JOURNAL OF ALGEBRA 5, 305-324 (1967)

Critères Différentiels de Régularité pour les Localisés des Algèbres Analytiques

J. DIEUDONNÉ ET A. GROTHENDIECK

Received January 1, 1966

INTRODUCTION

Nous nous proposons, dans ce travail, de montrer comment, pour les localisés des algèbres analytiques sur un corps valué complet k de caractéristique quelconque, on peut calquer d'assez près les critères de régularité (surtout dus à Nagata) pour les localisés des anneaux locaux noethériens *complets* (qui, comme on sait, sont des quotients d'anneaux de séries *formelles*, alors que les algèbres analytiques sont des quotients d'anneaux de séries *convergentes*); le rôle joué dans les critères de Nagata par le complété $\hat{\Omega}^1_{A/k}$ du module des différentielles de l'anneau local complet A relativement au corps k, est ici tenu par un module quotient $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ du module $\Omega^1_{A/k}$ de *toutes* les différentielles de A, qui peut d'ailleurs se définir pour des algèbres topologiques plus générales que les algèbres analytiques.

Beaucoup des démonstrations relatives aux algèbres analytiques s'obtiennent en suivant pas à pas les démonstrations des résultats correspondants relatifs aux anneaux locaux complets, qui sont données en détail dans nos *Éléments de Géométrie algébrique* (EGA); aussi nous permettrons-nous souvent de référer simplement à ces dernières, en indiquant les modifications à y faire pour les adapter au cas qui nous intéresse ici. Les références à EGA seront données comme dans cet ouvrage, sous la forme (**II**, a. b. c) ou ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, a. b. c), les chiffres romains gras désignant le chapitre.

1. EXCELLENCE DES ANNEAUX DE SÉRIES CONVERGENTES

(1.1) Dans tout ce travail, k désignera un *corps valué complet non discret*, $k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$ la k-algèbre des *séries entières convergentes à n variables*: cette algèbre peut se définir comme l'algèbre des germes de fonctions analytiques au voisinage de l'origine de k^n, ou encore comme la sous-algèbre de l'algèbre des séries formelles $k[[T_1, \ldots, T_n]]$ formé des séries telles que, si l'on y substitue à $(T_1, \ldots, T_n)$ tout point $(t_1, \ldots, t_n)$ d'un voisinage assez petit de 0 dans k^n, on obtient une série convergente dans k. On appelle *algèbre analytique* sur k toute algèbre quotient de $k\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}$ par un idéal distinct de (1).

Pour les démonstrations des propriétés fondamentales des algèbres analytiques dont nous allons nous servir, nous renvoyons à [*1*]. Rappelons d'abord [*1*, 18-07, Cor. 2] que $k\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}$ est un anneau *local noethérien*, dont l'idéal maximal est formé des séries convergentes sans terme constant, dont le corps résiduel est k, et dont le *complété* est l'anneau des séries formelles $k[[T_1,\ldots, T_n]]$; par suite ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 17.1.5) $k\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}$ est un *anneau régulier de dimension* n, et même une k-algèbre *formellement lisse* pour sa topologie préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.3.6), donc *géométriquement régulière* ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.6.5).

(1.2) Théorème. *Soit p l'exposant caractéristique du corps valué complet k. Si $[k:k^p]<+\infty$, toute algèbre analytique sur k est un anneau excellent.*

Comme une algèbre analytique A est quotient d'un anneau local régulier $k\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}$, elle est universellement caténaire (**IV**, 5.6.4), donc (**IV**, 7.8.3, (i)), il suffit de prouver que les fibres formelles de A sont géométriquement régulières. Le raisonnement du début de la démonstration de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 22.3.3) s'applique sans modification (autre que le fait que A n'est plus ici complet). On est donc ramené à prouver le corollaire suivant:

(1.3) Corollaire. *Supposons $[k:k^p]<+\infty$. Soient A une k-algèbre analytique intègre, K son corps des fractions, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, B l'anneau localisé $A_{\mathfrak{p}}$. Alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ du complété $\hat{B}$, tel que $\mathfrak{q}\cap B=0$, l'anneau local $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ est une K-algèbre formellement lisse pour sa topologie $\mathfrak{q}$-préadique, donc un anneau géométriquement régulier sur K.*

En effet [*1*, 18–09, Cor. 3], il existe un sous-anneau A_0 de A qui est de la forme $k\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}$ et tel que A soit une A_0-algèbre *finie*. Comme l'anneau A_0 est régulier, il suffit de vérifier que lorsque k est de caractéristique $p>0$, A_0 vérifie l'hypothèse (ii) de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 22.3.2), car la conclusion résultera alors de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 22.3.2). Il s'agit donc de prouver l'analogue de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.8.8) pour $A_0=k\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}$; on désignera ici par $K=k\langle\langle T_1,\ldots, T_n\rangle\rangle$ le corps des fractions de A_0; en outre, l'hypothèse sur k permet de ne considérer qu'un seul corps k_α, savoir k^p lui-même. Notons maintenant que k^p est *complet* pour la valeur absolue induite par celle de k, car si $(x_n{}^p)$ est une suite de Cauchy dans k^p, la relation $|x_n{}^p-x_m{}^p|=|x_n-x_m|^p$ prouve que (x_n) est une suite de Cauchy dans k, et si z est sa limite, z^p est la limite de $(x_n{}^p)$. Les raisonnements de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.8.8) ramènent alors à prouver l'analogue de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.8.8.2):

(1.4) Lemme. *Si k' est un corps valué complet, extension de k,*

$$k'\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}\cap k\langle\langle T_1,\ldots, T_n\rangle\rangle=k\{\{T_1,\ldots, T_n\}\}.$$

Tout revient, comme dans ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.8.8.2), à prouver le

(1.5) Lemme. *Posons* $C = k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$, $D = k'\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$. *Alors* D *est un* C*-module fidèlement plat.*

En effet, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de C, $C/\mathfrak{m}^j$ (resp. $D/\mathfrak{m}^j D$) est l'anneau quotient $k[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{n}^j$ (resp. $k'[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{n}'^j$), où $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}'$) est l'idéal engendré par $T_1, \ldots, T_n$. On a donc $D/\mathfrak{m}^j D = (C/\mathfrak{m}^j) \otimes_k k'$, ce qui montre que $D/\mathfrak{m}^j D$ est un $(C/\mathfrak{m}^j)$-module plat pour tout j; il suffit d'appliquer ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.2.1) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.2).

(1.6) *Remarque.* Nous ignorons si une k-algèbre analytique est encore un anneau excellent lorsque $[k : k^p] = +\infty$.

2. Modules de Différentielles Analytiques

Dans ce qui suit, les anneaux topologiques et les modules topologiques sur ces anneaux sont toujours supposés *linéairement topologisés* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.1.1).

(2.1) Considérons un anneau topologique A, une B-algèbre topologique (commutative) A et supposons que le carré de tout idéal ouvert de B soit ouvert (on notera que c'est le cas lorsque B est un anneau *préadique* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.1.8), et en particulier lorsque B est un anneau semi-local noethérien muni de sa topologie préadique usuelle). Alors, pour tout B-module topologique *de type fini* L, toute A-dérivation D de B dans L est *continue*: en effet, il y a par hypothèse un B-homomorphisme surjectif $B^n \to L$ nécessairement continu, donc tout voisinage V de 0 dans L contient un ensemble de la forme $\mathfrak{b}L$, où $\mathfrak{b}$ est un idéal *ouvert* de B; comme on a $D(\mathfrak{b}^2) \subset \mathfrak{b}L$ et que $\mathfrak{b}^2$ est ouvert dans B, cela établit notre assertion. Une telle dérivation peut s'écrire $D = u \circ d_{B/A}$, où $u : \Omega^1_{B/A} \to L$ est un homomorphisme de B-modules; comme la topologie de $\Omega^1_{B/A}$ est moins fine que la topologie déduite de celle de B ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.4.5), l'homomorphisme u est nécessairement continu (la topologie de L étant moins fine que celle déduite de la topologie de B, comme on vient de le voir).

(2.2) Nous désignerons par $\bar{\Omega}^1_{B/A}$ le quotient de $\Omega^1_{B/A}$ par l'*intersection des noyaux des homomorphismes* $\Omega^1_{B/A} \to L$ pour les B-modules topologiques L *de type fini* (lorsque B est noethérien, donc aussi L, $\bar{\Omega}^1_{B/A}$ est aussi le quotient de $\Omega^1_{B/A}$ par l'intersection des sous-modules M de $\Omega^1_{B/A}$ tels que $\Omega^1_{B/A}/M$ soit de type fini). On a donc ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.4.8)

$$\mathrm{Hom}_B(\bar{\Omega}^1_{B/A}, L) = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, L) \cong \mathrm{Dér}_A(B, L) \qquad (2.2.1)$$

pour tout B-module topologique L de type fini. Nous désignerons par $\bar{d}_{B/A}$, ou $\bar{d}_B$, ou simplement $\bar{d}$, l'application composée

$$B \xrightarrow{d_{A/B}} \Omega^1_{B/A} \xrightarrow{r} \bar{\Omega}^1_{B/A} \tag{2.2.2}$$

où r est la surjection canonique; $\bar{d}_{B/A}$ est une A-dérivation, et $\bar{\Omega}^1_{B/A}$ est engendré par les éléments $\bar{d}_{B/A}(x)$ où x parcourt B, en vertu de $(0_{\mathrm{IV}}$, 20.4.7); la définition précédente montre que pour tout B-module topologique de type fini L, l'application $v \rightsquigarrow v \circ \bar{d}_{B/A}$ est un isomorphisme de B-modules

$$\mathrm{Hom}_B(\bar{\Omega}^1_{B/A}, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_A(B, L) = \mathrm{Dér.\,cont}_A(B, L). \tag{2.2.3}$$

On notera que, *si* $\bar{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module *de type fini*, il *représente* le foncteur covariant $L \rightsquigarrow \mathrm{Dér}_A(B, L)$ dans la catégorie des B-modules topologiques *de type fini*. Il est clair que si $\Omega^1_{B/A}$ lui-même est *de type fini* (ce qui sera le cas par exemple lorsque B est une A-algèbre *de type fini* $(0_{\mathrm{IV}}$, 20.4.7)), on a $\bar{\Omega}^1_{B/A} = \Omega^1_{B/A}$.

(2.3) Proposition. *Soient A un anneau topologique, B et C deux A-algèbres topologiques dans lesquelles le carré d'un idéal ouvert est ouvert, $\rho : B \to C$ un A-homomorphisme continu. Alors:*

(i) *Si $\bar{\Omega}^1_{C/A}$ est un C-module de type fini, $\bar{\Omega}^1_{C/B}$ est un C-module de type fini.*

(ii) *Si $\bar{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module de type fini et si C est une B-algèbre finie, $\bar{\Omega}^1_{C/A}$ est un C-module de type fini.*

(iii) *Supposons vérifiées, soit les hypothèses de* (ii), *soit l'hypothèse* (i) *et la condition supplémentaire que $\Omega^1_{B/A}$ est un B-module de type fini; alors il existe deux C-homomorphismes uniques $\bar{u} : \bar{\Omega}^1_{C/A} \to \bar{\Omega}^1_{C/B}$ et $\bar{v} : \bar{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \to \bar{\Omega}^1_{C/A}$ tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^1_{B/A} \otimes_B C & \xrightarrow{v} & \Omega^1_{C/A} & \xrightarrow{u} & \Omega^1_{C/B} & \longrightarrow & 0 \\
{\scriptstyle r'\otimes 1}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow & & {\scriptstyle r''}\downarrow & & \\
\bar{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C & \xrightarrow[\bar{v}]{} & \bar{\Omega}^1_{C/A} & \xrightarrow[\bar{u}]{} & \bar{\Omega}^1_{C/B} & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2.3.1}$$

(*où r, r', r'' sont les surjections canoniques, v et u les homomorphismes canoniques de* $(0_{\mathrm{IV}}$, 20.5.7)) *soit commutatif et ait ses lignes exactes.*

(i) Pour tout C-homomorphisme $w : \Omega^1_{C/B} \to L$ dans un C-module topologique de type fini L, $\mathrm{Ker}(w \circ u)$ contient par hypothèse le sous-module $N = \mathrm{Ker}(r)$ tel que $\Omega^1_{C/A}/N$ soit de type fini. On a donc $u(N) \subset \mathrm{Ker}(w)$ et puisque u est surjectif, $\Omega^1_{C/B}/u(N)$ est de type fini, d'où notre assertion.

(ii) Soit s le B-homomorphisme composé $\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v} \Omega^1_{C/A}$; considérons un C-homomorphisme $w : \Omega^1_{C/A} \to L$ dans un C-module topologique de type fini L, et observons que par hypothèse L est aussi un B-module topologique de type fini. On a donc $\mathrm{Ker}(w \circ s) \supset N' = \mathrm{Ker}(r')$, et $\Omega^1_{B/A}/N'$ est un B-module de type fini; donc $(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C)/\mathrm{Im}(N' \otimes_B C)$ est un C-module topologique de type fini. Puisque $\mathrm{Ker}(w)$ est un C-module, on a $\mathrm{Ker}(w) \supset v(\mathrm{Im}(N' \otimes_B C)) = M'$, et si l'on pose $M = \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.7), M/M' est un C-module de type fini. Mais d'autre part $\Omega^1_{C/B}$, isomorphe à $\Omega^1_{C/A}/M$, est un C-module de type fini, donc $\Omega^1_{C/A}/M'$ est un C-module de type fini, ce qui prouve que $\bar{\Omega}^1_{C/A}$ est de type fini.

(iii) Dans le cas (ii), la factorisation de $r \circ s : \Omega^1_{B/A} \xrightarrow{s} \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{r} \bar{\Omega}^1_{C/A}$ en $\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{r'} \bar{\Omega}^1_{B/A} \xrightarrow{\bar{s}} \bar{\Omega}^1_{C/A}$ résulte de ce qui précède et du fait que $\bar{\Omega}^1_{C/A}$ est un B-module de type fini; on en déduit aussitôt l'existence et l'unicité de $\bar{v}$. L'existence et l'unicité de $\bar{u}$ se démontrent de même dans le cas où $\bar{\Omega}^1_{C/A}$ est un C-module de type fini; enfin, si $\Omega^1_{B/A}$ est un B-module de type fini, donc égal à $\bar{\Omega}^1_{B/A}$, on a évidemment $\bar{v} = r \circ v$.

Dans les deux cas considérés, la commutativité du diagramme est évidente et le fait que la première ligne soit exacte résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.7). Notons en outre que, pour tout C-module topologique de type fini L, l'homomorphisme déduit de $\bar{u}$

$$\mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{C/B}, L) \to \mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{C/A}, L)$$

est identique à l'homomorphisme ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.6.2); de même, l'homomorphisme déduit de $\bar{w}$

$$\mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{C/A}, L) \to \mathrm{Hom}_B(\bar{\Omega}^1_{B/A}, L)$$

est trivialement identique à l'homomorphisme ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.6.1) dans le cas où $\bar{\Omega}^1_{C/A}$ et $\Omega^1_{B/A}$ sont de type fini; il en est de même dans le cas (ii) en se souvenant de ce que L est alors aussi un B-module de type fini. On en conclut que pour tout C-module de type fini L, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{C/B}, L) \to \mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{C/A}, L) \to \mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C, L)$$

est exacte. Notons maintenant que le raisonnement de [2, § 2, n° 1, th. 1] se transporte sans modification à la catégorie des modules *de type fini*, d'où l'exactitude de la seconde ligne du diagramme (2.3.1).

(2.4) COROLLAIRE. *Soient A un anneau topologique, B une A-algèbre topologique dans laquelle le carré de tout idéal ouvert est ouvert, $\mathfrak{K}$ un idéal de type fini de B, C la A-algèbre quotient topologique $B/\mathfrak{K}$. Supposons que $\bar{\Omega}^1_{B/A}$ soit un B-module de type fini. On a alors la suite exacte*

$$\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \xrightarrow{\ \delta\ } \bar{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\ \bar{v}\ } \bar{\Omega}^1_{C/A} \longrightarrow 0 \qquad (2.4.1)$$

où $\bar{v}$ est l'homomorphisme défini dans (2.3) *et* $\bar{\delta}$ *l'homomorphisme composé* $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{r'\otimes 1} \bar{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C$, δ *étant défini par* (0_{IV}, 20.5.11.2).

On notera que dans C le carré de tout idéal ouvert est ouvert; en outre, comme C est une B-algèbre finie, on est dans le cas (ii) de (2. 3); de la suite exacte (0_{IV} , 20.5.12.3), on déduit, lorsque L est un C-module topologique de type fini, la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{C/A}, L) \to \mathrm{Hom}_C(\bar{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C, L) \to \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2, L)$$

et comme $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}^2$ est un C-module de type fini, on termine le raisonnement comme dans (2.3).

(2.5) Une k-algèbre analytique A peut être considérée comme l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ en un point d'un *k-espace analytique X*. Le *A-module des différentielles analytiques* $\Omega'^1_{A/k}$ est par définition la fibre au point x du faisceau $\Omega'^1_{X/k}$ des différentielles analytiques de X [*1*, 14–08]. On sait [*1*, 14–08] que $\Omega'^1_{A/k}$ est un A-module *de type fini*; nous allons voir qu'il est *isomorphe au module* $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ défini ci-dessus. Il suffira de démontrer la proposition suivante:

(2.6) Proposition. *Il existe une k-dérivation $d' : A \to \Omega'^1_{A/k}$ telle que pour tout A-module topologique de type fini L, l'application $u \rightsquigarrow u \circ d'$ soit un isomorphisme de k-espaces vectoriels*

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega'^1_{A/k}, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_k(A, L).$$

L'isomorphisme annoncé entre $\Omega'^1_{A/k}$ et $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ sera alors conséquence de l'unicité de la solution d'un problème d'application universelle. Pour prouver (2.6), on peut se ramener au cas où A est un anneau de séries convergentes $k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$. En effet, dans le cas général, on a par définition $A = B/\mathfrak{b}$, où $B = k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$ et $\mathfrak{b}$ est un idéal de B; or, on sait [*1*, 14–16] que l'on a une suite exacte canonique

$$\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \xrightarrow{\delta'} \Omega'^1_{B/k} \otimes_B A \longrightarrow \Omega'^1_{A/k} \longrightarrow 0 \qquad (2.6.1)$$

où l'homomorphisme δ' provient par passage au quotient de d'; si l'on a établi (2.6) pour B, on aura un isomorphisme $h : \Omega'^1_{B/k} \xrightarrow{\sim} \bar{\Omega}^1_{B/k}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "Id"', "\wr"] & \Omega'^1_{B/k} \otimes_B A \arrow[d, "h\otimes 1", "\wr"'] \\ \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \arrow[r, "\bar{\delta}"'] & \bar{\Omega}^1_{B/k} \otimes_B A \end{tikzcd}$$

et la conclusion résultera des suites exactes (2.6.1) et (2.4.1).

Bornons-nous donc au cas où $A = k\{\{T_1, ..., T_n\}\}$. Remarquons que, si l'on remonte aux définitions [1, 10–06], $\Omega'^1_{A/k}$ peut être défini de la façon suivante: posons $B = k\{\{T_1, ..., T_{2n}\}\}$ et soit $\mathfrak{J}$ l'idéal de B engendré par les n éléments $T_{i+n} - T_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. L'idéal $\mathfrak{J}$ est le noyau du k-homomorphisme surjectif $p : B \to A$ qui transforme T_i et T_{i+n} en T_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$, et on a $\Omega'^1_{A/k} = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. On a deux injections canoniques $j_1 : A \to B$, $j_2 : A \to B$, qui font correspondre respectivement à T_i les éléments T_i et T_{i+n} de B pour $1 \leqslant i \leqslant n$, de sorte que $p \circ j_1 = p \circ j_2 = 1_A$; si j_1' et j_2' sont les composés de j_1 et j_2 respectivement, et de l'homomorphisme canonique $B \to B/\mathfrak{J}^2$, $d' = j_1' - j_2'$ est une *k-dérivation* de A dans $\Omega'^1_{A/k}$. Pour prouver (2.6), considérons la k-algèbre $D_A(L)$, *extension triviale type* de A par L $(0_{\text{IV}}, 18.2.3)$, et notons par $q : D_A(L) \to A$ la surjection canonique telle que $q(a, 0) = a$, par $j : A \to D_A(L)$ l'injection canonique telle que $j(a) = (a, 0)$. On sait que $\text{Dér}_k(A, L)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble G des homomorphismes $v : A \to D_A(L)$ de k-algèbres tels que le composé $A \xrightarrow{v} D_A(L) \xrightarrow{q} A$ soit l'identité $(0_{\text{IV}}, 20.1.6)$. D'autre part, $\text{Hom}_A(\Omega'^1_{A/k}, L)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des homomorphismes de A-algèbres $w : B/\mathfrak{J}^2 \to D_A(L)$ tels que le composé $B \to B/\mathfrak{J}^2 \xrightarrow{w} D_A(L) \xrightarrow{q} A$ soit l'homomorphisme p. Comme on a $j_2' = j_1' - d'$ par définition, tout revient à prouver que tout $v \in G$ se factorise en $v : A \xrightarrow{j_2'} B/\mathfrak{J}^2 \xrightarrow{w} D_A(L)$ de façon unique. Pour cela, il suffira de montrer qu'il existe un homomorphisme unique $u : B \to D_A(L)$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "u"] & A \arrow[l, "j_1"'] \arrow[d, "j"] \\ A \arrow[u, "j_2"] \arrow[r, "v"'] & D_A(L) \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On aura en effet alors $u(T_i - T_{i+n}) = j(T_i) - v(T_i) \in L$, ce qui entraînera $u(\mathfrak{J}) \subset L$, donc $u(\mathfrak{J}^2) \subset L^2 = 0$, et prouvera l'existence et l'unicité de w. Or, toute série convergente de $B = k\{\{T_1, ..., T_{2n}\}\}$ peut s'écrire d'une seule manière sous forme d'une série convergente en $T_1, ..., T_n$, $T_{n+1} - T_1, ..., T_{2n} - T_n$, soit

$$f(T_1, ..., T_{2n}) = f_0(T_1, ..., T_n) + \textstyle\sum_{i=1}^n f_{1i}(T_1, ..., T_n)(T_{n+i} - T_i) + o_2(\mathbf{T}),$$

où $o_2(\mathbf{T})$ n'a que des termes de degré total $\geqslant 2$ en les $T_{n+i} - T_i$ et f_0 et les f_{1i} sont des éléments de $A = k\{\{T_1, ..., T_n\}\}$. Posons $v(a) = (a, D(a))$ pour tout $a \in A$, D étant une k-dérivation de A dans L. On définira u par

$$u(f) = (f_0, 0) + \sum_{i=1}^n f_{1i} \cdot (0, D(T_i))$$

et tenant compte de ce que L est un idéal de carré nul dans $D_A(L)$, on voit que u est bien un homomorphisme ayant la propriété voulue. Pour prouver l'unicité de u, il s'agit de montrer que si une k-dérivation D de A dans L est telle que $D(T_i) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a nécessairement $D = 0$. Il suffit de remarquer que, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, on a $D(\mathfrak{m}^{j+1}) \subset \mathfrak{m}^j L$ quel que soit $j \geqslant 1$. Comme, pour tout élément $g \in A$ et tout entier j, il existe un polynôme $h \in k[T_1, ..., T_n]$ tel que $g - h \in \mathfrak{m}^{j+1}$, et que par hypothèse on a $D(h) = 0$, on en déduit $D(g) \in \mathfrak{m}^j L$ pour tout entier j, d'où $D(g) = 0$ puisque $\bigcap_j \mathfrak{m}^j L = 0$, L étant *de type fini* (0_{I}, 7. 3.5).

3. Algèbres quasianalytiques

(3.1) Soit k un corps valué complet; on appelle *k-algèbre quasianalytique* une k-algèbre A pour laquelle il existe une k-algèbre analytique A_0 telle que A soit une A_0-algèbre *finie*. Il est clair qu'une telle k-algèbre A est un anneau semi-local noethérien, dont les corps résiduels aux idéaux maximaux sont des extensions *finies* de k. En vertu de [*1*, 18–09, cor. 3], il revient au même de dire qu'il existe un entier n tel que A soit une *algèbre finie sur* $k\{\{T_1, ..., T_n\}\}$.

On peut généraliser aux k-algèbres quasianalytiques une grande partie des résultats de (0_{IV}, 21.9) en y remplaçant les modules $\hat{\Omega}^1_{B/A}$ par $\bar{\Omega}^1_{B/A}$.

(3.2) Proposition. *Soient k un corps valué complet, $k_0 \subset k$ un sous-corps de k qui est complet pour la valeur absolue induite par celle de k, et tel que* $[k : k_0] < +\infty$.

(i) *Pour toute k-algèbre quasi-analytique A, $\bar{\Omega}^1_{A/k_0}$ est un A-module de type fini.*

(ii) *Si $A = k\{\{T_1, ..., T_n\}\}$, $\bar{\Omega}^1_{A/k_0}$ est un A-module libre de rang égal à* $n + \mathrm{rg}_k(\Omega^1_{k/k_0})$.

(i) On a vu ci-dessus qu'il existe un entier n tel que A soit une algèbre finie sur $A_1 = k\{\{T_1, ..., T_n\}\}$. En outre, vu l'hypothèse sur k_0, A_1 est une algèbre finie sur $A_0 = k_0\{\{T_1, ..., T_n\}\}$; donc finalement A est une A_0-algèbre finie. On sait d'autre part que $\bar{\Omega}^1_{A_0/k_0}$ est un A_0-module libre de rang n [*1*, 14–13, prop. 2.8]; on est donc dans le cas (ii) de (2.3), d'où la conclusion.

(ii) Avec les mêmes notations, il suffira de démontrer que la suite (cf. (2.3.1))

$$0 \to \bar{\Omega}^1_{A_0/k_0} \otimes_{A_0} A \to \bar{\Omega}^1_{A/k_0} \to \Omega^1_{A/A_0} \to 0 \tag{3.2.1}$$

est *exacte*; en effet, s'il en est ainsi, $\bar{\Omega}^1_{A_0/k_0} \otimes_{A_0} A$ est un A-module libre de rang n; d'autre part, puisque $[k : k_0] < +\infty$, on a $A = A_0 \otimes_{k_0} k$, donc (0_{IV}, 20.5.5) $\Omega^1_{A/A_0} = \Omega^1_{k/k_0} \otimes_k A$ est aussi un A-module libre de rang $\mathrm{rg}_k(\Omega^1_{k/k_0})$, et la conclusion de (ii) en résultera aussitôt. Si l'on se reporte à la démonstration de l'exactitude de la suite (2.3.1), on voit aussitôt (compte tenu de [2, § 2, n° 1, démonstration de la prop. 1]) qu'il s'agit de prouver que, pour tout A-module de type fini L, l'homomorphisme canonique $\mathrm{Dér}_{k_0}(A, L) \to \mathrm{Dér}_{k_0}(A_0, L)$ est surjectif, ou encore que toute k_0-dérivation D_0 de A_0 dans L peut être prolongée en une k_0-dérivation D de A dans L. Mais cela est immédiat puisque $A = A_0 \otimes_{k_0} k$: il suffit, pour $x \in A_0$, $\xi \in k$, de prendre $D(x \otimes \xi) = D_0 x \cdot \xi$.

(3.3) PROPOSITION. *Supposons que le corps valué complet k soit de caractéristique $p > 0$; soient A une k-algèbre quasianalytique, B une sous-k-algèbre de A isomorphe à $k\{\{T_1, \ldots, T_r\}\}$ et telle que A soit une B-algèbre finie. Si B_1 est la sous-algèbre $k\{\{T_1{}^p, \ldots, T_r{}^p\}\}$, $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ s'identifie canoniquement à Ω^1_{A/B_1}.*

Soit L un A-module de type fini; toute k-dérivation de B_1 dans L, qui est restriction d'une k-dérivation de A dans L, est *nulle*: en effet, A est une B_1-algèbre *finie*, donc L est un B-module de type fini, et puisque la dérivation considérée est continue (2.1) et nulle dans l'anneau de polynômes $k[T_1{}^p, \ldots, T_r{}^p]$, qui est dense dans B_1, elle est nulle dans B_1. La suite exacte $(\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.2.3) montre donc que l'homomorphisme canonique $\mathrm{Dér}_{B_1}(A, L) \to \mathrm{Dér}_k(A, L)$ est *bijectif*. Compte tenu de (2.2.1) et de ce que $\bar{\Omega}^1_{A/B_1} = \Omega^1_{A/B_1}$ puisque A est une B_1-algèbre finie, on voit que l'homomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1_{A/B_1}, L) \to \mathrm{Hom}_A(\bar{\Omega}^1_{A/k}, L)$ est bijectif; comme $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ est un A-module de type fini (3.2), cela prouve bien que l'application canonique $\bar{\Omega}^1_{A/k} \to \Omega^1_{A/B_1}$ (2.3) est bijective.

(3.4) PROPOSITION. *Soient A une k-algèbre quasianalytique intègre, A_0 une sous-k-algèbre de A isomorphe à $k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$, telle que A soit une A_0-algèbre finie et que le corps des fractions E de A soit une extension* séparable *du corps des fractions L_0 de A_0. Alors on a*

$$\mathrm{rg}_A \bar{\Omega}^1_{A/k} = \mathrm{rg}_E(\bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A E) = \dim(A) = n. \tag{3.4.1}$$

On sait en effet que $\dim(A) = \dim(A_0) = n$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.1.5), et $\bar{\Omega}^1_{A_0/k}$ est un A_0-module libre de rang n, donc $\bar{\Omega}^1_{A_0/k} \otimes_{A_0} A$ est un A-module libre de rang n; on a la suite exacte (2.3.1)

$$\bar{\Omega}^1_{A_0/k} \otimes_{A_0} A \to \bar{\Omega}^1_{A/k} \to \Omega^1_{A/A_0} \to 0$$

et puisque A est entier sur A_0, que A_0 est intégralement clos (1.1) et E séparable sur L_0, Ω^1_{A/A_0} est un A-module de torsion $(\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.4.13, (iv)). Tensorisant la suite exacte précédente par E, il vient la suite exacte

$$\bar{\Omega}^1_{A_0/k} \otimes_{A_0} E \to \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A E \to 0$$

d'où $\mathrm{rg}_E(\bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A E) \leqslant n$. Considérons d'autre part les n dérivations $D_i = \partial/\partial T_i$ de A_0 dans lui-même ($1 \leqslant i \leqslant n$); elles se prolongent de façon unique en des dérivations (encore notées D_i) de E dans lui-même, puisque E est extension séparable finie de L_0. Par restriction à A, ces dérivations donnent des k-dérivations de A dans E, et il est immédiat qu'elles prennent leurs valeurs dans un même sous-A-module *de type fini* de E; elles sont par ailleurs linéairement indépendantes sur A puisque $D_i(T_j) = \delta_{ij}$; cela montre donc (2.2.1) qu'il existe dans $\bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A E$ au moins n éléments linéairement indépendants sur E, d'où la conclusion.

(3.5) PROPOSITION. *Soient k_0 un corps d'exposant caractéristique p, k un corps valué complet, extension séparable de k_0, A une k-algèbre quasianalytique, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de A en $\mathfrak{p}$. Alors on a*

$$\mathrm{rg}_{\kappa(\mathfrak{p})}(\bar{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{p})/k} \otimes_{A/\mathfrak{p}} \kappa(\mathfrak{p})) \geqslant \dim(A/\mathfrak{p}) + \mathrm{rg}_{\kappa(\mathfrak{p})} \Upsilon_{\kappa(\mathfrak{p})/k_0}. \tag{3.5.1}$$

Si de plus $[k_0 : k_0^p] < +\infty$, les deux membres de (3.5.1) *sont égaux.*

Comme $A/\mathfrak{p}$ est une k-algèbre quasianalytique, on peut se borner au cas où A est *intègre* et $\mathfrak{p} = 0$, $E = \kappa(\mathfrak{p})$ étant donc le corps des fractions de A. Il existe par hypothèse une k-algèbre analytique A_1 telle que A soit une A_1-algèbre finie; comme A est intègre, le noyau $\mathfrak{p}_1$ de l'homomorphisme $A_1 \to A$ est un idéal premier de A_1, et en remplaçant A_1 par $A_1/\mathfrak{p}_1$, on peut supposer que A_1 est une sous-k-algèbre de A. On sait alors qu'il existe une sous-k-algèbre A_0 de A, isomorphe à $k\{\{T_1, ..., T_r\}\}$ et telle que A soit une A_0-algèbre finie [*1*, 18–09, Cor. 3], ce qui entraîne que E est une extension finie du corps des fractions $L_0 = k \langle\langle T_1, ..., T_r \rangle\rangle$ de A_0; on a en outre $\dim(A) = \dim(A_0) = r$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.1.5).

Si $p = 1$, on a $\mathrm{rg}_E(\bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A E) = r$ en vertu de (3.4.1); comme d'autre part $\Upsilon_{E/k_0} = 0$ puisque E est extension séparable de k_0 ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.6.3), les deux membres de (3.5.1) sont égaux dans ce cas.

Supposons maintenant que $p > 1$; si l'on pose $B = k\{\{T_1^p, ..., T_r^p\}\}$, il résulte de (3.3) que $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ s'identifie à $\Omega^1_{A/B}$; en désignant par M le corps des fractions $k\langle\langle T_1^p, ..., T_r^p\rangle\rangle$, il résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.9) que $\bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A E$ s'identifie à $\Omega^1_{E/M}$. Compte tenu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.6.1.2), la relation (3.5.1) est équivalente à

$$\mathrm{rg}_E \Omega^1_{E/M} \geqslant r + d(E/k, k_0) \tag{3.5.2}$$

qui correspond à ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.9.6.2). Or, pour démontrer cette relation, il suffit de reprendre pas à pas la démonstration de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.9.6) en supposant $k = K_0$, $L_0 = k\langle\langle T_1, ..., T_r\rangle\rangle = L$, $M_0 = k\langle\langle T_1^p, ..., T_r^p\rangle\rangle = M$ et $N = k\langle\langle T_1^{p^2}, ..., T_r^{p^2}\rangle\rangle$, E étant une extension finie de L_0. La démonstration se simplifie notamment du fait de ces égalités; on utilise le fait que $k\langle\langle T_1, ..., T_r\rangle\rangle$

$\subset k((T_1, \ldots, T_r))$ est séparable sur k ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.9.6.4), que les T_i^p $(1 \leqslant i \leqslant r)$ forment une p-base de M sur N, et le reste de la démonstration n'utilise que les propriétés générales des corps vues dans ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.6). Pour prouver l'égalité des deux membres de (3.5.1) lorsque $[k_0 : k_0^p] < +\infty$, on peut prendre tous les k qui interviennent dans la démonstration de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.9.6) égaux à $k_0(k^p)$: en effet, ce sous-corps valué de k est *complet* pour la valeur absolue induite par celle de k, car on a vu dans la preuve de (1.3) que k^p est complet, et $k_0(k^p)$, étant un espace vectoriel de dimension finie sur k^p par hypothèse, est fermé dans k, donc complet; le corps $(k_0(k^p))\langle\langle T_1^{p^2}, \ldots, T_r^{p^2}\rangle\rangle$ est donc défini, et on est finalement ramené à prouver la relation

$$(k_0(k^p))\langle\langle T_1, \ldots, T_r\rangle\rangle = k_0(k^p\langle\langle T_1, \ldots, T_r\rangle\rangle); \tag{3.5.3}$$

mais puisque $k_0^p \subset k^p$, on a $k_0^p(k^p\langle\langle T_1, \ldots, T_r\rangle\rangle) = k^p\langle\langle T_1, \ldots, T_r\rangle\rangle$; et si $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de k_0 sur k_0^p, c'est aussi un système de générateurs de chacun des deux membres de (3.5.3) sur $k^p\langle\langle T_1, \ldots, T_r\rangle\rangle$.

(3.6) COROLLAIRE. *Soit k un corps valué complet de caractéristique $p > 0$, tel que $[k : k^p] < +\infty$. Soit C une k-algèbre locale quasianalytique intègre de dimension n, et soit L son corps des fractions. Alors $\Omega^1_{C/k}$ est un C-module de type fini, isomorphe à $\bar{\Omega}^1_{C/k}$; $\Omega^1_{L/k}$ et $\Upsilon_{L/k}$ sont des L-espaces vectoriels de rang fini, et l'on a*

$$\mathrm{rg}_L(\Omega^1_{L/k}) - \mathrm{rg}_L(\Upsilon_{L/k}) = n. \tag{3.6.1}$$

Il suffira de prouver que $\Omega^1_{C/k}$ est un C-module de type fini; on aura en effet alors $\bar{\Omega}^1_{C/k} = \Omega^1_{C/k}$, et $\bar{\Omega}^1_{C/k} \otimes {}_C L = \Omega^1_{L/k}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.9), et il suffira d'appliquer (3.5) avec $k = k_0$ et $\mathfrak{p} = 0$. Or, on a vu dans la preuve de (3.5) qu'il existe une sous-k-algèbre C_0 de C isomorphe à $k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$ et telle que C soit une C_0-algèbre finie. Mais $\Omega^1_{C/k}$ est isomorphe à $\Omega^1_{C/k[C^p]}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.1.5), et puisque $k[C_0^p] \subset k[C^p]$, tout revient à prouver que C est un $k[C_0^p]$-module de type fini ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.4.7); mais cela résulte de ce que C est un C_0-module de type fini et C_0 un $k[C_0^p]$-module de type fini en vertu de l'hypothèse $[k : k^p] < +\infty$.

(3.7) PROPOSITION. *Soient k un corps valué complet, p son exposant caractéristique, et supposons que $[k : k^p] < +\infty$. Soit A une k-algèbre analytique, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $A_\mathfrak{p}$ soit géométriquement régulier* (**IV**, 6.7.6) *sur k. Alors $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module libre de rang égal à* $\dim(A/\mathfrak{q})$, *où $\mathfrak{q}$ est l'unique idéal premier minimal de A contenu dans* $\mathfrak{p}$.

Comme A est noethérien, et $\mathrm{Spec}(A)$ régulier (et *a fortiori* intègre) au point $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ n'appartient qu'à une seule composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A)$, donc ne contient qu'un seul idéal premier minimal $\mathfrak{q}$ de A, et en outre on a $\mathfrak{q}_\mathfrak{p} = 0$. Posons $B = A/\mathfrak{q}$; on a vu (2.4) que l'on a la suite exacte

$$\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2 \to \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A B \to \bar{\Omega}^1_{B/k} \to 0.$$

En localisant en $\mathfrak{p}$ cette suite exacte et utilisant la relation $\mathfrak{q}_\mathfrak{p} = 0$, on voit que l'homomorphisme canonique $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p} \to (\bar{\Omega}^1_{B/k})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ est bijectif. On peut donc se borner à traiter le cas où $\mathfrak{q} = 0$, autrement dit où A est *intègre*. Distinguons alors deux cas:

(I) $p > 1$. On peut appliquer (3.6) à l'algèbre quotient $C = A/\mathfrak{p}$, dont le corps des quotients K n'est autre que le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$; on voit donc que l'on a

$$\mathrm{rg}_K(\Omega^1_{K/k}) - \mathrm{rg}_K(\Upsilon_{K/k}) = \dim(A/\mathfrak{p}). \tag{3.7.1}$$

Notons maintenant ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.6.6) que $A_\mathfrak{p}$ est une k-algèbre *formellement lisse* pour sa topologie $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-préadique; par suite $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$ est formellement projectif ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.4.9) pour la topologie $\mathfrak{p}$-préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.4.5); d'autre part $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$, étant égal à $(\Omega^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.9) est un $A_\mathfrak{p}$-module de type fini, en vertu de (3.6) appliqué à A. Pour tout entier $j > 0$, $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}/\mathfrak{p}^{j+1}\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$ est donc un $(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{j+1}A_\mathfrak{p})$-module projectif de rang $m = \mathrm{rg}_K(\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k} \otimes_{A_\mathfrak{p}} K)$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.2.4); on conclut donc de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.2.1 et 10.1.3) que $\Omega^1_{A_\mathfrak{p}/k}$ est un *$A_\mathfrak{p}$-module libre de rang m.* Soit $A' = (A_\mathfrak{p})\hat{}$ l'algèbre *complétée* de $A_\mathfrak{p}$ pour sa topologie $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-préadique; A' est encore une k-algèbre formellement lisse pour sa topologie adique ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.3.6) et il résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.7.14 et 20.4.5) que $\hat{\Omega}^1_{A'/k} = \hat{\Omega}^1_{A_\mathfrak{p}/k}$; on en conclut que $\hat{\Omega}^1_{A'/k}$ est un *A'-module libre de rang m.* On déduit alors de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.9.2) (où on n'utilise en réalité que le fait que Ω^1_{K/k_0} est de rang fini) et de ce que $\dim(A') = \dim(A_\mathfrak{p})$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.2.4) que l'on a

$$m = \dim(A_\mathfrak{p}) + \mathrm{rg}_K(\Omega^1_{K/k}) - \mathrm{rg}_K(\Upsilon_{K/k}), \tag{3.7.2}$$

d'où, en vertu de (3.7.1), $m = \dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A_\mathfrak{p})$. Mais puisque A est quotient d'anneau régulier (cf. (1.1) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 17.3.9)), on déduit de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.5.12) que l'on a $\dim(A) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A_\mathfrak{p})$, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

(II) $p = 1$. On a comme ci-dessus $\dim(A) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A_\mathfrak{p})$; posons $n = \dim(A)$, $r = \dim(A/\mathfrak{p})$, $s = \dim(A_\mathfrak{p})$ et montrons que $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module libre de rang n. En vertu d'un lemme élémentaire de la théorie de la dimension (voir (**IV**, 18.11.3.3)), il existe une suite $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ d'éléments de $\mathfrak{p}$, faisant partie d'un système de paramètres de A, et telle que les images canoniques t_i des x_i dans $A_\mathfrak{p}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ forment un *système* *régulier de paramètres* (0_{IV}, 17.1.6) de l'anneau régulier $A_{\mathfrak{p}}$. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système de paramètres de A dont fait partie la suite $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$; posons $A_0 = k\{\{T_1, ..., T_n\}\}$; il existe un k-homomorphisme local injectif u de A_0 dans A tel que $u(T_j) = x_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, faisant de A une A_0-algèbre *finie* [*1*, 18-09, Cor. 3]. Posons $\mathfrak{p}_0 = \sum_{j=1}^{s} A_0 T_j$, $B_0 = (A_0)_{\mathfrak{p}_0}$, $B = A \otimes_{A_0} B_0$, de sorte que $u_{\mathfrak{p}_0} : B_0 \to B$ fait de B une B_0-algèbre finie; en outre, si $\mathfrak{p}'$ est l'idéal de B engendré par $\mathfrak{p}$, on a $B_{\mathfrak{p}'} = A_{\mathfrak{p}}$; comme $\mathfrak{p}'$ contient $\mathfrak{p}_0 B$ par construction, il est au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{p}_0 B_0$ de B_0. Montrons que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(B_0)$ est *non ramifié* au point $\mathfrak{p}'$: cela résulte en effet de ce que $\kappa(\mathfrak{p}')$ est une extension finie du corps $\kappa(\mathfrak{p}_0)$ de caractéristique 0, donc est *nécessairement séparable*, et de ce que l'on a $B_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}_0 B_{\mathfrak{p}'} = \kappa(\mathfrak{p}')$ en vertu du choix des x_i pour $1 \leqslant i \leqslant s$ (**IV**, 17.4.1). Notons maintenant que l'on a une suite exacte (2.3, (ii))

$$\bar{\Omega}^1_{A_0/k} \otimes_{A_0} A \to \bar{\Omega}^1_{A/k} \to \Omega^1_{A/A_0} \to 0$$

et que $(\Omega^1_{A/A_0})_{\mathfrak{p}} = \Omega^1_{B_{\mathfrak{p}'}/B_0} = 0$ (**IV**, 16.4.5 et 17.4.1); localisant la suite exacte précédente en $\mathfrak{p}$, on trouve donc un homomorphisme surjectif

$$(\bar{\Omega}_{A_0/k} \otimes_{A_0} A)_{\mathfrak{p}} \to (\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}.$$

Comme $\bar{\Omega}^1_{A_0/k}$ est un A_0-module libre de rang n (3.2), cela montre que $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ admet un système de n générateurs. Mais comme le corps des fractions de A est de caractéristique 0, on peut appliquer à A et A_0 le résultat de (3.4) montrant que $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ est un A-module de rang n, donc $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ un $A_{\mathfrak{p}}$-module de rang n. Comme le quotient de ce module par son sous-module de torsion admet un système de n générateurs et est de rang n, ce quotient est nécessairement *libre*: on en déduit aussitôt que les n générateurs de $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ obtenus ci-dessus forment aussi un système *libre*, d'où la conclusion.

4. Critères de Régularité pour les Algèbres Analytiques

(4.1) Soient k un corps valué complet, A une k-algèbre analytique; pour toute extension k' de k, qui est un corps valué complet dont la valeur absolue prolonge celle de k, on peut définir un "produit tensoriel analytique" $A' = A \bar{\otimes}_k k'$ de la façon suivante: il existe une k-algèbre A_0 de la forme $k\{\{T_1, ..., T_n\}\}$ telle que A soit une A_0-algèbre finie; si $A_0' = k'\{\{T_1, ..., T_n\}\}$, on pose $A' = A \otimes_{A_0} A_0'$. Cette définition paraît dépendre du choix de A_0 ; en fait nous allons voir qu'elle en est indépendante (à isomorphisme près), car la k'-algèbre A' ainsi définie est solution d'un *problème universel.* En effet, notons d'abord que puisque A n'a qu'un idéal maximal (nécessairement au-dessus de l'idéal maximal de A_0) et que les corps résiduels de A_0 et de A sont isomorphes à k, A' est un anneau local dont le corps résiduel est isomorphe à k' (on va voir plus loin qu'en fait A' est une k'-algèbre analytique). Cela étant, montrons que, pour toute *k'-algèbre analytique B*, tout k-homomorphisme local $u : A \to B$ se factorise d'une seule manière en $u : A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{v} B$, où f est l'homomorphisme canonique et v un k'-homomorphisme (nécessairement local). En effet, on déduit de u par composition un k-homomorphisme local

$$u_0 : A_0 \to A \xrightarrow{u} B$$

et les éléments $y_i = u_0(T_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ appartiennent à l'idéal maximal de B; il existe par suite un k'-homomorphisme (local) et un seul $v_0 : A_0' \to B$ tel que $v_0(T_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ [*1*, 18-09, Cor. 3]. Les composés $A_0 \to A \xrightarrow{u} B$ et $A_0 \to A_0' \xrightarrow{v_0} B$ étant tous deux égaux à u_0, l'existence et l'unicité de v sont conséquences de la définition du produit tensoriel de A_0-algèbres, et cela prouve notre assertion.

De cette caractérisation, on déduit en outre le corollaire suivant:

(4.2) COROLLAIRE. *Sous les conditions de* (4.1), *si B est un k-algèbre analytique et $\rho : A \to B$ un k-homomorphisme faisant de B une A-algèbre finie, $B \mathbin{\bar{\otimes}}_k k'$ est canoniquement isomorphe à $B \otimes_A A'$. En particulier, pour tout idéal $\mathfrak{J}$ de A, on a un isomorphisme canonique*

$$(A/\mathfrak{J}) \mathbin{\bar{\otimes}}_k k' \xrightarrow{\sim} A'/\mathfrak{J}A'. \tag{4.2.1}$$

En effet, pour définir $B \mathbin{\bar{\otimes}}_k k'$, on peut prendre le *même* anneau de séries convergentes A_0 que pour définir $A \mathbin{\bar{\otimes}}_k k'$, et alors $B \otimes_k k' = B \otimes_{A_0} A_0' = B \otimes_A A'$ à un isomorphisme canonique près.

La formule (4.2.1), où l'on prend pour A une k-algèbre de séries convergentes $k\{\{T_1, \ldots, T_r\}\}$, montre que A' est une k'-algèbre analytique.

(4.3) PROPOSITION. *Avec les notations de* (4.1):

(i) *$A' = A \quad {}_k k'$ est un A-module plat et* $\dim(A') = \dim(A)$.

(ii) *Si k est de caractéristique $p > 0$, $\bar{\Omega}^1_{A'/k'}$ est isomorphe à $\bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A A'$.*

(i) Le fait que A' soit un A-module plat résulte de la définition de A donnée dans (4.1) et de ce que A_0' est un A_0-module plat (1.5). Dans la construction de (4.1), on peut de plus supposer que A_0 est une sous-algèbre de A et que $\dim(A_0) = \dim(A)$; alors, par platitude, A_0' est une sous-algèbre de A' et l'on a $\dim(A') = \dim(A_0')$ puisque A' est une A_0'-algèbre finie ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.1.5), donc $\dim(A') = \dim(A)$.

(ii) Si l'on pose $A_1 = k\{\{T_1^p, \ldots, T_n^p\}\}$ $A_1' = k'\{\{T_1^p, \ldots, T_n^p\}\}$, on a $\bar{\Omega}^1_{A/k} = \Omega^1_{A/A_1}$ et $\bar{\Omega}_{A'/k'} = \Omega^1_{A'/A_1'}$ en vertu de (3.3); comme $A_0' = A_0 \otimes_{A_1} A_1'$, on a $A' = A \otimes_{A_1} A_1'$, d'où la conclusion par ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 20.5.5).

(4.4) THÉORÈME. *Soient k un corps valué complet d'exposant caractéristique p, A une k-algèbre analytique, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, distinct de l'idéal maximal. Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *Pour toute extension k' de k qui est un corps valué complet dont la valeur absolue prolonge celle de k, et tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de $A' = A \bar{\otimes}_k k'$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, $A'_{\mathfrak{p}'}$ est un anneau régulier.*

(b) *Soit n la plus grande des dimensions des composantes irréductibles auxquelles appartient $\mathfrak{p}$; alors $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module libre de rang n. Supposons en outre que $n = \dim(A)$; alors les conditions précédentes sont aussi équivalentes à*:

(c) *Il existe un k-homomorphisme (nécessairement local) $u : B \to A$, où $B = k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$, faisant de A une B-algèbre finie, et tel que le morphisme* Spec(A) $\to$ Spec(B) *soit étale au point $\mathfrak{p}$.*

Chacune des conditions (a), (b) entraîne les suivantes:

(d) *$A_{\mathfrak{p}}$ est géométriquement régulier sur k.*

(d′) *$A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau régulier.*

Si de plus $[k : k^p] < +\infty$ (resp. *si k est parfait*), *alors (d) et (a) (resp. (d′) et (a)) sont équivalentes.*

Le fait que (d) entraîne (b) lorsque $[k : k^p] < +\infty$ n'est autre que (3.7). Prouvons ensuite que (c) implique (a) lorsque $n = \dim(A)$; avec les notations de (a), on a alors $A' = A \otimes_B B'$, où $B' = k'\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$ (4.1). Le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(B')$ est fini et étale au point $\mathfrak{p}'$ (**IV**, 17.3.3); donc $A'_{\mathfrak{p}'}$ est formellement lisse sur $B'_{\mathfrak{r}'}$, pour les topologies préadiques, en notant $\mathfrak{r}'$ l'image réciproque de $\mathfrak{p}'$ dans B' (**IV**, 17.5.3); d'autre part, $B'_{\mathfrak{r}'}$ est formellement lisse sur k' pour la topologie préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.3.4 et 19.3.5), donc $A'_{\mathfrak{p}'}$ est formellement lisse sur k' pour sa topologie préadique ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.3.5), et par suite est géométriquement régulier sur k' ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 22.5.8). On notera que cela prouve aussi que (c) implique (d) lorsque $\dim(A) = n$.

Montrons maintenant que lorsque $n = \dim(A)$, (b) entraîne (c). Notons d'abord que puisque $\mathfrak{p}$ n'est pas l'idéal maximal de A, il existe un système de paramètres $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de A tel que $x_i \notin \mathfrak{p}$ pour tout i. En effet, on ne peut avoir $x_i \in \mathfrak{p}$ pour tout i, sans quoi $A/\mathfrak{p}$ serait de longueur finie, et $\mathfrak{p}$ serait maximal, contrairement à l'hypothèse. Mais si par exemple $x_1 \notin \mathfrak{p}$, il suffit, pour chaque indice i tel que $x_i \in \mathfrak{p}$, de remplacer x_i par $x_1 + x_i$, pour avoir un système de paramètres dont aucun élément n'appartienne à $\mathfrak{p}$. Désignons maintenant par $\delta(x)$ l'image canonique de $\bar{d}x$ dans $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p})$, pour tout $x \in A$; montrons qu'on peut déterminer n éléments inversibles u_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) de A tels que les $\delta(u_i x_i)$ forment un *système libre* dans le $\kappa(\mathfrak{p})$-espace vectoriel $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p})$ (donc une *base* de cet espace, puisqu'il est supposé de rang n). Raisonnons par récurrence, en supposant que, pour un entier $r < n$, on ait déterminé les u_i ($1 \leqslant i \leqslant r$) tels que les $\delta(u_i x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ soient linéairement indépendants sur $\kappa(\mathfrak{p})$; si $\delta(x_{r+1})$ n'est pas combinaison linéaire des $\delta(u_i x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, il suffit de prendre $u_{r+1} = 1$ pour poursuivre la récurrence. Dans le cas contraire, notons que, pour tout $u \in A$, $\delta(ux_{r+1})$ est l'image canonique de $(\bar{d}u)x_{r+1} + u(\bar{d}x_{r+1})$; comme $u(\bar{d}x_{r+1})$ a une image canonique combinaison linéaire des $\delta(u_i x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, et que d'autre part l'image canonique de x_{r+1} dans $\kappa(\mathfrak{p})$ est $\neq 0$, on voit qu'il suffit de prouver qu'il existe un élément inversible $u \in A$ tel que $\delta(u)$ ne soit pas combinaison linéaire des $\delta(u_i x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Or, il résulte de (2.2) que les $\delta(x)$ engendrent le $\kappa(\mathfrak{p})$-espace vectoriel $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p})$; comme par hypothèse $r < n$, il existe donc $z \in A$ tel que $\delta(z)$ ne soit pas combinaison linéaire des $\delta(u_i x_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Si $z \notin \mathfrak{m}$, on prendra $u = z$; sinon, $1 + z$ est inversible et l'on a $\delta(1+z) = \delta(z)$ puisque $\bar{d}(1+z) = \bar{d}z$; on prendra alors $u = 1 + z$, ce qui achève de prouver notre assertion. Remplaçant alors les x_i par les $u_i x_i$, ce qui n'altère pas le fait qu'il s'agit d'un système de paramètres n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$, on peut donc supposer, en vertu du lemme de Nakayama, que les images canoniques des $\bar{d}_A x_i$ dans $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ engendrent cet $A_{\mathfrak{p}}$-module. Considérons alors le k-homomorphisme (local) $u : B \to A$ tel que $u(T_i) = x_i$ pour tout i, qui fait de A une B-algèbre *finie* [1, 18-01, Th. 1]. On a donc (2.3) une suite exacte

$$\bar{\Omega}^1_{B/k} \otimes_B A \xrightarrow{v} \bar{\Omega}^1_{A/k} \xrightarrow{w} \Omega^1_{A/B} \longrightarrow 0$$

où les $\bar{d}_A x_i$ sont les images par v des éléments $\bar{d}_B T_i \otimes 1$. Localisant cette suite exacte en $\mathfrak{p}$, on obtient un homomorphisme *surjectif* $v_{\mathfrak{p}} : \bar{\Omega}^1_{B/k} \otimes_B A_{\mathfrak{p}} \to (\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}}$ en raison du choix des x_i; par suite on a $0 = (\Omega^1_{A/B})_{\mathfrak{p}} = \Omega^1_{A_{\mathfrak{p}}/B_{\mathfrak{r}}}$ (où $\mathfrak{r}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans B) (**IV**, 16.4.15). En vertu de (**IV**, 17.4.1), cela montre que (b) entraîne (lorsque $\dim(A) = n$) que le morphisme $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ est non ramifié au point $\mathfrak{p}$. Puisque A est un quotient d'anneau régulier (1.1) on a $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \dim(A) - \dim(A/\mathfrak{p}) = n - \dim(A/\mathfrak{p})$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.5.12). On a de même $\dim(B_{\mathfrak{r}}) = n - \dim(B/\mathfrak{r})$. Enfin, la fibre du morphisme $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ au point $\mathfrak{r}$ étant de dimension 0 puisque ce morphisme est fini, on a ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.3.9) $\dim(A/\mathfrak{p}) \leqslant \dim(B/\mathfrak{r})$; donc $\dim(B_{\mathfrak{r}}) \leqslant \dim(A_{\mathfrak{p}})$. Mais cela entraîne que le morphisme $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ est étale au point $\mathfrak{p}$, l'anneau $B_{\mathfrak{r}}$ étant intègre et intégralement clos (**IV**, 18.10.1).

Montrons maintenant que (a) entraîne (b) *lorsque* $\dim(A) = n$. Notons d'abord qu'il existe un corps valué complet k', extension de k, tel que la valeur absolue de k' induise celle de k, et qui en outre est *parfait*. En effet, si $p = 1$, on prend $k' = k$. Si $p > 1$ on considère une clôture algébrique $\bar{k}$ de k, à laquelle on prolonge la valeur absolue de k, puis on prend le complété

k' de $\bar{k}$, qui est encore algébriquement clos [3, § 8, exerc. 13]. Dans les deux cas on pose $A' = A \bar{\otimes}_k k'$, et on sait que A' est un A-module plat (4.3) et $\dim(A') = \dim(A) = n$; il résulte alors de (**IV**, 2.3.4) et (**IV**, 6.1.1) que si $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier de A' au-dessus de $\mathfrak{p}$, il existe un idéal premier minimal $\mathfrak{q}'$ de A' contenu dans $\mathfrak{p}'$, au-dessus de $\mathfrak{q}$ et tel que $\dim(A'/\mathfrak{q}') = \dim(A/\mathfrak{q}) = n$. On a par ailleurs $(\bar{\Omega}^1_{A'/k'})_{\mathfrak{p}'} = (\bar{\Omega}^1_{A/k})_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_\mathfrak{p}} A'_{\mathfrak{p}'}$ en vertu de (4.3); enfin, comme k' est parfait, l'hypothèse que $A'_{\mathfrak{p}'}$ est régulier entraîne qu'il est *géométriquement régulier* sur k', en vertu de (**IV**, 6.7.7). Puisque $k'^p = k'$, on peut appliquer à A' et $\mathfrak{p}'$ le fait que (d) entraîne (b) prouvé dans (3.7); donc $(\bar{\Omega}^1_{A'/k'})_{\mathfrak{p}'}$ est un $A'_{\mathfrak{p}'}$-module libre de rang n. Mais puisque $A'_{\mathfrak{p}'}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module fidèlement plat, on en conclut que $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module libre de rang n (2.5.2).

Reste à montrer que (a) et (b) sont encore équivalentes lorsque l'on ne suppose plus que $\dim(A) = n$. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal de A, noyau de l'homomorphisme canonique $A \to A_\mathfrak{p}$, et posons $A_1 = A/\mathfrak{J}$; on a nécessairement $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{p}$, et si l'on pose $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}/\mathfrak{J}$, l'homomorphisme canonique $A_\mathfrak{p} \to (A_1)_{\mathfrak{p}_1}$ est *bijectif*; on en conclut (**I**, 6.5.4) que l'injection canonique $\mathrm{Spec}(A_1) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un *isomorphisme local* au point $\mathfrak{p}$, et l'on a $\mathfrak{J}_\mathfrak{p} = 0$. On a la suite exacte (2.4.1)

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \longrightarrow \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A A_1 \longrightarrow \bar{\Omega}^1_{A_1/k} \longrightarrow 0$$

et, en localisant en $\mathfrak{p}$, il vient un isomorphisme $(\bar{\Omega}^1_{A/k})_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_1)_{\mathfrak{p}_1} \xrightarrow{\sim} (\bar{\Omega}^1_{A_1/k})_{\mathfrak{p}_1}$; ceci montre que la condition (b) pour l'anneau A et l'idéal $\mathfrak{p}$ est *équivalente* à la condition (b) pour l'anneau A_1 et l'idéal $\mathfrak{p}_1$. D'autre part avec les notations de (a), on a $A_1' = A_1 \bar{\otimes}_k k' = A'/\mathfrak{J}A'$ (4.2.1); si $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier de A' au-dessus de $\mathfrak{p}$, tout élément de $\mathfrak{J}A'$ annule un élément de $A' - \mathfrak{p}'$, donc $\mathfrak{J}A' \subset \mathfrak{p}'$, et si l'on pose $\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{p}'/\mathfrak{J}A'$, $\mathfrak{p}_1'$ est au-dessus de $\mathfrak{p}_1$ et $(A_1')_{\mathfrak{p}_1'}$ s'identifie canoniquement à $A'_{\mathfrak{p}'}$; ceci prouve donc que la condition (a) pour l'anneau A et l'idéal $\mathfrak{p}$ est *équivalente* à la condition (a) pour l'anneau A_1 et l'idéal $\mathfrak{p}_1$. Or, tous les idéaux premiers minimaux de A contenus dans $\mathfrak{p}$ contiennent $\mathfrak{J}$ puisque $\mathrm{Spec}(A_1) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un isomorphisme local au point $\mathfrak{p}$; d'autre part, les idéaux de $\mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{J})$ sont les idéaux de $\mathrm{Ass}(A)$ qui sont contenus dans $\mathfrak{p}$ [4, § 1, n° 2, prop. 6]; donc les idéaux premiers minimaux de A_1 sont tous contenus dans $\mathfrak{p}_1$, et on a par suite $\dim(A_1) = n$. Il suffit alors d'appliquer à A_1 et $\mathfrak{p}_1$ ce qui a été prouvé plus haut. CQFD.

5. Critères Jacobiens pour les Algèbres Analytiques

Pour être complet, nous donnons dans ce n° des démonstrations, analogues à celles de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 22.7) des critères jacobiens de Nagata pour les algèbres analytiques.

(5.1) Proposition. *Soient k un corps valué complet, $A = k\{\{T_1,..., T_r\}\}$, $\mathfrak{q}$ un idéal de A, $B = A/\mathfrak{q}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{q}$, et soit $C = A/\mathfrak{p}$. On suppose qu'il existe une sous-k-algèbre C' de C, isomorphe à $k\{\{T_1,..., T_s\}\}$, telle que C soit finie sur C' et que le corps des fractions L de C soit une extension séparable de $L' = k\langle\langle T_1,..., T_s\rangle\rangle$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *$B_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ est une k-algèbre formellement lisse pour la topologie $\mathfrak{p}$-préadique.*

(b) *Il existe des k-dérivations D_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ de A dans lui-même, et des éléments f_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ de $\mathfrak{q}$ tels que les images des f_i dans $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ engendrent cet idéal de $A_\mathfrak{p}$ et que l'on ait* $\det(D_i f_i) \notin \mathfrak{p}$.

(c) *$B_\mathfrak{p}$ est un anneau régulier.*

Le corps résiduel de $B_\mathfrak{p}$ est $\kappa(\mathfrak{p}) = L$; comme $k\langle\langle T_1,..., T_s\rangle\rangle \subset k((T_1,...,T_s))$ est séparable sur k ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 21.9.6.4), $\kappa(\mathfrak{p})$ est séparable sur k par hypothèse, et l'équivalence des propriétés (a) et (c) résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 19.6.4). Le reste de la démonstration se fait en calquant pas à pas le raisonnement sur la démonstration de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 22.7.2), en remplaçant $\hat{\Omega}^1_{A/k}$ par $\bar{\Omega}^1_{A/k}$, qui est encore un A-module libre de rang r (3.2); on a la suite exacte (2.4.1)

$$\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 \longrightarrow \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A (A/\mathfrak{p}) \rightarrow \bar{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{p})/k} \longrightarrow 0$$

qui donne, par tensorisation avec L, la suite exacte

$$(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L \xrightarrow{i} \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A L \longrightarrow \bar{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{p})/k} \otimes_{A/\mathfrak{p}} L \longrightarrow 0$$

Il s'agit de voir que i est *injectif*. L'hypothèse de séparabilité faite sur L entraîne, en vertu de (3.4), que $\bar{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{p})/k} \otimes_{A/\mathfrak{p}} L$ est de rang s sur L; comme $\bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A L$ est de rang r sur L, on a $\mathrm{rg}_L(\mathrm{Im}(i)) = r - s$. Comme $A/\mathfrak{p}$ est finie sur une sous-algèbre isomorphe à $k\{\{T_1,..., T_s\}\}$, on a $\dim(A/\mathfrak{p}) = s$ ((1.1) et ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.1.5)); donc $r - s = \dim(A) - \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A_\mathfrak{p})$ en vertu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 16.5.11). Comme $A_\mathfrak{p}$ est régulier ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 17.3.2), $\dim(A_\mathfrak{p})$ est égale au rang sur L de $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2A_\mathfrak{p}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{IV}}$, 17.1.1), donc au rang sur L de $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L$, ce qui achève la démonstration.

(5.2) Proposition. *Soient k_0 un corps d'exposant caractéristique p tel que $[k_0 : k_0^p] < +\infty$, k un corps valué complet, extension séparable de k_0, et soit $A = k\{\{T_1,..., T_r\}\}$. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal de A, $B = A/\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{q}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *$B_\mathfrak{p}$ est une k_0-algèbre formellement lisse (pour la topologie $\mathfrak{p}$-préadique).*

(b) *Il existe des k-dérivations D_i de A dans lui-même* ($1 \leqslant i \leqslant m$) *et des éléments f_i de* $\mathfrak{q}$ ($1 \leqslant i \leqslant m$) *tels que les images des f_i dans $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ engendrent cet idéal de $A_{\mathfrak{p}}$ et que l'on ait* $\det(D_i f_i) \notin \mathfrak{p}$.

On suit la démonstration de ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 22.7.3), en distinguant deux cas, suivant que $p = 1$ ou $p > 1$.

Dans le cas $p = 1$, il revient au même, en vertu de ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 19.6.4), de dire que $B_{\mathfrak{p}}$ est une k_0-algèbre formellement lisse ou une k-algèbre formellement lisse, les deux conditions étant alors équivalentes au fait que $B_{\mathfrak{p}}$ soit un anneau local régulier. En outre, les hypothèses générales de (5.1) sont remplies en vertu de [1, 18–09, Cor. 3], la séparabilité des extensions étant ici automatique. Les conclusions de (5.1) montrent alors l'équivalence de (a) et de (b).

Supposons maintenant $p > 1$. Comme A est une k-algèbre formellement lisse pour la topologie préadique et que k est séparable sur k_0, A est aussi une k_0-algèbre formellement lisse pour la topologie préadique ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 19.3.5 (ii), et 19.6.1); en vertu de ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 22.5.9), $A_{\mathfrak{p}}$ est donc aussi une k_0-algèbre formellement lisse pour la topologie $\mathfrak{p}$-préadique. Posant $L = \kappa(\mathfrak{p})$, on voit, comme dans ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 22.7.3) que tout revient à montrer que, si l'homomorphisme $j_0 : (\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2) \otimes_A L \to \Omega^1_{A/k_0} \otimes_A L$ est injectif, la condition (b) est vérifiée; utilisant ensuite le fait que $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ est un A-module libre de rang r, on voit comme dans ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 22.7.2) qu'il suffit de prouver que l'injectivité de j_0 entraîne celle de

$$j : (\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2) \otimes_A L \xrightarrow{j_0} \Omega^1_{A/k_0} \otimes_A L \longrightarrow \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A L .$$

Continuant à suivre le raisonnement de ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 22.7.3), on se ramène à prouver que, si i est l'homomorphisme $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L \to \Omega^1_{A/k_0} \otimes_A L$ et i' l'homomorphisme $(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L \to \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A L$, on a $\operatorname{Ker}(i') = \operatorname{Ker}(i)$. On a de nouveau la suite exacte, déduite par tensorisation de (2.4.1)

$$(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L \xrightarrow{i'} \bar{\Omega}^1_{A/k} \otimes_A L \longrightarrow \bar{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{p})/k} \otimes_{A/\mathfrak{p}} L \longrightarrow 0$$

Puisque k est extension séparable de k_0 et $[k_0 : k_0{}^p] < +\infty$, on peut appliquer à A et $\mathfrak{p}$ le résultat de (3.5), qui donne

$$\operatorname{rg}_L(\bar{\Omega}^1_{(A/\mathfrak{p})/k} \otimes_{A/\mathfrak{p}} L) = \dim(A/\mathfrak{p}) + \operatorname{rg}_L Y_{L/k_0} .$$

Par ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 16.5.11), on a $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A) - \dim(A_{\mathfrak{p}})$; puisque $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 17.3.2), on a $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{rg}_L((\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \otimes_A L)$ par ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 17.1.1); enfin, il résulte de (3.2) que $\bar{\Omega}^1_{A/k}$ est un A-module libre de rang égal à $r = \dim(A)$. On obtient ainsi $\operatorname{rg}_L(\operatorname{Ker}(i')) = \operatorname{rg}_L Y_{L/k_0}$. Mais la fin du raisonnement de ($\mathbf{0}_{\text{IV}}$, 22.7.3) s'applique sans modification et prouve que $\operatorname{Ker}(i)$ est isomorphe à Y_{L/k_0} ; d'où la conclusion, compte tenu de ce que $\operatorname{Ker}(i) \subset \operatorname{Ker}(i')$.

Bibliographie

1. Séminaire H. Cartan, 13e année 1960/61. "Familles d'espaces complexes et fondements de la Géométrie analytique," 2 vols. multigr. Secrétariat mathématique, 11, R. Pierre Curie, Paris, 1962.
2. Bourbaki, N. "Algèbre," 3e éd., chap. II. Hermann, Paris, 1962.
3. Bourbaki, N. "Algèbre commutative," chap. V-VI. Hermann, Paris, 1964.
4. Bourbaki, N. "Algèbre commutative," chap. III-IV. Hermann, Paris, 1961.