

est injective sous les mêmes conditions. On pourrait en déduire directement, comme pour le cas du groupe structural $\boldsymbol{O}(r, \boldsymbol{C})$ traité ci-dessous, la classification des fibrés symplectiques holomorphes sur la sphère de Riemann. Cette démonstration a l'avantage d'être encore directement applicable en Géométrie Algébrique (en caractéristique $p \neq 2$), contrairement à celle du par. 4.

2. L'analogue de la Proposition 3.1 pour le groupe structural $\boldsymbol{SO}(r, \boldsymbol{C})$ au lieu de $\boldsymbol{O}(r, \boldsymbol{C})$ est fausse déjà si $r = 2$ et quand X est la sphère de Riemann.

En vertu de prop. 3.1, la détermination de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{O}(r, \boldsymbol{C})))$ revient à la détermination de l'image de cet ensemble dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{Gl}(r, \boldsymbol{C})))$. On a alors:

THÉORÈME 3.2. *Soient X la sphère de Riemann, E un fibré vectoriel holomorphe sur X. Pour qu'il existe sur E une structure orthogonale holomorphe, il faut et il suffit que E soit isomorphe au fibré dual E'. Alors le fibré orthogonal dont il provient est bien déterminé à un isomorphisme près.*

La nécessité de la condition est triviale, et le résultat d'unicité est un cas particulier de prop. 3.1. Reste à prouver que si E est isomorphe à E', E admet une structure orthogonale holomorphe. Mais soit (n_i) la suite des invariants de E (th. 2.1, corollaire) alors la suite des invariants de E' est évidemment à l'ordre près $(-n_i)$, et l'hypothèse signifie que ces deux suites sont les mêmes à une permutation près, c'est à dire que la famille (n_i) est symétrique par rapport à 0. Dans la décomposition $E \approx \sum L_{n_i}$ on peut donc grouper ensemble les composantes qui correspondent à des n_i nuls, et les E_i correspondants à des n_i opposés, donc E apparait comme somme directe d'un fibré trivial E_0, et de fibrés du type $L + L'$. E_0 peut évidemment se munir d'une structure orthogonale, donc le théorème résultera du

LEMME 3.3. *Soit L un fibré vectoriel holomorphe sur un espace ana-*

lytique X, soit L' son dual. Alors le fibré $L+L'$ est muni d'une structure orthogonale canonique.

Il suffit en effet, sur chaque fibré $L_x + L'_x$, d'introduire la forme bilinéaire symétrique

$$(a+a', b+b') = \langle a, b'\rangle + \langle b, a'\rangle$$

où les produits scalaires du second membres sont relatifs à l'accouplement naturel de L_x et de son dual.

PROPOSITION 3.4. *Soient X la sphère de Riemann, E un fibré vectoriel orthogonal sur X, et soit pour tout entier rationnel k, E_k le plus petit sous-fibré vectoriel holomorphe de E contenant les sections méromorphes ayant un diviseur de degré $\geqq k$ (cf. prop. 2.4). Alors le sous-fibré vectoriel de E orthogonal de E_k est E_{-k+1}.*

Par raison de symétrie, on peut supposer $k \geqq 1$. D'après le théorème 3.2, E est de la forme

$$E = E_0 + \sum_{n_i > 0} (L_{n_i} + L_{-n_i})$$

où les facteurs E_0 et $(L_{n_i} + L_{-n_i})$ sont deux à deux orthogonaux, enfin les L_{n_i} et L_{-n_i} isotropes et E_0 constant. La proposition résults alors immédiatement de la prop. 2.4.

Par. 4. Démonstration du théorème principal. a) *Reduction du group structural.*

LEMME 4.1. *Soient X un espace analytique complexe compact, G un groupe de Lie complexe, P un fibré holomorphe sur X de groupe structural G, E le fibré associé adjoint de fibre l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G (où G opère par la représentation adjointe). Supposons qu'on connaisse une section holomorphe s de E telle que, en au moins un point $a \in X$, $s(a)$ soit un élément régulier* [3, Chap. 6] *de l'algèbre de Lie E_a, fibre de E en a. Alors $s(x)$ est un élément régulier de E_x pour tout $x \in X$.*

Les coéfficients $a_i(s(x))$ du polynôme caractéristique de $\operatorname{ad} s(x)$ sont des fonctions holomorphes sur X, donc constantes puisque X est compact. Or dire que $s(x)$ est régulier signifie que $a_r(s(x)) \neq 0$, où r est le rang de $\mathfrak{G}$. D'où la conclusion.

COROLLAIRE 1. *Sous les conditions précédentes, on peut réduire le groupe structural G de P au normalisateur N d'un sous-groupe de Cartan H de G.*

En effet, soit pour tout $x \in X$, $\mathfrak{h}(x)$ la sous-algèbre de E_x centralisateur de $s(x)$. C'est une sous-algèbre de Cartan puisque x est régulier, et elle est fonction holomorphe de x comme on le vérifie sans difficulté. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{G}$, H le sous-groupe de Cartan correspondent de G. Le normalisateur N de H est aussi identique à l'ensemble des $g \in G$ qui invarient $\mathfrak{h}$ dans la représentation adjointe de G. Donc l'espace homogène G/N est isomorphe à l'espace des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{G}$ (se rappeler que deux sous-algèbres de Cartan sont toujours conjugées!) et le fibré associé à P et de fibre G/N est celui dont la fibre, en un point $x \in X$, est l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de l'algèbre de Lie E_x. Or nous avons construit une section holomorphe $x \rightarrow \mathfrak{h}(x)$ de ce fibré, ou ce qui revient au même, nous avons réduit à N le groupe structural de P, ce qui prouve le corollaire.

Corollaire 2. *Si de plus X est simplement connexe, on peut réduire le groupe structural au sous-groupe de Cartan H.*

En effet, N/H est discret, donc le fibré de fibre N/H associé à un fibré holomorphe de groupe N est trivial puisque X est simplement connexe, donc le groupe structural peut se réduire à H.

Nous supposons maintenant que X est la sphère de Riemann, et allons montrer que si G est un groupe de Lie holomorphe *réductif*, la condition du lemme 4.1 est automatique satisfaite, c'est à dire qu'on peut trouver une section holomorphe s de E telle que $s(a)$ soit un élément régulier de E_a pour au moins un $a \in X$. On a $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{G}'$ où $\mathfrak{Z}$ est le centre et $\mathfrak{G}'$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{G}$, et cette décomposition est invariante sous la représentation adjointe de G. Il en résulte une décomposition analogue de E en somme directe de deux sous-fibrés dont la fibre en chaque point x est le centre resp. l'algèbre dérivée de l'algèbre E_x. Comme un élément régulier de l'algèbre dérivée de E_x est régulier dans E_x, on voit aussitôt, en envisageant le fibré de fibre $\mathfrak{G}'$, de groupe $\operatorname{Aut}\mathfrak{G}'$ associé au fibré P et à la représentation de G dans $\operatorname{Aut}\mathfrak{G}'$ déduite de la représentation adjointe, qu'on peut se ramener au cas où G est un groupe semi-simple (savoir $\operatorname{Aut}\mathfrak{G}'$), ce que nous supposerons désormais.

Soit alors E_k le sous-fibré vectoriel de E engendré par les sections méromorphes dont le diviseur est de degré $\geqq k$ (cf. prop. 2.4). On vérifie aussitôt que $[E_k, E_{k'}] \subset E_{k+k'}$ car si s, s' sont deux sections méromorphes de E, le degré $\deg([s, s'])$ du diviseur de la section $[s(t), s'(t)]$ est manifestement $\geqq \deg(s) + \deg(s')$, car $([s, s']) \geqq (s) + (s')$. Il en resulte en particulier que E_1 est un fibré de *sous-algèbres* de Lie de E, et que si $\mathfrak{G}_1$ est la fibre de E_1 en un point fixé $a \in X$, et si on identifie $\mathfrak{G}$ à la fibre E_a, alors pour $Y \in \mathfrak{G}_1$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}} Y$ est *nilpotent*. D'autre part, E est en fait un fibré orthogonal (grâce à la forme de Killing sur $\mathfrak{G}$, invariante par automorphismes) et nous avons vu (corollaire au th. 3.2) que l'orthogonal de E_1 est forcément E_0. Soit $\mathfrak{G}_0$ la fibre de E_0 en a, c'est donc l'orthogonal de $\mathfrak{G}_1$ dans $\mathfrak{G}$ pour la forme de Killing. Or on a:

LEMME 4.2. *Soient $\mathfrak{G}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple, $\mathfrak{G}_1$ une sous-algèbre telle que pour tout $X \in \mathfrak{G}_1$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}} X$ soit nilpotent. Par suite $\mathfrak{G}_1$ est nilpotent et à fortiori contenue dans une sous-algèbre résoluble maximale $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{G}$. Alors $\mathfrak{R}$ est contenue dans l'orthogonal $\mathfrak{G}_0$ de $\mathfrak{G}_1$ (pour la forme de Killing).*

En effet, on sait qu'on a $\mathfrak{R} = \mathfrak{h} + \mathfrak{N}$, où $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan, et $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}'$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{R}$. Il s'ensuit que tout élément X de $\mathfrak{R}$ tel que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{G}} X$ soit nilpotent est dans $\mathfrak{N}$ (il suffit même que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{R}} X$ soit nilpotent!) en particulier $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{N}$. D'autre part, il est bien connu aussi que $\mathfrak{R}$ est orthogonal à $\mathfrak{N}$, donc à fortiori à $\mathfrak{G}_1$, donc contenu dans $\mathfrak{G}_0$. Le lemme 4.2 est démontré. Comme il existe des éléments réguliers dans $\mathfrak{h}$, on obtient le

COROLLAIRE. *Sous les conditions précédentes, il existe un élément régulier de $\mathfrak{G}$ contenu dans $\mathfrak{G}_0$.*

Revenons alors à notre démonstration. D'après sa définition et prop. 2.4, E_0 est isomorphe à une somme directe de fibrés vectoriels holomorphes de fibre $\boldsymbol{C}$, de degrés $\geqq 0$, d'où résulte aussitôt que pour tout élément u de la fibré $\mathfrak{G}_0$ de E_0 en a, il existe une section holomorphe s de E_0 prenant la valeur u en a. D'après le corollaire précédent, on peut choisir u régulier. Cela prouve que la condition du lemme 4.1 est bien satisfaite. En vertu du corollaire 2 dudit lemme, nous voyons que le groupe structural de P peut se réduire à H, ce qui démontre la première moitié du théorème principal 1.1: l'application (1) du par. 1 est surjective. Reste à prouver qu'elle est injective.

b) *Résultat d'unicité à une opération de W près.* Dans ce qui suit, X sera toujours la sphère de Riemann. Supposons d'abord G semi-simple connexe. Soit ξ un élément de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))$, ξ_1 son image dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$. On a vu au par. 1 que ξ est la classe du fibré associé au fibré L_1 (de groupe $\boldsymbol{C}^*$) et à un homomorphisme complexe u de $\boldsymbol{C}^*$ dans H bien déterminé. Nous allons montrer comment la connaissance de ξ_1 détermine u à une opération de W près. Pour toute représentation linéaire complexe de G, on a une application naturelle

$$H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G)) \xrightarrow{u^*} H^1(X, \boldsymbol{O}_X(\boldsymbol{Gl}(r, \boldsymbol{C})))$$

(r étant le degré de la représentation), en faisant correspondre à un fibré holomorphe de groupe G le fibré vectoriel associé (pour la représentation U). Ce dernier est aussi associé à L_1 et la représentation linéaire $U \circ u$ de $\boldsymbol{C}^*$, donc la classe du fibré vectoriel associé à L_1 et $U \circ u$ est connue quand on connait ξ_1. D'après le théorème 1, 2, déjà démontré (sous la forme équivalente 1. 1) au par. 2 dans le cas du groupe linéaire général, on en conclut que $U \circ u$ est connu à une similitude près, à fortiori la fonction $\operatorname{Tr} U(u(t))$ sur $\boldsymbol{C}^*$ est connue. Ceci étant vrai pour toute représentation linéaire U de dimension finie de G, on peut en conclure, en vertu de prop. 1. 4, corollaire, que u lui-même est déterminé à une opération de W près.

Supposons maintenant G réductif et connexe.

LEMME 4. 3. *Soit G un groupe de Lie complexe réductif connexe. Alors il existe un sous-groupe fini z du centre de G tel que G/z soit isomorphe au produit d'un groupe abélien par un groupe semi-simple.*

Le groupe de revêtement universel de G est isomorphe à un produit $V \times F$, où V est un espace vectoriel complexe et F un groupe semi-simple complexe. G est donc isomorphe au quotient de $V \times F$ par un sous groupe discret Γ du centre de $V \times F$. Ce centre est identique à $V \times \pi$, où π est le centre de F, donc fini en vertu d'un théorème fondamental de H. Weyl [2]. Il en résulte que la projection L de Γ sur V est un sous-groupe *fermé* de V, de *même rang* que Γ, donc Γ est un sous-groupe d'indice fini de $L \times \pi$. Posant maintenant $z = (L \times \pi)/\Gamma$, le lemme 4. 3 est démontré.

Le théorème 1. 1 étant vrai si G est semi-simple connexe comme on a vu plus haut, ou si G est abélien connexe comme on a vu au par. 1, il s'ensuit aussitôt qu'il est encore vrai pour le produit de deux tels groupes, donc pour le group G/z du lemme 4. 3. Notons que H/z est un sous-groupe de Cartan de G/z et N/z son normalisateur. Considérons le diagramme commutatif d'applications naturelles:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H)) & \longrightarrow & H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H/z) & \longrightarrow & H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G/z)) . \end{array}$$

Soient ξ, ξ' deux éléments de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))$ ayant même image dans

$H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$, alors leurs images ξ_1, ξ'_1 dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H/z))$ ont même image dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G/z))$, donc d'après ce qu'on a dit, sont conjugués sous le groupe de Weyl $(N/z)/(H/z)$ de G/z, qui est isomorphe au groupes de Weyl $W = N/H$ de G. Par suite ξ et ξ' sont conjugués sous W mod un élément du noyau de l'homomorphisme $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H)) \rightarrow H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H/z))$. Or ce noyau est nul, en vertu de la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte $0 \rightarrow z \rightarrow H \rightarrow H/z \rightarrow 0$, puisque $H^1(X, z) = 0$ (X étant simplement connexe). Cela démontre le th. 1.1 dans le cas où G est connexe.

Supposons enfin G réductif quelconque. Soient ξ, ξ' deux éléments de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(H))$ ayant même image dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$. Soient ξ_1, ξ'_1 leurs images dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G_0))$, ξ_1 et ξ'_1 ont même image dans $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$, et sont par suite conjugués par une opération du groupe $H^0(X, \boldsymbol{O}_X(G/G_0)) = G/G_0$ (en vertu par exemple de la "suite exacte de cohomologie" pour les faisceaux non commutatifs, développée dans [4]). Un élément de G/G_0 opère sur $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G_0))$ en prenant un représentant $g \in G$ et considérant l'automorphisme $g_0 \rightarrow g g_0 g^{-1}$ de G_0. Or il existe un représentant qui est dans N, comme on a vu à la fin de la démonstration de prop. 1.3. On en conclut qu'en remplaçant ξ' par un conjugué de ξ' sous W, on peut supposer que $\xi_1 = \xi'_1$. D'après le théorème 1.1 pour G_0, on en conclut que ξ et ξ' sont conjugués sous le groupe de Weyl de G_0 et à fortiori sous W, ce qui achève la démonstration.

Remarques finales. 1. On peut se demander si le th. 1.1 ou le th. 1.2 reste valable pour *tout* groupe structural de Lie complexe G. On s'aperçoit qu'il est déjà en défaut quand G est le groupe des transformations affines $z \rightarrow az + b$ (a, b complexes). On notera cependant que la technique de "dévissage" exposée dans [4], jointe aux résultats de ce travail, permettent en principe de déterminer $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$ pour tout groupe G donné. Je ne connais toutesfois pas de description simple de $H^1(X, \boldsymbol{O}_X(G))$ en termes de théorie des groupes de Lie complexes.

2. Il semble plausible que la seule variété projective X sur laquelle tout fibré vectoriel holomorphe soit décomposable en somme de fibrés holomorphes de fibre $\boldsymbol{C}$, soit la sphère de Riemann. On note en tous cas que si X est une courbe algébrique projective non singulière de genre $g \neq 0$, i.e. telle que $H^1(X, \boldsymbol{O}_X) \neq 0$, il existe sur X un fibré vectoriel holomorphe *indécomposable* à fibre $\boldsymbol{C}^2$: si E_0 est le fibré vectoriel constant de fibre $\boldsymbol{C}$, il suffit de prendre un fibré E extension non triviale [4] de E_0 par E_0. E est indécomposable, car s'il était décomposé en la somme de deux fibrés E_1, E_2

de fibre C, on conclurait d'abord que chaque E_i admet une section holomorphe non nulle (puisque E en admet une engendrant un sous-fibré qui n'est pas "facteur direct") donc a un degré $\geqq 0$; comme la somme de ses degrés est identique à $\deg(E) = \deg(E_0) + \deg(E_0) = 0$, ils doivent être nuls, ce qui, joint à l'existence d'un section holomorphe, implique que E_i est constant, donc E est constant; mais alors toute section holomorphe de E est constante, donc si elle est $\neq 0$, la structure d'extension qu'elle définit sur E est triviale, contrairement à la construction de E comme extension non triviale. Notons encore que si X est l'espace projectif complexe P^n de dimension $n \geqq 2$, alors le fibré tangent n'est pas même réductible à la forme triangulaire; autrement, le fibré dual E le serait aussi, d'où on conclurait aisément que $H^i(X, \boldsymbol{O}_X(E)) = 0$ pour $i \neq 0, n$ (car on sait que pour tout fibré vectoriel holomorphe L de fibré $\boldsymbol{C}$ sur $X = P^n$, on a $H^i(X, \boldsymbol{O}_X(L)) = 0$ si $i \neq 0, n$ [5, Chap. 3, prop. 8]) ; or $\boldsymbol{O}_X(E)$ est le faisceau Ω^1 des germes de 1-formes différentielles holomorphes, et $H^1(X, \Omega^1) = H^{1,1}(X, \boldsymbol{C})$ (cohomologie de type $(1,1)$ de X) ; mais il est bien connu que $H^{1,1}(X, \boldsymbol{C}) \neq 0$ pour toute variété projective sans singularités X de dimension complexe $\geqq 1$. Pour finir, prenons pour X la "variété des drapeaux" sur P^2 (isomorphe canoniquement à la variété des drapeaux dans l'espace vectoriel $\boldsymbol{C}^3$), c'est donc un espace fibré algébrique sur P^2 de fibre $P^1 =$ sphère de Riemann. Le fibré tangent de la base P^2 n'est pas réductible à la forme triangulaire, mais son image réciproque E sur X l'est évidemment, E est cependant, indécomposable, comme il résulte du fait plus général suivant: Soit p une application holomorphe d'un espace analytique X sur un autre Y, identifiant Y à un "espace analytique quotient" de X, i.e. telle que les fonctions holomorphes f sur un ouvert U de Y soient celles telles que $f \circ p$ soit holomorphe sur $p^{-1}(U)$. Supposons que pour tout $y \in Y$, $p^{-1}(y)$ soit compact et connexe. Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur Y; *pour que E soit indécomposable, il faut et il suffit que $p^{-1}(E)$ le soit.* De façon plus précise, les décompositions de E en somme directe de deux sous-fibrés vectoriels holomorphes correspondent biunivoquement aux decompositions analogues de $p^{-1}(E)$. Elles s'identifient en effet aux systêmes de deux projecteurs complémentaires de l'algèbre $H^0(Y, \boldsymbol{O}_Y(E' \otimes E))$ (E' désignant le fibré dual de E), tandis que les décompositions de $p^{-1}(E)$ s'identifient aux systêmes de deux projecteurs complémentaires dans l'algèbre $H^0(X, \boldsymbol{O}_X(p^{-1}(E' \otimes \mathrm{E})))$, et il suffit de montrer que si (f_1, f_2) est un tel systême, alors chaque section f_i provient d'une section holomorphe de $E' \otimes E$ sur Y, ou encore (en vertu de l'hypothèse sur p) que sa restriction aux "fibres" $p^{-1}(y)$ sont des sections *constantes*. Or, ceci résulte du fait que $p^{-1}(E' \otimes E)$ induit un fibré constant sur chaque fibre, et de l'hypothèse faite sur les fibres.[5]

UNIVERSITY OF KANSAS AND
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE.

REFERENCES.

[1] H. Cartan, *Séminaire E. N. S.*, 1953-1954.

[2] P. Cartier, *Séminaire Sophus Lie,* 1. ère année (1954-1955).

[3] C. Chevalley, *Théorie des Groupes de Lie III,* Paris (1955).

[4] A. Grothendieck, *A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf,* University of Kansas (1955).

[5] J. P. Serre, " Faisceaux Algébriques Cohérents," *Annals of Mathematics,* vol. 61 (1955), pp. 197-278.

[6] ———, Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique, Annales de l'Inst. Fourier, vol. 6 (1955-56), pp. 1-42.

[7] ———, " Un Théorême de Dualité," *Comm. Math. Helvet.*, vol. 29 (1955), pp. 9-26.

[8] A. Weil, *Fibre Spaces in Algebraic Geometry* (Notes by A. Wallace), Chicago University, 1952.

[5] Comme me l'a fait observer le referee, la condition que la fibre soit connexe (et que j'avais malencontreusement omise) est essentielle pour la validaté du résultat indiqué, un contre-exemple dans le cas contraire étant obtenu ainsi: on prend $X = Y =$ courbe elliptique, $p(x) = 2x$ (au sens de la loi du groupe), de sorte que X devient un révêtement à 4 feuillets de Y, et on prend pour E un fibré extension non triviale du fibré en droites défini par le diviseur (P) (P un point de Y) par le fibré en droites trivial. (Le fait que $p^{-1}(E)$ est décomposable peut être prouvé à l'aide des résultats de Atiyah, Proc. London Math. Soc. 1955).