CLASSES DE CHERN ET REPRESENTATIONS LINEAIRES DES GROUPES DISCRETS

par A. GROTHENDIECK

§ 0. Introduction.

0.1. Soit G un groupe discret opérant linéairement sur un espace vectoriel complexe E de dimension finie. Il est bien connu comment associer à E des "classes de Chern"

$$c_i(E) \in H^{2i}(G, \mathbb{Z}) \quad . \tag{0.1}$$

Pour ceci, on interprète la cohomologie entière de G comme étant celle de son "espace classifiant" B_G [7] [34] , et utilisant le fibré universel E_G , qui est un fibré principal de base B_G , groupe G , pour tordre E , on trouve un fibré vectoriel associé $\mathbb{E} = (E,G) = (E_G \times E)/G$, (où on fait opérer G sur $\mathbb{E}_G \times E$ par $g(a,x) = (a.g^{-1} ,g.x))$. Par définition, les classes $c_i(E)$ sont les classes de Chern du fibré vectoriel $\mathbb{E}$ sur B_G (cf. [23] pour la définition et les propriétés des classes de Chern de fibrés vectoriels). Cette définition des classes (0.1) est indiquée dans l'appendice à [4], où est également soulevée la question d'une définition purement algébrique de ces classes, n'utilisant pas la construction (de nature topologique et transcendante) de l'espace classifiant B_G. Le but initial du présent travail a été de fournir une solution à ce problème.

0.2. Signalons d'abord qu'il y a lieu de reformuler le problème initial, dont la solution est négative pour des raisons triviales que nous allons expliquer maintenant. Notons que par "définition purement algébrique" il faut entendre sans doute une définition indépendante de la topologie mise sur le corps des complexes, et qui garderait donc un sens si ce corps était remplacé par n'importe quel corps de base, soumis au besoin à des conditions purement algébriques convenables, telles que celle d'être algébriquement clos, ou même d'être isomorphe au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (i.e. d'être en plus de caractéristique nulle et de degré de transcendance sur le corps premier égal à la puissance du continu). On demanderait alors aux classes de Chern (0.1) d'être inchangées pour un changement de corps de base par un isomorphisme $k \rightarrow k'$ (et en particulier, par automorphismes du corps k). De plus, dans le cas où $k = \mathbb{C}$, elles doivent coïncider avec les classes définies plus haut par voie transcendante. Or, même en se bornant à la seule classe $c_1(E)$, au cas de vectoriels E de dimension 1, et du seul corps de base $k = \mathbb{C}$, on voit facilement qu'une telle théorie n'existe pas, même si G est un groupe cyclique d'ordre $n > 1$. En effet, la donnée d'une représentation linéaire de G dans un espace vectoriel E de dimension 1 sur k revient à la donnée d'un homomorphisme $G \rightarrow k^*$ de G dans le groupe k^* des éléments inversibles de k, ou encore (tout élément de G étant d'ordre fini) d'un homomorphisme

(0.2) $$G \longrightarrow \mu_\infty(k) \quad ,$$

où $\mu_\infty(k)$ désigne le groupe des <u>racines de l'unité</u> de k . D'autre part, G étant fini, donc $H^i(G,\mathbb{Q}) = 0$ pour $i > 0$, la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de G -modules triviaux $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ nous donne un isomorphisme canonique

(0.3) $$H^2(G,\mathbb{Z}) \simeq H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad ,$$

de sorte que la définition d'une classe $c_2(E) \in H^2(G,\mathbb{Z})$ revient à la définition d'un homomorphisme

(0.4) $$G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ .$$

D'ailleurs, lorsque k est algébriquement clos de caractéristique nulle, on sait que le groupe $\mu_\infty(k)$ est isomorphe (non canoniquement) au groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si on a même $k = \mathbb{C}$, alors un isomorphisme canonique

(0.5) $$\phi : \mu_\infty(\mathbb{C}) \xleftarrow{\simeq} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

peut être choisi de façon bien connue, utilisant l'exponentielle :

(0.6) $$\phi\,(q \bmod \mathbb{Z}) = \exp\,(2i\pi q) \quad \text{pour} \quad q \in \mathbb{Q} \quad .$$

On vérifie aussitôt que via les isomorphismes (0.3) et (0.5) , la classe de Chern $c_1(E)$ définie dans 0.1 n'est autre que l'homomorphisme (0.2), i.e. qu'on a égalité entre ce dernier et (0.4) modulo l'identification (0.5) . Or l'isomorphisme (0.5) n'est pas de nature algébrique, mais utilise au contraire de façon essentielle la topologie du corps $\mathbb{C}$; en fait, on sait, par un théorème classique de GAUSS [29, p. 53] que composant cet isomorphisme avec les automorphismes de $\mu_\infty(\mathbb{C})$ induits par les automorphismes du corps des complexes, on trouve tous les isomorphismes possibles entre $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et $\mu_\infty(\mathbb{C})$, qui forment un torseur (= ensemble principal homogène) sous le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \prod \mathbb{Z}_\ell^*$, produit des groupes $\mathbb{Z}_\ell^*$ des entiers ℓ -adiques, pour tous les nombres premiers ℓ . Ceci montre donc que la classe $c_1(E)$ définie par voie transcendante n'a pas la propriété d'invariance algébrique demandée.

0.3. Ces considérations suggèrent cependant que pour trouver une définition purement algébrique des classes de Chern $c_i(E)$, il faudra remplacer le groupe de coefficients $\mathbb{Z}$ par des groupes différents, attachés fonctoriellement au corps de base k (*), et plus spécifiquement, au groupe $\mu_\infty(k)$ des racines de l'unité dans k . En fait, étant fixé un entier n premier à la caractéristique de k , et désignant par $\mu_n(k)$ le groupe des racines n.èmes de l'unité dans k (isomorphe, non canoniquement, au groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) , on trouve aisément une définition algébrique d'une classe

(0.7) $$c_1(E) \in H^2(G, \mu_n(k)) \quad ,$$

définie comme

(0.8) $$c_1(E) = \partial(d) \quad ,$$

où

$$d \in H^1(G, k^*) \quad \text{i.e.} \quad d : G \longrightarrow k^*$$

est défini comme le déterminant de la représentation linéaire donnée de G dans E :

(*) Supposé algébriquement clos dans ce qui suit.

(0.9) $$d(g) = \text{dét}\,(g_E)\ ,$$

et où ∂ est l'opérateur cobord de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de G-modules triviaux (dite "de KUMMER") :

(0.10) $$0 \longrightarrow \mu_n(k) \longrightarrow k^* \xrightarrow{x \rightsquigarrow x^n} k^* \longrightarrow 0\ .$$

La classe (0.7) jouera alors le rôle d'une première classe de Chern "mod n" . La formule habituelle d'additivité pour une extension

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

de deux représentations :

$$c_i(E) = \sum_{j+k=i} c_j(E')c_k(E'')\ ,$$

nous oblige alors, pratiquement, à chercher une définition des classes de Chern mod n supérieures comme étant des classes

(0.11) $c_i(E) \in H^{2i}(G, \mu_n(k)^{\otimes i})$, où $\mu_n(k)^{\otimes i} = \overbrace{\mu_n(k) \otimes \ldots \otimes \mu_n(k)}^{i \text{ facteurs}}$.

0.4. Dans ce travail, nous présentons une construction algébrique de tels invariants (0.11) , et explicitons leur lien avec la réduction mod n des classes de Chern entières (0.1) définies par voie transcendante, lorsque le corps de base k est égal à $\mathbb{C}$. On obtient l'équivalent algébrique des classes de Chern entières, sur un corps algébriquement clos k quelconque, en introduisant, pour tout entier ℓ premier à la caractéristique de k , le <u>module de Tate</u>

(0.12) $$T_\ell(k) = \varprojlim_{\nu} \mu_{\ell^\nu}(k)\ ,$$

qui est un $\mathbb{Z}_\ell$-module isomorphe (non canoniquement !) à $\mathbb{Z}_\ell$, ses puissances tensorielles

$$T_\ell(k)^{\otimes i} \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad ,$$

également isomorphes (non canoniquement) à $\mathbb{Z}_\ell$, et les groupes de cohomologie de type ℓ -adique, définis par

$$H^j(G, T_\ell(k)^{\otimes i}) = \varprojlim_{\nu} H^j(G, \mu_{\ell^\nu}(k)^{\otimes i}) \quad .$$

Alors la collection des classes de Chern mod ℓ^ν , pour ν variable, définit des classes de Chern

$$c_i(E) \in H^{2i}(G, T_\ell(k)^{\otimes i}) \quad , \tag{0.13}$$

qui donnent l'approximation algébrique la meilleure possible aux classes de Chern entières transcendantes (0.1) . Elles ont, d'autre part, toutes les propriétés désirables : non seulement celles familières de la théorie transcendante, mais également les propriétés de fonctorialité pour un corps de base k variable.

0.5. Il résulte de ces propriétés fonctorielles que dans le cas où la représentation linéaire donnée de G , sur le corps algébriquement clos k , provient d'une représentation définie sur un sous-corps k_o , (plus généralement, lorsque la classe mod. isomorphisme de cette représentation est "rationnelle sur k_o "), alors <u>les classes</u> $c_i(E)$ <u>de</u> 0.13 <u>sont invariantes par action du groupe des</u> k_o <u>-automorphismes de</u> k . C'est là <u>une condition cohomologique nécessaire tout-à-fait non triviale pour la possibilité de réduire le corps de base de la représentation à un sous-corps</u> k_o . Lorsque k_o est de type fini sur le corps premier, il en résulte par exemple (grâce au fait qu'alors le groupe des k_o -automorphismes "opère énormément" sur les racines de l'unité et par suite sur les modules de Tate $T_\ell(k)$) que toutes les classes de Chern ℓ -adiques sont des classes de torsion. Ainsi, lorsque G est de type fini, comme on peut toujours réduire alors le corps de définition à un corps de type fini au sens absolu, on trouve que dans ce cas toutes les classes $c_i(E)$ ℓ -adiques sont des classes de torsion ! On retrouve ainsi par voie arithmétique un résultat "transcendant" connu [32, p. 223] [26] , qu'on peut exprimer en disant que pour toute représentation linéaire d'un groupe discret G dans un vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, les classes de Chern rationnelles sont nulles, (ou, ce qui revient au même moyennant une restriction convenable assez anodine sur G , que les classes de Chern entières sont des classes de torsion). La méthode arithmétique donne cependant des résultats beaucoup plus précis, en permettant de majorer multiplicativement les ordres de ces classes de Chern entières $c_i(E)$, en fonction de la structure d'un corps de définition k_o de type fini, et plus précisément, en fonction de la sous-extension cyclotomique maximale de k_o (voir 4.11 pour l'énoncé précis).

0.6. Le principe de définition des classes de Chern "arithmétiques" (0.11) est le suivant. On remarque qu'un substitut algébrique de l'espace classifiant B_G du groupe discret G est tout trouvé : c'est le "topos" formé des G -ensembles (i.e. des ensembles sur lesquels le groupe G opère). Les faisceaux abéliens (ou groupes abéliens) de ce topos sont en effet simplement les G -modules M , le foncteur "sections" est le foncteur $M \rightsquigarrow H^\circ(G,M) = M^G$, et les foncteurs dérivés de ce foncteur, i.e. les groupes de cohomologie du topos, sont, par définition même, donnés par les groupes de cohomologie $H^i(G,M)$ de G . D'autre part, munissant ce topos du faisceau d'anneaux constant défini par le corps k , une représentation linéaire de G sur k n'est autre qu'un k -Module sur le topos, lequel est localement libre de type fini si et seulement si la représentation correspondante de G est de dimension finie. Il s'impose alors de paraphraser la construction des classes de Chern, donnée dans [17] , dans le cas des Modules localement libres de type fini sur un topos localement annelé quelconque. Cette construction est esquissée dans ce cadre général dans le § 1. Signalons qu'elle fait un usage essentiel de la cohomologie étale [2] . Ainsi, dans le cas du topos associé à un groupe discret G , et du Module associé à une représentation linéaire de G dans un vectoriel E sur k , elle fait intervenir la topologie étale du schéma projectif $P(E)$ associé à E , via la cohomologie étale mixte de ce schéma, considéré comme schéma à groupe d'opérateurs discret G . Au § 2, nous définissons de façon générale la cohomologie étale mixte d'un schéma X à groupe discret d'opérateurs, sur le modèle de [16] , et définissons (suivant le programme esquissé au § 1) les classes de Chern mixtes pour un faisceau localement libre "à opérateurs" $\mathbb{E}$ sur (X,G) . Cette définition contient comme cas particulier la définition des classes (0.11).

Il convient de remarquer cependant que cette définition est considérablement plus riche que celle envisagée dans 0.3 , qui correspond au cas où X est le spectre d'un corps algébriquement clos sur lequel G opère trivialement. Ainsi, pour une représentation linéaire de G définie sur un corps de base <u>arbitraire</u> k , la i.ème classe de Chern mod n se trouve dans un groupe de cohomologie mixte

$$c_i(E) \in H^{2i}(\mathrm{Spec}\,(k),G\,;\,\boldsymbol{\mu}_n^{\otimes i}) \quad , \tag{0.14}$$

qui fait intervenir simultanément la cohomologie du groupe discret G et la cohomologie du groupe profini $\pi_1(k) = \mathrm{Gal}\,(\bar{k}/k)$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k . L'homomorphisme canonique

$$(0.15)\quad H^{2i}(\mathrm{Spec}(k);G,\mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(\mathrm{Spec}(\bar{k}),G;\mu_n^{\otimes i}) = H^{2i}(G,\mu_n(\bar{k})^{\otimes i})$$

est en général loin d'être injectif, et la classe (0.14) peut fort bien être non nulle, alors que son image (0.11) (où on remplace k par $\bar{k}$) par l'homomorphisme (0.15) est nulle. C'est ainsi que nous verrons sur des exemples que lorsque k est de type fini, donc que (comme il a été dit dans 0.5) la classe de Chern ℓ-adique (0.11) de la représentation de G dans $E\otimes_k\bar{k}$ est une classe de torsion, il n'en est pas nécessairement de même de la classe de Chern ℓ-adique <u>sur</u> k , définie par les classes (0.14) où n parcourt les puissances de ℓ . On peut bien entendu dans de telles réflexions remplacer le corps de base par n'importe quel anneau de base. On trouve par exemple de cette façon des conditions cohomologiques nécessaires pour la possibilité de la restriction du corps (ou de l'anneau) de base, dans une représentation linéaire donnée de G : savoir que toutes les classes de Chern proviennent de classes de Chern mixtes relatives à l'anneau plus petit. Ces conditions sont considérablement plus fortes que celles signalées à la fin de 0.5. Il semblerait d'ailleurs intéressant d'examiner la question : dans quelle mesure ces conditions cohomologiques nécessaires sont-elles aussi suffisantes, en travaillant avec des représentations virtuelles (éléments des anneaux de représentation $R_k(G)$) plutôt qu'avec des représentations effectives?

0.7. Dans le § 6, utilisant le même principe de construction, mais en utilisant la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE des schémas, plutôt que leur cohomologie ℓ -adique, on trouve deux autres variantes de la notion de classes de Chern d'un Module localement libre à opérateurs. Elle comprend encore comme cas particulier la définition de classes de Chern pour une représentation linéaire d'un groupe discret G , qui devrait pouvoir rendre des services analogues à ceux de la définition ℓ -adique. Ces classes, liées aux différentielles absolues du corps ou anneau de base, sont de ce fait de nature exclusivement arithmétique (même lorsque le corps de base est le corps des complexes !). La question des relations entre ces classes de Chern au sens de DE RHAM ou de HODGE avec les classes de Chern ℓ -adiques (comme d'ailleurs de celles-ci entre elles) est une question fort intéressante, qu'on peut considérer comme un cas particulier de la question analogue pour la cohomologie des schémas - question qui est loin d'être éclaircie à l'heure actuelle. Notons que les classes de Chern de DE RHAM ont l'avantage sur les classes ℓ -adiques de se construire sans hypothèse sur les caractéristiques résiduelles de la base. En revanche, lorsque le groupe G est fini, et qu'on travaille sur un corps de base de caractéristique nulle, les classes de Chern style DE RHAM sont toutes nulles ; et lorsque l'on travaille sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres, il en est encore de même des c_i pour $i > 1$. Dans le cas des groupes finis, cela limite forcément l'intérêt de ces classes de Chern style DE RHAM.

0.8. Bien entendu, la construction du topos envisagé au début du § 0.6 se généralise aussitôt au cas où on remplace le groupe G discret par un groupe algébrique quelconque sur un corps donné, ou plus généralement par un schéma en groupes sur une base quelconque (ou, également, par un groupe topologique quelconque). On est ainsi conduit au "point de vue faisceautique" dans la théorie de l'espace classifiant, qui sera exposé systématiquement ailleurs [15] . De ce point de vue, on peut envisager la construction des classes de Chern ℓ -adiques (resp. style DE RHAM, ou HODGE) pour les Modules localement libres sur les topos localement annelés, comme réduite à la même construction dans la situation "universelle" : celle du topos étale associé au site des schémas de type fini sur $S = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\ell^{-1}]$ (resp. $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$) à schéma en groupes d'opérateurs $G = G\ell(n)_S$ (le schéma en groupes linéaire sur S), ce topos jouant le rôle d'un "topos classifiant" pour le groupe linéaire G . La classe de Chern ℓ -adique (disons) "universelle" pour les fibrés de rang n est alors une classe de cohomologie ℓ -adique de ce topos :

(0.16) $$c_i \in H^{2i}(\mathbb{B}_{Gl(n)}\ , T_\ell^{\otimes i}) \ .$$

Cela permet une approche assez différente [15] pour la définition des diverses variantes des c_i . Nous verrons par exemple dans loc. cit. que la cohomologie de ce topos classifiant (à coefficients ℓ -adiques constants tordus) est isomorphe à celle du schéma grassmanien habituel sur S , et que via cet isomorphisme, les c_i sont les classes de cohomologie associées [19] à des cycles convenables sur la grassmannienne, - cycles d'ailleurs exprimables en fonction des classiques cycles de Schubert. Ainsi peuvent se préciser les liens entre la théorie arithmétique et la théorie topologique transcendante des classes caractéristiques. En même temps, la nature des faisceaux de coefficients naturels pour les classes de Chern ℓ -adiques peut s'interpréter par le phénomène, sans doute assez familier à l'heure actuelle, que la classe de cohomologie associée à un cycle de codimension i sur un schéma régulier est relative au même faisceau de coefficients ℓ -adique,

$$T_{\ell}{}^{\otimes i} = \varprojlim_{\nu} \mu_{\ell^\nu}{}^{\otimes i} \quad ,$$

que la i.ème classe de Chern d'un fibré vectoriel (la source commune de l'introduction de ces sempiternels faisceaux étant comme de juste la suite exacte de KUMMER (0.10)).

Signalons que, suivant la même voie, on parvient [15] à une théorie générale des classes caractéristiques en géométrie algébrique, englobant également la théorie des <u>classes de STIEFEL-WHITNEY</u> pour les fibrés orthogonaux ; d'où en particulier une théorie des classes de STIEFEL-WHITNEY pour des représentations linéaires de groupes dans des espaces vectoriels munis de formes quadratiques non dégénérées.

0.9. L'énoncé transcendant auquel on a fait allusion dans 0.5 peut s'énoncer encore en disant que si H est le groupe linéaire complexe à n variables, G un groupe discret, et

(0.17) $$u : G \longrightarrow H$$

un homomorphisme de groupes, alors l'homomorphisme correspondant

$$B_u : B_G \longrightarrow B_H$$

induit un homomorphisme nul sur la cohomologie rationnelle :

(0.18) $$H^i(B_H, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^i(B_G, \mathbb{Q}) \text{ est nul pour } i > 0 \quad .$$

De façon équivalente, si X est un espace topologique (un polyèdre fini, si on veut), et P un fibré principal sur X de groupe H, associé à une représentation (0.17) de son groupe fondamental

$$G = \pi_1(X) \quad ,$$

(ce qu'on exprime parfois en disant que P est un fibré principal _plat_ sur X, ou lorsque X est une variété différentiable, que P admet une _connexion intégrable_ invariante par H), les classes caractéristiques rationnelles de P sont nulles, i.e.

(0.19) $$H^i(B_H, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^i(X, \mathbb{Q}) \text{ est nul pour } i > 0 \quad .$$

Il est connu que cette propriété s'étend au cas où H est, plus généralement, un groupe complexe réductif dont le groupe des composantes connexes est fini (ce qui implique aussitôt la même conclusion lorsque H est un groupe de Lie compact, en utilisant le groupe complexe associé [10] , qui satisfait en effet aux hypothèses précédentes). Cet énoncé, plus général en apparence, est d'ailleurs une conséquence immédiate du cas particulier où H est le groupe linéaire, grâce au fait que pour un groupe complexe réductif connexe H, l'anneau caractéristique $H^*(B_H, \mathbb{Q})$ est engendré par les classes de Chern des fibrés vectoriels complexes sur B_H associés aux représentations linéaires complexes de H (*).

Le théorème qu'on vient de signaler ne s'étend pas au cas où H est un groupe de Lie connexe réel (même semi-simple) ou complexe quelconque, [32, cor. au Th. 2] . Dans un appendice à ce travail, nous prouvons par contre qu'il suffit que H soit un groupe de Lie complexe _algébrique_. Notre démonstration est transcendante en apparence, mais signalons que l'on pourrait encore en donner une démonstration arithmétique, par essentiellement le même argument d'invariance que celui indiqué dans 0.5 ; il suffirait pour cela

---

(*) Ce dernier fait, qui ne semble pas figurer explicitement dans la littérature, doit cependant être considéré comme "bien connu", et il peut servir de base à un traitement considérablement simplifié de la théorie des classes caractéristiques des groupes de Lie connexes.

d'utiliser la théorie algébrique [15] de la cohomologie classifiante pour les groupes algébriques (à laquelle nous avons fait déjà allusion dans 0.8). L'auteur pense que la raison profonde du théorème en question,et qui tient le plus directement compte de l'hypothèse d'algébricité faite sur H , est bien donnée par la démonstration arithmétique à laquelle on vient de faire allusion.

0.10. Remarquons encore que le théorème précédent n'est pas le seul exemple connu de théorème, de nature topologique ou géométrique par son énoncé, dont la démonstration naturelle (ou même la seule démonstration connue) se fasse par voie arithmétique, par un procédé de réduction à des corps ou anneaux de base de type fini au sens absolu. Peut-être le premier exemple connu est le beau théorème de LAZARD [30] , suivant lequel toute loi de groupe, donnée par des formules polynomiales sur un espace affine k^n sur un corps k , est nécessairement nilpotente, qui se prouve par réduction au cas où k est un corps fini, auquel cas le théorème est trivial. (Il ne semble pas qu'on connaisse une autre démonstration "élémentaire" de ce théorème ; la seule autre démonstration que je connaisse utilise la théorie de structure de BOREL des groupes algébriques affines, et la théorie de la cohomologie étale). Pour un autre exemple, tiré de la théorie "géométrique" des familles de variétés abéliennes en caractéristique nulle, par réduction à une situation à corps résiduel fini, nous renvoyons à [21] , où sont combinées méthodes arithmétiques et transcendantes. Comme dernier exemple, reposant d'ailleurs comme 0.5 sur les propriétés galoisiennes du groupe des racines de l'unité, signalons encore ici sans démonstration le théorème suivant, qui utilise de plus la résolution des singularités de HIRONAKA :

<u>Soit</u> $f : X \longrightarrow S$ <u>un morphisme propre d'espaces analytiques com-</u>

plexes, avec S non singulier de dimension 1, supposons que X soit "algébrique relativement à S ", par exemple soit un sous-espace analytique fermé de $S \times P^r_{\mathbb{C}}$ (f étant induit par la projection pr_2 de ce dernier). Alors il existe une partie discrète T de S telle que, pour tout entier i, le faisceau $R^i f_* (\mathbb{Q}_X)$ soit localement constant sur $S-T$ (où $\mathbb{Q}_X$ désigne le faisceau constant de valeur $\mathbb{Q}$ sur X), donc donné sur $S-T$ par une représentation linéaire de $\pi_1(S-T,s_o)$ (groupe fondamental de $S-T$ en un point base donné s_o) par automorphismes d'un espace vectoriel $H^i = H^i(X_{s_o},\mathbb{Q})$ de dimension finie sur $\mathbb{Q}$. De plus, pour tout $s \in T$, désignant par L_s l'élément du groupe fondamental de $S-T$ défini par un "lacet autour de s " issu de s_o, il existe une puissance $L_s^{n(s)}$ (avec $n(s) > 0$) qui opère de façon unipotente sur les V^i (*).

J'ignore si un énoncé de cette nature est valable lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'algébricité relative faite sur le morphisme f, et j'ai tendance à suspecter que non (**) ; remarque analogue pour la formulation hypothétique, en termes de familles analytiques de tores complexes sur une base algébrique, du résultat cité de [21] sur les familles algébriques de variétés abéliennes. Comparer aussi avec le résultat négatif signalé dans 0.6, et la question soulevée plus bas (4.14 a)) pour les classes de Chern "mixtes" sur les variétés analytiques complexes compactes.

0.11. Dans le même ordre d'idées que les réflexions qui précèdent, on

---

(*) Ce théorème figure dans une lettre de l'auteur à J.P.SERRE, du 5.10.1964.

(**) Après avoir rédigé le présent article, l'auteur a pris connaissance d'un preprint d'un travail de P.A. GRIFFITHS, annonçant un résultat sensiblement identique (par une démonstration transcendante, utilisant les techniques de LEFSCHETZ) : cf. P.A. GRIFFITHS, On the periods of integrals of algebraic manifolds (Summary), (miméographié, Berkeley). Dans une communication personnelle, P.A. GRIFFITHS a précisé que l'hypothèse d'algébricité n'est en fait pas requise ; par contre, il suppose X et les fibres "générales" non singulières.

peut remarquer que beaucoup d'énoncés de topologie gardent un sens, et peuvent encore se démontrer, dans le contexte des variétés algébriques "abstraites", et plus généralement des schémas (par exemple en utilisant la topologie étale de ceux-ci). Ce sont même souvent des cas particuliers de tels théorèmes sur des schémas généraux (valables généralement en caractéristique quelconque). Il doit en être ainsi, bien entendu, des théorèmes topologiques concernant plus spécialement les variétés algébriques (tels les théorèmes du type de LEFSCHETZ pour les sections hyperplanes des variétés projectives, quoique une démonstration en termes de cohomologie étale n'ait pas encore été trouvée à l'heure actuelle pour le plus profond d'entre eux). Cette remarque prend tout son sens lorsqu'on observe que certains des espaces les plus importants pour les topologues sont bien des variétés algébriques complexes. C'est ainsi que, aux groupes de Lie compacts chers aux topologues, il y a tout avantage, pour une meilleure compréhension géométrique de la situation, à substituer les groupes complexifiés [10] , qui fournissent les mêmes invariants homotopiques, mais ont l'avantage d'être des groupes linéaires algébriques sur $\mathbb{C}$; on constate que le fibré universel E_G et l'espace classifiant B_G d'un tel groupe, qui se construisent en termes de variétés de STIEFEL ou de GRASSMANN complexes, sont également des variétés algébriques (plus précisément, des limites inductives de telles variétés). La cohomologie entière de B_G (du moins modulo torsion, et pour G connexe) peut d'ailleurs s'interpréter de façon purement algébrique comme son anneau de CHOW (fait assez spécial aux variétés algébriques en question, et qui avait été signalé déjà dans [18, 4-24]) ; on peut également la remplacer par les cohomologies ℓ -adiques. C'est en ce sens, par exemple, que la théorie des espaces classifiants des groupes de Lie compacts peut être considérée comme un chapitre de géométrie algébrique "abstraite", et qui pourrait être traité (du moins pour ses résultats cohomologiques les plus importants) par les méthodes de géométrie algébrique, comme il sera plus ou moins clair pour le lecteur attentif de [18] ; comparer § 0.7, et cf [15] pour un exposé de ce point de vue. Comme le groupe $K(B_G)$ topologique peut également s'interpréter comme le groupe K des classes de faisceaux cohérents sur la variété algébrique B_G (ou du moins comme une limite projective des groupes K des variétés algébriques dont B_G est la limite), ceci invite donc aussi à reconsidérer les théorèmes connus récents de ATIYAH [6] , SEGAL-ANDERSON [1] et KAROUBI [27] sur la comparaison de l'anneau des représentations (complexes, complexes orthogonales ou complexes symplectiques) de G , et du groupe K correspondant (KU , KO ou KSp) de B_G , en termes de géométrie algébrique sur un corps de base (voire un schéma de base) général.

Comme autre exemple du rôle clef joué par les variétés algébriques en topologie, rappelons la détermination par MILNOR et NOVIKOFF [33] de l'anneau de cobordisme quasi-complexe, dont les générateurs sont les classes de certaines variétés algébriques complexes projectives très simples.

Ces exemples, et bien d'autres, permettent de prévoir que les inter-relations entre la topologie, la géométrie et l'arithmétique (sans compter l'analyse, comme auxiliaire de tous trois) ne pourront que se multiplier et se resserrer dans l'avenir, pour le plus grand bénéfice de chacune de ces disciplines, et le plaisir et la délectation des mathématiciens concernés.

§ 1. Classes de Chern sur un topos localement annelé.

1.1. Dans le présent paragraphe, nous donnons l'esquisse d'une théorie des classes de Chern sur un topos [37, II 4.12] localement annelé [22], via une théorie de la "cohomologie étale des topos localement annelés", qui devrait être écrite sur le modèle de [2]. Dans le cas d'un espace topologique ordinaire, annelé par les fonctions continues à valeurs complexes, cette théorie est essentiellement la théorie ordinaire des classes de Chern, traitée suivant la méthode de [17], à la différence près qu'ici les coefficients naturels sont des faisceaux de racines de l'unité tordues, au lieu du faisceau constant des entiers, la suite exacte de KUMMER (1.1) remplaçant la suite exacte de l'exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{O}_X \longrightarrow \mathbb{O}_X^* \longrightarrow 0$$

(qui, elle, fait appel à la structure topologique des groupes de sections du faisceau structural). Dans le cas d'un schéma, la théorie des classes de Chern est esquissée dans [25], sur le même modèle. Dans les deux paragraphes suivants, nous développerons directement, sur ce modèle, la théorie des classes de Chern sur les schémas à opérateurs, sans nous appuyer explicitement dans ce cas particulier sur la théorie des schémas relatifs de [22], ni celle de la cohomologie étale des topos localement annelés généraux, qui reste à écrire. La lecture du présent paragraphe n'est donc pas, à strictement parler, indispensable à l'intelligence du présent article. Il fournit cependant le principe unificateur pour les diverses variantes de la notion de classe de Chern, et a été la motivation initiale pour la définition donnée au paragraphe suivant, qui n'est qu'un simple exercice de transcription de la définition générale donnée ici.

1.2. Soit X un topos localement annelé. Nous supposons défini, sur le modèle de [2, Exp. VII], le "site étale de X" (*) dont la catégorie des fais-

(*) Cette construction est faite maintenant dans [22].

ceaux sera notée ici $X_{ét}$, pour éviter des confusions avec le topos de départ X . Soit $n > 0$ un entier tel que $n.\,1_X$ soit une section inversible du faisceau structural $\mathcal{O}_X$. Considérant sur $X_{ét}$ le faisceau "multiplicatif" $(\mathbb{G}_m)_{X_{ét}}$, l'élévation à la puissance n.ème dans ce faisceau est alors un épimorphisme (NB c'est en vue d'obtenir ce fait qu'on doit travailler avec les topologies étales), donc fournit une suite exacte de faisceaux sur $X_{ét}$:

$$(1.1) \qquad 0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

(<u>suite exacte de KUMMER</u>) - où nous avons omis dans les notations $\mathbb{G}_m$ et μ_n la référence au topos de base $X_{ét}$. Le faisceau μ_n sur $X_{ét}$, noyau de l'élévation à la puissance n.ème dans $\mathbb{G}_m$, est appelé <u>faisceau des racines n.èmes de l'unité</u> sur $X_{ét}$. On vérifie que c'est un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modules <u>inversible</u>, i.e. localement isomorphe au faisceau constant sur $X_{ét}$ de valeur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La même chose sera vraie par suite pour ses puissances tensorielles $\mu_n^{\otimes i}$, pour $i \in \mathbb{Z}$.

Si alors $\mathbb{L}$ est un faisceau de modules inversible (i.e. localement libre de rang 1) sur X , d'où une classe

$$(1.2) \qquad c\ell(\mathbb{L}) \in H^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{ét}, \mathbb{G}_m) \quad ,$$

l'opérateur cobord de la suite exacte (1.1) nous fournit un élément

$$(1.3) \qquad c_1(\mathbb{L}) = \partial\,(c\ell(\mathbb{L})) \in H^2(X_{ét}, \mu_n) \quad ,$$

qui sera par définition la <u>première classe de Chern</u> du faisceau inversible $\mathbb{L}$.

1.3. Plus généralement, pour un Module localement libre $\mathbb{E}$ sur X , nous nous proposons de définir des classes de Chern

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes i}) \quad . \tag{1.4}$$

Supposons $\mathbb{E}$ de rang constant r . On introduit le fibré projectif P associé à E [EGA II 4.11] , qui est un schéma relatif sur X au sens de loc. cit., et en particulier c'est un topos localement annelé au-dessus de X . Par suite $P_{\text{ét}}$ est un topos localement annelé au-dessus de $X_{\text{ét}}$, et on a un morphisme structural

$$f : P_{\text{ét}} \longrightarrow X_{\text{ét}} \quad .$$

Procédant comme dans [17] , on considère le faisceau inversible canonique $\mathbb{L} = \mathcal{O}_P(-1)$ sur P , d'où une classe

$$\xi = c_1(\mathbb{L}) \in H^2(P_{\text{ét}}, \mu_n) \quad , \quad \mathbb{L} = \mathcal{O}_P(-1) \quad , \tag{1.5}$$

et par conséquent une section

$$\xi' \in H^0(X_{\text{ét}}, R^2 f_*(\mu_n)) \quad . \tag{1.6}$$

Lorsqu'on se fixe un isomorphisme

$$\phi : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{X_{\text{ét}}} \xrightarrow{\sim} (\mu_n)_{X_{\text{ét}}} \quad , \tag{1.7}$$

(ce qui est toujours possible localement sur $X_{\text{ét}}$, tout au moins), le résultat clef dans l'étude cohomologique de f consiste dans les relations :

$$\begin{cases} R^j f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{si } j \text{ impair, ou } j > 2(r-1) \quad . \\ R^{2i} f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \text{ est libre sur } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ , de base } \xi_o'^{\,i}, \text{ si} \\ \qquad\qquad 0 \leq i \leq r-1 \quad , \end{cases} \tag{1.8}$$

où $\xi'_o \in H^o(X_{ét}, R^2f_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))$ est déduit de ξ' donné par (1.6) grâce à l'isomorphisme (1.7) sur les coefficients. Utilisant la suite spectrale de Leray pour f et le faisceau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $P_{ét}$, on conclut de façon bien connue de (1.8) [25] que cette suite spectrale dégénère, et fournit un isomorphisme canonique de $H^*(X_{ét}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ -modules :

(1.9) $$H^*(P_{ét}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \coprod_i H^*(X_{ét}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\, \xi_o^{\,i} \quad ,$$

i.e. $H^*(P_{ét}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est libre sur $H^*(X_{ét}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, de base les $\xi_o^{\,i}$ pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, $\xi_o \in H^2(P_{ét}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ désignant l'image de ξ (1.5) grâce à l'isomorphisme φ (1.7) sur les coefficients. C'est là une variante globale de (1.8) , essentiellement équivalente à (1.8) . Quant à la démonstration de (1.8) , une fois étendue au cas des schémas relatifs le "théorème de changement de base pour un morphisme propre" de [2, Exp. XII] , elle se ramène à la détermination de la structure cohomologique de l'espace projectif sur un corps algébriquement clos, qui est bien connue [25] .

Toujours moyennant (1.7) , on pourra de façon unique, grâce à (1.9) , exprimer $\xi_o^{\,r}$ comme combinaison linéaire des $\xi_o^{\,i}$ $(0 \leqslant i \leqslant r-1)$, d'où une relation de la forme

(1.10) $$\sum_{0 \leqslant i \leqslant r} c_i(\mathbb{E})_o\, \xi_o^{\,r-i} = 0 \quad ,$$

où les $c_i(\mathbb{E})_o \in H^{2i}(X_{ét}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sont bien déterminés par cette relation et la condition $c_o(\mathbb{E})_o = 1$, et définissent les classes de Chern (1.4) de E à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'où grâce à (1.7) des classes de Chern (1.4) (puisque ϕ définit des isomorphismes

(1.11) $$\phi^i : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_n^{\otimes i} \qquad).$$

1.4. Cette définition cependant dépend en apparence de l'existence et du choix d'un isomorphisme global (1.7) . Pour donner une définition qui en soit indépendante, on procède comme dans [25] pour déduire des isomorphismes (1.8) (qui gardent un sens localement sur $X_{ét}$) , pour tout faisceau $\mathbb{F}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modules sur $X_{ét}$, un isomorphisme

$$(1.12) \qquad H^i(P_{ét}, f^*(\mathbb{F})) \simeq \coprod_{j\geqslant 0} H^{i-2j}(X_{ét}, \mathbb{F}\otimes\mu_n^{\otimes(-j)})\,\xi^j \quad ,$$

(où la somme du deuxième membre est en fait finie, puisqu'il suffit de l'étendre aux $j \geqslant 0$ tels que $i-2j \geqslant 0$ i.e. $2j \leqslant i$) , qui réalise un isomorphisme de $H^i(P_{ét}, f^*(\mathbb{F}))$ avec la somme directe des $H^{i-2j}(X_{ét}, \mathbb{F}\otimes\mu_n^{\otimes(-j)})$ correspondants ; bien entendu, le produit de ce dernier module avec ξ^j s'entend au sens du cup-produit avec $\xi^j \in H^{2j}(P_{ét}, \mu_n^{\otimes j})$, (où ξ^j est la cup-puissance j.ème de ξ défini dans (1.5)), compte tenu de l'homomorphisme canonique de $H^*(X_{ét}, \ldots)$ dans $H^*(P_{ét}, \ldots)$) . Ce cup-produit prend bien ses valeurs dans le premier membre de (1.12) .

La formule (1.12) , qui est une généralisation de (1.9) indépendante de la donnée d'un ϕ comme dans (1.7) , donne un sens à la formule analogue à (1.10) , où nous pouvons maintenant supprimer les indices o aux classes de cohomologie envisagées :

$$(1.13) \qquad \sum_{0\leqslant i\leqslant r} c_i(\mathbb{E})\,\xi^{r-i} = 0 \quad .$$

Compte tenu de (1.12) , où on fait $\mathbb{F} = \mu_n^{\otimes r}$, cette formule (1.13) , plus la relation $c_o(\mathbb{E}) = 1$, détermine de façon unique les $c_i(\mathbb{E})$ comme éléments des $H^{2i}(X_{ét}, \mu_n^{\otimes i})$, annoncés dans (1.4) . On définit comme d'habitude la classe de Chern totale :

(1.14) $$c(\mathbb{E}) = \sum_{i \geqslant 0} c_i(\mathbb{E}) \quad .$$

1.5. Procédant comme dans [17] , [25] , on établit pour les classes $c_i(\mathbb{E})$ les trois propriétés caractéristiques : compatibilité avec les <u>images inverses</u> de Modules localement libres par des morphismes de topos, <u>normalisation</u> pour le cas des Modules inversibles (alors la classe de Chern est celle définie par (1.3)), enfin et surtout, la formule d'additivité

(1.15) $$c(\mathbb{E}) = c(E') \, c(E'')$$

pour une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'' \longrightarrow 0$$

de Modules localement libres. (Seule la vérification de cette dernière relation n'est pas triviale).

Pour simplifier, nous avions supposé dans nos réflexions que le Module localement libre $\mathbb{E}$ envisagé était de rang constant. Il est évident comment généraliser la définition au cas général, en décomposant le topos X en morceaux, sur chacun desquels $\mathbb{E}$ est de rang donné r . Le formulaire habituel (en particulier (1.15)) sera valable encore. Signalons également la formule bien connue

(1.16) $$c_1(\mathbb{E}) = c_1 \, (\text{dét} \, (\mathbb{E})) \quad ,$$

où dét ($\mathbb{E}$) est le faisceau <u>inversible</u>, puissance extérieure maxima de $\mathbb{E}$, et où le deuxième membre de (1.16) peut donc s'interpréter par la formule (1.3) appliquée à dét ($\mathbb{E}$) .

1.6. Il reste à examiner comment se comportent les classes de Chern $c_i(\mathbb{E})$, pour un $\mathbb{E}$ fixé, quand on fait varier n. Soit

$$n' = mn$$

un multiple de n, tel que $n'.1_X$ soit une section inversible de $\mathbb{O}_X$. Alors on a un homomorphisme canonique surjectif de faisceaux sur $X_{ét}$

(1.17) $$u_{n,n'} : \mu_{n'} \longrightarrow \mu_n ,$$

donné par l'élévation à la puissance n.ème. On en conclut des homomorphismes

(1.17 bis) $$u_{n,n'}{}^{\otimes i} : \mu_{n'}{}^{\otimes i} \longrightarrow \mu_n{}^{\otimes i} ,$$

d'où des homomorphismes canoniques

(1.18) $$u_{n,n'}^{(i)} : H^{2i}(X_{ét}, \mu_{n'}{}^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X_{ét}, \mu_n{}^{\otimes i}) .$$

Ceci posé, désignant par $c_i^{(n)}(\mathbb{E})$ les classes de Chern à coefficients dans les $\mu_n{}^{\otimes i}$, on trouve la formule de comparaison

(1.19) $$c_i^{(n)}(\mathbb{E}) = u_{n,n'}^{(i)}(c_i^{(n')}(\mathbb{E})) ,$$

dont la démonstration est essentiellement triviale en termes des définitions (ou de la caractérisation axiomatique des classes de Chern par leurs trois propriétés fondamentales), et de la vérification dans le cas du c_1 des faisceaux inversibles. Ce dernier résulte aussitôt de l'homomorphisme sur les suites exactes de cohomologie, déduit de l'homomorphisme sur les suites exactes de KUMMER associées respectivement à l'entier n' et n :

$$
(1.20)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mu_{n'} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\lambda \mapsto \lambda^{n'}} & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_{n,n'}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mu_{n} & \longrightarrow & \mathbb{G}_m & \xrightarrow{\ n\ } & \mathbb{G}_m & \longrightarrow & 0
\end{array} ,
$$

où $\alpha(z) = z^m$.

1.7. On peut exprimer les propriétés de compatibilités (1.19) de façon commode, lorsque n,n' parcourent les puissances d'un nombre premier ℓ fixé, en introduisant le "faisceau ℓ-adique"

$$
(1.21)\qquad T_\ell = T_\ell(\mathbb{G}_m) = (\mu_{\ell^\nu})_{\nu \geqslant 0} ,
$$

système projectif des faisceaux μ_{ℓ^ν} ($\nu \geqslant 0$) sur $X_{\text{ét}}$ (les morphismes de transition étant donnés par (1.17)), et ses puissances tensorielles

$$
(1.22)\qquad T_\ell^{\otimes i} = (\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})_{\nu \geqslant 0} ,
$$

système projectif des faisceaux $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$, à morphismes de transition donnés par (1.17 bis) . Par abus de langage, le faisceau ℓ-adique $T_\ell^{\otimes 0}$ sera aussi simplement noté $\mathbb{Z}_\ell$, mais on gardera à l'esprit qu'il s'agit ici d'un système projectif de faisceaux sur $X_{\text{ét}}$, et non du faisceau constant sur $X_{\text{ét}}$ défini par l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ-adiques. On posera également, par définition

$$
(1.23)\qquad H^j(X_{\text{ét}}, T_\ell^{\otimes i}) = \varprojlim_{\nu} H^j(X_{\text{ét}}, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) .
$$

Les relations de compatibilité (1.19) peuvent alors s'exprimer en disant que (pour un nombre premier ℓ fixé, tel que $\ell.1_X$ soit une section inversible de $\mathcal{O}_X$) les $c_i^{(\ell^\nu)}(\mathbb{E})$, pour ν variable, sont les composantes d'un élément bien déterminé

$$c_i(\mathbb{E})(\ell) \in H^{2i}(X_{ét}, T_\ell^{\otimes i}) \quad , \tag{1.24}$$

qu'on appellera la i.<u>ème classe de Chern</u> ℓ -<u>adique</u> du faisceau localement libre $\mathbb{E}$. La connaissance de ces $c_i(\mathbb{E})(\ell)$, pour tout nombre premier ℓ tel que $\ell.1_X$ soit inversible, équivaut à la connaissance des $c_i^{(n)}(\mathbb{E})$ pour tout n admissible i.e. tel que $n.1_X$ soit inversible. D'autre part, ces classes de Chern ℓ -adiques satisfont encore manifestement aux propriétés habituelles déjà énumérées plus haut, et en particulier à la formule d'additivité (1.15) pour une suite exacte courte de Modules localement libres $0 \longrightarrow \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'' \longrightarrow 0$.

1.8. Supposons que le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ de X soit un faisceau de $\mathbb{C}$ -algèbres (où $\mathbb{C}$ désigne le corps des complexes), qui soit muni en plus d'une structure vectorielle topologique (i.e. qui soit en même temps le faisceau de $\mathbb{C}$ -vectoriels sous-jacent à un faisceau sur X , à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques). Moyennant des conditions convenables, impliquant en particulier la convergence de la série exponentielle à coefficients dans $\mathcal{O}_X$, d'où la suite exacte exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 \quad , \tag{1.25}$$

on peut espérer trouver, sur le modèle déjà utilisé, une théorie des classes de Chern à coefficients entiers

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X,\mathbb{Z}) \quad , \tag{1.26}$$

pour les faisceaux de Modules localement libres $\mathbb{E}$ sur X , qui pour un faisceau inversible $\mathbb{L}$ soit donné par la formule

$$c_1(\mathbb{L}) = \partial(c\ell(\mathbb{L})) \in H^2(X,\mathbb{Z}) \quad , \tag{1.27}$$

où ici l'opérateur cobord ∂ est celui associé à la suite exacte (1.25). La question technique qui se posera, pour développer ce point de vue, est d'arriver à formuler des conditions sur X, qui, non seulement permettent d'écrire (1.25), mais qui de plus permettent de développer une notion de fibré projectif P associé à un Module localement libre $\mathbb{E}$, qui fournisse pour P un topos topologiquement annelé satisfaisant aux mêmes conditions que X (donnant lieu par suite à une suite exacte exponentielle (1.25)), et satisfaisant aux relations de la forme (1.8) (avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ remplacé par $\mathbb{Z}$, et ξ'_o par la section ξ' de $R^2f_*(\mathbb{Z})$ définie par le faisceau inversible canonique $\mathbb{L}$ sur P). Sans tenter ici une axiomatisation dans da **sens (*)**, remarquons que dans le cas particulier où X est le topos des faisceaux d'ensembles associé à un espace topologique ordinaire, ou plus généralement, le topos des faisceaux d'ensembles à groupe d'opérateurs [16, Chap. V] associé à un espace topologique X_o muni d'un groupe d'automorphismes G, les conditions envisagées sont vérifiées de façon évidente, en prenant sur X_o le faisceau d'anneaux topologiques des fonctions complexes continues, et prenant comme fibré projectif associé à un Module localement libre $\mathbb{E}$ (à groupe G) le fibré projectif ordinaire, considéré comme un espace topologique à groupe d'opérateurs G, et muni encore du faisceau d'anneaux (à groupe d'opérateurs G) des fonctions complexes continues sur P (ou plus précisément, le topos des faisceaux d'ensembles à groupe d'opérateurs G sur ledit fibré projectif). Les groupes de cohomologie du topos X associé à (X_o,G) ne sont autres que les groupes de cohomologie mixtes

(1.28) $$H^i(X_o,G\,;\mathbb{Z})$$

de l'espace et du groupe G, étudiés dans loc. cit. Dans ce cas, on trouve

(*) Il apparaît qu'il y en a, suivant des principes fort généraux et naturels à la fois!

une théorie des classes de Chern pour les Modules loc. libres équivariants $\mathbb{E}$ sur X_o , de groupe G , fournissant des invariants

(1.29) $$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_o, G\ ; \mathbb{Z}) \quad ,$$

théorie qui dans le cas où G est réduit au groupe unité, se réduit à la théorie ordinaire des classes de Chern. (Il serait d'ailleurs possible de ramener le cas général à celui-ci, en interprétant les groupes (1.28) comme les groupes de cohomologie ordinaire d'un espace fibré (X_o,G) convenable bien connu, de fibre X_o , et de base l'espace classifiant [7] B_G du groupe discret G ; nous laissons au lecteur le soin (facile) de vérifier la compatibilité de cette définition, et de la définition envisagée ici via les fibrés projectifs).

Ceci posé, et nous restreignant (par la force des choses !) au cas particulier des espaces topologiques à opérateurs, il s'impose de comparer les classes (1.4) et (1.29) . D'ailleurs ici $X_{ét} \longrightarrow X$ sera une équivalence de topos, donc les classes (1.4) peuvent être considérées comme des classes

(1.30) $$c_i^{(n)}(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_o, G\ ; \mu_n^{\otimes i}) \quad .$$

Notons d'autre part qu'on a ici un isomorphisme canonique (1.7) , défini par l'exponentielle par la formule

(1.31) $$\phi(1 \bmod n) = \exp\,(2i\pi/n) \quad ,$$

de sorte que la donnée des classes (1.22) équivaut à celle de classes

(1.32) $$c_i^{(n)}(\mathbb{E})_o = (\phi^{\otimes i})^{-1}(c_i^{(n)}(\mathbb{E})) \in H^{2i}(X_o, G\ ; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad .$$

D'autre part, ces dernières sont définies, comme il a été vu plus haut, à l'aide de la formule (1.10) , qui est aussi essentiellement la formule qui définit les classes de Chern "transcendantes" (1.27) , à cela près que les coefficients pour cette dernière sont $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et que l'on travaille sur le fibré projectif ordinaire (au lieu de travailler sur le fibré projectif au sens : schéma relatif sur X_o , à groupe d'opérateurs G). Ceci implique alors aussitôt que les <u>classes de Chern "arithmétiques"</u>, <u>sous la forme</u> (1.24) , <u>déduite de</u> (1.22) <u>et</u> (1.23) , <u>se déduisent des classes de Chern "transcendantes"</u> (1.29) , <u>par l'homomorphisme canonique</u>

$$H^{*}(X_o,G\,;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{*}(X_o,G\,;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

<u>déduit de l'homomorphisme canonique</u> $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ <u>sur les coefficients</u>. En effet, grâce à ce qui précède, on est ramené à prouver la même chose pour les invariants c_1 et $c_{1\,o}^{(n)}$ associés au fibré inversible à opérateurs $\mathbb{L} = \mathcal{O}_P(1)$ sur le fibré projectif (ordinaire) P , ce qui nous ramène à l'énoncé de comparaison pour les invariants (1.5) resp. (1.27) associés à un faisceau <u>inversible</u> $\mathbb{L}$ sur X . Or dans ce cas, ceci résulte des définitions, et de l'homomorphisme de suites exactes de cohomologie associé à l'homomorphisme suivant entre les suites exactes de Kummer (1.1) et exponentielle (1.17) :

(1.35)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_o} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{*}_{X_o} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle\beta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \Big\| {\scriptstyle id} & & \\
0 & \longrightarrow & \mu_n & \longrightarrow & \mathcal{O}^{*}_{X_o} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{*}_{X_o} & \longrightarrow & 0
\end{array} ,$$

où les flêches verticales sont définies par

$$\begin{cases} \alpha(z) = \exp(2i\pi z/n) \\ \beta(t) = \phi\ (t \bmod n) = \exp \dfrac{2i\pi t}{n} \end{cases} .$$

§ 2. Classes de Chern sur un schéma à groupe d'opérateurs.

2.1. Soit X un schéma (*), muni d'un groupe G d'automorphismes. Procédant comme dans [16, Chap V], on en conclut que G "opère" sur le topos des faisceaux étales [2, VII] sur X, d'où une notion de "faisceau étale sur X à groupe d'opérateurs G", ou "faisceaux sur $(X_{ét},G)$", ces faisceaux formant une catégorie, qui est encore un topos $\mathcal{C}$, comme il résulte facilement du critère de GIRAUD [2, IV 1.2]. Donc aux objets abéliens de ce topos, i.e. aux faisceaux abéliens F sur X, à groupe d'opérateurs G, sont associés des groupes de cohomologie, appelés groupes de cohomologie (mixtes) étales du schéma à opérateurs G, et notés

$$H^i(X_{ét},G\ ;\ F) \quad . \tag{2.1}$$

On explicite les liens de cette cohomologie mixte avec, d'une part la cohomologie étale ordinaire de X (étudiée dans [2]), et d'autre part la cohomologie ordinaire du groupe abstrait G, en termes d'une suite spectrale canonique

$$H^*(X_{ét},G;F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(G,\ H^q(X_{ét},F)) \quad . \tag{2.2}$$

Cette suite spectrale s'établit exactement comme la suite exacte analogue

(*) En conformité avec la réédition du Chap. I des EGA, nous dirons dorénavant "schéma" au lieu de "préschéma", en réservant le mot "schéma séparé" à la notion précédemment désignée sous le nom de "schéma".

dans [16, 5.2.1] , ou plus simplement, comme cas particulier de la suite spectrale de LERAY [37, V § 5] . Nous laissons le détail au lecteur, ainsi que l'établissement (lorsque X/G existe dans un sens raisonnable) de la deuxième suite spectrale donnée dans loc. cit., qui n'est qu'un cas particulier de la suite spectrale de LERAY pour morphismes de topos (et dont nous n'aurons pas besoin ici).

2.2. Soit maintenant $\mathbb{E}$ un Module localement libre sur X , muni d'opérations de G (compatibles avec les opérations de G sur X). On peut, de façon équivalente, regarder $\mathbb{E}$ comme un Module localement libre du topos $\mathcal{C}$ annelé par $\mathcal{O}_X$, ce qui conduit (compte tenu des considérations générales du par. 1) à construire des classes de Chern pour $\mathbb{E}$. De façon précise, $n > 0$ étant un entier fixé, tel que $n.1_X$ soit une section inversible de $\mathcal{O}_X$, i.e. n premier aux caractéristiques résiduelles de X , on définira directement des

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X_{ét},G;\mu_n^{\otimes i}) \quad , \tag{2.3}$$

en transcrivant simplement la construction esquissée au § 1. On dispose ici du fibré projectif ordinaire $P = P(\check{\mathbb{E}})$ associé au Module dual $\check{\mathbb{E}}$ [EGA II 4.1.1] (Noter que la convention de notation adoptée dans loc. cit. est opposée de celle qui était utilisée dans [17] , où on note $P(\mathbb{E})$ ce qui ici est noté $P(\check{\mathbb{E}})$). Le groupe G opère encore sur P . Nous pouvons donc considérer la cohomologie étale mixte de (P,G) , ce qui nous dispense tout à la fois du recours à la notion généralisée de schéma relatif de [22] , et à une théorie (encore à écrire) de la cohomologie étale des topos localement annelés généraux, dont il était question au § 1. Nous pouvons alors sans difficulté transcrire la construction indiquée au § 1 dans le contexte particulier actuel, travail qui est écrit en détail dans [25] lorsque G est le groupe unité, exposé auquel il n'y a essentiellement rien à changer. Pour le morphisme

$$f : (P,G) \longrightarrow (X,G) \quad ,$$

les formules purement locales (1.8) sont valables : le processus de localisation dans les topos associés à (X,G) , (P,G) implique en effet, en particulier, "l'oubli" des opérations de G , de sorte que les formules à vérifier sont identiques aux formules analogues, quand on fait abstraction des opérations de G , formules qui sont établies dans loc. cit. comme conséquence du "théorème de changement de base pour un morphisme propre" [2,XII 5.1] . On en déduit, pour tout faisceau abélien à opérateurs $\mathbb{F}$ sur (X,G) , annulé par n (i.e. qui est un faisceau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -modules) des isomorphismes canoniques (*)

$$(2.4) \qquad H^i(P,G;f^*(\mathbb{F})) \simeq \coprod_{j \geqslant 0} H^{i-2j}(X,G;\mathbb{F}\otimes \mu_n^{\otimes(-j)})\,\xi^j \quad , \text{ où}$$

$$(2.5) \qquad \xi = \partial(c\ell(\mathcal{O}_P(1)) \in H^2(P,G;\mu_n) \quad .$$

Dans cette dernière formule, on interprète $c\ell(\mathcal{O}_P(1))$ comme un élément

$$(2.6) \qquad c\ell\,(\mathcal{O}_P(1)) \in H^1(P,G;\mathbb{G}_m) \quad ,$$

dans la cohomologie mixte de $P_{ét}$ et de G , à coefficients dans le groupe multiplicatif, compte tenu des opérations de G sur $\mathcal{O}_P(1)$ (déduites des opérations de G sur $\mathbb{E}$ et du caractère fonctoriel de la construction de $\mathcal{O}_P(1)$ en fonction de $\mathbb{E}$). La suite exacte de KUMMER (1.1) est ici regardée comme une suite exacte de faisceaux abéliens <u>à opérateurs</u> sur $P_{ét}$

(*) Dorénavant, quand une confusion ne sera pas à craindre, nous omettrons l'indice "ét" dans la notation (2.1) .

(l'exactitude provenant de l'hypothèse que $n.1_X$ est inversible), ce qui donne un sens à l'opérateur cobord qui intervient dans (2.5). Une fois obtenu (2.4), on en déduit une définition des classes de Chern (2.3) par la formule (1.13) .

2.3. Les classes de Chern qu'on vient de définir satisfont aux trois propriétés fondamentales de HIRZEBRUCH [23] , qui les caractérisent :

(i) Fonctorialité, pour un morphisme $f : (X',G') \longrightarrow (X,G)$ de schémas à groupes d'opérateurs, un Module localement libre $\mathbb{E}$ sur (X,G) , et son image inverse $f^*(\mathbb{E})$ sur (X',G') :

$$c_i(f^*(\mathbb{E})) = f^*(c_i(\mathbb{E})) \quad .$$

(ii) Normalisation, pour un fibré inversible $\mathbb{L}$:

$$c(\mathbb{L}) = 1 + c_1(\mathbb{L}) \ , \quad \text{où} \quad c_1(\mathbb{L}) \ \text{est donné par} \ (2.5) \ .$$

(iii) Formule d'additivité, pour une suite exacte $0 \longrightarrow \mathbb{E}' \longrightarrow \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'' \longrightarrow 0$ de Modules localement libres sur (X,G) :

$$c(\mathbb{E}) = c(\mathbb{E}')\, c(\mathbb{E}'') \quad .$$

La démonstration de (i) et (ii) est triviale ; pour celle de (iii), qui se fait suivant le même principe que dans [17] , nous renvoyons à [25] , où est traité le cas où $G = e$, et dont la démonstration se transpose immédiatement au cas général. - Des propriétés (i), (ii) et (iii) on déduit formellement, de façon bien connue, le formulaire habituel, comprenant notamment le calcul des classes de Chern d'une puissance extérieure ou d'un produit tensoriel de Modules localement libres à opérateurs : on se ramène toujours au cas de Modules qui sont des sommes de Modules à opérateurs inversibles (par passage à des schémas de drapeaux convenables), grâce au fait que la cohomologie de X s'envoie injectivement dans celle de ces fibrés.

Comme cas particulier utile de (i) , signalons le fait suivant : l'image des $c_i(\mathbb{E})$ par l'homomorphisme "d'oubli de G "

$$H^{2i}(X,G\,;\mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X,\mu_n^{\otimes i}) \quad ,$$

sont les classes de Chern ordinaires de $\mathbb{E}$, après oubli des opérations de G .

§ 3. Comparaison avec la définition transcendante.

3.1. Supposons maintenant que X soit un schéma localement de type fini sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes. Alors à X est associé un espace analytique X^{an} , sur lequel G opère encore par automorphismes. Le Module localement libre à opérateurs $\mathbb{E}$ sur (X,G) définit de même un Module localement libre à opérateurs $\mathbb{E}^{an}$ sur X^{an} . Il lui sont associés, par voie transcendante, des classes de Chern

$$(3.1) \qquad c_i(\mathbb{E}^{an}) \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}) = H^{2i}(X^{top},G;\mathbb{Z}) \quad ,$$

où X^{top} désigne l'espace topologique localement compact sous-jacent à X^{an} (muni du groupe d'automorphismes G) ; par définition, les $c_i(\mathbb{E}^{an})$ sont les classes de Chern associées au fibré vectoriel complexe topologique à opérateurs associé à $\mathbb{E}^{an}$, ou si on préfère, au faisceau de modules localement libre sur (X^{top},G) , annelé par les fonctions continues complexes, associé à $\mathbb{E}^{an}$ par extension du faisceau d'anneaux des fonctions homomorphes aux fonctions continues. Une définition en forme de ces classes de Chern est esquissée dans § 1.8. Les considérations développées à cet endroit s'appliquent de plus, dans la situation présente, pour donner une description des classes de Chern "arithmétiques" (2.3) en termes des classes de Chern "transcendantes" (3.1) . Pour préciser ce point, notons qu'on a des homomorphismes canoniques évidents

$$H^j(X_{\acute{e}t},G;\mathbb{F}) \longrightarrow H^j(X^{an},G\ ;\ g^*(\mathbb{F})) \tag{3.2}$$

associés au morphisme de topos associé au morphisme de sites à groupe d'opérateurs évident (comparer [2, XI 4])

$$g\ :\ (X^{an}_{\acute{e}t},G) \longrightarrow (X_{\acute{e}t},G) \quad . \tag{3.3}$$

Lorsque le faisceau abélien à opérateurs F sur $X_{\acute{e}t}$ est constructible au sens de [2, IX] , en particulier est un faisceau de la forme $\mu\!\!\!\mu_n^{\otimes i}$, alors les homomorphismes (3.2) sont des <u>isomorphismes</u>. En effet, l'utilisation de la suite spectrale (2.2) , et de la suite spectrale analogue pour le faisceau à opérateurs $g^*(\mathbb{F})$ sur (X^{an},G) , nous ramène au cas où G est le groupe unité, cas qui est traité dans [2, XVI] (ou, plus élémentairement, i.e. sans résolution des singularités, dans [2,XI] lorsque X est lisse sur $\mathbb{C}$, cas qui suffira le plus souvent). En particulier, on trouve des homomorphismes

$$H^{2i}(X_{\acute{e}t},G;\mu\!\!\!\mu_n^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X^{an},G;\mu\!\!\!\mu_n^{\otimes i}) \tag{3.2 bis}$$

qui sont en fait des <u>isomorphismes</u>. Donc la classe de Chern (2.3) dans le premier membre de (3.2 bis) est connue quand on connaît son image dans le deuxième membre $H^{2i}(X^{an},G;\mu\!\!\!\mu_n^{\otimes i})$. Utilisant de plus l'isomorphisme ϕ de

(1.7) défini par (1.31), d'où des isomorphismes

$$H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2i}(X^{an},G;\mu_n^{\otimes i}) \quad , \tag{3.4}$$

on voit qu'il suffit d'exprimer les classes correspondantes

$$c_i^{(n)}(\mathbb{E})_o \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \quad , \tag{3.5}$$

définies en termes des classes (2.3) en appliquant (3.2 bis) et l'isomorphisme inverse de (3.4). Ceci posé, les considérations esquissées à la fin du § 1 montrent que <u>les classes</u> (3.5) <u>ne sont autres que celles qui se déduisent des classes de Chern "transcendantes"</u> (3.1) <u>par les homomorphismes</u> $H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2i}(X^{an};G;\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ <u>déduits de l'homomorphisme canonique</u> $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ <u>sur les coefficients</u>.

3.2. Inversement, dans le cas où les homomorphismes canoniques

$$H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}) \longrightarrow \varprojlim_n H^j(X^{an},G,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \prod H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}_\ell) \tag{3.6}$$

sont injectifs, alors la connaissance des $c_i^{(n)}(\mathbb{E})$, ℓ premier, i.e. la connaissance des classes de Chern ℓ-adiques (§ 1.7)

$$c_i(\mathbb{E})(\ell) \in H^{2i}(X,G;T_\ell^{\otimes i}) \quad , \tag{3.7}$$

ou encore de leurs images

$$c_i(\mathbb{E})(\ell)_o \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z}_\ell) \quad , \tag{3.8}$$

implique celle des classes de Chern transcendantes (3.1).

On fera bien attention que dans le dernier membre de (3.6), et dans 3.8, $\mathbb{Z}_\ell$ doit être considéré comme désignant un faisceau ℓ-adique à opérateurs sur

X^{an} , i.e. le <u>système projectif</u> $(\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$ de faisceaux à opérateurs, - et non le faisceau constant défini par le groupe abstrait $\mathbb{Z}_{\ell}$, comparer § 1.6 . Ainsi, on a <u>par définition</u>

(3.9) $$H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}_{\ell}) = \varprojlim_{\nu} H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z}) \quad ,$$

et on peut seulement dire qu'on a un homomorphisme canonique

(3.10) $$H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\ell} \longrightarrow H^j(X^{an},G;\mathbb{Z}_{\ell}) \quad ,$$

homomorphisme qui en général <u>n'est pas</u> un isomorphisme.

3.3. Cependant, <u>lorsque les</u> $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$ <u>sont des</u> $\mathbb{Z}$ <u>-modules de type fini</u>, <u>alors les homomorphismes</u> (3.10) <u>sont des isomorphismes</u>, <u>et par suite l'homomorphisme</u> (3.6) <u>est bien injectif</u> (puisque la famille de changements d'anneaux $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\ell}$ est fidèlement plate). C'est là une conséquence facile de la suite exacte déduite de $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$, reliant les cohomologies à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, conséquence que nous laissons au lecteur d'établir. La condition de finitude envisagée sur les $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$ est vérifiée en particulier lorsque X est de type fini sur $\mathbb{C}$, et que le $\mathbb{Z}[G]$ -module "trivial" $\mathbb{Z}$ admet une résolution gauche L_* par des $\mathbb{Z}[G]$-modules libres de type fini. Pour le vérifier, on est ramené, compte tenu de la suite spectrale de nature transcendante analogue à (2.2) , relative à l'espace à opérateurs (X^{an},G) muni du faisceau constant $\mathbb{Z}$, à montrer que les $H^q(X^{an},\mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}$ -modules de type fini, ce qui est une conséquence bien connue de la triangulabilité des paires de variétés algébriques complexes [31] , et à prouver que $H^p(G,M)$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$ lorsque M est un G -module qui est de type fini sur $\mathbb{Z}$, ce qui résulte aussitôt du calcul habituel de la cohomologie de G en termes de L_* .

3.4. Lorsque les $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$ sont des $\mathbb{Z}$-modules de type fini, donc les homomorphismes (3.10) des isomorphismes, on conclut aussitôt ceci : Pour que la classe de Chern entière $c_i(\mathbb{E})$ soit une classe de torsion, il faut et il suffit que la classe de Chern ℓ-adique $c_i(\mathbb{E})(\ell)$ le soit ; si cette dernière est d'ordre ℓ^s, alors la composante de $c_i(\mathbb{E})$ dans le sous-groupe de ℓ-torsion de $H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Z})$ est d'ordre ℓ^s.

En l'absence d'hypothèses de finitude sur les $H^j(X^{an},G;\mathbb{Z})$, on peut donner encore des énoncés un peu moins précis, dans lesquels on peut d'ailleurs remplacer X^{an} par n'importe quel espace topologique Z, en travaillant cependant avec l'homologie et la cohomologie <u>singulières</u> de l'espace

$$(Z,G) = (E_G \times Z)/G$$

(E_G étant le fibré universel pour G, cf 0.1). Posant pour abréger

(3.11) $$H_i = H_i((Z,G),\mathbb{Z})) \quad , \quad H^i = H^i((Z,G),\mathbb{Z}) \quad ,$$

la formule des coefficients universels [8, Chap. VI] nous donne la suite exacte :

(3.12) $$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{i-1},\mathbb{Z}) \longrightarrow H^i \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_i,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad .$$

Soit ℓ un nombre premier. Alors un élément c de H^i a une image nulle dans $H^i((Z,G),\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})$ si et seulement si il est "divisible par ℓ^ν", donc il en est ainsi pour tout ν si et seulement si c est "infiniment ℓ-divisible dans H^i". Comme le seul élément infiniment ℓ-divisible de $\mathbb{Z}$ est zéro, il s'ensuit alors que l'image de c dans $\mathrm{Hom}(H_i,\mathbb{Z})$ est nulle, donc que

$$(3.13) \qquad c \in \mathrm{Ext}^1(H_{i-1}, \mathbb{Z}) \quad .$$

De plus, $\mathrm{Hom}(H_i, \mathbb{Z})$ étant sans torsion, on voit que c est infiniment ℓ-divisible dans le Ext^1 .

Considérons maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow H_{i-1} \longrightarrow S \longrightarrow 0 \quad ,$$

où T est le sous-groupe de ℓ-torsion de H_{i-1} , d'où (compte tenu que $\mathrm{Hom}(T, \mathbb{Z}) = 0$) une suite exacte sur les Ext^1 :

$$(3.14) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(S, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{i-1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \quad .$$

D'autre part, T étant un groupe de torsion, calculant son Ext^1 avec $\mathbb{Z}$ grâce à la résolution injective standard de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on trouve

$$\mathrm{Ext}^1(T, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_U \mathrm{Hom}(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad ,$$

où U parcourt les sous-groupes <u>finis</u> de T . Comme pour un tel U , $\mathrm{Hom}(U, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un ℓ-groupe fini, donc n'a d'autre élément infiniment ℓ-divisible que zéro, il s'ensuit que $\mathrm{Ext}^1(T, \mathbb{Z})$ n'a d'autre élément infiniment ℓ-divisible que zéro, d'où compte tenu de (3.13) (3.14) :

$$c \in \mathrm{Ext}^1(S, \mathbb{Z}) \quad .$$

Notons d'autre part que, S étant sans ℓ-torsion, i.e. la multiplication par ℓ dans S étant injective, et Ext^1 étant exact à gauche en son premier argument, on trouve que la multiplication par ℓ dans $\mathrm{Ext}^1(S, \mathbb{Z})$ est surjective, donc le groupe $\mathrm{Ext}^1(S, \mathbb{Z})$ est ℓ-divisible. En résumé :

Proposition 3.5. *Soit* Z *un espace topologique à groupe discret d'opérateurs* G , *soient* H_i *et* H^i *les groupes d'homologie et cohomologie singulière mixtes en degré* i *de l'espace à opérateurs, donnés par* (3.11) , ℓ *un nombre premier,* S_i^{ℓ} *le quotient de* H_i *par son sous-groupe de* ℓ*-torsion, et considérons la suite exacte des coefficients universels* (3.12) , *d'où moyennant l'inclusion* (3.14) $\mathrm{Ext}^1(S_{i-1}^{\ell},\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(H_{i-1},\mathbb{Z})$, *une inclusion*

$$\mathrm{Ext}^1(S_{i-1}^{\ell},\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^i \quad .$$

Ceci posé, pour tout nombre premier ℓ , *la partie de* H^i *formée des éléments infiniment* ℓ*-divisibles, i.e. dont les images dans les* $H^i((Z,G,\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$ *sont nulles, est identique à* $\mathrm{Ext}^1(S_{i-1},\mathbb{Z})$. *En particulier, un élément infiniment* ℓ*-divisible* c *de* H^i *a une image nulle dans* $\mathrm{Hom}(H_i,\mathbb{Z})$, *ou, ce qui revient au même, a une image nulle dans* $H^i((Z,G),\mathbb{Q})$. *Enfin, lorsque le sous-groupe de* ℓ*-torsion* T_{i-1}^{ℓ} *de* H_{i-1} *est annulé par une puissance finie de* ℓ *(par exemple si* H_{i-1} *est de type fini), alors les éléments* c *de* H^i *d'image dans* $H^i((Z,G),\mathbb{Q})$ *nulle sont exactement ceux pour lesquels il existe un entier* $m > 0$, *avec* mc *infiniment* ℓ*-divisible.*

3.5.1. Bien entendu, le lecteur aura remarqué que cet énoncé n'a rien de spécial aux espaces à opérateurs et leur cohomologie mixte singulière, et concerne plutôt la cohomologie et l'homologie d'un complexe de chaînes de groupes abéliens quelconque. Il s'applique aux groupes tels que les $H^i(X^{an},G;\mathbb{Z})$ considérés plus haut, grâce au fait que pour des espaces localement contractibles comme X^{an} , la théorie de la cohomologie singulière coïncide avec la théorie faisceautique, comme il est bien connu.

§ 4. Propriétés de torsion des classes de Chern : cas géométrique.

4.1. Sous les conditions générales de 2.1, supposons que X soit le spectre d'un corps séparablement clos k. Alors le topos formé des faisceaux étales sur X est équivalent, par le foncteur "sections", au topos égal à la catégorie des ensembles ; donc le topos des G-faisceaux n'est autre à équivalence près que le topos des ensembles à groupe d'opérateurs G, donc la cohomologie mixte (2.1) se réduit alors à la cohomologie ordinaire de G, à coefficients dans des G-modules. Donc, supposant qu'on fait opérer G trivialement sur k, de sorte que les "fibrés vectoriels à opérateurs" envisagés dans 2.2 ne sont autres que les représentations de G dans des vectoriels de dimension finie sur k, pour un tel (G,k)-module E, les classes de Chern ℓ-adiques sont des classes

$$(4.1) \qquad c_i(E) \in H^{2i}(G, T_\ell(k)^{\otimes i}) \overset{\text{dfn}}{=} \varprojlim_{\nu} H^{2i}(G, \mu_{\ell^\nu}(k)^{\otimes i}) ,$$

(où le premier groupe de cohomologie écrit n'est qu'une notation abrégée et abusive pour la limite projective du dernier membre).

4.2. Soit alors π le groupe des automorphismes du corps k. Il opère sur le système projectif des groupes $\mu_{\ell^\nu}(k)$, donc sur celui des $\mu_{\ell^\nu}(k)^{\otimes i}$, donc sur le groupe de cohomologie ℓ-adique intervenant dans 4.1. Les propriétés générales des classes de Chern résumées dans 2.3 donnent alors, pour tout $\sigma \in \pi$, la formule

$$(4.2) \qquad \sigma(c_i(E)) = c_i({}^{\sigma}E) \quad , \quad {}^{\sigma}E = E \otimes_k (k,\sigma) \quad ,$$

où dans le dernier membre (k,σ) désigne k considéré comme k-algèbre grâce à l'homomorphisme $\sigma : k \longrightarrow k$, et où on fait opérer encore G sur le produit tensoriel de la façon habituelle. En particulier, si π_E est le sous-groupe de π "stabilisateur" de la classe de E , i.e. formé des $\sigma \in \pi$ tels que $E \simeq {}^{\sigma}E$, on voit que $c_i(E)$ <u>est invariante par</u> π_E :

$$(4.3) \qquad \sigma(c_i(E)) = c_i(E) \quad \text{si} \quad E \simeq {}^{\sigma}E \quad .$$

4.3. Soit en particulier k_o un sous-corps de k , tel que la classe de E soit invariante par le groupe $\mathrm{Gal}(k/k_o)$ des k_o-automorphismes de k , i.e. tel que $\mathrm{Gal}(k/k_o) \subset \pi_E$; alors les $c_i(E)$ sont invariants par l'action de $\mathrm{Gal}(k/k_o)$. L'hypothèse sur k_o qu'on vient d'envisager est vérifiée en particulier si E provient, par extension du corps de base, du module E_o d'une représentation linéaire de G définie sur le sous-corps k_o . Cette condition suffisante n'est cependant nullement nécessaire, comme il est bien connu. Ainsi, lorsque k est de caractéristique nulle, il existe un plus petit sous-corps k_o de k ayant la propriété $\mathrm{Gal}(k/k_o) \subset \pi_E$ (*) : c'est le corps engendré sur le corps premier par les valeurs de la fonction trace

$$\mathrm{Tr}_E : G \longrightarrow k \quad ;$$

mais on sait qu'en général la représentation envisagée ne peut pas s'écrire sur ce corps.

Considérons donc la représentation de $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(k/k_o)$:

(*) du moins si le G-module E est semi-simple.

$$(4.4) \qquad \phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}\, T_\ell(k) \simeq \mathbb{Z}_\ell^* \ ,$$

que nous interprétons comme un caractère ℓ -adique de Γ . Alors la représentation de Γ dans $T_\ell(k)^{\otimes i}$ est donné par la puissance ordinaire i.ème de ce caractère :

$$(4.5) \qquad \phi^i : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}\, T_\ell(k)^{\otimes i} \simeq \mathbb{Z}_\ell^* \ .$$

Soit

$$(4.6) \qquad H_1 = \phi(\Gamma) \subset \mathbb{Z}_\ell^*$$

l'image de Γ par ϕ ; si $\bar{k}_o$ est une clôture séparable de k_o dans k , H_1 est aussi l'image du groupe profini $\mathrm{Gal}(\bar{k}_o/k_o)$ par l'application continue naturelle de celui-ci dans $\mathbb{Z}_\ell^*$, c'est donc un sous-groupe <u>fermé</u> de $\mathbb{Z}_\ell^*$. Il en est de même des groupes

$$(4.7) \qquad H_i = {H_1}^i = \phi^i\,(\Gamma) \subset \mathbb{Z}_\ell^* \ .$$

Ceci dit, la propriété d'invariance de $c_i(E)$ par $\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_o)$ s'explicite simplement par les relations $\lambda c_i(E) = c_i(E)$ pour $\lambda \in H_i$, i.e.

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} &(\lambda - 1)\, c_i(E) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \in H_i \ , \text{ ou encore} \\ &(\lambda^i - 1)\, c_i(E) = 0 \quad \text{pour} \quad \lambda \in H_1 \ , \end{aligned}$$

où bien entendu le groupe de valeurs dans (4.1) est regardé comme un module sur $\mathbb{Z}_\ell$ de la façon évidente. Cela montre déjà que <u>dans le cas où</u> $H_i \neq \{1\}$ (et en particulier, lorsque H_1 n'est pas réduit à un groupe fini) <u>la classe de cohomologie</u> ℓ -<u>adique</u> $c_i(E)$ <u>est une classe de torsion</u>, i.e. annulé par une puissance convenable de ℓ . De façon plus précise, posons dans ce cas

$$(4.9) \qquad \alpha(i) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in H_i} v_\ell(\lambda - 1) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in H_1} v_\ell(\lambda^i - 1) \quad ,$$

où v_ℓ désigne la valuation ℓ-adique. On aura alors

$$(4.10) \qquad \ell^{\alpha(i)}\, c_i(E) = 0 \quad \text{dans} \quad (4.1) \quad .$$

4.4. Remarquons que $U = \mathbb{Z}_\ell^*$ est un produit du groupe $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*$ des racines $(\ell-1)$.èmes de l'unité, qui est fini d'ordre $\ell-1$ premier à ℓ, par le groupe U_o des "Einseinheiten", qui est un module de type fini et de rang 1 sur $\mathbb{Z}_\ell$. Les sous-groupes fermés de U sont ceux dont la trace sur U_o est un sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module. Ce sont également les sous-groupes qui sont soit ouverts (donc d'indice fini), soit finis.

4.5. Lorsque H_1 est un sous-groupe fini de $U = \mathbb{Z}_\ell^*$, soit d le pgcd parmi les entiers annulant H_1, i.e. le plus petit $d > 0$ tel que

$$(4.11) \qquad H_1^{\,d} = \{1\} \quad (\text{d'où } d \mid \operatorname{card} H_1) \quad .$$

Alors la relation (4.8) ou (4.10) implique

$$(4.12) \qquad c_i(E) \text{ est de torsion pour } i \not\equiv 0 \pmod d \quad ;$$

elle ne donne aucun renseignement pour $i \equiv 0 \pmod d$. Un cas particulier amusant est celui où $k_o = \mathbb{R}$, corps des réels, d'où $\Gamma = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq H_1$ et $d = 2$: on trouve que la classe de Chern ℓ-adique $i^{\text{ème}}$ de la complexifiée d'une représentation linéaire réelle du groupe G, pour i impair, est nulle si $\ell \neq 2$, et annulée par 2 en tous cas. L'argument utilisé, qui revient à introduire la représentation complexe conjuguée dans $\bar{E}$ et à utiliser la relation $E \simeq \bar{E}$ d'où $c_i(E) = c_i(\bar{E}) = (-1)^i c_i(E)$, est également valable pour les classes de Chern entières transcendantes de 0.1, et dans le cas plus général des fibrés vectoriels réels et leurs complexifiés sur un espace topologique quelconque (pas nécessairement de la forme B_G), où le résultat est évidemment bien connu des topologues.

Lorsque H_1 n'est pas fini, donc est un sous-groupe d'indice fini de $U = \mathbb{Z}_\ell^*$, alors on trouve (comme déjà signalé plus haut) que toutes les classes de Chern ℓ-adiques sont de torsion, la formule (4.9) donnant une valeur finie pour $\alpha(i)$ pour <u>tout</u> entier $i \geq 1$, donc fournissant une relation (4.10) i.e. une majoration multiplicative $\ell^{\alpha(i)}$ de l'ordre de la classe de Chern ℓ-adique $c_i(E)$.

4.6. En tout cas, la majoration (4.10) de l'ordre de cette classe ne dépend que de k_o, de i, et de ℓ, et non du choix particulier de G et de E ; elle devient de moins en moins bonne quand i augmente multiplicativement, comme il est évident sur (4.9) : on ne trouve <u>jamais</u> de majoration de l'ordre de $c_i(E)$ indépendante de i, car $\alpha(i)$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers l'infini multiplicativement. D'autre part, posant

(4.13) $$\delta = \mathrm{Card}\,(\mathrm{Im}\,(H_1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*))\ , \text{ donc } \delta \mid (\ell-1)\ ,$$

on trouve $\alpha(i) = 0$ si et seulement si $i \not\equiv 0 \pmod{\delta}$, d'où

(4.14) $$c_i(E) = 0 \quad \text{si} \quad i \not\equiv 0 \pmod{\delta}\ .$$

On remarquera qu'en général, pour k_o, i et ℓ fixés, la majoration (4.10) pour l'ordre de la classe de Chern ℓ adique $c_i(E)$ (pour G et E variables) n'est pas la meilleure possible, déjà pour le cas $i=1$. Prenons par exemple pour k_o le corps des racines ℓ-èmes de l'unité sur $\mathbb{Q}$, alors $c_1(E)$ se calcule par la formule (2.5) en termes de la fonction déterminant

$$g \rightsquigarrow \det g_E : G \longrightarrow k_o^* \subset k^*$$

(qui est bien à valeurs dans k_o^* et non seulement dans k^*, à cause de l'hypothèse faite que la classe de E est rationnelle sur k_o), via les obstructions à écrire cet homomorphisme comme puissance ℓ^{ν}.ème d'un homomorphisme dans k^*. Or supposant G à engendrement fini, l'image M de G dans k_o^* est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, dont le sous-groupe de torsion est un sous-groupe du groupe des racines de l'unité de k_o, lequel est d'ordre $\ell-1$ d'après GAUSS [29, p. 53], donc <u>premier à</u> ℓ ; il s'ensuit que pour tout entier $\nu > 0$, l'inclusion $M \longrightarrow k^*$ se remonte en un homomorphisme $M \longrightarrow k^*$ via l'épimorphisme $x \rightsquigarrow x^{\ell^{\nu}} : k^* \longrightarrow k^*$. Par suite on trouve que la première classe de Chern ℓ-adique $c_1(E)$ est nulle. Ce résultat, établi d'abord pour G à engendrement fini, reste vrai pour tout G par un argument immédiat de passage à la limite. Or ici on aura $H_1 = U_o$, groupe des Einseinheiten, et $\alpha(1) = 1$, de sorte que la formule (4.10) ne donne que la relation $\ell\, c_1(E) = 0$, au lieu de $c_1(E) = 0$.

Il semble donc que les relations (4.10) sont encore relativement grossières. Un problème intéressant serait de déterminer, pour k_o, ℓ et i donnés, la meilleure majoration possible pour l'ordre de la classe de Chern ℓ-adique $c_i(E)$, pour G et E variables, soumis éventuellement à des conditions restrictives (G fini, ou G fini cyclique, ou la représentation E définissable sur k_o, etc.).

4.7. En vue d'expliciter (4.9) donc (4.10), introduisons le sous-corps ℓ-cyclotomique maximal de k

$$Z = Z(\ell) \subset k \quad , \tag{4.15}$$

engendré par les racines de l'unité ℓ^{ν}-èmes, tout ν, et le sous-corps ℓ-cyclotomique maximal de k_o, défini comme

(4.16)
$$Z_o = Z_o(\ell) = Z(\ell) \cap k_o \quad .$$

On a le diagramme de corps

$$\begin{tikzcd}
k_o \arrow[r] & P(k_o,Z) \arrow[r] & \bar{k}_o \arrow[r] & k \\
Z_o=k_o \cap Z \arrow[u] \arrow[r] & Z \arrow[u] & & \\
P \arrow[u] & & &
\end{tikzcd} \quad ,$$

où P est le sous-corps premier de k_o. Comme Z est une extension galoisienne de P, la théorie de Galois nous apprend qu'il en est de même de Z/Z_o et de $P(k_o,Z)$ sur k_o, et que moyennant l'homomorphisme naturel les groupes de Galois de ces deux dernières extensions sont isomorphes. Donc le groupe de Galois de $P(k_o,Z)$ sur k_o est isomorphe à un sous-groupe de Galois de Z/P, lui-même isomorphe à un sous-groupe ouvert π de $\mathbb{Z}_\ell^*$ (et même égal à $\mathbb{Z}_\ell^*$ lorsque k_o donc P est de caractéristique nulle, par le th. de GAUSS [29, p. 53]). D'après les théorèmes d'extensions d'isomorphismes, l'homomorphisme de restriction

$$\Gamma = \mathrm{Gal}(k/k_o) \longrightarrow \mathrm{Gal}(P(k_o,Z)/k_o) \simeq \mathrm{Gal}(Z/Z_o) \hookrightarrow \mathbb{Z}_\ell^*$$

est surjectif, donc moyennant les identifications faites, on trouve

(4.17)
$$H_1 = \mathrm{Im}\ (\phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^*) = \mathrm{Gal}\ (Z/Z_o) \quad .$$

Par suite, <u>le sous-groupe</u> H_1 <u>de</u> $\mathbb{Z}_\ell^*$ <u>associé au corps</u> k_o <u>ne dépend que du sous-corps</u> ℓ <u>-cyclotomique maximal</u> Z_o <u>de</u> k_o, <u>via la formule</u> (4.17) .
On en conclut en particulier un isomorphisme canonique

(4.18) $$\pi/H_1 \simeq \mathrm{Gal}(Z_o/P) \qquad (P = \text{corps premier}) ,$$

qui montre que le sous-groupe H_1 de $\mathbb{Z}_\ell^*$ est d'indice fini si et seulement si Z_o est une extension finie du corps premier P .

Nous allons résumer les renseignements obtenus dans un théorème récapitulatif :

Théorème 4.8. Soient k_o un corps, k une extension séparablement close de k , G un groupe discret, muni d'une représentation linéaire dans un vectoriel E de dimension finie sur k , $c_i(E)(\ell)$ ses classes de Chern ℓ -adiques (4.1) , où ℓ est un nombre premier distinct de la caractéristique de k . On suppose que la classe "stable" (*) de la représentation donnée est invariante par le groupe des k_o -automorphismes de k (ce qui signifie aussi, si k_o est de caractéristique nulle, que la fonction trace $G \longrightarrow k$ associée à la représentation prend ses valeurs dans k_o) . Soit Z_o la sous-extension ℓ -cyclotomique maximale (4.16) de k_o , et soit H son groupe de Galois sur le corps premier P , identifié comme d'habitude à un sous-groupe fermé du groupe $\mathbb{Z}_\ell^*$ des unités ℓ -adiques. Posons, pour tout entier $i \geqslant 1$:

(4.9) $$\alpha(i) = \operatorname*{Inf}_{\lambda \in H} v_\ell(\lambda^i - 1) ,$$

où v_ℓ est la valuation ℓ -adique. Alors on a (si $\alpha(i) \neq +\infty$ i.e. $H^i \neq (1)$)

(4.10) $$\ell^{\alpha(i)} c_i(E)(\ell) = 0 .$$

Corollaire 4.9. Si Z_o est une extension finie du corps premier P , en particulier si le corps k_o est une extension de type fini de P , alors

(*) i.e. dans le groupe $R_k(G)$ des classes de k-représentations de G_* [4].

toutes les classes de Chern ℓ-adiques $c_i(E)$ sont des classes de torsion.

Corollaire 4.10. Soit G un groupe à engendrement fini, et E le module d'une représentation linéaire de dimension finie de G sur un corps séparablement clos k. Alors pour tout nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de k, les classes de Chern ℓ-adiques $c_i(E)$ $(i \geqslant 1)$ sont des classes de torsion.

En effet, l'hypothèse sur G implique que la représentation donnée provient d'une représentation sur un sous-corps k_o de k de type fini sur le corps premier P, et on applique 4.9.

Corollaire 4.11. Soit G un groupe discret, E le module d'une représentation linéaire complexe de dimension finie. Alors les classes de Chern rationnelles $c_i(E)_{\mathbb{Q}} \in H^{2i}(G,\mathbb{Q})$ (déduites des classes entières de 0.1) sont nulles pour tout $i \geqslant 1$. Si le corps k engendré par les valeurs du caractère $g \rightsquigarrow \mathrm{Tr}\, g_E$ est de type fini, et si $H_{i-1}(G,\mathbb{Z})$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$(*), alors $c_i(E) \in H^{2i}(G,\mathbb{Z})$ est une classe de torsion, dont la ℓ-composante $c_i(E)(\ell)$ satisfait à (4.10), où $\alpha(i)$ est défini dans (4.9) ci-dessus.

Pour vérifier la première assertion, on peut remplacer G par ses sous-groupes à engendrement fini (par un argument immédiat laissé au lecteur), ce qui nous permet de supposer G de type fini. Alors, choisissant un nombre premier ℓ quelconque, le corollaire 4.10, et la comparaison 3.1 de la théorie arithmétique et la théorie transcendante des classes de Chern, nous montrent qu'il existe pour tout i un entier $m_i > 0$ tel que l'image de $m_i c_i(E)$ dans tous les $H^{2i}(G,\mathbb{Z}/\ell^{\nu}\mathbb{Z})$ est nulle (où $c_i(E)$ désigne maintenant la classe de Chern entière). Utilisant 3.5 on en conclut que l'image

(*) Il suffit qu'il le soit modulo son sous-groupe de torsion.

de $c_i(E)$ dans $H^{2i}(G,\mathbb{Q})$ est nulle. La dernière assertion de 4.11 se déduit de même de 4.8 et de 3.5.

Remarques 4.12.

a) Comme nous l'avons déjà signalé dans 0.5 , le résultat 4.11 était connu par voie transcendante ; cf 0.9 pour d'autres commentaires concernant ce résultat.

b) Dans 4.10 on ne peut supprimer l'hypothèse que G soit à engendrement fini, comme on voit déjà dans le cas où G est le groupe des racines de l'unité de k d'ordre une puissance de ℓ , E la représentation de degré 1 canonique : on voit tout de suite que la classe ℓ -adique $c_1(E)$ n'est pas une classe de torsion : en fait, l'ordre de son image dans $H^2(G,\mu_{\ell^\nu}(k))$ est égal à ℓ^ν , qui augmente indéfiniment avec ν . Cela n'empêche que 4.11 est valable sans supposer G de type fini : on fera attention à ce propos qu'une classe de $H^j(G,Z)$ dont l'image dans $H^j(G,\mathbb{Q})$ est nulle n'est pas nécessairement une classe de torsion, l'homomorphisme canonique $H^j(G,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \longrightarrow H^j(G,\mathbb{Q})$ n'étant pas en général un isomorphisme (c'est un isomorphisme si $H_{i-1}(G,\mathbb{Z})$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$!).

4.12. On peut généraliser les résultats précédents en utilisant les conjectures de WEIL [37] de la façon suivante. Supposons d'abord que k soit la clôture algébrique d'un corps fini k_o , et que l'on ait un schéma projectif et non singulier X_o sur k_o , muni d'un Module localement libre $\mathbb{E}_o$, le groupe discret opérant par automorphismes sur la situation $(X_o,\mathbb{E}_o)$ sur k_o , donc aussi sur la situation $(X,\mathbb{E})$ qui en est déduite par extension $k_o \longrightarrow k$ du corps de base, d'où des classes de cohomologie mixtes

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X,G;\mathbb{T}_\ell{}^{\otimes i}) \quad . \tag{4.19}$$

Supposons, pour un i donné, que l'image de $c_i(\mathbb{E})$ par l'homomorphisme canonique

$$H^{2i}(X,G;T_\ell{}^{\otimes i}) \longrightarrow H^{2i}(X,T_\ell{}^{\otimes i})$$

soit de torsion, ce qui signifie aussi que la classe de Chern i.ème ordinaire de $\mathbb{E}$ (en oubliant les opérations de G) est une classe de torsion. Supposons de plus que les conjectures de WEIL pour les valeurs absolues ordinaires des valeurs propres de Frobenius, opérant sur les

$$H^j(X,\mathbb{Q}_\ell) \overset{\text{dfn}}{=} H^j(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell \quad ,$$

soient vraies pour $j < 2i$, i.e. que pour ces j, les valeurs absolues en question soient égales à $q^{j/2}$, où $q = \mathrm{card}(k_o)$. Je dis que <u>sous ces conditions</u>, <u>la classe</u> ℓ-<u>adique mixte</u> (4.19) <u>elle-même est une classe de torsion</u>. Pour le voir, on utilise encore l'invariance de la classe (4.19) par les opérations de $\mathrm{Gal}(k/k_o)$, ou ce qui revient au même, par l'automorphisme du groupe de cohomologie mixte provenant de l'automorphisme de Frobénius

$$\mathrm{Frob}_q : x \rightsquigarrow x^q$$

du corps k. Utilisant l'isomorphisme canonique

$$H^{2i}(X,G;T_\ell{}^{\otimes i}) \simeq H^{2i}(X,G;\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(k)^{\otimes i} \quad ,$$

et la suite spectrale de cohomologie ℓ-adique déduite de (2.2) :

$$H^*(X,G;\mathbb{Z}_\ell) \Longleftarrow E_2^{s,t} = H^s(G,H^t(X,\mathbb{Z}_\ell)) \quad , \tag{4.20}$$

(qu'il faut en toute rigueur interpréter comme une suite spectrale de systèmes projectifs), on est ramené de proche en proche à vérifier que dans

$$E_{\infty}^{s,2i-s} \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(k)^{\otimes i} \quad , \quad \text{pour} \quad s \geqslant 1 \quad ,$$

tout élément invariant par l'action de Frob_q est un élément de torsion, et pour ceci, que $E_2^{s,2i-s} \otimes T_\ell(k)^{\otimes i}$ ne "contient" pas (comme quotient de deux sous-$\mathbb{Z}_\ell$-modules stables par Frobenius) de module à opération triviale de Frobenius, qui ne soit de torsion. Ou encore, que $E_2^{s,2i-s}$ ne "contient" pas de module à opérateurs, sur lequel Frobenius opère simplement par multiplication par q^{-i}, et qui ne soit de torsion. Or c'est là un exercice facile et pratiquement évident, sur l'expression explicite (4.20) du terme E_2, et compte tenu que d'après l'hypothèse faite, les valeurs absolues des valeurs propres de Frobenius opérant sur $H^{2i-s}(X, \mathbb{Q}_\ell)$ sont $q^{(2i-s)/2}$, donc $\neq q^{i}$ (puisque $s \geqslant 1$) .

4.12.1. Par un argument de spécialisation facile, utilisant le théorème de spécialisation pour la cohomologie ℓ-adique [2, XVI 2.2] , on trouve la même conclusion dans le cas d'une situation $(k,X,\mathbb{E},G)$, X schéma projectif et lisse sur le corps séparablement clos k , lorsque celle-ci peut se déduire par extension de la base

$$A_o \longrightarrow k \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A_o)$$

d'une situation analogue sur le spectre S_o d'un sous-anneau A_o de k de type fini sur $\mathbb{Z}$, avec un schéma projectif et lisse X_o sur S_o , un Module localement libre $\mathbb{E}_o$ sur X_o , et G opérant sur $(X_o,\mathbb{E}_o)$ par S_o-automorphismes. Cette hypothèse sera vérifiée en particulier lorsque le groupe G est à engendrement fini. Supposons de plus que pour au moins un point fermé s de S_o (donc à corps résiduel fini) la conjecture de WEIL, pour les valeurs absolues des valeurs propres de Frobenius opérant sur les H^j ℓ-adiques $(j < 2i)$ de la variété projective lisse $X_{o\,s}$ sur le corps fini $k(s)$, soit vraie ; il en sera en particulier ainsi d'après WEIL [28 p. 140] si $i = 1$, ou si X est une variété abélienne, ou un produit de courbes ... Sous ces conditions, il sera encore vrai que si la classe de Chern ordinaire de $\mathbb{E}$, à valeurs dans $H^{2i}(X, \mathbb{T}_\ell^{\otimes i})$, est une classe de torsion (par exemple si la classe de Chern, en tant que classe de cycles, a un multiple qui est algébriquement équivalent à zéro), alors il en est de même de la classe de Chern mixte (4.19).

4.12.2. L'hypothèse faite dans l'alinéa précédent sur la validité de la conjecture de WEIL en au moins un point fermé s de S_o dépend du choix de (S_o, X_o) dont on déduit (k, X) par changement de base. Si on veut énoncer une hypothèse intrinsèque à (k, X), on exigera qu'il existe un ouvert de ZARISKI non vide U de S_o, tel que pour tout point fermé s de U, la conjecture de WEIL pour $X_{o\,s}$ sur $k(s)$ et le H^j ℓ-adique soit valable. La vérification d'invariance de cette hypothèse par rapport au choix de (S_o, X_o), et par rapport à une extension du corps de base k, est immédiate. On dira sous ces conditions que _la conjecture de_ WEIL _est vraie pour_ X _sur_ k, _et la cohomologie_ ℓ _-adique en dimension_ j. Avec cette terminologie, on peut formuler :

Théorème 4.13. _Soient_ X _un schéma projectif lisse sur le corps_ $\mathbb{C}$ _des complexes,_ $\mathbb{E}$ _un Module localement libre de type fini sur_ X, i _un entier, tel que la_ i._ème classe de Chern rationnelle de_ $\mathbb{E}$ _(classe dans_ $H^{2i}(X^{an}, \mathbb{Q})$) _soit nulle. Supposons de plus que pour un nombre premier conve-_

nable ℓ , la conjecture de WEIL soit vraie pour X et la cohomologie ℓ-adique en dimension $j < 2i$, au sens précisé dans 4.12.2. (ce qui est sans doute toujours le cas, et est prouvé par WEIL dans le cas où $i = 1$, ou X une variété abélienne, ou plus généralement un produit de variétés abéliennes et de courbes algébriques). Soit alors G un groupe discret opérant par automorphismes sur $(X,\mathbb{E})$, et considérons la classe de Chern mixte rationnelle

$$c_i(\mathbb{E}^{an})_{\mathbb{Q}} \in H^{2i}(X^{an},G;\mathbb{Q}) \quad .$$

Cette classe est également nulle.

Pour démontrer ce théorème, on se ramène comme pour 4.11 au cas où G est à engendrement fini, donc où la situation $(X,\mathbb{E},G)$ provient d'une situation de type fini sur $\mathbb{Z}$, comme dans 4.12.1. Utilisant 4.12.1 et 3.5 , et procédant comme dans 4.11 , on déduit 4.13.

Remarques 4.14.

a) Lorsque X est réduit à un point, 4.13 se réduit à l'énoncé 4.11. Mais contrairement à ce dernier, 4.13 ne semble pas admettre une démonstration par voie transcendante, qui serait indépendante disons des conjectures de WEIL, et resterait valable lorsque l'on remplace X par une variété analytique compacte (éventuellement supposée kählérienne). J'ignore si l'énoncé analytique-complexe correspondant est vrai, même en se bornant au cas où $i = 1$, et où X est un tore complexe (non algébrisable). Comparer les commentaires dans 0.10 .

b) Admettant les conjectures de WEIL et la résolution des singularités, on se convainc que les résultats de 4.12 et 4.13 doivent être valables pour des schémas X propres sans plus (pas nécessairement projectifs, ni lisses). Par contre, l'hypothèse de propreté est essentielle, même si X est supposé lisse. Pour avoir un contre-exemple relatif à c_i , on prendra

(4.21) $$X = \mathbb{G}_m^{\ i} = \mathbb{G}_m \times \ldots \times \mathbb{G}_m \quad \text{(i facteurs)},\ G = \mathbb{Z}^{\ i}\ ,\quad \mathbb{E} = \mathbb{O}_X^{\ i}\ ,$$

avec opérations triviales de G sur X , l'opération sur $\mathbb{E}$ s'obtenant en associant au j.ème élément de la base canonique de $\mathbb{Z}^{\ i}$ $(1 \leq j \leq i)$ l'automorphisme de multiplication dans $\mathbb{E}$ par la j.ème fonction coordonnée t_j sur le j.ème facteur $\mathbb{E}_j$ de $\mathbb{E}$, l'identité sur les autres. Un calcul facile donne la formule de KUNNETH

(4.22) $$H^*(X,G;\mathbb{Z}_\ell) = \bigotimes^{i} H^*(\mathbb{G}_m,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell)\ ,$$

et on a par multiplicativité

(4.23) $$c_i(E) = \prod_{1 \leq j \leq i} \mathrm{pr}_j^*(\xi)\ ,$$

où les pr_j $(1 \leq j \leq i)$ sont les projections de X sur ses facteurs, et où

$$\xi \in H^2(\mathbb{G}_m,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell) = H^2(\mathbb{G}_m,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(k)$$

est la première classe de Chern ℓ -adique $c_1(\mathbb{E}_o)$ du fibré à opérateurs $\mathbb{E}_o = \mathbb{O}_{X_o}$ sur $X_o = \mathbb{G}_m$, le groupe $\mathbb{Z}$ opérant en faisant opérer le générateur 1 de $\mathbb{Z}$ par multiplication par la fonction coordonnée t . D'ailleurs, on a encore une formule du type KUNNETH donnant $H^*(X_o,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell)$:

$$H^*(X_o,\mathbb{Z};\mathbb{Z}_\ell) \simeq H^*(X_o,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_\ell) = \mathbb{Z}_\ell[u,v]\ /(u^2,v^2)\ ,$$

où u,v sont de degré 1 , le dernier isomorphisme n'étant pas canonique et dépendant du choix d'un isomorphisme $\mathbb{Z}_\ell \simeq T_\ell(k)$. On a cependant, de façon canonique :

$$H^2(X_o,\mathbb{Z};T_\ell) \simeq H^1(X_o,T_\ell) \otimes H^1(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq \mathbb{Z}_\ell \quad ,$$

et moyennant cet isomorphisme, on constate par un calcul facile que la classe ξ devient l'élément 1 de $\mathbb{Z}_\ell$. Les formules (4.22) et (4.23) montrent alors que $H^{2i}(X,G;\, T_\ell^{\otimes i})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$, avec comme base $c_i(\mathbb{E})$, qui n'est donc pas une classe de torsion.

c) Le même exemple essentiellement montre que l'énoncé analogue à 4.13 , où on remplacerait X par une variété différentiable compacte, est également faux. Il suffit dans l'exemple précédent (avec $k = \mathbb{C}$) de prendre l'image inverse du fibré à opérateurs $\mathbb{E}$ sur le tore compact de dimension i contenu dans $X(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{*\,i}$. Cela rend improbable qu'on puisse prouver un énoncé généralisant 4.13 par des méthodes de géométrie différentielle.

§ 5. Propriétés de torsion des classes de Chern : cas arithmétique.

5.1. Dans le présent paragraphe, nous examinons les classes de Chern de représentations linéaires du groupe discret G sur des corps k pas nécessairement séparablement clos ; elles sont donc à valeurs dans des groupes de cohomologie mixtes, faisant intervenir à la fois la cohomologie ordinaire de G , et la cohomologie galoisienne de k , i.e. celle du groupe profini $\pi = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, groupe fondamental de k . Commençons par expliciter dans quelques cas simples le calcul de ces groupes, en termes d'invariants cohomologiques plus familiers.

5.1.1. Notons que le topos des faisceaux étales sur Spec(k) est équivalent à la catégorie des ensembles sur lesquels π opère continûment [2, VIII 2.1] (i.e. de façon que le stabilisateur de tout point soit un sous-groupe ouvert de π) ; par suite, le topos des faisceaux étales sur Spec(k) , à groupe d'opérateurs G , est équivalent à la catégorie des ensembles sur lesquels $\pi \times G$ opère continûment, où $\pi \times G$ est muni de la topologie produit (G étant considéré comme groupe discret). On en conclut très facilement que si F est un objet abélien dudit topos, i.e. défini par un groupe abélien $M = F(\mathrm{Spec}(\bar{k}))$, sur lequel $\pi \times G$ opère continûment, alors on a des isomorphismes canoniques

$$(5.1) \qquad H^*(\mathrm{Spec}(k),G;\ F) \simeq \varinjlim_i H^*(\pi_i \times G,\ M^{U_i \times G}) \quad ,$$

où $\pi_i = \pi / U_i$, U_i parcourant un système fondamental de sous-groupes ouverts de π . Lorsque en particulier G est un groupe fini, alors $\pi \times G$ est encore un groupe pro-fini, et on trouve :

$$(5.2) \qquad H^*(\mathrm{Spec}(k),G;\ F) \simeq H^*(\pi \times G,\ M) \quad ,$$

où le deuxième membre désigne la cohomologie habituelle du groupe profini $\pi \times G$.

5.1.2. Dans les cas qui nous occupent, i.e. où $F = \mu_n^{\otimes i}$, G opère trivialement sur F , i.e. G opère trivialement sur M (qui s'identifie donc simplement à un module "admissible" sur π). Alors on dispose de formules du type KUNNETH, permettant d'exprimer la cohomologie $H(\pi_i \times G,\ M^{U_i})$ en termes, disons, de la cohomologie de π_i et de l'homologie de G à coefficients entiers. Plus généralement, on trouve de telles formules pour $H^*(X,G;\ F)$ chaque fois que le groupe discret G opère trivialement sur le schéma X et sur le faisceau F , cf [16, p. 192] . Dans le cas où les $H_j(G,\mathbb{Z})$ sont libres de type fini sur $\mathbb{Z}$, on en déduit par exemple un isomorphisme (dont la flêche s'explicite aisément en termes de cup-produits) :

$$(5.3) \qquad H^*(X,G;\, F) \xleftarrow{\sim} H^*(X,F) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(G,\mathbb{Z}) \quad ,$$

d'où, par passage à la limite sur les $F = \mu_\ell{}^{\otimes i}$, des isomorphismes :

$$(5.4) \qquad H^*(X,G;\, T_\ell{}^{\otimes i}) \xleftarrow{\sim} H^*(X,T_\ell{}^{\otimes i}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(G,\mathbb{Z}) \quad .$$

L'hypothèse qu'on vient de faire sur G est satisfaite en particulier pour

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \quad ,$$

alors l'algèbre de cohomologie de G est donnée par

$$(5.5) \qquad H^*(G,\mathbb{Z}) \simeq \overset{*}{\bigwedge} H^1(G,\mathbb{Z}) \simeq \overset{*}{\bigwedge} \check{G} \quad , \text{ où } \check{G} = \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z}) \quad .$$

5.1.3. Notons encore que sous les conditions de validité de (5.3) , l'homomorphisme canonique

$$H^*(X,G;\, F) \longrightarrow H^*(X,F)$$

s'interprète comme la réduction modulo l'idéal d'augmentation $H^+(G,\mathbb{Z})$ de $H^*(G,\mathbb{Z})$ (idéal des éléments de degrés >0). Par suite, si $\mathbb{E}$ est un fibré vectoriel sur X sur lequel G opère, et si la classe de Chern ordinaire de E dans $H^{2i}(X,T_\ell(i))$ est nulle, cela signifie que la classe de Chern mixte dans le deuxième membre de (5.4) se trouve dans $H^*(X,T_\ell(i)) \otimes H^+(G,\mathbb{Z})$. Il en est toujours ainsi en particulier lorsque X est local, par exemple le spectre d'un corps.

5.1.4. Lorsqu'on suppose encore les $H_i(G,\mathbb{Z})$ de type fini sur $\mathbb{Z}$, mais pas nécessairement libres sur $\mathbb{Z}$, les formules précédentes (5.3) , (5.4) restent vraies si $H_*(G)$ est sans ℓ -torsion et si F est un faisceau de ℓ -torsion. Lorsque $H_*(G)$ a de la ℓ -torsion, on trouve encore par passage à la limite dans les suites exactes des coefficients universels de loc. cit., relatives aux coefficients $\mathbb{K}_{\ell^\nu}$, une suite exacte :

$$(5.6)\quad 0 \longrightarrow \sum_{p+q=n} \mathrm{Ext}^1(H_{i-1}(G,\mathbb{Z}),H^j(X,T_\ell^{\otimes i})) \longrightarrow H^n(X,G;T_\ell^{\otimes i})$$

$$\longrightarrow \sum_{p+q=n} \mathrm{Hom}(H_i(G,\mathbb{Z}),H^j(X,T_\ell^{\otimes i})) \longrightarrow 0 \quad ,$$

d'où en tensorisant sur $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$:

$$(5.7)\qquad H^*(X,G;\mathbb{Q}_\ell(i)) \xleftarrow{\sim} H^*(X,\mathbb{Q}_\ell^{\otimes i})\otimes_{\mathbb{Q}} H^*(G,\mathbb{Q}) \quad ,$$

où on a posé pour abréger (et par abus de langage)

$$(5.8)\quad H^*(X,G;\mathbb{Q}_\ell(i))=H^*(X,G;T_\ell(i))\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell \ , \ H^*(X,\mathbb{Q}_\ell(i))=H^*(X,T_\ell^{\otimes i})\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell \quad .$$

La flèche dans (5.7) est encore celle donnée par cup-produit. On peut donc dire que l'isomorphisme de KUNNETH (5.4) donné par cup-produit reste valable en supposant seulement les $H_j(G,\mathbb{Z})$ de type fini, à condition de négliger les groupes de torsion i.e. de tensoriser par $\mathbb{Q}$. Avec ce grain de sel, la remarque faite dans 5.1.3 sur les classes de Chern reste encore valable.

5.2. Comme premières propriétés triviales, de nullité resp. de torsion pour les classes de Chern ℓ -adiques mixtes, il y a celles liées à la ℓ -dimension cohomologique du couple (X,G) . Ainsi, on déduit aussitôt de la suite spectrale (2.2) que l'on a

(5.9) $$\mathrm{cd}_\ell(X,G) \leqslant \mathrm{cd}_\ell(X) + \mathrm{cd}_\ell(G) \quad ,$$

d'où les relations

(5.10) $$c_i(E)(\ell) = 0 \quad \text{si} \quad 2i > \mathrm{cd}_\ell(X) + \mathrm{cd}_\ell(G) \quad .$$

Par exemple si $G = \mathbb{Z}^r$, on trouve que

$$c_i(E)(\ell) = 0 \quad \text{pour} \quad 2i > \mathrm{cd}_\ell(X) + r \quad .$$

De même, négligeant la partie de torsion de la cohomologie ℓ -adique, et supposant pour simplifier que G opère trivialement sur X , et que les $H_j(G,\mathbb{Z})$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}$, pour pouvoir utiliser (5.3) , on trouve

(5.11) $$c_i(E)(\ell) \quad \text{de torsion si} \quad 2i > \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(X) + \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) \quad ,$$

où $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G)$ est la dimension cohomologique de G relativement aux modules de coefficients qui sont des $\mathbb{Q}$-modules, et où $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(X)$ désigne la borne inférieure des entiers n tels que $i > n$ implique l'existence d'un entier s , tel que $\ell^s H^i(X,F) = 0$ pour tout faisceau étale de ℓ -torsion F sur X , donc :

$$\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(X) \leqslant \mathrm{cd}_\ell(X) \quad .$$

On notera que, alors qu'il est tout-à-fait exceptionnel qu'on ait $\mathrm{cd}_\ell(G) < +\infty$ (si G est fini, ce n'est jamais le cas si ℓ divise card(G) !), les groupes discrets les plus importants qu'on rencontre en pratique satisfont bien à

$$\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) < +\infty \quad ,$$

et cette propriété de finitude jouit de propriétés de stabilité agréables (notamment par extension de groupes, et passage à un sous-groupe d'indice fini). A ce titre, la formule (5.11) donne des renseignements effectifs pour les cas les plus intéressants. Rappelons à ce propos [SGA 4 IX] que pour un corps k de type fini sur le corps premier P, on a

(5.12) $$\mathrm{cd}_\ell(k) = 1 + \mathrm{deg.tr.}\ k/P \qquad \text{si} \quad \mathrm{car}.k = p > 0 \ ,$$

et

(5.13) $$\mathrm{cd}_\ell(k) = 2 + \mathrm{deg.tr.}\ k/P \qquad \text{si} \quad \mathrm{car}.k = 0 \ ,$$

sauf pour le cas où $\ell = 2$ et où la clôture algébrique k_o de P dans k n'est pas purement imaginaire (auquel cas la 2-dimension cohomologique de k peut être infinie) ; mais même dans ce cas, on voit que l'extension quadratique $k' = k(\sqrt{-1})$ satisfait à (5.13), d'où résulte que (5.13) reste valable pour k en y remplaçant $\mathrm{cd}_\ell(k)$ par $\mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(k)$ (les $H^i(k,F)$ pour $i > 2 + \mathrm{deg.tr.}\ k/P$ étant annulés par 2).

Compte tenu des observations qui précèdent, on peut donc dire que la possibilité de restreindre à k le corps de base d'une représentation linéaire de G donnée sur une extension K de k, impose des conditions de la forme

$$c_i(E)(\ell) \text{ de torsion pour } 2i > \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}_\ell}(k) + \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G)$$

pour les classes de Chern mixtes dans $H^*(\mathrm{Spec}(K),G,-)$ de la représentation, qui imposent donc une minoration sur le degré de transcendance de k sur le corps premier :

(5.14) $$\mathrm{deg.tr.}k/P \geqslant 2i - \varepsilon - \mathrm{cd}_{\mathbb{Q}}(G) - 1 \ ,$$

où i désigne le plus grand entier tel que $c_i(E)(\ell)$ ne soit pas de torsion, et ε est égal à 0 ou 1 suivant que K est de caractéristique non nulle ou nulle.

5.3. Il convient cependant de noter que, contrairement à ce qui se passe dans le cas "géométrique" envisagé au paragraphe précédent, les classes de Chern mixtes ℓ-adiques des représentations linéaires de G ne sont pas nécessairement des classes de torsion, le corps de définition de la représentation étant un corps k de type fini sur le corps premier. Examinons par exemple le cas de la classe c_1, associée d'après (1.16) à un homomorphisme de groupes

$$\phi : G \longrightarrow k^* .$$

Pour que la classe de Chern ℓ-adique c_1 correspondante soit nulle, il faut et il suffit donc que pour tout entier ν, l'homomorphisme précédent soit de la forme ψ^{ℓ^ν}, où $\psi : G \longrightarrow k$ est un homomorphisme convenable. Cela implique en particulier que pour tout $g \in G$, $\phi(g)$ est un élément infiniment ℓ-divisible de k^*. Or on vérifie facilement, k étant de type fini sur le corps premier, que les seuls éléments infiniment ℓ-divisibles de k^* sont les racines de l'unité de k d'ordre premier à ℓ. Par suite,

(5.15) $c_1(\phi)(\ell) = 0 \Longleftrightarrow \phi(G)$ est un sous-groupe fini de k^* d'ordre premier à ℓ,

et par conséquent :

(5.16) $c_1(\phi)(\ell)$ de torsion $\Longleftrightarrow \phi(G)$ est contenu dans le sous-groupe fini des racines de l'unité de k.

On voit donc que si le corps k (extension de type fini du corps premier) n'est pas un corps fini, il existe toujours des homomorphismes $\mathbb{Z} \longrightarrow k^*$ dont les classes de Chern ℓ-adiques mixtes ne sont pas des classes de torsion. Ce résultat reste valable si on prend pour k une extension de type fini non algébrique d'un corps k_o quelconque : tout homomorphisme $\phi : G \longrightarrow k^*$ dont les valeurs ne sont pas contenues dans la clôture algébrique de k_o dans k donne des classes de Chern ℓ-adiques qui ne sont pas des classes de torsion.

5.3.2. Utilisant cet exemple, on trouve facilement, pour $n \geqslant 1$ donné, un cas où $c_n(E)(\ell)$ n'est pas une classe de torsion, $k = k_o(t_1, \ldots, t_n)$ étant une extension transcendante pure de degré n d'un corps arbitrairement donné k_o (le corps premier, par exemple, ou un corps algébriquement clos), et $G = \mathbb{Z}^n$. On posera simplement

$$E = L_1 + \ldots + L_n \quad ,$$

où L_i est de rang 1 et donné par la représentation composée

$$G = \mathbb{Z}^n \xrightarrow{pr_i} \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi_i} k^* \; , \quad \phi_i(1) = t_i \quad .$$

Utilisant l'isomorphisme (5.4) , on trouve

$$c_n(E)(\ell) = (\xi_1 \ldots \xi_n) \otimes u_n \in H^n(k, T_\ell^{\otimes n}) \otimes H^n(G, \mathbb{Z}) \quad ,$$

où u_n est le générateur canonique de $H^n(G, \mathbb{Z})$, et où

(5.17) $$\xi_i = q_i^*(\xi) \in H^1(k, T_\ell) \quad ,$$

$q_i : \mathrm{Spec}(k) \longrightarrow \mathrm{Spec}(k_o(t))$ étant associé à l'homomorphisme $k(t) \longrightarrow k = k_o(t_1, \ldots, t_n)$ qui envoie t sur t_i , et

$$\xi \in H^1(k_o(t),\ T_\ell)$$

étant défini par la formule

(5.18) $c_1(L) = \xi \otimes u_1 \in H^2(\mathrm{Spec}(k_o(t)),\mathbb{Z};T_\ell) \simeq H^1(k(t_o),T_\ell) \otimes H^1(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

Ici L désigne le module de la représentation linéaire de rang 1 de $\mathbb{Z}$ défini par le caractère $\mathbb{Z} \longrightarrow k_o(t)$ envoyant le générateur 1 sur t . Notre assertion que $c_n(E)(\ell)$ n'est pas une classe de torsion revient donc à dire que l'élément cup-produit

(5.19) $$\xi_1 \ldots \xi_n \in H^n(k,T_\ell^{\otimes n})$$

n'est pas un élément de torsion, ce qui résulte du fait plus précis que le cup-produit correspondant des classes mod. ℓ^ν est un élément de $H^n(k,\mu_{\ell^\nu}{}^{\otimes n})$ <u>d'ordre égal à</u> ℓ^ν . Ceci se prouve aisément par récurrence sur n , en utilisant le

<u>Lemme</u> 5.3.1. <u>Soient</u> k <u>un corps</u> , $K = k(t)$ <u>une extension pure de degré de transcendance</u> 1 , n <u>un entier premier à la caractéristique de</u> k , $\xi \in H^1(K,\mu_n)$ <u>l'image de</u> $t \in H^o(K,\mathbb{G}_m) = K^*$ <u>par l'homomorphisme cobord de la suite exacte de KUMMER relative à l'entier</u> n , F <u>un faisceau abélien étale sur</u> $\mathrm{Spec}(k)$, <u>annulé par</u> n . <u>Alors l'homomorphisme</u>

$$H^i(k,F) \longrightarrow H^{i+1}(K,F\otimes\mu_n) ,$$

<u>défini par cup-produit avec</u> ξ , <u>est</u> injectif.

Indiquons seulement le principe de la démonstration du lemme : on prouve l'assertion analogue, plus forte a priori, où on remplace K par le corps des séries formelles $k((t))$. Or cette dernière assertion se prouve aisément par les calculs locaux explicites [2, X n° 2] .

5.4. Remarquons que dans l'exemple précédent d'une classe de Chern ℓ-adique $c_n(E)(\ell)$ qui n'est pas de torsion, il n'aurait pas été possible de remplacer le groupe $G = \mathbb{Z}^n$ par un groupe $\mathbb{Z}^m$ avec $m < n$. De façon précise, supposons que G soit un groupe abélien de type fini sur $\mathbb{Z}$, de rang n , et considérons le module E d'une représentation linéaire de G définie sur un corps k . Alors on a

(5.20) $c_i(E)(\ell)$ de torsion pour $i > n = \text{rang } G$.

En effet, lorsqu'on suppose tout d'abord que E admet une suite de composition dont les quotients E_j sont de rang 1 , la formule d'additivité des classes de Chern montre que $c_i(E)$ est une somme de produits de i facteurs de la forme $c_1(E_j)$; d'autre part, comme on a remarqué dans 5.1.3 , les $c_1(E_j)$ sont dans $H^*(k,T_\ell) \otimes H^+(G,\mathbb{Z})$. Notant par (5.5) que l'idéal $H^+(G,\mathbb{Q})$ de $H^*(G,\mathbb{Q})$ est de puissance (n+1).ème nulle (et il en est de même de $H^+(G,\mathbb{Z})$, si G est sans torsion), on conclut (5.20) dans ce cas. On trouve même $c_i(E)(\ell) = 0$ pour $i > n$, lorsqu'on suppose G sans torsion, ce qui constitue alors une condition cohomologique nécessaire pour la possibilité de trouver une filtration de E à facteurs de rang 1 , plus généralement pour pouvoir écrire E dans l'anneau de représentations $R_k(G)$ comme une somme de représentations de rang 1 .

Dans le cas général, on note que G étant commutatif, il existe nécessairement une extension finie k' de k au-dessus de laquelle l'hypothèse précédente de dévissage soit réalisée. Or pour une telle extension, l'argument de trace habituel nous montre que les homomorphismes

$$H^{*}(k,G;\,F) \longrightarrow H^{*}(k',G;\,F)$$

sont injectifs modulo éléments annulés par $[k':k]$. Cela nous ramène donc au cas déjà traité.

Le même argument essentiellement permet de montrer ceci :

Proposition 5.5. *Soient* G *un groupe discret tel que les* $H_i(G,\mathbb{Z})$ *soient de type fini sur* $\mathbb{Z}$, *et tel que* $cd_{\mathbb{Q}}(G) = d < +\infty$. *Soit* E *le module d'une représentation linéaire de* G *sur un corps* k . *Supposons qu'il existe une extension finie* k' *de* k *telle que* $E \otimes_k k'$ *admette une suite de composition de longueur* s . *Soient* $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \dots \geqslant r_s$ *les rangs des facteurs de cette suite de composition, écrits par ordre de grandeur décroissante. Soit*

$$r = r_1 + \dots + r_d \tag{5.21}$$

(où on convient que $r_i = 0$ *pour* $i > s$) . *Alors pour tout nombre premier* ℓ *distinct de la caractéristique de* k , *on a*

$$c_i(E)(\ell) \ \text{de torsion pour} \ i > r \ . \tag{5.22}$$

Cet énoncé est de toutes façons trivial si $d \geqslant s$, puisqu'alors on a $r = \operatorname{rang} E$. Lorsque $d < s$, cet énoncé donne par contre une condition nécessaire non triviale, en termes des classes de Chern ℓ -adiques mixtes, pour pouvoir obtenir une filtration de E du type indiqué, après extension finie du corps de base. On remarquera que dans le cas où le groupe G est à engendrement fini, cette dernière hypothèse est en fait une condition "purement géométrique", qu'il suffira d'exprimer pour la représentation correspondante sur n'importe quelle extension algébriquement close k' de k (comme on voit par des arguments standards bien connus [EGA IV 9.1]).

Pour la démonstration de 5.5 , on se ramène comme ci-dessus au cas où $k = k'$, de sorte que $c_i(E)$ s'écrit comme une somme de termes de la forme $c_{i_1}(E_1) \ldots c_{i_s}(E_s)$, où les i_α sont des entiers $\geqslant 0$ de somme égale à i . Or cela exige évidemment que le nombre des α tels que $i_\alpha \neq 0$ soit $> d$ (s'il était $\leqslant d$, la somme serait $\leqslant r = r_1 + \ldots + r_d$!), ce qui, en vertu de 5.7 et de la remarque 5.1.3 implique que le produit des $c_{i_\alpha}(E_\alpha)$ est nul modulo torsion.

5.6. Supposons que nous disposions d'une formule de KUNNETH du type (5.4) (par exemple $G = \mathbb{Z}^r$) ou (5.7) . Supposons de plus qu'on ait

$$H^o(X, T_\ell^{\otimes i}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \geqslant 1 \quad , \tag{5.23}$$

ce qui est le cas, rappelons-le, chaque fois que X est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ou sur un corps premier. Alors on aura donc

$$H^*(X,G;T_\ell^{\otimes i}) \supset H^+(X,T_\ell^{\otimes i}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^*(G,\mathbb{Z}) \quad (i \geqslant 1) \quad , \tag{5.24}$$

(resp. la relation analogue avec les coefficients $\mathbb{Q}_\ell(i)$,$\mathbb{Q}$). Posons de plus

$$d = cd_\ell(X) \quad \text{resp.} \quad d = cd_{\mathbb{Q}_\ell}(X) \quad .$$

Alors on conclut que le produit de $m > d$ éléments dans le H^+ de (5.24) est nul, donc le produit de $m > d$ classes de Chern $c_i(\mathbb{E}_i)$ $(i \geqslant 1)$, dans les $H^{2i}(X,G;T_\ell^{\otimes i})$ resp. dans les $H^{2i}(X,G;\mathbb{Q}_\ell(i))$, est nul. Cela permet de répéter les arguments de 5.4 sous forme symétrique. On obtient en particulier :

<u>Proposition</u> 5.7. <u>L'énoncé</u> 5.5 <u>reste valable lorsqu'on remplace l'hypothèse</u> $cd_{\mathbb{Q}}(G) < +\infty$ <u>par celle que</u> k <u>est de type fini sur le corps premier, et qu'on désigne par</u> d <u>l'entier</u> $cd_{\mathbb{Q}_\ell}(k)$, <u>égal à</u> ε + deg.tr.k/P , <u>où</u> $\varepsilon = 1$ <u>si</u> k <u>est de car.</u> $p > 0$, $\varepsilon = 2$ <u>si</u> k <u>est de caractéristique nulle</u>.

Si les hypothèses de 5.5 et 5.7 sont réalisées simultanément, on pourra donc prendre

$$d = \mathrm{Inf}(cd_{\mathbb{Q}}(G)\ ,\ cd_{\mathbb{Q}_\ell}(k)) \quad .$$

5.8. Dans le présent paragraphe, nous avons "pour fixer les idées" travaillé surtout sur un <u>corps</u> de base. Signalons cependant qu'il y aura généralement intérêt à travailler plutôt sur des anneaux de base, tels par exemple que les anneaux d'entiers des corps de nombres. Rappelons à ce propos que toute représentation linéaire d'un groupe <u>fini</u> G peut se définir sur un corps de nombres k , extension finie de $\mathbb{Q}$ (et même sur une extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$), et même sur l'anneau des entiers A de k (bien qu'en général la connaissance de la représentation sur k ne détermine pas entièrement, même à isomorphisme près, la représentation sur A). On notera cependant que lorsqu'une représentation est donnée sur un anneau A , pour définir ses classes de Chern ℓ -adiques mixtes, il faut commencer par remplacer A par l'anneau localisé

$$A' = A[\ell^{-1}] \quad ,$$

pour obtenir un anneau dont les caractéristiques résiduelles soient premières à ℓ . On trouve alors des

$$c_i(E \otimes_A A')(\ell) \in H^{2i}(\mathrm{Spec}(A'),G;\ T_\ell^{\otimes i}) \quad .$$

L'avantage a priori de ces classes sur celles où on remplacerait A' (supposé intègre) par son corps des fractions, c'est qu'elles fournissent évidemment des invariants plus fins, par lesquels (pour ℓ variable) on peut éventuellement espérer distinguer entre les différentes façons de réduire à A l'anneau de base de la représentation, initialement donnée sur le corps des fractions. Comme autre avantage, signalons que les corps globaux les plus courants (tels que $\mathbb{Q}$, ou les corps de fonctions) ont généralement une cohomologie galoisienne immense, contrairement aux anneaux (tels que $\mathbb{Z}$, ou des sous-anneaux affines des corps de fonctions) qui leur donnent naissance, et qui fourniront le plus souvent des <u>modules de type fini</u> sur $\mathbb{Z}_\ell$ comme groupes de cohomologie ℓ -adiques mixtes où les classes de Chern mixtes prennent leur valeur. Il en est en particulier ainsi lorsque les groupes d'homologie entière de G sont de type fini, et que l'on travaille sur un ouvert d'un $\mathrm{Spec}(A)$, où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Pour une étude arithmétique plus poussée de ces classes de Chern, il faudrait au préalable avoir une bonne connaissance des groupes de cohomologie de tels ouverts, à coefficients dans les faisceaux ℓ -adiques de TATE $T_\ell^{\otimes i}$. Il ne semble pas d'ailleurs que ces groupes de cohomologie aient été déterminés, à l'heure où ces lignes sont écrites.

§ 6. <u>Cas des cohomologies de HODGE et de DE RHAM.</u>

6.1. Soit X un schéma sur un autre. On lui associe canoniquement un <u>complexe des formes différentielles relatives de</u> X <u>sur</u> S :

$$(6.1) \qquad \underline{\Omega}^{*}_{X/S} = \overset{*}{\Lambda}\, \underline{\Omega}^{1}_{X/S} \ ,$$

où $\underline{\Omega}^{1}_{X/S}$ est le faisceau conormal à la diagonale de $X\times_S X$, l'opérateur différentiel étant la "différentielle extérieure" habituelle [EGA IV 16] . Nous appellerons ce complexe le <u>complexe de DE RHAM</u> de X par rapport à S , et son hypercohomologie

$$(6.2) \qquad H^{*}_{DR}(X/S) = \mathbb{H}^{*}(X, \underline{\Omega}^{*}_{X/S})$$

est appelée la <u>cohomologie de DE RHAM</u> de X sur S . Il est parfois commode de considérer également le <u>complexe de HODGE</u> de X sur S , qui a même faisceau gradué sous-jacent que le complexe de DE RHAM, mais dont l'opérateur différentiel est nul. L'hypercohomologie de ce complexe

$$(6.3) \qquad H^{*}_{Hdg}(X/S) = \sum_{p,q} H^{q}(X, \underline{\Omega}^{p}_{X/S})$$

sera appelée <u>cohomologie de HODGE de</u> X <u>sur</u> S . On notera que c'est un groupe non seulement gradué, mais <u>bigradué</u> de façon naturelle. Les relations entre ces deux espèces de cohomologie sont exprimées par la suite spectrale d'hypercohomologie de (6.2) :

$$(6.4) \qquad H^{*}_{DR}(X/S) \Longleftarrow E_1^{p,q} = H^{p,q}_{Hdg}(X/S) = H^{q}(X, \underline{\Omega}^{p}_{X/S}) \ .$$

Ainsi, le groupe gradué $H^{*}_{DR}(X/S)$ est muni d'une filtration naturelle, qui "remplace" la bigraduation qui lui fait défaut.

La structure multiplicative habituelle de $\underline{\Omega}^{*}_{X/S}$ définit sur $H^{*}_{DR}(X/S)$ et $H^{*}_{Hdg}(X/S)$ des structures d'<u>anneau gradué filtré</u> resp. d'<u>anneau bigradué</u> ; ces anneaux sont anticommutatifs.

Notons que les anneaux de cohomologie (gradués filtrés resp. bigradués) $H^*_{DR}(X/S)$ et $H^*_{Hdg}(X/S)$ ont le caractère contravariant habituel par rapport au schéma relatif X/S , relatif à des carrés commutatifs, - caractère fonctoriel qu'on utilisera sans autre mention.

Rappelons enfin [20] que lorsque S est le spectre du corps des complexes, et que X est lisse sur S (donc si X est une variété algébrique non singulière sur le corps des complexes), la cohomologie de DE RHAM $H^*_{DR}(X/S)$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie complexe ordinaire de l'espace analytique X^{an} associé à X .

6.2. Supposons maintenant qu'on ait un Module inversible $\mathbb{L}$ sur X , d'où un élément

$$\eta \in H^1(X, \mathbb{O}^*_X) \quad , \tag{6.5}$$

classe de ce faisceau à isomorphisme près. Utilisant l'homomorphisme "<u>dérivée logarithmique</u>" :

$$f \rightsquigarrow D(f) = df/f \quad : \quad \mathbb{O}^*_X \longrightarrow \mathbb{Z}^1(\underline{\Omega}^*_X) \subset \underline{\Omega}^1_X \quad , \tag{6.6}$$

(où $\mathbb{Z}^i$ désigne le faisceau des i -cocycles), on trouve un élément

$$D(\eta) = c_1(\mathbb{L}) \in H^{1,1}_{Hdg}(X/S) = H^1(X, \underline{\Omega}^1_{X/S}) \quad , \tag{6.7}$$

de degré total deux dans la cohomologie de HODGE. De même, travaillant en théorie de DE RHAM, et utilisant l'homomorphisme canonique

$$\phi^i \ : H^i(X, \mathbb{Z}^1(\underline{\Omega}^*)) \longrightarrow \mathbb{H}^{i+1}(X, \underline{\Omega}^*) \quad ,$$

valable pour tout complexe de faisceaux $\underline{\Omega}^*$ sur X , on trouve un élément

$$c_1(\mathbb{L}) = \phi^1 D(\eta) \in H^2_{DR}(X/S) \quad . \tag{6.8}$$

Les éléments (6.7) et (6.8) sont appelés respectivement la <u>première classe de Chern de</u> $\mathbb{L}$ <u>au sens HODGE</u>, <u>et au sens DE RHAM</u>. Dans cette construction, nous avions sous-entendu un préschéma de base S en dessous de X, alors que $\mathbb{L}$ est donné sur X. On notera que l'invariant ~~le~~ plus fin sera obtenu en prenant $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Bien entendu, nous avons obtenu ainsi deux <u>homomorphismes</u>

$$(6.9) \qquad \mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2_{\mathrm{Hdg}}(X/S) \quad \text{et} \quad \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2_{\mathrm{DR}}(X/S) \quad .$$

Ces homomorphismes sont fonctoriels par rapport au schéma relatif X/S, comme on constate aussitôt.

6.3. Supposons maintenant qu'on ait un Moduel localement libre $\mathbb{E}$ de rang r sur X. Désignons pour simplifier par $H^*(X/S)$ la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE de X, étant entendu qu'on travaillera pour le moment dans l'une ou l'autre théorie exclusivement. Désignons encore, comme aux paragraphes 1 et 2, par

$$P = P(\mathbb{E})$$

le fibré projectif défini par $\mathbb{E}$, et considérons l'homomorphisme d'anneaux

$$H^*(X) \longrightarrow H^*(P)$$

qui permet de regarder $H^*(P)$ comme un module à gauche (disons) sur $H^*(X)$. Soit encore

$$\xi = c_1(\mathcal{O}_P(1)) \in H^2(X)$$

défini par (6.8) resp. (6.7), avec $\mathbb{L} = \mathcal{O}_P(1)$, X remplacé par P. Le résultat clef (non trivial), démontré par ILLUSIE [24], est :

(6.10) __Les__ ξ^i $(0 \leqslant i \leqslant r-1)$ __forment une base de__ $H^*(P)$ __sur__ $H^*(X)$.

Ceci permettra donc d'exprimer ξ^r comme combinaison linéaire des ξ^i pour $0 \leqslant i \leqslant r-1$, et de définir des classes

(6.11) $$c_i(\mathbb{E}) \in H^{2i}(X/S)$$

par la formule habituelle

(6.12) $$\sum_{0 \leqslant i \leqslant r} c_i(\mathbb{E})\, \xi^{r-i} = 0 \quad .$$

Bien que nous ne l'ayons pas vérifié en détail, il n'y a guère de doute (et nous admettrons) que le formalisme habituel (2.3) des classes de Chern, exprimé par la caractérisation axiomatique bien connue de HIRZEBRUCH, reste valable dans le contexte DE RHAM et HODGE. Pour ce point et une théorie plus détaillée de ces classes, ainsi que leur généralisation aux classes caractéristiques style HODGE et DE RHAM de schémas en groupes autres que __Gl__(r) , nous renvoyons à l'exposé systématique [15] .

Ici encore, le préschéma de base S sous X était sous-entendu. On trouve les classes de Chern les plus fines en faisant $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$; celles pour un S quelconque s'en déduiront par l'homomorphisme canonique

(6.13) $$H^*(X/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) \longrightarrow H^*(X/S) \quad .$$

Mais il n'y a pas lieu de négliger le cas où S est une base quelconque, si on désire utiliser les classes de Chern pour le calcul de la structure d'un anneau de cohomologie $H^*(P/S)$ d'un fibré projectif P associé à un Module localement libre sur S , en termes de l'anneau $H^*(X/S)$ et des classes de Chern de $\mathbb{E}$, en utilisant (6.10) à (6.12) .

6.4. Disons quelques mots sur les relations entre les diverses définitions de classes de Chern dont on dispose (transcendante, ℓ-adique, DE RHAM, HODGE). Pour la relation des classes transcendantes avec les classes ℓ-adiques, cf § 1.8 et § 3. Lorsque X est lisse sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, on trouve de même la compatibilité de la définition style DE RHAM avec la définition transcendante, compte tenu de l'homomorphisme

$$\varphi : H^{*}(X^{an}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{*}(X^{an}, \mathbb{C}) \simeq H^{*}_{DR}(X/\mathbb{C}) \quad .$$

De façon précise, on trouve :

$$\varphi\,(c_p^{\mathbb{Z}}(E)) = \frac{1}{(2i\pi)^p}\, c_p^{DR}(E) \quad . \tag{6.14}$$

Pour le voir, on est ramené, grâce à la caractérisation axiomatique, au cas d'un Module inversible, où le résultat est facile [3, Prop. 12] . Enfin, modulo vérification (sans doute sur le même principe) qui, on l'espère, figurera dans [15] (*) , les relations entre les classes de Chern style DE RHAM et style HODGE doivent pouvoir s'exprimer de la façon suivante, en termes de la suite spectrale (6.4) qui les relie : <u>la classe de Chern</u> $c_\ell(\mathbb{E})$ <u>style HODGE est un cocycle universel dans la suite spectrale</u>, <u>donc définit un élément de degré total</u> $2i$, <u>degré filtrant</u> i <u>dans</u> E_∞ ; <u>d'autre part</u>, <u>la classe</u> $c_i(\mathbb{E})$ <u>style DE RHAM est de filtration</u> $\geqslant i$, <u>et réduite modulo filtration</u> $i+1$ <u>devient égale à l'élément du</u> E_∞ <u>défini par la classe de Chern style HODGE</u>. Comparer avec l'énoncé analogue de ATIYAH-HIRZEBRUCH [5] sur la classe de cohomologie associé à un cycle analytique d'une variété analytique complexe, et l'élément du $K(X)$ topologique associé.

6.5. Arrivé à ce point, il convient de signaler que tous les développements précédents gardent un sens dans le contexte général des topos annelés,

(*) et probablement dans [24] en atendant.

adopté au paragraphe 1 ; inutile d'ailleurs ici de remplacer le topos donné par le topos étale associé. Ces développements s'appliquent en particulier encore dans le cas envisagé au § 2 d'un groupe discret G opérant sur un espace annelé, et plus spécifiquement, sur un préschéma X. Dans ce dernier cas, la théorie peut se développer sans utiliser explicitement la théorie des schémas relatifs sur des topos annelés, et sans transposer à ce cas les calculs de ILLUSIE écrits provisoirement dans le cadre des schémas ordinaires : il suffira en effet de procéder comme au n° 2 pour constater que le "résultat clef" de 6.3 reste valable encore pour l'hypercohomologie de DE RHAM ou de HODGE mixte, faisant intervenir le groupe d'opérateurs. On trouve ainsi des classes de Chern, pour un Module localement libre $\mathbb{E}$ sur X, à groupe d'opérateurs G :

(6.15) $$c_i(E) \in H^{2i}_{DR}(X/S,\ G) = \mathbb{H}^{2i}(X,G;\underline{\Omega}^{*}_{X/S}) \quad ,$$

resp.

(6.16) $$c_i(E) \in H^{ii}_{Hdg}(X/S,\ G) = H^{i}(X,G;\underline{\Omega}^{i}_{X/S}) \quad .$$

Il est entendu ici que G opère sur X par S-automorphismes ; on pourra par exemple toujours prendre $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Sur X, on garde la topologie de ZARISKI.

Lorsque X, au lieu d'être un schéma, est un espace analytique complexe, on retrouve comme cas particulier de la définition générale une variante différentielle analytique complexe des classes de Chern, qui est essentiellement connue dans le cas "HODGE" et pour X lisse [3] ; dans le cas X analytique réelle ou variété C^{∞} par contre, $G = e$, la variante HODGE n'offre plus d'intérêt, puisque les $H^{i,i}_{Hdg}(X) = H^{i}(X,\underline{\Omega}^{i}_{X}) = 0$ pour

$i > 0$ (en prenant comme faisceau de différentielles les faisceaux habituels, qui sont des quotients du faisceau des différentielles défini à la KAHLER par voie purement algébrique). Quant au cas "DE RHAM", il redonne essentiellement dans ce cas (via l'isomorphisme de DE RHAM de la cohomologie complexe ordinaire et la cohomologie de DE RHAM) les classes de Chern transcendantes ordinaires, mais considérées comme étant à coefficients complexes.

6.6. En particulier, si G est un groupe discret, et E le module d'une représentation linéaire de rang fini de G sur un anneau A, les considérations de 6.5 nous fournissent des classes de Chern style DE RHAM et style HODGE

$$c_i(\mathbb{E}) \in \mathbb{H}^{2i}(G, \underline{\Omega}^{*}_{A/\mathbb{Z}}) \quad , \tag{6.15 bis}$$

resp.

$$c_i(\mathbb{E}) \in H^i(G, \underline{\Omega}^{i}_{A/\mathbb{Z}}) \quad . \tag{6.16 bis}$$

Lorsque A est un corps k, le complexe resp. groupe de coefficients ne change pas, quand on remplace l'anneau de base $\mathbb{Z}$, par rapport auquel on prend les différentielles, par le corps premier P contenu dans k, ou même par la clôture algébrique k_o de P dans K ; lorsque k est de caractéristique $p > 0$, on peut même remplacer k_o par le corps plus grand $k_1 = P(k^p)$.

Lorsque l'on a

$$\underline{\Omega}^{1}_{A/\mathbb{Z}} = 0 \quad ,$$

ce qui est le cas par exemple lorsque A est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, ou une extension algébrique de $\mathbb{Q}$, ou l'anneau $\mathbb{Z}$ ou un localisé de $\mathbb{Z}$, alors le complexe de DE RHAM est réduit à sa composante A de degré zéro. Par suite les groupes de cohomologie de HODGE $H^i(G,\underline{\Omega}^i_{A/S})$ sont nuls pour $i > 0$, donc aussi les classes de Chern $c_i(E)$ correspondantes (style HODGE). Quant à la cohomologie de DE RHAM, elle est isomorphe à $H^*(G,A)$, donc n'est pas triviale en général. Cependant, admettant l'assertion de 6.4 suivant laquelle $c_i(\mathbb{E})$ style DE RHAM est de filtration i, et notant qu'ici $\mathrm{Filt}^{j-1}H^j_{DR}(A/\mathbb{Z},G) = 0$ pour tout j, on trouve que dans ce cas, les classes de Chern style DE RHAM sont également nulles. En particulier, on voit que lorsque $A = k$ est un corps algébriquement clos, la théorie des classes de Chern, style HODGE ou DE RHAM, est vide si k est de caractéristique $p > 0$.

6.7. Il n'en est plus de même si k est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle non algébrique sur $\mathbb{Q}$, par exemple le corps $\mathbb{C}$, ou un corps non parfait. Considérons par exemple une représentation linéaire de degré 1, donnée par un caractère

$$\phi : G \longrightarrow k^* ,$$

alors la classe de Chern style HODGE :

$$c_1(E) = c_1(\phi) \in H^{1,1}_{Hdg}(k/P,G) \simeq \mathrm{Hom}(G,\underline{\Omega}^1_{k/P}) , \tag{6.17}$$

s'identifie par définition à l'homomorphisme

$$u : G \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{k/P} \quad \text{donné par} \quad u(g) = d\phi(g)/\phi(g) , \tag{6.18}$$

où $d\,\phi(g)$ désigne la différentielle absolue (i.e. par rapport au corps premier P) de $\phi(g)$. Par suite, on a

$$c_1(E) = 0 \Longleftrightarrow d\,\phi(g) = 0 \quad \text{pour tout} \quad g \in G ; \tag{6.19}$$

lorsque k est de caractéristique nulle, cela signifie que $\phi(g)$ est algébrique sur le corps premier $\mathbb{Q}$ pour tout $g \in G$, donc que ϕ est "définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$". Lorsque k est de car. $p > 0$, cela signifie que pour tout $g \in G$, on a $\phi(g) \in k^p$, donc que ϕ est "définie sur k^p". Si donc $\underline{\Omega}^1_{k/P} \neq 0$, i.e. k non parfait ou k extension non algébrique de $\mathbb{Q}$, on peut toujours trouver des représentations de rang 1 de $G = \mathbb{Z}$ sur k, dont le c_1 style HODGE soit $\neq 0$. D'ailleurs, la suite spectrale standard montre que chaque fois que le c_1 style HODGE est non nul, (G opérant trivialement sur le corps k) il en est de même du c_1 style DE RHAM, son image dans $E_\infty^{1,1}$ (cf. 6.4) étant non nulle. (Utiliser le fait que la relation $\frac{dy}{y} = dx$ pour deux éléments d'une extension de corps k/P implique $dx=0$, $dy=0$, fait qui se vérifie sans difficulté).

Procédant comme dans 5.3.2, on en conclut également des exemples de classes de Chern $c_i(E)$, style HODGE ou DE RHAM, qui ne sont pas nulles, pour i donné, tant dans le cas d'un corps de base de type fini sur le corps premier, que dans le cas d'une extension de type fini d'un corps arbitrairement donné k_o (auquel cas on peut prendre aussi le complexe des différentielles relatives à k_o comme complexe de coefficients). Lorsque l'on est en caractéristique nulle, on voit aisément qu'une classe non nulle reste non nulle après toute extension k' du corps k (fait valable plus généralement chaque fois qu'on a une extension séparable d'un corps k), de sorte qu'on peut alors dans l'exemple précédent remplacer k par une extension algébriquement close, par exemple par le corps des complexes. On voit donc que <u>la théorie des classes de Chern DE RHAM ou HODGE</u> "arithmétique", <u>pour les représentations</u> complexes <u>des groupes discrets</u>, <u>n'est pas du tout triviale</u> ; contrairement à ce que nous avons vu dans le paragraphe 4 dans le cas de la théorie ℓ-adique, on trouve même des classes de Chern dans des groupes d'hypercohomologie qui sont <u>des espaces vectoriels sur</u> Q (en fait, même sur $\mathbb{C}$ en l'occurence), i.e. les classes non nulles de tous degrés que nous rencontrons sont également des classes qui ne sont pas de torsion.

6.8. La raison de cette différence, en apparence peu naturelle, avec la théorie ℓ -adique, c'est que les classes de Chern ℓ -adiques qui ont vraiment un caractère "arithmétique" sont celles qui se définissent sur des corps de base de type fini (auquel on peut toujours réduire la représentation donnée lorsque G est à engendrement fini). Dans ce cas, nous avons vu que les classes de Chern ℓ -adiques donnent également des invariants généralement non triviaux dans des espaces de cohomologie qui sont des vectoriels sur $\mathbb{Q}_\ell$, donc des invariants qui ne sont pas de torsion. On notera que ces invariants ne se détruisent alors pas non plus par passage à une extension du corps de base k , tant qu'on reste dans les corps de type fini au sens absolu.

Il n'empêche que lorsqu'on travaille sur le corps premier $\mathbb{Q}$ lui-même, et qu'on se borne à la considération des c_1 , il se peut que les c_1 ℓ -adiques ne soient pas des classes de torsion (cf (5.16)) , alors que les classes de Chern style HODGE ou DE RHAM sont nulles . Il est possible que cette anomalie puisse être exorcisée en travaillant avec une théorie cohomologique plus fine que la théorie de DE RHAM, dont la définition reste à trouver, théorie qui fournirait des groupes de cohomologie s'envoyant dans la cohomologie de DE RHAM. C'est dans cette direction, inaugurée par les travaux de MONSKY et WASHNITZER [35] , qu'il convient également de chercher une théorie raisonnable des "<u>classes de Chern</u> p <u>-adiques</u>" <u>pour une représentation linéaire de</u> G <u>définie sur un corps</u> k <u>parfait de caractéristique</u> $p > 0$ (*). Si W(k) est l'anneau des vecteurs de WITT construit sur k , ces classes

(*) Pour les principes généraux qui devraient permettre une telle définition, voir dans ce même volume, A. GROTHENDIECK, Crystals and De Rham Cohomology of algebraic schemes, 7.4.

de Chern devraient être des

$$c_i(E) \in H^{2i}(G,W(k)) \quad (*). \tag{6.20}$$

6.9. Restant d'autre part dans le cadre de la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE, on peut noter que l'on a des résultats de nullité analogues à ceux du paragraphe 5. Ainsi, on trouve aisément (par considération de la filtration de la cohomologie de DE RHAM, et en utilisant 6.4), que

$$\underline{\Omega}^i_{X/S} = 0 \quad \text{pour} \quad i > n \quad \text{implique} \quad c_i(E) = 0 \quad \text{pour} \quad i > n \quad , \tag{6.21}$$

les classes de Chern étant prises dans la cohomologie de DE RHAM ou de HODGE relativement à S . Ceci impose donc des restrictions, en particulier, à la possibilité de restreindre à un sous-corps k_o le corps de base d'une représentation linéaire donnée sur un corps k , en se rappelant que dans le premier membre de l'implication (6.21) on peut prendre pour n le degré de transcendance de k_o sur le corps premier. Cette majoration (6.21) est plus simple que celle obtenue dans 5.2 , en ce qu'elle ne fait pas intervenir la dimension cohomologique de G lui-même.

Comme dans 5.1 (et sans les ennuis techniques de passage à la limite), on trouve pour la cohomologie de HODGE ou de DE RHAM mixte des formules du type KUNNETH comme (5.3) , pourvu que G opère trivialement sur X . Cela permet de formuler également pour les classes de Chern style HODGE ou DE RHAM les résultats de 5.5 et 5.6 . Nous en laissons le détail au lecteur.

6.10. Nous avons surtout envisagé ici le cas d'un corps de base, mais comme nous avons déjà mentionné dans 5.8 , il y aura sans doute avantage

(*) Du moins si les $H_n(G,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont finis (sinon, il convient de remplacer le deuxième membre de (6.20) par $\varprojlim_{\nu} H^{2i}(G,W(k)/p^{\nu}W(k))$). Notons qu'on devra avoir $(\sigma-p^i)c^i=0$, où σ provient de l'automorphisme de frobenius de $W(k)$, d'où il résulte que les c^i sont de torsion. Par ailleurs, on devra avoir $c^1=0$, sauf peutêtre pour $p=2$.

souvent à travailler sur des anneaux de base plus généraux. Signalons à ce propos que si A est l'anneau des entiers d'une extension finie k de $\mathbb{Q}$ distincte de $\mathbb{Q}$, on a

$$(6.22) \qquad \Omega^i_{A/\mathbb{Z}} = 0 \text{ pour } i \geqslant 2 \text{ , mais } \Omega^1_{A/Z} \neq 0 \text{ ,}$$

la première relation signifiant que $\Omega^1_{A/\mathbb{Z}}$ est un A-module localement monogène, fait élémentaire bien connu [36, p. 68 Prop. 14], le deuxième étant une reformulation du théorème de MINKOWSKI [29, p. 78] d'après lequel toute extension algébrique finie k de $\mathbb{Q}$ de degré > 1 est "ramifiée sur $\mathbb{Q}$" i.e. donne un anneau d'entiers A qui est ramifié sur $\mathbb{Z}$. Il s'ensuit que pour des représentations linéaires définies sur A, les $c_i(E)$ sont nuls pour $i \geqslant 2$ (6.21), mais qu'en général il pourra exister (même si G est fini) des représentations de rang 1 dont le c_1 est non nul. Prenant par exemple pour k le corps cyclotomique des racines p^n.èmes de l'unité, on sait que l'anneau des entiers A est engendré par une racine primitive de l'unité, ce qui implique que pour une telle racine ξ, on a $d\xi \neq 0$. Par suite, la représentation linéaire identique du groupe $G \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ des racines p^n.èmes de l'unité dans A, représentation définie sur A, a un c_1 qui est non nul en vertu de (6.19).

6.11. Pour terminer, signalons que la construction de ATIYAH [3] des classes de Chern style HODGE en géométrie analytique peut se transporter sans difficulté au cas général envisagé dans le présent paragraphe, et donne une construction de ces classes qui est indépendante de la théorie cohomologique style HODGE des fibrés projectifs. Renvoyant à [15] pour le détail de la construction, et la comparaison avec la définition précédente, contentons-nous de signaler que pour définir la "classe de ATIYAH"

$$c(E) \in H^1(X, \underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E}) \otimes \underline{\Omega}^1_{X/S}) \tag{6.23}$$

du Module localement libre $\mathbb{E}$, donnant naissance aux classes de Chern en prenant les puissances

$$c(E)^i \in H^i(X, \underline{\mathrm{Sym}}^i(\underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E})) \otimes \underline{\Omega}^i_{X/S}) \tag{6.24}$$

et utilisant l'homomorphisme

$$c_i : \underline{\mathrm{Sym}}^i(\underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E})) \longrightarrow \mathcal{O}_X \tag{6.25}$$

défini par le "i.ème coefficient du polynôme caractéristique", il convient d'utiliser le fibré <u>cotangent</u> du fibré principal P associé à $\mathbb{E}$, de groupe structural $\underline{\mathrm{Gl}}(r)$ $(r = \mathrm{rang}(\mathbb{E}))$, plutôt que le fibré tangent comme il est d'usage. L'extension de ATIYAH, définie par descente à X du faisceau des 1 -différentielles relatives de P/S (faisceau sur lequel en effet $\underline{\mathrm{Gl}}(r)$ opère) est alors une extension

$$0 \longrightarrow \underline{\Omega}^1_{X/S} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ati}}(\mathbb{E}) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}(\mathbb{E}) \longrightarrow 0 \ , \tag{6.26}$$

dont $c(E)$ est la classe. (Ce sont les splittages de l'extension (6.26) qu'il convient de désigner sous le nom de "connexions sur $\mathbb{E}$ relativement à S"). Pour simplifier les notations, nous n'avons pas écrit de groupe discret d'opérateurs dans la situation ; c'est d'ailleurs inutile lorsque l'on convient de travailler encore sur un topos localement annelé quelconque, comme il serait encore loisible (*).

§ 7. <u>Appendice</u> : <u>Généralisation d'un résultat de J. MILNOR</u>.

Nous allons ici prouver le théorème suivant, que nous avions signa-

(*) Pour une généralisation de cette construction au cas où $\mathbb{E}$ est un complexe "parfait", et divers compléments, cf. [24].

lé dans 0.9 :

Théorème 7.1. *Soient G le groupe des points rationnels sur $\mathbb{C}$ d'un groupe algébrique sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, Γ un groupe discret, $u : \Gamma \longrightarrow G$ un homomorphisme, d'où un morphisme sur les espaces classifiants $B_u : B_\Gamma \longrightarrow B_G$ (G étant muni de sa topologie habituelle, en faisant un groupe de Lie complexe). Alors pour tout corps de coefficients k de caractéristique nulle, l'homomorphisme correspondant*

$$H^i(B_G,k) \longrightarrow H^i(B_\Gamma,k)$$

est nul pour $i > 0$.

Bien entendu, le point de vue adopté dans cet énoncé étant le point de vue homotopique, les groupes de cohomologie envisagés sont les groupes de cohomologie singulière. Il est immédiat que 7.1 équivaut au

Corollaire 7.2. *Soient X un espace topologique connexe ponctué, $\phi : \pi_1(X) \longrightarrow G$ un homomorphisme (où G est comme dans 7.1), d'où un fibré associé principal P sur X , de groupe G . Alors les classes caractéristiques de P en dimensions > 0 , à coefficients dans un corps k de caractéristique nulle, sont nulles.*

Il suffit d'ailleurs de vérifier 7.2 lorsque X y est un polyèdre fini, compte tenu de la définition de la cohomologie singulière. Dans le cas où X est une variété différentiable, 7.2 peut aussi se reformuler ainsi (cf [3, Prop. 14]) :

Corollaire 7.3. *Soient X une variété différentiable, P un fibré principal sur X à groupe structural G , muni d'une connexion intégrable inva-*

<u>riante par</u> G . <u>Alors les classes caractéristiques de</u> P <u>en dimensions</u> > 0 , <u>à coefficients dans un corps</u> k <u>de caractéristique nulle</u>, <u>sont nulles</u>.

On notera que dans 7.2 et 7.3 , lorsque l'homologie singulière entière de X est de type fini sur $\mathbb{Z}$ en toute dimension, alors la conclusion énoncée équivaut encore à dire que les classes caractéristiques entières de P , en dimensions > 0 , sont des classes de torsion. Cette conclusion peut tomber en défaut lorsqu'on abandonne l'hypothèse de finitude faite, cf. 4.12 b).

La démonstration de 7.1 se fera en plusieurs pas.

a) <u>Cas où</u> G <u>est connexe et réductif</u>. C'est le cas traité par J. MILNOR [32, Th. 3] , dont nous rappelons la démonstration. On prouve le résultat sous la forme 7.2 , en supposant X un polyèdre fini. Alors X se plonge dans un espace $\mathbb{R}^n$, et comme il est bien connu, X est alors rétracte par déformation d'un voisinage ouvert convenable dans $\mathbb{R}^n$. Cela nous ramène alors au cas où X est une variété différentiable, donc à prouver 7.3 . Or dans ce cas, G étant complexe réductif, un théorème bien connu de A. WEIL [9] nous apprend comment calculer les classes caractéristiques à coefficients complexes de P en termes du tenseur courbure d'une connexion de P , en lui appliquant les polynômes invariants (par l'action adjointe) sur l'algèbre de Lie de G . Lorsqu'il existe une connexion intégrable, i.e. à tenseur courbure nul, cela implique la conclusion de 7.3 .

On notera que le théorème de A. WEIL cité est énoncé le plus souvent pour un groupe structural de Lie connexe et compact (c'est pourquoi, sans doute, MILNOR n'énonce son résultat que pour un tel G). Mais grâce à la théorie du groupe complexe associé à un groupe de Lie compact [10, Chap. VI] , ce résultat s'étend aussitôt au cas d'un groupe de Lie complexe réductif connexe (la connexion étant d'ailleurs également superflue, en fait). D'autre part, KAMBER [26] annonce une démonstration purement topologique du résultat de MILNOR.

b) <u>Cas G connexe commutatif</u>. Alors le résultat 7.1 est valable sans supposer G algébrique ni même complexe. En effet, on aura alors un isomorphisme de groupes topologiques

$$G \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q \quad ,$$

ce qui nous ramène aussitôt au cas où G est lui-même égal à $\mathbb{T}$, le tore réel de dimension 1, ou si on préfère, à son complexifié $\mathbb{C}^*$. Mais ce dernier est un groupe complexe réductif, et on est donc dans le cas a) .

c) <u>Invariance du problème par passage de</u> G <u>à la composante neutre</u> G^o , <u>ou de</u> G <u>supposé connexe à un groupe isogène</u>. La première réduction provient du fait que l'homomorphisme

$$H^*(B_G,k) \longrightarrow H^*(B_{G^o},k)$$

est injectif lorsque k est de caractéristique nulle (car G/G^o est un groupe fini ; l'image du premier membre est alors le sous-espace des invariants sous G/G^o dans le second membre). La deuxième provient du fait bien connu qu'une isogénie de groupes de Lie induit un isomorphisme de la cohomologie des classifiants, à coefficients dans un corps k de caractéristique nulle.

d) <u>Cas général</u>. Il résulte aussitôt des points précédents, combiné au lemme suivant de la théorie des groupes algébriques :

Lemme 7.4. *Soit* G *un schéma en groupes algébrique lisse et connexe sur un corps parfait. Il existe alors un sous-groupe invariant* U , *lisse connexe unipotent (donc isomorphe comme schéma à l'espace affine de même dimension), et une isogénie*

$$G/U \longrightarrow H_1 \times H_2 \quad ,$$

avec H_1 *commutatif, et* H_2 *semi-simple.*

On notera que lorsque K est le corps $\mathbb{C}$ des complexes, alors le groupe de Lie complexe $U(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{C}^n$, donc l'homomorphisme $G \longrightarrow G/U$ induit un homotopisme sur les espaces classifiants correspondants, ce qui nous ramène, pour démontrer 7.1 pour G , à le démontrer pour G/U , ou encore pour H_1 et pour H_2 , justiciables de b) et a) ci-dessus.

Pour être complet, donnons une démonstration de 7.4 à coups de références. D'après le théorème de structure fondamental de CHEVALLEY, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 1 \quad ,$$

avec A une *variété abélienne*, et L un groupe algébrique lisse connexe et *affine*. On prend pour U le radical unipotent [11] de L , c'est un sous-groupe caractéristique de L donc invariant dans G , et il est lisse connexe unipotent. Alors $G' = G/U$ est une extension de la variété abélienne A par le groupe $L' = L/U$, qui est *réductif*. On sait qu'il existe une isogénie

$$L' \longrightarrow T \times L_o \quad ,$$

avec T un tore, et L_o un groupe semi-simple à centre nul. Il suffit donc de prouver que l'extension G'' de A par TxL_o déduite de G' peut se mettre sous la forme d'un produit $H_1 \times H_2$ comme ci-dessus. Or soit Z le centre de G'' . On sait, comme conséquence immédiate de [13, XII 6.1 et VI_B 11.9] , que le morphisme $Z \longrightarrow A$ est surjectif, donc un épimorphisme, donc l'extension G'' de A par TxL_o est définie par l'extension Z de A par $Z \cap (TxL_o)$. Ce dernier groupe, étant contenu dans le centre de TxL_o , qui est T , est contenu dans T , de sorte que l'extension G'' apparaît comme le produit d'une extension H_1 de A par T , et de $H_2 = L_o$. Enfin on sait (cf démonstration de [13, XII 6.4]) que H_1 est commutative. Cela achève de prouver 7.4 donc 7.1 .

Remarques 7.5.

a) La partie a) de la démonstration, utilisant des méthodes proprement topologiques et de géométrie différentielle, peut être remplacée par une référence à 4.11 , démontré ici par voie arithmétique ; cf commentaires dans 0.9 .

b) Le théorème 7.1 ne reste pas valable lorsqu'on abandonne l'hypothèse d'algébricité faite sur G , même si G est connexe et semi-simple, par exemple $G = Sl(2,\mathbb{R})$; en fait, d'après le résultat de MILNOR cité dans 0.9 , on a alors des contre-exemples à 7.2 (i.e. à 7.3) pour tout X qui provient d'une courbe algébrique lisse, connexe et propre de genre $g \geqslant 2$, en prenant l'homomorphisme canonique du groupe fondamental de X dans le groupe des automorphismes de son revêtement universel (groupe isomorphe au quotient de G par son centre ± 1). Comme me l'a signalé J.P. SERRE, le théorème 7.1 ne s'étend pas non plus au cas où G est supposé seulement un groupe de Lie complexe et connexe. Son exemple est le suivant. Soit G' le groupe des matrices complexes inversibles triangulaires strictes de degré 3, qui est un groupe algébrique nilpotent de dimension 3, Γ' le sous-groupe formé des matrices à coefficients entiers, Γ'_o son intersection avec le centre de G' (qui est de dimension 1), de sorte que $\Gamma'_o \simeq \mathbb{Z}$. On prend $G = G'/\Gamma'_o$, $\Gamma = \Gamma'/\Gamma'_o$, $u : \Gamma \longrightarrow G$ le plongement canonique. Le sous-groupe compact maximal de G est $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$, le cercle, donc la cohomologie classifiante entière de G est engendrée par une classe c de dimension 2, qu'on peut aussi interpréter comme l'obstruction à splitter l'extension donnée G' de G par $\mathbb{Z}$ (cf à ce sujet le dernier chapitre du livre de J. GIRAUD, Cohomologie non abélienne, à paraître dans North Holland Publishing Cie). L'image inverse de cette classe sur B est alors la classe de l'extension Γ' de Γ par $\mathbb{Z}$, qui n'est pas de torsion comme on vérifie facilement (car autrement on trouverait que Γ', donc G', serait commutatif).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDERSON, **Thèse, à paraître.**

[2] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, J.L. VERDIER, **Cohomologie étale des schémas, Séminaire de Géométrie Algébrique de l' IHES 1963/64 (SGA 4), à paraître dans North Holland Pub. Cie.**

[3] M.F. ATIYAH, Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 85, n° 1, pp. 181-207 (1957).

[4] M.F. ATIYAH, Characters and cohomology of finite groups, Pub. Math. n° 9, p. 23-64 (1961).

[5] M.F..ATIYAH et F. HIRZEBRUCH, Analytic cycles on complex manifolds, Topology, Vol. 1, p. 25-45 (1961).

[6] M.F. ATIYAH, Finiteness theorems for compact Lie groups (multigraphié).

[7] A. BOREL Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Annals of Math., Vol. 57, n°1, p. 115-207 (1952).

[8] H. CARTAN et S. EILENBERG, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956.

[9] S.S. CHERN, Differential geometry of fibre bundles, Vol. II, pp. 397-411, Proc. Internat. Congress Math., 1950.

[10] C. CHEVALLEY, Theory of Lie groups, Princeton University Press, 1946.

[11] C. CHEVALLEY, Classification des groupes de Lie algébriques, Séminaire à l'Ecole Normale Supérieure, 1956 et 1957.

[12] C. CHEVALLEY, Anneau de Chow et espaces fibrés algébriques, Séminaire à l'Ecole Normale Supérieure, 1958.

[13] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK, Schémas en groupes, Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES, 1962/64 (SGA 3).

[14] J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie Algébrique, Chap. II et IV, Pub. Math. n° 8, 20, 24, 28, 32.

[15] J. GIRAUD, Classes caractéristiques en Topologie et en Géométrie Algébrique, en préparation (à paraître dans North Holland Publishing Cie).

[16] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'Algèbre Homologique, Tohoku Math. Journal, Vol. 9, n° 2-3, pp. 119-221 (1957).

[17] A. GROTHENDIECK, La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France 86, p. 137-154 (1958).

[18] A. GROTHENDIECK, Torsion homologique et sections rationnelles, in Séminaire CHEVALLEY à l'Ecole Normale Supérieure, 1958 (cf [12]).

[19] A. GROTHENDIECK, Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES, 1964/65 (SGA 5), à paraître dans North Holland Pub. Cie.

[20] A. GROTHENDIECK, On the De Rham cohomology of algebraic varieties, Pub. Math., n° 29, p. 95-103 (1966).

[21] A. GROTHENDIECK, Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens, Inventiones Mathematicae 2, p. 59-78 (1966).

[22] M. HAKIM, Topos localement annelés et schémas relatifs, à paraître dans North. Holland Pub. Cie.

[23] F. HIRZEBRUCH, Neue topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie, Springer (1956).

[24] L. ILLUSIE, Article en préparation.

[25] J.P. JOUANOLOU, Exposé VII (en préparation) au Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES de A. GROTHENDIECK, 1964/65 (cf [19]).

[26] F.W. KAMBER et PH. TONDEUR, On the characteristic ring of flat bundles Amer. Math. Soc. Abstracts of contributed papers, the October Meeting in Philadelphia, Pennsylvania (Oct. 29 1966).

[27] M. KAROUBI, Travaux plus ou moins secrets, et : Algèbres de CLIFFORD et K-théorie. Thèse Paris 1968 (Gauthier-Villars)

[28] S. LANG, Abelian Varieties, Interscience Publishers, 1958.

[29] S. LANG, Algebraic Numbers, Addison Wesley Pub. Cie. 1963.

[30] M. LAZARD, Sur la nilpotence de certains groupes algébriques, C.R. t. 241, p. 1687-1689 (1955).

[31] S. LOJACIEWICZ, Triangulation of semi-analytic sets, Annali Scuola Norm. Pisa, t. 18, p. 449-474 (1964).

[32] J. MILNOR, On the existence of a connection with curvature zero, Comm. Math. Helv., Vol. 32, Fasc. 3 (1958).

[33] R. THOM, Travaux de Milnor sur le cobordisme, Séminaire Bourbaki n° 180 (Février 1959).

[34] J. MILNOR, Construction of universal bundles, Annals of Math., t. 63, pp. 272-284.

[35] P. MONSKY et G. WASHNITZER, Formal Cohomology, Part I (miméographié), Brandeis 1966.

[36] J.P. SERRE, Corps locaux, Actualités Sc. et Ind. 1296, Paris Hermann 1962.

[37] A. WEIL, Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc. 55, p. 497-508 (1949).