manuscripta math. 2, 375 - 396 (1970)

REPRESENTATIONS LINEAIRES ET COMPACTIFICATION PROFINIE DES GROUPES DISCRETS

Alexander Grothendieck

The main result asserts that if $u: G \to H$ is a morphism of discrete groups of finite type such that the extension $\hat{u}: \hat{G} \to \hat{H}$ of u to the profinite completions is an isomorphism, then the theory of linear representations of G and of H (by modules of finite presentation over any ground-ring) is essentially the same. Some applications to the theory of sheaves of modules endowed with a stratification (or an integrable connection) are sketched, and the problem raised as to finding good conditions on G, H which insure that u is an isomorphism whenever $\hat{u}$ is.

1. Le résultat principal

1.1. Notations. Si G est un groupe, on désigne par $\hat{G}$ son "compactifié profini"

$$\hat{G} = \varprojlim_i G_i \quad ,$$

où G_i parcourt l'ensemble des groupes quotients finis de G. Ainsi $\hat{G}$ est un groupe topologique compact totalement discontinu, complété de G pour la topologie définie par les sous-groupes d'indice fini de G. Le groupe profini $\hat{G}$ dépend fonctioriellement de G, et pour un morphisme $u: G' \to G$ de groupes, nous désignons par

$$\hat{u}: \hat{G}' \longrightarrow \hat{G} \tag{1.1.1}$$

le morphisme correspondant des compactifiés.

Soit d'autre part A un anneau commutatif. On désigne par

$$\mathrm{Rep}_A(G)$$

la catégorie des modules de présentation finie sur A sur lesquels G opère. Un homomorphisme $u: G' \to G$ induit donc un foncteur

(1.1.2) $$u^*: \mathrm{Rep}_A(G) \to \mathrm{Rep}_A(G')$$

de "restriction du groupe d'opérateurs", de sorte que $\mathrm{Rep}_A(G)$ dépend de G de façon contravariante. Evidemment il dépend de A de façon covariante, un homomorphisme $A \to A'$ définissant un foncteur "extension de l'anneau des scalaires"

$$\mathrm{Rep}_A(G) \to \mathrm{Rep}_{A'}(G) ,$$

qui commute évidemment (à isomorphisme canonique près) aux foncteurs de la forme (1.1.1).

THEOREME 1.2. Soit $u: G' \to G$ un homomorphisme de groupes discrets.

a) Supposons $\hat{u}$ (1.1.1) surjectif, et G de type fini. Alors le foncteur u^* (1.1.2) est pleinement fidèle (pour tout anneau commutatif A).

b) Supposons $\hat{u}$ bijectif, et G et G' de type fini. Alors le foncteur u^* est une équivalence de catégories.

REMARQUES 1.3. Il est facile d'établir des réciproques, sans condition que G ni G' ne soit de type fini: si $A \neq 0$, et si u^* est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories) alors $\hat{u}$ est surjectif (resp. bijectif). On laisse ce fait au lecteur à titre d'excercice; il utilisera le fait que si G est fini et Spec(A) est connexe non vide (il suffira du cas où A est un corps), alors G se reconstitue à isomorphisme canonique près en termes de la catégorie $\mathrm{Rep}_A(G)$ et de la structure "tensorielle", définie par le bifoncteur "produit tensoriel de deux représentations", comme le groupe des automorphismes du foncteur "oubli des opérations de G"

$$\mathrm{Rep}_A(G) \to \mathrm{Mod}(A)$$

qui sont "compatibles au produit tensoriel".

1.4. Démonstration de 1.2. Nous avons besoin du

LEMME 1.4.1. Soient G un groupe, $(A_i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant d'anneaux, $A = \varinjlim_i A_i$, d'où un foncteur canonique.

$$\varinjlim \mathrm{Rep}_{A_i}(G) \to \mathrm{Rep}_A(G)$$

(cf. SGA 4 VI pour la signification de $\varinjlim$). Si G est de type fini et si les A_i sont noethériens, ce foncteur est une équivalence de catégories.

NB Si on supposait G de présentation finie, il serait inutile de supposer les A_i noethériens, et le lemme résulte alors des références habituelles à EGA IV 8. La possibilité d'obtenir encore un énoncé pour G supposé seulement de type fini m'avait été signalé par P. Deligne, et m'a permis d'améliorer en conséquence l'énoncé primitif de 1.2.

Rappelons que 1.4.1 signifie deux choses:

a) Si M_i, N_i sont deux modules de présentation finie sur A_i sur lesquels opère G, et si M, N sont les modules correspondants sur A déduits par changement de base, et de même M_j, N_j sur $A_j (j \geq i)$, alors l'application canonique

$$\varinjlim_{j \geq i} \mathrm{Hom}_{A_j}(M_j, N_j) \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$$

est bijective.

b) Pour tout module M de présentation finie sur A sur lequel G opère, il existe un $i \in I$ et un module de présentation finie M_i sur A_i sur lequel G opère, tel que M soit isomorphe dans $\mathrm{Rep}_A(G)$ à $M_i \otimes_{A_i} A$.

Si G est engendrée par la partie finie E, alors un homomorphisme de A-modules $f: M \to N$ commute à l'action de G sur M et N si et seulement si pour tout $g \in E$, on a $g_N f = f g_M$. Donc a) résulte de l'énoncé analogue pour $G=1$,

$$\varinjlim \mathrm{Mod}_{\mathrm{pr.f.}}(A_j) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Mod}_{\mathrm{pr.f.}}(A)$$

qui figure dans EGA IV 8.5.2. Pour b), loc. cit. nous montre déjà qu'on peut trouver un $i \in I$, un M_i de présentation finie sur A_i, et des automorphismes $f_g (g \in E)$ de M_i, de telle façon que par changement de base on trouve (à isomorphisme près) M et le système des $g_M (g \in E)$. Il reste à prouver que, à condition d'augmenter i, on peut obtenir que toute relation dans G entre les $g \in E$ soit satisfaite par les $f_g \in \mathrm{Aut}_{A_i}(M_i)$. Si les relations en question étaient engendrées par un nombre fini d'entre elles, ce serait clair par loc. cit., sans condition de noethérianité sur les A_j. Mais dans le cas envisagé dans le lemme, l'anneau A_i étant noethérien, il en est de même de l'anneau (non nécessairement commutatif) $\mathrm{End}_{A_i}(M_i)$, et l'idéal I engendré dans cet anneau par les images dans $\mathrm{Aut}_{A_i}(M_i)$ des relations envisagées est donc un idéal de type fini. Nous savons que l'idéal qu'il engendre dans $\mathrm{End}_A(M)$ est nul, donc, d'après loc. cit., il devient déjà nul dans un $\mathrm{End}_{A_j}(M_j)$, ce qui prouve notre assertion.

Appliquant 1.4.1 à la situation de 1.2, en représentant A comme limite inductive de ses sous-$\underline{Z}$-algèbres de type fini, nous sommes ramenés immediatement au cas où A <u>est une $\underline{Z}$-algèbre de type fini</u>. Dans ce cas, la démonstration qui suit montrera qu'il est inutile dans 1.2 a) de supposer G de type fini, et dans 1.2 b) de supposer G' de type fini.

<u>1.4.2.</u> Lorsque l'anneau A est <u>fini</u>, donc tout A-module de type fini est lui-même un ensemble fini, 1.2 est essentiellement trivial (sans condition que G ni G' ne soit de type fini), puisque les opérations d'un groupe discret G sur un ensemble fini se factorisent par $\hat{G}$.

<u>1.4.3.</u> Nous pouvons maintenant prouver 1.2 a). Il faut prouver que si M, N sont deux A-modules de type fini sur lesquels G opère, et

$f: M \to N$ un A-homomorphisme qui commute à l'action de G', il commute également à l'action de G, i.e. que pour tout $g \in G$, on a

$$g_N f = f\, g_M \quad .$$

Comme A est noethérien et M, N sont de type fini sur A, il suffit de prouver que cette même relation est vérifiée après tout changement de base $A \to A/\underline{m}^{n+1}$, où $\underline{m}$ est un idéal maximal de A. Or, A étant de type fini sur $\underline{Z}$, l'anneau $A/\underline{m}^{n+1}$ envisagé est fini, et on gagne grâce à 1.4.2.

On notera que a) est établi maintenant dans le cas général, en particulier, sans hypothèse noethérienne sur A. Nous en aurons besoin, avec cette généralité, dans la démonstration de b) ci-dessous.

Pour prouver b), reste donc simplement à montrer que u^* est essentiellement surjectif, i.e. que pour tout A-module M de présentation finie, munie d'une opération de G' sur M, cette opération se factorise par une opération de G (cette dernière étant nécessairement unique, d'après le cas a) déjà traité).

1.4.4. Démonstration de b): cas A local noethérien à corps résiduel fini. (Nous abandonnons donc momentanément l'hypothèse "A de type fini sur $\underline{Z}$" à laquelle nous nous étions ramenés par 1.4.1.) Soit $\underline{m}$ l'idéal maximal de A, et pour tout entier $n \geq 0$, soient $A_n = A/\underline{m}^{n+1}$, $M_n = M \otimes_A A_n$. D'après 1.4.2, pour tout entier n, l'opération de G' dans M_n (déduite de son opération sur M) se factorise par une opération de G sur M_n. D'après l'unicité, pour n variable, ces opérations "se recollent", et définissent donc, par passage à la limite projective, une opération de G sur

$$\hat{M} = \varprojlim M_n$$

qui factorise l'opération évidente de G' sur ce même $\hat{M}$. Notons maintenant que, M étant de type fini sur A local noethérien, on a un isomorphisme canonique

$$M\otimes_A\hat{A} \simeq \hat{M} \quad ,$$

de sorte que l'on vient d'établir que l'opération de G' sur $M\otimes_A\hat{A}$ se factorise par une opération de G. Or $\hat{A}$ est fidèlement plat sur A, et l'unicité déjà établie, jointe à la théorie de la descente fidèlement plate (SGA 1 VIII 1.1), montre que s'il existe une A-algèbre fidèlement plate A', telle que l'opération de G' sur $M' = M\otimes_A A'$ se factorise par une opération de G sur M', alors cette dernière "se descend à A" i.e. provient d'une opération de G sur M, laquelle manifestement factorise l'opération donnée de G' sur M. Cela prouve le cas envisagé. (Le résultat d'unicité a été utilisé implicitement sur l'anneau $\hat{A}\otimes_A\hat{A}$, qui est non noethérien en général.)

<u>1.4.5.</u> Fin de la démonstration de b). On revient à l'hypothèse: A de type fini sur $\underline{Z}$. Alors pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A, utilisant 1.4.4, on trouve que l'opération de G' sur le localisé $M_{\underline{m}}$ de M sur $A_{\underline{m}}$ se factorise par une opération de G sur $M_{\underline{m}}$. Comme $A_{\underline{m}}$ est la limite inductive des localisés A_f ($f\in A-\underline{m}$), 1.4.1 nous montre que l'opération en question de G provient d'une opération de G sur un localisé $M_f = M\otimes_A A_f$, où $f=f(\underline{m})$ est un élément convenable de $A - \underline{m}$. De plus, pour f convenable, cette opération factorise l'opération naturelle de G' sur M_f (par exemple, parce que pour f "assez grand" pour la divisibilité, M_f est <u>contenu</u> dans $M_{\underline{m}}$). Il s'ensuit alors, d'après l'unicité, que les opérations obtenues de G sur les restrictions de M aux ouverts $\mathrm{Spec}(A_{f(\underline{m})}) = U(\underline{m})$ et $\mathrm{Spec}(A_{f(\underline{m}')}) = U(\underline{m}')$, pour deux idéaux maximaux $\underline{m}, \underline{m}'$ de A, coincident aux dessus de l'intersection de ces ouverts. D'autre part, par Krull les ouverts $U(\underline{m})$ recouvrent $\mathrm{Spec}(A)$. On obtient donc par recollement une opération de G sur M qui factorise l'opération donnée de G', ce qui achève la démonstration de 1.2.

NB L'auteur n'a pu se résoudre, dans la dernière partie de l'argument, à ne pas employer le langage géométrique. Un lecteur algébriste fanatique pourra remplacer les dernières lignes par l'argument de descente fidèlement plate déjà utilisé dans 1.4.4 (en faisant $A' = \prod_i A_{f_{\underline{m}_i}}$, les $\underline{m}_i$ désignant un nombre fini d'idéaux maximaux de A tels que les $f_{\underline{m}_i}$ engendrent l'idéal unité).

2. Corollaires et variantes

COROLLAIRE 2.1. Soient G un groupe discret de type fini, N le sousgroupe invariant de G noyau de l'homomorphisme canonique $G \to \hat{G}$ (i. e. l'intersection des noyaux des homomorphismes de G dans des groupes finis quelconques). Alors toute représentation linéaire de G dans un A-module le présentation finie est triviale sur N. En particulier, si $\hat{G} = 1$ i. e. $N=G$, toute représentation linéaire de G dans un A-module de présentation finie est triviale.

Il suffit d'appliquer 1.2 b) à l'homomorphisme canonique $G \to G/N$, qui induit évidemment un isomorphisme sur les compactifiés profinis. On notera d'ailleurs que la démonstration directe de 2.1 peut se faire avec les seuls moyens de la démonstration de 1.2 a), sans utiliser l'argument de descente fidèlement plate et de recollement des morceaux 1.4.4 et 1.4.5.

On pourrait aisément axiomatiser les arguments qui ont permis d'établir 1.2, pour les appliquer à des situations plus générales. Il nous a semblé préférable de signaler simplement divers résultats analogues, qui peuvent se démontrer en reprenant mutatis mutandis la démonstration donnée de 1.2. Signalons d'abord le résultat suivant, qui constitue une généralisation du cas particulier de 1.2 obtenu en se bornant à des représentations dans des modules localement libres de type fini (par exemple à des représentations matricielles) :

COROLLAIRE 2.2. Soient S un schéma, H un schéma en groupes de présentation finie sur S, u: $G' \to G$ un homomorphisme de groupes discrets, K = H(S) le groupe des sections de H sur S, et considérons application

$$(2.2.1) \qquad f \mapsto f \circ u : \mathrm{Hom}(G,K) \to \mathrm{Hom}(G',K) .$$

Alors, si $\hat{u}$ (1.1.1) est surjectif et G est de type fini (resp. $\hat{u}$ est bijectif et G et G' sont de type fini), l'application précédente est injective (resp. bijective).

On notera que la présence dans cet énoncé d'un S général est de la poudre aux yeux: on se ramène aussitôt au cas où S est affine, i.e. de la forme Spec(A), ce qui permet par passage à la limite du type 1.4.1 à se ramener au cas A de type fini sur $\underline{Z}$.

COROLLAIRE 2.3. Soit u: $G' \to G$ un homomorphisme de groupes discrets, et supposons que $\hat{u}$ soit surjectif et G de type fini (resp. $\hat{u}$ bijectif et G et G' de type fini). Alors pour tout groupe topologique compact K, l'application (2.2.1) est injective (resp. bijective).

On sait en effet, grâce au théorème de Peter-Weyl [2], que K est isomorphe à une limite projective de groupes de Lie compacts, ce qui nous ramène au cas où K lui-même est un groupe de Lie, et qu'un groupe de Lie compact est toujours de la forme $H(\underline{R})$, où H est un groupe algébrique affine defini sur $\underline{R}$ [2]. Donc 2.3 résulté de 2.2.

2.4. Soit S un schéma, et pour tout groupe discret G, soit R(S,G) la catégorie des schémas de présentation finie sur S, munis d'une action de G (par S-automorphismes). Un homomorphisme de groupes u: $G' \to G$ donne encore un foncteur

$$(2.4.1) \qquad u^{*}: R(S,G) \to R(S,G') ,$$

et on peut se demander si moyennant leshypothèses de 1.2 a) (resp. 1.2 b)) sur G,G' et u, il sera encore vrai que le foncteur (2.4.1) est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories). Dans cette direction, les résultats suivants peuvent s'obtenir par la technique du n° 1 :

2.4.2. L'analogue de 1.2 a) est valable, i.e. si G est de type fini et $\hat{u}$ est surjectif, alors u^* (2.4.1) est pleinement fidèle.

2.4.3. L'analogue de 1.2 b) est valable dans le cas particulier $G \to G/N$ (notations de 2.1), i.e. toute opération d'un groupe G de type fini sur un S-schéma de présentation finie induit une opération triviale sur le sous-groupe $N = \mathrm{Ker}(G \to \hat{G})$ de G. Cela se prouve par le procédé de la démonstration de 1.2 a).

2.4.4. L'analogue de 1.2 b) est valable lorsqu'on se borne à des opérations de groupes G, G' sur des schémas relatifs, propres, munis d'une polarisation relativement à S. Cela se voit comme 1.2 b), en utilisant le fait suivant (résultant immédiatement du fait que le schéma en groupes des automorphismes d'un schéma projectif polarisé sur un corps k est de type fini sur k): si $S = \mathrm{Spec}(A)$, avec A un anneau fini, alors le groupe des automorphismes d'un S-schéma projectif polarisé est fini.

2.4.5. Lorsqu'on ne postule pas l'existence de polarisations invariantes par les actions des groupes envisages, mais qu'on se borne à des schémas propres, la démonstration de 1.2 b) nous ramène encore au cas où S est le spectre d'un anneau local fini. Mais même dans le cas où S est le spectre d'un corps fini, la réponse n'est pas connue, la difficulté provenant du groupe des composantes connexes du schéma des automorphismes de X, qui peut être un groupe infini. Cependant, des exemples suggèrent que ces groupes sont assez voisins de groupes de la forme $\mathrm{Aut}_{\underline{Z}}(M)$ (M un $\underline{Z}$-module de type fini) ou $H(\underline{Z})$ (H un schéma en groupes de type fini sur $\underline{Z}$), de sorte que 2.2 pourrait peut-être leur applicable. Un premier cas intéressant à regarder serait celui des schémas abéliens.

3. Remarques et compléments

3.1. Le contenu essentiel de 1.2, 2.2 peut être reformulé en disant que si $u: G' \to G$ est un homomorphisme de groupes de type fini tel que $\hat{u}$ est un isomorphisme, alors pour tout groupe K de la forme $\mathrm{Aut}(M)$, ou $H(A)$, où M est un module de présentation finie sur un anneau A, et H un schéma en groupes de présentation finie sur un tel A, l'application correspondante (2.2.1)

$$(3.1.1) \qquad f \mapsto f \circ u: \quad \mathrm{Hom}(G,K) \to \mathrm{Hom}(G',K)$$

est bijective. Lorsque G et G' sont eux-mêmes d'un des types précédents il en résulte évidemment que u est lui-même un isomorphisme. Plus généralement, soit C (resp. $C' \supset C$) la classe des groupes K ayant la propriété de bijectivité précédente, pour tout homomorphisme $u: G' \to G$ de groupes de type fini (resp. de présentation finie) tel que $\hat{u}$ soit un isomorphisme. Donc C contient les groupes précédents du type $\mathrm{Aut}(M)$, $\mathbf{H}(A)$, et peut-être aussi les groupes de la forme $\mathrm{Aut}_S(X)$, où X est un schéma propre de présentation finie sur un schéma S (et en tous cas les groupes $\mathrm{Aut}_S(X,L)$, où L est une "polarisation" de X sur S). Si alors u est comme ci-dessus, et si G, G' sont eux-mêmes dans C (resp. dans C') alors on conclut que u est un isomorphisme. On notera que l'exemple connu de Higman [4] de groupe G' de présentation finie tel que $\hat{G}' = e$ (de sorte que $u: G' \to e$ est un morphisme de groupes de présentation finie tel que $\hat{u}$ soit un isomorphisme) montre qu'il y a des groupes de présentation finie qui ne sont pas dans C'. Une question intéressante, dans cette direction, serait de savoir si un groupe de présentation finie qui est <u>séparé pour sa topologie profinie canonique</u> est dans C'; en résulterait, en particulier, qu'un homomorphisme u entre de tels groupes, tel que $\hat{u}$ soit un isomorphisme, est un isomorphisme.

3.2. On notera que les sous-catégories C, C' de la catégorie des groupes sont stables par limites projectives quelconques, et C' est stable par limites inductives filtrantes. Il est également facile de voir que C et C' sont stables par passage à un sous-groupe d'indice fini, ce qui implique (compte tenu qu'il contient les groupes du type G(A) envisagés plus haut) que C contient les groupes "de type arithmétique" des "Lie group people". Donc un homomorphisme de tels groupes qui induit un isomorphisme sur les compactifiés profinis est un isomorphisme.

3.3. Une façon naturelle d'aborder les questions soulevées ici serait de tenter de dégager, dans des cas favorables, une description d'un groupe discret G en termes de la catégorie $\mathrm{Rep}_A(G)$ de ses représentations linéaires dans des modules de présentation finie sur un anneau donné A tel que Z, cette catégorie étant munie de la structure définie par le foncteur produit tensoriel de deux représentations. Un candidat-sosie naturel pour G est le groupe $\mathrm{C\ell}_A(G)$ des $\otimes$-automorphismes du foncteur oubli

$$\mathrm{Rep}_A(G) \to \mathrm{Mod}_{pf}(A) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{Rep}_A(e) ,$$

par quoi on entend les automorphismes A-linéaires de ce foncteur qui "commutent au produit tensoriel". Supposons pour simplifier Spec(A) connexe. Utilisant alors le fait que le groupe analogue, défini en termes de la catégorie $\mathrm{Rep}_A(\hat{G})$ des représentations continues de $\hat{G}$ par des A-modules de présentation finie (qu'on peut identifier à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_A(G)$ formée des représentations qui se factorisent par un groupe quotient fini de G), est canoniquement isomorphe à $\hat{G}$ (cf. 1.3), on trouve des homomorphismes canoniques évidents

$$G \to \mathrm{C\ell}_A(G) \to \hat{G} ,$$

dont le composé est l'homomorphisme canonique de G dans $\hat{G}$. Le groupe $\mathrm{C\ell}_A(G)$ pourra s'appeler la A-clôture de G, et on s'attend dans des cas favorables à ce que l'homomorphisme canonique $G \to \mathrm{C\ell}_A(G)$ de G dans son A-clôture soit un isomorphisme. On notera que dans le cas où A est noethérien et où pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A, le corps résiduel $A/\underline{m}$ est fini, l'homomorphisme canonique $Cl_A(G) \to \hat{G}$ est injectif, de sorte que dans ce cas la A-clôture de G s'identifie à un sous-groupe de son complété profini. Une question intéressante serait de savoir si pour G de présentation finie et séparé pour sa topologie profinie canonique, l'inclusion canonique de G dans sa A-clôture est un isomorphisme, lorsque $A = \underline{Z}$ (ou quelque autre anneau convenable). Si cette condition est satisfaite pour deux groupes G, G' de type fini, et le même A, alors il résulte évidemment de 1.2 que tout homomorphisme $u: G' \to G$ tel que $\hat{u}$ est un isomorphisme est un isomorphisme; mieux, un groupe H satisfaisant la condition précédente (pour un A fixé) est dans la catégorie C introduite plus haut, et même dans la sous-catégorie $C_o \subset C$ formée des groupes H tels que (3.1.1) soit un isomorphisme pour tout homomorphisme $u: G' \to G$ de groupes discrets tel que $\hat{u}$ soit un isomorphisme (sans conditions de finitude sur G ni G').

Comme exemple de groupe isomorphe à son A-clôture, signalons le cas des groupes de la forme H(A), où H est un sous-schéma en groupes fermé d'un groupe linéaire $K = Gl(n)_A$, A étant un anneau noethérien à spectre connexe tel que pour tout idéal maximal $\underline{m}$ de A, le corps résiduel $A/\underline{m}$ soit fini, lorsqu'on suppose de plus que la topologie profinie de G est induite par la "topologie de congruences", i. e. que l'homomorphisme

$$G = H(A) \to \prod_{\underline{m} \in \mathrm{Max}(A)} H(\hat{A}_{\underline{m}}) = \prod_{\underline{m} \in \mathrm{Max}(A)} \varprojlim_n H(A/\underline{m}^{n+1})$$

est tel que la topologie profinie canonique de G soit induite par la topologie profinie du second membre provenant du fait que les $H(A/\underline{m}^{n+1})$ sont finis, i. e. que l'homomorphisme prolongé

$$\hat{G} \to \prod_{\underline{m} \in \mathrm{Max}(A)} H(\hat{A}_{\underline{m}})$$

est un monomorphisme. En effet, désignant par $\bar{G}$ la A-clôture de G dans $\hat{G}$, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{G} \arrow[r] \arrow[dr] & \hat{G} \arrow[r] & \prod H(\hat{A}_{\underline{m}}) \arrow[r] & \prod K(\hat{A}_{\underline{m}}) \\
G=H(A) \arrow[ur] \arrow[rr] & & K(A) \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

où $\bar{G} \to K(A)=\mathrm{Aut}_A(A^n)$ est obtenu par l'opération de $\bar{G}$ sur A^n qui proponge l'opération tautologique de $G=H(A) \subset K(A)=\mathrm{Aut}(A^n)$ sur A^n (compte tenu de la définition de $\bar{G}$). Comme les flèches horizontales supérieures sont toutes injectives, il en est de même de $\bar{G} \to K(A)$. D'autre part, on lit sur le diagramme que tout élément de $K(A)$ qui est dans l'image de $\bar{G}$ est tel que ses images dans les $K(\hat{A}_{\underline{m}})$ soient contenues dans les $H(\hat{A}_{\underline{m}})$, d'où on conclut par descente fidèlement plate et passage du local au global que cet élément est dans $H(A)$, donc Im $(\bar{G} \to K(A)) \subset H(A)$, d'où $G = \bar{G}$, cqfd. Pour des exemples intéressante de groupes G satisfaisant la condition précédente sur les sous-groupes de congruence, cf. [1] .

4. Application aux modules stratifiés

4.1. Soient S un schéma, X un schéma sur S. Nous renvoyons à [3] pour la notion de Module M *sur* X *stratifié relativement à* S. Lorsque M est de caractéristique nulle, X lisse sur S, et M quasi-cohérent, la donnée d'une stratification sur M relativement à S revient simplement à celle d'une *connexion intégrable* sur M relativement à S. Si X est plat et localement de présentation finie sur S localement noethérien et si M est un module stratifié *cohérent* sur X relativement à S, alors M est localement libre si et seulement si il est plat sur S (condition par exemple automatiquement satisfaite si S est le spectre d'un corps).

On a de même une notion de module cohérent stratifié $\mathcal{M}$ sur un espace analytique complexe $\mathcal{X}$ (et même une notion relative, lorsque $\mathcal{X}$ est un espace analytique complexe au dessus d'un autre, que nous n'utiliserons pas ici). Un tel $\mathcal{M}$ est nécessairement localement libre. La catégorie des modules cohérents stratifiés sur $\mathcal{X}$ est équivalente à la catégorie des Modules localement libres de type fini sur le faisceau d'anneaux constant $\underline{C}_{\mathfrak{X}}$ sur $\mathfrak{X}$, en associant à tout tel Module E le Module stratifié $E \otimes_{\underline{C}} \underline{O}_{\mathfrak{X}}$. Lorsque $\mathfrak{X}$ est connexe et muni d'un point marqué x, on sait d'autre part que la catégorie des Modules localement libres de type fini sur $\underline{C}_{\mathfrak{X}}$ est canoniquement équivalente à la catégorie $\mathrm{Rep}_{\underline{C}}(\pi_1(\mathfrak{X}, x))$ des représentations complexes de dimension finie du groupe fondamental $\pi_1(\mathfrak{X}, x)$ de $\mathfrak{X}$ en x. On trouve donc une équivalence de catégories

(4.1.1) $$\mathrm{Cohstrat}(\mathfrak{X}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Rep}_{\underline{C}}(\pi_1(\mathfrak{X}, x))$$

Un morphisme d'espaces analytiques ponctués connexes $f:(\mathfrak{Y}, x) \longrightarrow (\mathfrak{Y}, y)$ donne un diagramme, commutatif à isomorphisme canonique près, de foncteurs

(4.1.2) $$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cohstrat}(\mathfrak{Y}) & \longrightarrow & \mathrm{Cohstrat}(\mathfrak{X}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Rep}_{\underline{C}}(\pi_1(\mathfrak{Y}, y)) & \longrightarrow & \mathrm{Rep}_{\underline{C}}(\pi_1(\mathfrak{X}, x)) \end{array} ,$$

où la première flèche horizontale est le foncteur "image inverse de Modules stratifiés" qu'on devine, la deuxième flèche horizontale est le foncteur "restriction du groupe d'opérateurs" associé à l'homomorphisme de groupes

$$\pi_1(\mathfrak{X}, x) \to \pi_1(\mathfrak{Y}, y)$$

induit par f, et où les flèches verticales sont les équivalences du type (4.1.1).

Partons enfin d'un schéma localement de type fini X sur $\underline{C}$, et soit X^{an} l'espace analytique associé. On trouve alors un foncteur évident $M \mapsto M^{an}$

(4.1.3) $$\mathrm{Cohstrat}(X) \longrightarrow \mathrm{Cohstrat}(X^{an}) ,$$

et un morphisme $f: X \to Y$ de schémas localement de type fini sur $\underline{C}$ donne naissance à un diagramme commutatif à isomorphismes canoniques près

$$(4.1.4)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Cohstrat}(Y) & \longrightarrow & \mathrm{Cohstrat}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Cohstrat}(Y^{an}) & \longrightarrow & \mathrm{Cohstrat}(X^{an}) \end{array} \quad .$$

Enfin,lorsque X est propre, il résulte aussitôt de GAGA que le foncteur (4.1.3) est une équivalence de catégories. La composant avec l'équivalence du type (4.1.1) pour X^{an}, on trouve donc une équivalence de catégories, pour X connexe muni d'un point complexe x:

$$(4.1.5)\qquad \mathrm{Rep}_{\underline{C}}(\pi_1(X^{an},x)) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Cohstrat}(X)\ .$$

Cette équivalence permet donc de donner une interprétation purement algébrique (pour X propre connexe sur $\underline{C}$) de la catégorie des représentations complexes du groupe discret $\pi_1(X^{an},x)$, bien que ce groupe lui-même soit un invariant de nature transcendante, i.e. dépendant de la topologie mise sur le corps $\underline{C}$. De même, les compatibilités (4.1.2) et (4.1.4) permettent, pour un morphisme $f: (X,x)\to(Y,y)$ de schémas propres connexes sur $\underline{C}$, de donner une interprétation algébrique du foncteur "restriction du groupe d'opérateurs"

$$(4.1.6)\qquad \mathrm{Rep}_{\underline{C}}(\pi_1(Y^{an},y)) \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\underline{C}}(\pi_1(X^{an},x))$$

associé à l'homomorphisme de groupe discrets correspondant

$$(4.1.7)\qquad \pi_1(f^{an}):\ \pi_1(X^{an},x)\to\pi_1(Y^{an},y)\ .$$

On comparera ces remarques avec le fait analogue (valable sans restriction de propreté sur X) que la catégorie des représentations de $\pi_1(X,x)$ dans des ensembles finis a une interprétation purement algébrique, à équivalence près, comme la catégorie des revêtements étales de X ("théorème d'existence de Rieman", cf. par exemple SGA 1 XII 5.1). Il revient au même de dire que le compactifié profini $\hat{\pi}_1(X^{an},x)$ peut s'interpréter comme le groupe fondamental algébrique $\pi_1(X,x)$:

$$(4.1.8)\qquad \hat{\pi}_1(X^{an},x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,x)\ .$$

Si on a alors un morphisme de schémas localement de type fini connexes ponctués $f\colon (X,x)\to(Y,y)$, alors le morphisme déduit de (4.1.7) par passage aux compactifiés profinis s'interprète via (4.1.8) comme le morphisme $\pi_1(f)$ induit par f sur les groupes fondamentaux algébriques, i.e. on a commutativité dans

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X^{an},x)^\wedge & \longrightarrow & \pi_1(Y^{an},y)^\wedge \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \pi_1(X,x) & \longrightarrow & \pi_1(Y,y) \end{array} \qquad (4.1.9)$$

Ces remarques posées, on voit que le résultat principal 1.2 nous donne un moyen de déduire, d'hypothèses concernant $\pi_1(f^{an})^\wedge$, ou ce qui revient au même, $\pi_1(f)$ (hypothèses qui s'explicitent donc en termes purement algébrico-géométriques par le comportement du foncteur "image inverse par f de revêtements étales de Y", savoir par la propriété que ce foncteur soit pleinement fidèle resp. une équivalence de catégories), des conclusions concernant le foncteur (4.1.6) entre catégories de représentations linéaires complexes des groupes fondamentaux transcendants $\pi_1(X^{an},x)$ et $\pi_1(Y^{an},y)$; donc finalement, grâce aux compatibilités (4.1.2) et (4.1.4), une conclusion de pleine fidélité resp. d'équivalence pour le foncteur

$$\mathrm{Cohstrat}(Y) \longrightarrow \mathrm{Cohstrat}(X) \qquad (4.1.10)$$

induit par f. On a ainsi démontré le théorème suivant:

<u>THEOREME 4.2.</u> Soit $f\colon X\to Y$ un morphisme de schémas propres connexes sur la corps $\mathbb{C}$ tel que $\pi_1(X)\to\pi_1(Y)$ soit surjectif (resp. bijectif), les π_1 étant calculés pour un point base géométrique choisi dans X et son image dans Y (NB Ces propriétés ne dépendent évidemment pas du choix du point base). Considérons le foncteur (4.1.10) induit par f sur les catégories de Modules cohérents stratifiés relativement à k, sur Y et X respectivement. Alors ce foncteur est pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories).

REMARQUE 4.2.1. L'hypothèse sur les π_1 peut s'énoncer plus géométriquement en disant que le foncteur image inverse par f_K est un foncteur pleinement fidèle (resp. une équivalence de catégories) entre la catégorie des revêtements étales de Y_K et celle des revêtements étales de X_K.

REMARQUE 4.3. a) Des techniques standart (passages à la limite, descente fidèlement plate, grimpage sur les anneaux artiniens) permettent de déduire de 4.2 l'énoncé analogue sur un corps de base quelconque de caractéristique nulle, quand on écrit l'hypothèse de connexité et sur les groupes fondamentaux pour le morphisme $f_K : X_K \to Y_K$ déduit de f par passage à une extension algébriquement close de k. La démonstration conduit nécessairement à prouver même la partie non respée au dessus d'une base quelconque S de caractéristique nulle, f étant un morphisme de schémas propres et plats sur S; et il semble que la partie respée soit également valable sur une telle base générale, pourvu du moins qu'on complète l'hypothèse de bijectivité pour les π_1 des fibres géométriques par l'hypothèse d'injectivité pour les applications induites sur les H^2 ℓ-adiques de ces mêmes fibres, à coéfficients dans $\underline{Q}_\ell$. Nous n'entrerons pas ici dans ces technicalités, qui n'aideront quère à éclairer l'usage qu'on peut faire en géométrie algébrique du résultat 1.2.

De même, la variante 4.4 ci-dessous de 4.2, démontrée ici sur le corps $\underline{C}$, peut être utilisée pour démontrer les résultats analogues sur tout corps de base de caractéristique nulle.

b) Le théorème 4.2 ne reste plus valable tel quel lorsqu'on y supprime l' hypothèse que X et Y soient propres, comme on le voit déjà dans le cas où Y est la droite affine, et X est réduit à un point. Cependant, P. Deligne a développé récemment une notion de Modules stratifiés "réguliers à l'infini", qui est une condition purement algébrique sur une stratification d'un Module cohérent sur un schéma séparé de type fini sur un corps de car. nulle, et il a montré que sur le corps des complexes, l'équivalence (4.1.5) reste valable à condition d'y entendre par Cohstrat(X) la catégorie des Modules cohérents à stratification régulière à l'infini. Avec cette notation, il est clair alors que 4.2 restera vrai, (et il y a lieu de s'attendre qu'il reste vrai sur n'importe quel corps de base de caractéristique nulle) en supposant seulement X et Y séparés et de type fini.

c) Il est facile de voir que la réciproque de 4.2 est également valable (comparer 1.3). Même remarque pour 4.4 ci-dessous.

THEOREME 4.4. Soient X un schéma localement de type fini sur $\underline{C}$, Y un sous-schéma, et supposons que l'on ait $\text{profét}_Y(X) \geq 1$ (resp. $\text{profét}_Y(X) \geq 2$, resp. $\text{profhop}_Y(X) \geq 3$) (SGA 2 XIV 1.2), (ce qui signifie donc aussi que pour tout schéma étale X' sur X, désignant par U' l'image inverse dans X' de U=X-Y, foncteur de restriction $\text{Rev}(X') \to \text{Rev}(U')$ de la catégorie des revêtements finis étales de X' dans la catégorie indoine pour U' est fidèle, resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories). Alors le foncteur de restriction

(4.4.1) $$\text{Cohstrat}(X) \longrightarrow \text{Cohstrat}(U)$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories). (La même conclusion est donc valable quand on remplace X par n'importe quel X' étale sur X.)

DEMONSTRATION Nous admettrons le résultat suivant,cas particulier d'un résultat de P. Deligne, qui nous permet de nous borner à prouver 4.4 dans le cas où X est reduit:

LEMME 4.4.1. Soit X un schéma localement de type fini sur un corps k. Alors le foncteur de restriction

$$\mathrm{Cohstrat}(X) \to \mathrm{Cohstrat}(X_{red})$$

est une équivalence de catégories.

4 4. 2. Nous supposerons donc X réduit. La condition $\mathrm{prof\acute{e}t}_Y(X) \geq 1$ équivaut à la condition U dense dans X, donc schématiquement dense puisque X est réduit, donc la fidélité de (4. 4. 1) est claire. Pour prouver la pleine fidélité lorsque $\mathrm{prof\acute{e}t}_Y(X) \geq 2$, introduisant un faisceau Hom convenable avec sa stratification naturelle, on est ramené à prouver que toute section horizontale f sur U d'un module cohérent stratifié M sur X, considérée comme section rationelle de M sur X, est partout définie (la section de M sur X qu'elle définit sera automatiquement horizontale). On peut évidemment supposer X affine connexe (la question étant locale sur X), donc U connexe. Soit x un élément de $U(\underline{C})$, et considérons l'homomorphisme

$$u: \pi_1(U^{an}, x) \to \pi_1(X^{an}, x) \tag{4. 4. 2. 1}$$

induit par l'inclusion $U^{an} \to X^{an}$. L'hypothèse $\mathrm{profet}_Y(X) \geq 2$, jointe à (4. 1. 8), implique que $\hat{u}$ est un épimorphisme, donc en vertu de 1. 2 a) et du dictionnaire (4. 1. 1), (4. 1. 2), le foncteur restriction

$$\mathrm{Cohstrat}(X^{an}) \to \mathrm{Cohstrat}(U^{an}) \tag{4. 4. 2. 2}$$

est pleinement fidèle. Il s'ensuit que la section horizontale f^{an} de M^{an} sur U^{an} déduite de f se prolonge en une section holomorphe de M^{an} sur X^{an} tout entier. Mais il en résulte bien que f se prolonge en une section de M sur X, grâce au

LEMME 4. 4. 2. 3. Soient X un schéma localement de type fini sur $\underline{C}$, U un ouvert schématiquement dense de X, M un Module localement libre sur X, f une section de $M|U$, telle que la section f^{an} de $M^{an}|U^{an}$ se prolonge en une section holomorphe de M^{an} sur X^{an}. Alors f se prolonge en une section de M sur X.

C'est facile, par descente fidèlement plate des anneaux locaux $\underline{O}_{X^{an},x}$ vers $\underline{O}_{X,x}$, pour $x \in Y = X - U$.

4.4.3. Il reste à prouver que si $\mathrm{profhop}_Y(X) \geq 3$, alors (4.4.1) est essentiellement surjectif, sachant déjà qu'il est pleinement fidèle. On vérifie tout d'abord aisément que l'hypothèse implique que l'on a

$$\mathrm{codim}(Y,X) \geqslant 2 ,$$

ce qui implique, si $i: U \to X$ désigne l'inclusion, que le faisceau $i_*(\underline{O}_U)$ est un Module cohérent (SGA 2 VIII 3.1). C'est d'ailleurs un faisceau d'Algèbres, et si X' désigne son spectre, qui est donc un schéma fini sur X, on voit que $X'|U \simeq U$, et le fait que $\mathrm{profet}_Y(X) \geqslant 2$ (i.e. que Y ne disconnecte pas X localement pour la topologie étale) implique que $X' \to X$ est un morphisme radiciel donc un homéomorphisme universel. Il résulte donc de SGA 4 VIII 1.1 que l'on a également $\mathrm{profhot}_{Y'}(X') \geqslant 3$, où $Y' = X' - U$ est l'image inverse de Y dans X'. D'autre part, par construction de X', il est clair que nous avons

$$\mathrm{prof}_{Y'}(\underline{O}_{X'}) \geqslant 2 .$$

Nous admettrons le résultat général suivant, qui se démontre en utilisant 4.4.1, et qui nous permet dans la question de remplacer (X,Y) par (X',Y') i.e. de supposer qu'on a

(4.4.3.1) $$\mathrm{prof}_Y(X) \geqslant 2 \quad :$$

LEMME 4.4.3.2. Soit $f: X' \to X$ un morphisme fini surjectif radiciel de schémas localement de type fini sur un corps k. Alors le foncteur image inverse

$$\mathrm{Cohstrat}(X) \longrightarrow \mathrm{Cohstrat}(X')$$

est une équivalence de catégories.

4.4.4. Nous supposerons donc désormais qu'on a (4.4.3.1). Etant donné un Module stratifié $\underline{N}$ sur U, il faut trouver un Module stratifié $\underline{M}$ sur X qui le prolonge. S'il existe un tel M, il résulte de (4.4.3.1) qu'on doit avoir un isomorphisme

$$M \simeq i_*(N) \quad .$$

On est donc réduit à prouver a) que $i_*(N)$ est localement libre, et b) que la stratification de N se prolonge en une stratification de $M = i_*(N)$. (NB Il semble très plausible que moyennant la seule condition (4.4.3.1), b) est conséquence de a), mais nous n'aurons pas besoin de prouver cela.) Il est facile de vérifier, par des arguments de descente plate standarts, que ces conditions sont vérifiées si N^{an} peut se prolonger en un Module cohérent stratifié M^{an} sur X^{an}. Or l'hypothèse $\mathrm{profhot}_Y(X) \geqslant 3$ implique maintenant que le morphisme de groupes profini $\hat{u}$ déduit de (4.4.2.1) est bijectif, et par suite, en vertu de 1.2 b) et du dictionnaire déjà invoqué, que (4.4.2.2) est une équivalence de catégories. On fera attention simplement que le résultat de pleine fidélité déjà prouvé implique immédiatement que la question envisagée est locale sur X, ce qui permet de supposer X affine donc de type fini, de sorte que les groupes intervenant dans (4.4.2.1) sont bien de présentation finie. Cela prouve donc que N^{an} se prolonge bien en un module stratifié M^{an} sur X^{an}, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 4.5. Nous avons donné à 4.4 une formulation de nature algébrique, qui restera valable telle quelle sur n'importe quel corps de base k de caractéristique nulle, par les méthodes de réduction standard. On peut en fait donner un résultat de nature transcendante, plus fort à certains points de vue, savoir: pour tout morphisme d'espaces analytiques $X' \to X^{an}$ qui est un isomorphisme local, si U' est l'image inverse de U dans X', le foncteur restriction

$$\mathrm{Cohstrat}(X') \longrightarrow \mathrm{Cohstrat}(U')$$

est fidèle (resp. pleinement fidèle, resp. une équivalence de catégories). L'intérêt de cet énoncé est qu'il permet de déduire des conclusions de nature transcendante relativement fortes d'hypothèses purement algébriques, qui pourront dans certains cas être vérifiées par des méthodes de géométrie algébrique.

Bibliographie

[1] BASS, H., MILNOR, J. et SERRE, J.-P.: Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n (n \geqslant 3)$ and $Sp_{2n} (n \geqslant 2)$, Publications Mathématiques n° 33, p. 59-137 (1967).

[2] CHEVALLEY, C.: Theory of Lie groups, Princeton University Press 1946.

[3] GROTHENDIECK, A.: Crystals and the De Rham Cohomology of Schemes, (notes by I. Coates and J. Jussila), in Dix exposés sur la Cohomologie des Schémas, Masson & Cie, North-Holland (1968).

[4] SERRE, J.-P.: Groupes discrets, Collège de France 1968/69 (Cours rédigé avec la collaboration de H. Bass), p. I - 14.

Alexander Grothendieck

Institut des Hautes Etudes Sc.

F - 91 Bures-Sur-Yvette

(Reçu le 13 janvier 1970)