ALEXANDER GROTHENDIECK

Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 24 (1965), p. 5-231

<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1965__24__5_0>

CHAPITRE IV *(suite)*

ÉTUDE LOCALE DES SCHÉMAS ET DES MORPHISMES DE SCHÉMAS

§ 2. CHANGEMENT DE BASE ET PLATITUDE

Ce paragraphe (contrairement au § 6) ne fait appel qu'exceptionnellement à des techniques noethériennes. Les n^os 1 et 2 ne sont guère que des traductions de propriétés élémentaires de platitude en Algèbre commutative (cf. Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I^er), et sont incluses ici pour la commodité des références. Les numéros suivants sont surtout consacrés à des propriétés de « descente » par les morphismes plats ou fidèlement plats : si $g: Y' \to Y$ est un tel morphisme, il s'agit de pouvoir affirmer qu'une partie de Y, ou un $\mathcal{O}_Y$-Module, ou un morphisme $X \to Y$, a une certaine propriété, lorsque l'on sait que son *image réciproque* par g possède cette propriété. Nous nous bornons ici aux propriétés ne faisant pas appel à la technique générale de la « descente », qui sera développée au chapitre V.

2.1. Modules plats sur les préschémas.

(2.1.1) Soient $f: X \to Y$ un morphisme de préschémas, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module; rappelons $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.7.1)$ que $\mathcal{F}$ est dit *f-plat* (ou Y-*plat*) *en un point* $x \in X$ si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{f(x)}$-module plat, *f-plat* (ou Y-*plat*) s'il est f-plat en tout $x \in X$, et enfin que le morphisme f est dit *plat au point* $x \in X$ (resp. *plat*) si $\mathcal{O}_X$ est f-plat au point x (resp. f-plat). Lorsque $f = 1_X$, on dira simplement qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ est *plat au point* x (resp. *plat*) s'il est X-plat en ce point (resp. en tout point $x \in X$), c'est-à-dire si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module plat (resp. s'il en est ainsi pour tout $x \in X$). Rappelons que nous avons démontré (**III**, 1.4.15.1) la propriété suivante :

Proposition **(2.1.2)**. — *Soient* A, B *deux anneaux,* $\varphi: A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux,* $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $f: X \to Y$ *le morphisme correspondant à* φ, M *un* B-*module. Pour que* $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ *soit f-plat, il faut et il suffit que* M *soit un* A-*module plat.*

Proposition **(2.1.3).** — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme de préschémas,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout changement de base* $g: Y' \to Y$, *si l'on pose* $X' = X \times_Y Y'$, *le foncteur* $\mathscr{G}' \rightsquigarrow \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}'$ *de la catégorie des* $\mathcal{O}_{Y'}$*-Modules quasi-cohérents dans celle des* $\mathcal{O}_{X'}$*-Modules quasi-cohérents, est exact.*

a') *La condition* a) *est vérifiée pour tous les morphismes canoniques* $g: \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y) \to Y$ (**I**, 2.4.1), *où* y *parcourt* Y.

b) $\mathscr{F}$ *est f-plat.*

Les questions étant locales sur X et Y, on peut se borner au cas où $Y = \operatorname{Spec}(B)$, $X = \operatorname{Spec}(A)$, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module. Il est clair que *a)* entraîne *a')*; la condition *a')* entraîne que pour tout $x \in X$, le foncteur $N \rightsquigarrow M_{\mathfrak{n}} \otimes_{B_{\mathfrak{n}}} N$ est exact dans la catégorie des $B_{\mathfrak{n}}$-modules, $\mathfrak{n}$ étant l'idéal $\mathfrak{j}_{f(x)}$ de B; cela signifie que $M_{\mathfrak{n}}$ est un $B_{\mathfrak{n}}$-module plat, et il résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.3) et de (2.1.2) que $\mathscr{F}$ est *f*-plat. Enfin, pour voir que *b)* entraîne *a)*, on peut aussi se borner au cas où $Y' = \operatorname{Spec}(A')$ est affine et $\mathscr{G}' = \widetilde{N'}$, où N′ est un A′-module; la conclusion provient alors encore de (2.1.2) et de la définition de la platitude, puisque $(M \otimes_A N')^{\sim} = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{G}'$.

Proposition **(2.1.4).** — *Soient* $f: X \to Y$, $g: Y' \to Y$ *deux morphismes de préschémas,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent; posons* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ *et soit* g' *la projection canonique* $X' \to X$. *Soient* x' *un point de* X′, $x = g'(x')$, $y' = f'(x')$, $y = g(y') = f(x)$. *Si* $\mathscr{F}$ *est f-plat au point x,* $\mathscr{F}'$ *est f′-plat au point x′; en particulier si* $\mathscr{F}$ *est f-plat,* $\mathscr{F}'$ *est f′-plat; si f est plat, f′ est plat.*

Il suffit de prouver la première assertion; appliquant trois fois (**I**, 3.6.5), ainsi que (**I**, 2.4.4), on peut se ramener au cas où $Y = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y)$, $X = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x)$, $Y' = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{y'})$, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où $M = \mathscr{F}_x$; l'hypothèse et (2.1.2) entraînent alors que $\mathscr{F}$ est *f*-plat, autrement dit, on est ramené à prouver un cas particulier de la seconde assertion, et cette dernière découle aussitôt de (2.1.3).

Proposition **(2.1.5).** — *Considérons un diagramme commutatif de morphismes de préschémas*

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y' \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ & & Z \end{array}$$

où $X' = X \times_Y Y'$ *et* $f' = f_{(Y')}$. *Soit* x' *un point de* X′, *et posons* $x = g'(x')$, $y' = f'(x')$, $y = f(x) = g(y')$, $z = h(y')$. *Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent f-plat au point x* (resp. *f-plat*), *et* $\mathscr{G}'$ *un* $\mathcal{O}_{Y'}$*-Module quasi-cohérent h-plat au point y′* (resp. *h-plat*)*; alors* $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathscr{G}'$ *est un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module quasi-cohérent* $(h \circ f')$*-plat au point x′* (resp. $(h \circ f')$*-plat*).

Comme dans (2.1.4), on se ramène au cas où $X = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x)$, $Y = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y)$,

$Y' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{y'})$ et $Z = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_z)$, et il suffit alors de prouver que $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{G}'$ est $(h \circ f')$-plat. Compte tenu de (2.1.2), la proposition résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. Ier, § 2, nº 7, prop. 8.

Corollaire (**2.1.6**). — *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes de préschémas,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module. Si* $\mathcal{F}$ *est f-plat au point* $x \in X$ *et si g est plat au point* $f(x)$, $\mathcal{F}$ *est* $(g \circ f)$*-plat au point x. En particulier, si f et g sont des morphismes plats, il en est de même de* $g \circ f$.

C'est le cas particulier de (2.1.5) avec $Y' = Y$, $\mathcal{G} = \mathcal{O}_{Y'}$.

Corollaire (**2.1.7**). — *Si* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes plats,* $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ *est un morphisme plat.*

Cela résulte de (2.1.4) et (2.1.6) (cf. **I**, 3.5.1).

Proposition (**2.1.8**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme de préschémas,*

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

une suite exacte de $\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents, telle que* $\mathcal{F}''$ *soit* Y*-plat.*

(i) *Pour tout morphisme* $g : Y' \to Y$ *et tout* $\mathcal{O}_{Y'}$*-Module quasi-cohérent* $\mathcal{G}'$, *la suite* $0 \to \mathcal{F}' \otimes_Y \mathcal{G}' \to \mathcal{F} \otimes_Y \mathcal{G}' \to \mathcal{F}'' \otimes_Y \mathcal{G}' \to 0$ *de* $\mathcal{O}_{X'}$*-Modules (où* $X' = X \times_Y Y'$*) est exacte.*

(ii) *Pour que* $\mathcal{F}$ *soit* Y*-plat, il faut et il suffit que* $\mathcal{F}'$ *le soit.*

On peut évidemment supposer X, Y, Y′ affines; la conclusion résulte alors de (2.1.2) et de $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.1.2)$.

Corollaire (**2.1.9**). — *Soient* $\mathcal{L}^\bullet$ *un complexe de* $\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents, i un indice tel que si l'on note* $d^i : \mathcal{L}^i \to \mathcal{L}^{i+1}$ *l'opérateur de dérivation,* $\mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) = \mathrm{Im}(d^i)$ *et* $\mathcal{Z}'^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) = \mathrm{Coker}(d^i)$ *soient* Y*-plats. Alors, avec les notations de* (2.1.8), *l'homomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{L}^\bullet) \otimes_Y \mathcal{G}' \to \mathcal{H}^i(\mathcal{L}^\bullet \otimes_Y \mathcal{G}')$$

est bijectif.

Comme le produit tensoriel est exact à droite, on a

$$\mathcal{Z}'^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) \otimes_Y \mathcal{G}' = \mathrm{Coker}(d^i \otimes 1) = \mathcal{Z}'^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet \otimes_Y \mathcal{G}')$$

et $\mathcal{Z}'^{i}(\mathcal{L}^\bullet) \otimes_Y \mathcal{G}' = \mathcal{Z}'^{i}(\mathcal{L}^\bullet \otimes_Y \mathcal{G}')$. En outre, dans la suite exacte

$$0 \to \mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) \to \mathcal{L}^{i+1} \to \mathcal{Z}'^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) \to 0$$

$\mathcal{Z}'^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet)$ est Y-plat, donc il résulte de (2.1.8, (i)) que l'on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) \otimes_Y \mathcal{G}' \to \mathcal{L}^{i+1} \otimes_Y \mathcal{G}' \to \mathcal{Z}'^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet \otimes_Y \mathcal{G}') \to 0$$

d'où $\mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) \otimes_Y \mathcal{G}' = \mathrm{Im}(d^i \otimes 1) = \mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet \otimes_Y \mathcal{G}')$. Alors, comme dans la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^i(\mathcal{L}^\bullet) \to \mathcal{Z}'^{i}(\mathcal{L}^\bullet) \to \mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet) \to 0$$

$\mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet)$ est Y-plat, il résulte de (2.1.8, (i)) et de ce qui précède que l'on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^i(\mathcal{L}^\bullet) \otimes_Y \mathcal{G}' \to \mathcal{Z}'^{i}(\mathcal{L}^\bullet \otimes_Y \mathcal{G}') \to \mathcal{B}^{i+1}(\mathcal{L}^\bullet \otimes_Y \mathcal{G}') \to 0$$

ce qui démontre le corollaire.

Corollaire (**2.1.10**). — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme de préschémas,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent et* Y*-plat,* $\mathscr{L}_\bullet = (\mathscr{L}_i)$ *une résolution gauche de* $\mathscr{F}$ *formée de* $\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents et* Y*-plats. Alors, pour tout morphisme* $g: Y' \to Y$ *et tout* $\mathcal{O}_{Y'}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}'$*, le complexe* $\mathscr{L}_\bullet \otimes_Y \mathscr{G}' = (\mathscr{L}_i \otimes_Y \mathscr{G}')_{i \geqslant 0}$ *est une résolution gauche de* $\mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}'$.

En outre, si $\mathscr{Z}_i(\mathscr{L}_\bullet) = \mathrm{Ker}(\mathscr{L}_i \to \mathscr{L}_{i-1})$*, les* $\mathscr{Z}_i(\mathscr{L}_\bullet)$ *sont* Y*-plats, et l'on a* $\mathscr{Z}_i(\mathscr{L}_\bullet) \otimes_Y \mathscr{G}' = \mathscr{Z}_i(\mathscr{L}_\bullet \otimes_Y \mathscr{G}') = \mathrm{Ker}(\mathscr{L}_i \otimes_Y \mathscr{G}' \to \mathscr{L}_{i-1} \otimes_Y \mathscr{G}')$.

Posons $\mathscr{R}_i = \mathrm{Im}(\mathscr{L}_{i+1} \to \mathscr{L}_i) = \mathscr{Z}_i(\mathscr{L}_\bullet)$; on a alors les suites exactes

$$0 \leftarrow \mathscr{F} \leftarrow \mathscr{L}_0 \leftarrow \mathscr{R}_0 \leftarrow 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 \leftarrow \mathscr{R}_i \leftarrow \mathscr{L}_{i+1} \leftarrow \mathscr{R}_{i+1} \leftarrow 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et comme $\mathscr{F}$ et les $\mathscr{L}_i$ sont Y-plats, on déduit de (2.1.8, (ii)) par récurrence que tous les $\mathscr{R}_i$ sont aussi Y-plats; utilisant (2.1.8, (i)), on a donc les suites exactes

$$0 \leftarrow \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}' \leftarrow \mathscr{L}_0 \otimes_Y \mathscr{G}' \leftarrow \mathscr{R}_0 \otimes_Y \mathscr{G}' \leftarrow 0$$

$$0 \leftarrow \mathscr{R}_i \otimes_Y \mathscr{G}' \leftarrow \mathscr{L}_{i+1} \otimes_Y \mathscr{G}' \leftarrow \mathscr{R}_{i+1} \otimes_Y \mathscr{G}' \leftarrow 0 \qquad (i \geqslant 0)$$

qui prouvent le corollaire.

Proposition (**2.1.11**). — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme plat,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent de présentation finie. Si* $\mathscr{J}$ *est l'Idéal de* $\mathcal{O}_Y$ *annulateur de* $\mathscr{F}$*,* $f^*(\mathscr{J})$ *est l'Idéal de* $\mathcal{O}_X$ *annulateur de* $f^*(\mathscr{F})$.

On a en effet par définition une suite exacte ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.7)

$$0 \to \mathscr{J} \to \mathcal{O}_Y \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$$

d'où, puisque f est plat, une suite exacte

$$0 \to f^*(\mathscr{J}) \to \mathcal{O}_X \to f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{F}))$$

et comme par hypothèse $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module de présentation finie, $f^*(\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathscr{F}, \mathscr{F}))$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{F}))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.7.6), d'où la conclusion.

Proposition (**2.1.12**). — *Soient* X *un préschéma,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module de présentation finie,* x *un point de* X*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{F}_x$ *est un* $\mathcal{O}_x$*-module plat.*

b) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *tel que* $\mathscr{F}|U$ *soit un* $(\mathcal{O}_X|U)$*-Module localement libre.*

En effet, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module de présentation finie et $\mathcal{O}_x$ un anneau local; il revient donc au même de dire que $\mathscr{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module plat ou un $\mathcal{O}_x$-module libre (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 5); d'où la conclusion, compte tenu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7). On notera que la proposition est valable pour un *espace annelé en anneaux locaux* quelconque.

Proposition (**2.1.13**). — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme de préschémas. Si* f *est plat en un point* $x \in X$ *et si l'anneau* $\mathcal{O}_x$ *est réduit (*resp. *intègre et intégralement clos), alors l'anneau* $\mathcal{O}_{f(x)}$

*est réduit (*resp. *intègre et intégralement clos). Si f est fidèlement plat et si* X *est réduit (*resp. *normal), alors* Y *est réduit (*resp. *normal).*

Posons $\mathcal{O}_{f(x)}=A$, $\mathcal{O}_x=B$. Si B est un A-module plat, c'est aussi un A-module fidèlement plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.2), donc A s'identifie à un sous-anneau de B; si B est réduit, il en est donc de même de A. Supposons maintenant B intègre et intégralement clos, et soit L son corps des fractions; alors $A\subset B$ est intègre; désignons par $K\subset L$ son corps des fractions. L'hypothèse entraîne que $B\cap K=A$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I, § 3, n° 5, prop. 10). Si alors $t\in K$ est entier sur A, il est aussi entier sur B, donc appartient à B par hypothèse, et par suite $t\in A$, ce qui prouve que A est intégralement clos.

Proposition **(2.1.14)**. — *Soit $f: X\rightarrow Y$ un morphisme fidèlement plat. Si* X *est localement intègre et si l'espace sous-jacent à* Y *est localement noethérien, alors* Y *est localement intègre.*

En effet, tout $y\in Y$ est de la forme $f(x)$ pour un $x\in X$ et par hypothèse $\mathcal{O}_y$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathcal{O}_x$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.1); comme $\mathcal{O}_x$ est intègre, il en est de même de $\mathcal{O}_y$ et cela prouve la proposition (**I**, 5.1.4).

2.2. Modules fidèlement plats sur les préschémas.

Proposition **(2.2.1)**. — *Soient $f: X\rightarrow Y$ un morphisme de préschémas, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout changement de base $g: Y'\rightarrow Y$, si l'on pose $X'=X\times_Y Y'$, le foncteur $\mathcal{G}'\rightsquigarrow\mathcal{F}\otimes_Y\mathcal{G}'$, de la catégorie des $\mathcal{O}_{Y'}$-Modules quasi-cohérents dans celle des $\mathcal{O}_{X'}$-Modules quasi-cohérents, est exact et fidèle.*

a') *La condition* a) *est vérifiée pour tous les morphismes canoniques $g: \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)\rightarrow Y$* (**I**, 2.4.1), *où y parcourt* Y.

a'') *La condition* a) *est vérifiée pour toutes les immersions canoniques $Y'\rightarrow Y$, où Y' parcourt l'ensemble des sous-schémas ouverts affines de* Y.

b) *$\mathcal{F}$ est* Y*-plat et, pour tout $y\in Y$, si l'on désigne par X_y la fibre $f^{-1}(y)$, le $\mathcal{O}_{X_y}$-Module $\mathcal{F}_y=\mathcal{F}\otimes_Y\boldsymbol{k}(y)$ est $\neq 0$.*

Il est clair que *a)* implique *a')* et *a'')*; la condition *a')* implique d'abord que $\mathcal{F}$ est Y-plat (2.1.3); d'autre part elle implique que pour tout $y\in Y$, le foncteur $N\rightsquigarrow\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_y}\widetilde{N}$ est fidèle dans la catégorie des $\mathcal{O}_y$-modules; prenant en particulier $N=\boldsymbol{k}(y)$, on obtient la seconde assertion de *b)*. Pour montrer que *b)* implique *a)*, on peut se limiter au cas où Y est *affine*, la question étant locale sur Y. De même, pour prouver que *a'')* implique *a)*, on est ramené à prouver que lorsque Y est affine, le fait que $\mathcal{G}\rightsquigarrow\mathcal{F}\otimes_Y\mathcal{G}$ soit un foncteur exact et fidèle entraîne la condition *a)*. Autrement dit, on est ramené à prouver la proposition plus précise suivante :

Proposition **(2.2.2)**. — *Soient $Y=\mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, $f: X\rightarrow Y$ un morphisme de préschémas, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent. La condition* a) *de* (2.2.1) *est équivalente à chacune des suivantes :*

b') *$\mathcal{F}$ est* Y*-plat et, pour tout point* fermé *y de* Y*, on a $\mathcal{F}_y\neq 0$.*

c) *Le foncteur* $\mathscr{G} \rightsquigarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}$ *de la catégorie des* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$*-Modules quasi-cohérents dans celle des* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Modules quasi-cohérents, est exact et fidèle.*

Si *b')* est vérifié, il y a au moins un $x \in f^{-1}(y)$ tel que $(\mathscr{F}_y)_x \neq 0$; soit $\mathrm{U} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ un voisinage ouvert affine de x, et soit $\mathscr{F} | \mathrm{U} = \widetilde{\mathrm{M}}$, où M est un B-module. Alors *b')* implique que $\mathrm{M}/\mathfrak{j}_y\mathrm{M}$ est $\neq 0$, et par suite (puisque M est un A-module plat (2.1.2)) que $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_y$ est un A_y-module fidèlement plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.4.5). La relation $(\mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}} \mathcal{O}_y = 0$ pour un point fermé y de Y implique $(\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}} \mathcal{O}_y) \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathscr{G}_y = 0$, donc $\mathscr{G}_y = 0$. Mais si l'on a $\mathscr{G}_y = 0$ pour tout point fermé de Y, on en conclut $\mathscr{G} = 0$, car si $\mathscr{G} = \widetilde{\mathrm{N}}$, l'annulateur d'un élément de N n'est contenu dans aucun idéal maximal de A, donc est A tout entier. La relation $\mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G} = 0$ implique donc $\mathscr{G} = 0$, autrement dit le foncteur $\mathscr{G} \rightsquigarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}$ est fidèle; on sait par ailleurs que ce foncteur est exact (2.1.3), ce qui montre bien que *b')* entraîne *c)*.

Enfin, pour voir que *c)* entraîne *a)*, on peut se borner au cas où Y' est aussi affine; comme $g : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ est alors un morphisme affine, il en est de même de la projection $g' : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ (**II**, 1.5.5); de plus, le foncteur $\mathscr{H}' \rightsquigarrow g'_*(\mathscr{H}')$ est alors exact dans la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}$-Modules quasi-cohérents (**I**, 1.6.4), et si $g'_*(\mathscr{H}') = \mathscr{H}$, on a $\mathscr{H}' = \widetilde{\mathscr{H}}$, donc le foncteur précédent est aussi fidèle; pour voir que $\mathscr{G}' \rightsquigarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}'$ est exact et fidèle, il suffit par suite de voir que le foncteur $\mathscr{G}' \rightsquigarrow g'_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}')$ l'est. Or, si $f' = f_{(\mathrm{Y}')} : \mathrm{X}' \to \mathrm{Y}'$, on a $g'_*(\mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}') = g'_*(g'^*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}} f'^*(\mathscr{G}'))$; le fait que g est affine entraîne que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} f^*(g_*(\mathscr{G}')) \xrightarrow{\sim} g'_*(g'^*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}} f'^*(\mathscr{G}')). \tag{2.2.2.1}$$

En effet, on sait (**II**, 1.5.2) qu'on a un isomorphisme canonique

$$f^*(g_*(\mathscr{G}')) \xrightarrow{\sim} g'_*(f'^*(\mathscr{G}')),$$

et d'autre part on a un homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to g'_*(g'^*(\mathscr{F}))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.4.3.2); composant l'homomorphisme $\mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} f^*(g_*(\mathscr{G}')) \to g'_*(g'^*(\mathscr{F})) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} g'_*(f'^*(\mathscr{G}'))$ avec l'homomorphisme canonique ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 4.2.2.1), on en déduit l'homomorphisme (2.2.2.1); la vérification du fait qu'il s'agit d'un isomorphisme est immédiate en se ramenant au cas où X est affine. Cela étant, le foncteur $\mathscr{G}' \rightsquigarrow g_*(\mathscr{G}')$ est exact et fidèle et par hypothèse il en est de même de $\mathscr{G} \rightsquigarrow \mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G} = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} f^*(\mathscr{G})$; leur composé est donc exact et fidèle, ce qui achève de prouver (2.2.1) et (2.2.2).

Corollaire (**2.2.3**). — *Soient* $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *deux schémas affines,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme,* $\mathscr{F} = \widetilde{\mathrm{M}}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent. Pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie les conditions équivalentes de* (2.2.1) *(ou* (2.2.2)*), il faut et il suffit que le* A*-module* M *soit fidèlement plat.*

En effet, la condition *c)* de (2.2.2) signifie alors que le foncteur $\mathrm{N} \rightsquigarrow \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ de la catégorie des A-modules dans celle des B-modules est exact et fidèle, et la conclusion résulte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.4.1).

Définition (**2.2.4**). — *Lorsque les conditions équivalentes de* (2.2.1) *sont satisfaites, on dit que le* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *est fidèlement plat relativement à* f *(ou à* Y*).*

On notera que cette notion est locale sur Y, mais *non sur* X; en particulier on peut avoir $\mathscr{F}_x = 0$ pour certains $x \in X$, autrement dit $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ n'est pas nécessairement égal à X. Toutefois, il résulte aussitôt du critère (2.2.1, *b)*) que pour tout $y \in Y$, il existe au moins un $x \in f^{-1}(y)$ tel que $(\mathscr{F}_y)_x = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y) \neq 0$, et *a fortiori* $\mathscr{F}_x \neq 0$; en d'autres termes :

Corollaire (**2.2.5**). — *Si* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent, fidèlement plat relativement à* f, *on a* $f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F})) = Y$, *et* a fortiori f *est un morphisme surjectif.*

Ce résultat admet une réciproque partielle :

Corollaire (**2.2.6**). — *Soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent de type fini. Pour que* $\mathscr{F}$ *soit fidèlement plat relativement à* f, *il faut et il suffit que* $\mathscr{F}$ *soit* f*-plat et que* $f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F})) = Y$.

En effet (**I**, 9.1.13 et 3.6.1) on a $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_y) = f^{-1}(y) \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, donc dans ce cas le critère (2.2.1, *b)*) n'est autre que la condition du corollaire.

En particulier, le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{O}_X$ est fidèlement plat relativement à f si et seulement s'il est f-plat et si f est surjectif, autrement dit si et seulement si *le morphisme* f *est fidèlement plat* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.7.8).

Explicitons les propriétés intervenant dans la définition (2.2.4) :

Proposition (**2.2.7**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme de préschémas,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent fidèlement plat relativement à* f. *Alors, pour qu'une suite* $\mathscr{G}' \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}''$ *de* $\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents soit exacte, il faut et il suffit que la suite correspondante* $\mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}' \to \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G} \to \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}''$ *le soit. En particulier, pour qu'un homomorphisme* $u : \mathscr{G} \to \mathscr{G}'$ *de* $\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents soit injectif* (resp. *surjectif, bijectif, nul*), *il faut et il suffit que* $1_{\mathscr{F}} \otimes f^*(u) : \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G} \to \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}'$ *le soit. Pour qu'un* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$ *soit nul, il faut et il suffit que* $\mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G} = 0$. *Pour tout* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$, *l'application* $\mathscr{G}' \rightsquigarrow \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}'$ *de l'ensemble des sous-*$\mathcal{O}_Y$*-Modules quasi-cohérents de* $\mathscr{G}$ *dans l'ensemble des sous-*$\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents de* $\mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}$ *est injective.*

Pour démontrer la dernière assertion, c'est-à-dire que pour deux sous-$\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents $\mathscr{G}'$, $\mathscr{G}''$ de $\mathscr{G}$, la relation $\mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}' = \mathscr{F} \otimes_Y \mathscr{G}''$ entraîne $\mathscr{G}' = \mathscr{G}''$, on peut (en remplaçant $\mathscr{G}''$ par $\mathscr{G}' + \mathscr{G}''$) se ramener au cas où $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}''$, et il suffit alors d'appliquer la seconde assertion de l'énoncé à l'injection $u : \mathscr{G}' \to \mathscr{G}''$.

Corollaire (**2.2.8**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme fidèlement plat. Pour tout* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$, *l'application canonique*

(**2.2.8.1**)
$$\Gamma(Y, \mathscr{G}) \to \Gamma(X, f^*(\mathscr{G}))$$

est injective.

En effet, $\Gamma(Y, \mathscr{G})$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_Y, \mathscr{G})$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.1.1) et de même $\Gamma(X, f^*(\mathscr{G}))$ à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, f^*(\mathscr{G}))$. En vertu de (2.2.1) et (2.2.4) l'hypothèse entraîne que le foncteur $\mathscr{G} \rightsquigarrow f^*(\mathscr{G})$ est exact et fidèle dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-Modules quasi-cohérents, et par suite un homomorphisme $u : \mathcal{O}_Y \to \mathscr{G}$ est nul si et seulement si $f^*(u) : f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X \to f^*(\mathscr{G})$ est nul.

Remarque (**2.2.9**). — Les résultats de (2.2.7) et (2.2.8) sont encore vrais lorsque les $\mathcal{O}_Y$-Modules $\mathscr{G}'$, $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}''$ qui y figurent sont quelconques (non nécessairement quasi-cohérents). En effet, pour tout $y \in Y$, il existe $x \in f^{-1}(y)$ tel que $\mathscr{F}_x$ soit un $\mathcal{O}_y$-module fidèlement plat, et par suite le foncteur $\mathscr{G}_y \rightsquigarrow \mathscr{G}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathscr{F}_x$ est fidèle; comme par ailleurs pour *tout* $x \in f^{-1}(y)$ le foncteur $\mathscr{G}_y \rightsquigarrow \mathscr{G}_y \otimes_{\mathcal{O}_y} \mathscr{F}_x$ est exact, on en déduit aussitôt la conclusion.

Proposition (**2.2.10**). — *Soient* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$, $g: \mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$, $h: \mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Z}$ *trois morphismes de préschémas,* $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent, fidèlement plat relativement à* Y, $\mathscr{G}'$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}$*-Module quasi-cohérent. Pour que* $\mathscr{G}'$ *soit plat* (resp. *fidèlement plat*) *relativement à* Z, *il faut et il suffit que* $\mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}'$ *soit un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}'}$*-Module plat* (resp. *fidèlement plat*) *relativement à* Z.

On sait déjà que si $\mathscr{G}'$ est Z-plat, il en est de même de $\mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{G}'$ (2.1.5). Considérons un changement de base quelconque $\mathrm{Z}'' \rightarrow \mathrm{Z}$ et posons $\mathrm{X}'' = \mathrm{X}' \times_{\mathrm{Z}} \mathrm{Z}''$; si $\mathscr{G}'$ est fidèlement plat relativement à Z, le foncteur

$$\textbf{(2.2.10.1)} \qquad \mathscr{H}'' \rightsquigarrow \mathscr{H}'' \otimes_{\mathrm{Z}} \mathscr{G}' \rightsquigarrow (\mathscr{H}'' \otimes_{\mathrm{Z}} \mathscr{G}') \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{F} = \mathscr{H}'' \otimes_{\mathrm{Z}} (\mathscr{G}' \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{F})$$

de la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{Z}''}$-Modules quasi-cohérents dans celle des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}''}$-Modules est composé de deux foncteurs exacts et fidèles, donc est exact et fidèle. Inversement, si ce foncteur composé est exact (resp. exact et fidèle), il en est de même de $\mathscr{H}'' \rightsquigarrow \mathscr{H}'' \otimes_{\mathrm{Z}} \mathscr{G}'$, puisque le foncteur $\mathscr{M}' \rightsquigarrow \mathscr{M}' \otimes_{\mathrm{Y}} \mathscr{F}$ (de la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}$-Modules quasi-cohérents dans celle des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules quasi-cohérents) est exact et fidèle par hypothèse.

Corollaire (**2.2.11**). — (i) *Soient* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$, $g: \mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$ *deux morphismes,* $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent. Si* $\mathscr{F}$ *est fidèlement plat relativement à* Y, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathrm{Y}} \mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}$ *est fidèlement plat relativement à* Y'.

(ii) *Soient* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$, $g: \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Z}$ *deux morphismes,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent, fidèlement plat relativement à* Y. *Pour que g soit un morphisme fidèlement plat, il faut et il suffit que* $\mathscr{F}$ *soit fidèlement plat relativement à* Z.

(iii) *Soient* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$, $g: \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Z}$ *deux morphismes,* $\mathscr{G}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$*-Module quasi-cohérent. On suppose le morphisme f fidèlement plat. Pour que* $\mathscr{G}$ *soit plat* (resp. *fidèlement plat*) *relativement à* Z, *il faut et il suffit que* $f^*(\mathscr{G})$ *soit plat* (resp. *fidèlement plat*) *relativement à* Z.

(iv) *Soient* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$, $g: \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Z}$ *deux morphismes, x un point de* X. *On suppose f plat au point x. Pour que* $g \circ f$ *soit plat au point x, il faut et il suffit que g soit plat au point* $f(x)$.

Pour démontrer (i), on applique (2.2.10) en remplaçant Z par Y' et $\mathscr{G}'$ par $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}'}$. Pour démontrer (ii), on applique (2.2.10) en prenant pour morphisme $\mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$ l'identité et remplaçant $\mathscr{G}'$ par $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$. Pour démontrer (iii), on applique (2.2.10) en prenant encore l'identité pour $\mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$ et remplaçant $\mathscr{F}$ par $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ et $\mathscr{G}'$ par $\mathscr{G}$. Enfin (iv) se déduit de (ii) en remplaçant X par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$, $\mathscr{F}$ par $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, Y par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{f(x)})$ et Z par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{g(f(x))})$, et tenant compte de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.6.2).

Corollaire (**2.2.12**). — *Soient* Y *un schéma affine,* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme quasi-compact,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent. Si* $\mathscr{F}$ *est fidèlement plat relativement à f, il existe un schéma affine* X' *et un isomorphisme local surjectif* $g: \mathrm{X}' \rightarrow \mathrm{X}$ *tels que* $g^*(\mathscr{F})$ *soit fidèlement plat relativement à* $f \circ g$.

En effet, X est quasi-compact, donc réunion finie d'ouverts affines X_i; il suffit de prendre pour X' le schéma affine *somme* des préschémas induits sur les ouverts X_i et pour $g: \mathrm{X}' \rightarrow \mathrm{X}$ le morphisme canonique; il est clair que g est fidèlement plat, et l'hypothèse entraîne que $g^*(\mathscr{F})$ est fidèlement plat relativement à $f \circ g$, en vertu de (2.2.11, (iii)).

Corollaire (**2.2.13**). — (i) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y' \to Y$ *deux morphismes,* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \to Y'$. *Si* f *est un morphisme fidèlement plat, il en est de même de* f'.

(ii) *Si* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont deux* S-*morphismes fidèlement plats,*

$$f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$$

est fidèlement plat.

(iii) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes tels que* f *soit fidèlement plat. Pour que* g *soit un morphisme plat* (resp. *fidèlement plat*), *il faut et il suffit que* $g \circ f$ *soit un morphisme plat* (resp. *fidèlement plat*).

Proposition (**2.2.14**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Si* X *est localement noethérien, il en est de même de* Y.

La question étant locale sur Y, on peut supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affine; comme f est quasi-compact, il résulte de (2.2.12) que l'on peut aussi se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine. Alors B est un anneau noethérien par hypothèse, et un A-module fidèlement plat (2.2.3); donc A est noethérien ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.2).

Proposition (**2.2.15**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme fidèlement plat. Si* $\mathfrak{S}(X)$ *et* $\mathfrak{S}(Y)$ *désignent respectivement l'ensemble des sous-préschémas de* X *et de* Y, *l'application* $Z \rightsquigarrow f^{-1}(Z)$ *de* $\mathfrak{S}(Y)$ *dans* $\mathfrak{S}(X)$ *est injective.*

Comme f est surjectif, on a, pour l'*ensemble* sous-jacent à un sous-préschéma Z de Y, $f(f^{-1}(Z)) = Z$. D'autre part, si U est un ouvert de Y contenant Z et dans lequel Z est fermé, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X, $f^{-1}(Z)$ est fermé dans $f^{-1}(U)$, et la restriction $f^{-1}(U) \to U$ de f est un morphisme fidèlement plat. On peut donc se borner à ne considérer que des sous-préschémas *fermés* de Y. Or, si Z est un sous-préschéma fermé de Y correspondant à un Idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_Y$, on sait que $f^{-1}(Z)$ correspond à l'Idéal quasi-cohérent $f^*(\mathscr{J})\mathcal{O}_X$ de $\mathcal{O}_X$ (**I**, 4.4.5), et comme f est plat, $f^*(\mathscr{J})\mathcal{O}_X$ s'identifie à $f^*(\mathscr{J})$. Mais l'application $\mathscr{J} \rightsquigarrow f^*(\mathscr{J})$ de l'ensemble des Idéaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_Y$ dans l'ensemble des Idéaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_X$ est injective (2.2.7), d'où la conclusion.

Corollaire (**2.2.16**). — *Soient* X, Y *deux* S-*préschémas; si* $S' \to S$ *est un morphisme fidèlement plat, l'application* $f \rightsquigarrow f_{(S')}$ *de* $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ *dans* $\mathrm{Hom}_{S'}(X_{(S')}, Y_{(S')})$ *est injective.*

On a $X_{(S')} \times_{S'} Y_{(S')} = (X \times_S Y)_{(S')}$ (**I**, 3.3.10), donc le morphisme projection $X_{(S')} \times_{S'} Y_{(S')} \to X \times_S Y$ est fidèlement plat (2.2.13). Les éléments de $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ correspondent biunivoquement aux sous-préschémas de $X \times_S Y$ qui sont les *graphes* de ces S-morphismes (**I**, 5.3.11), et si Z_f est le graphe de $f \in \mathrm{Hom}_S(X, Y)$, on a $Z_{f_{(S')}} = g^{-1}(Z_f)$ (**I**, 5.3.12). Il suffit donc d'appliquer à g la proposition (2.2.15).

Proposition (**2.2.17**). — *Soient* A *un anneau,* B *une* A-*algèbre telle que* B *soit un* A-*module fidèlement plat et de présentation finie. Alors l'homomorphisme structural* $\varphi : A \to B$ *est un isomorphisme du* A-*module* A *sur un facteur direct du* A-*module* B. *Si* A *est un anneau local,* B *est un* A-*module libre et il existe une base de ce module contenant l'élément unité de* B.

En vertu de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, prop. 12, il suffit de prouver la proposition lorsque A est un anneau local; on sait alors (*loc. cit.*, n° 2, cor. 2 de la prop. 5) que B est un A-module libre de type fini, et la conclusion résulte de *loc. cit.*, prop. 5.

2.3. Propriétés topologiques des morphismes plats.

Lemme **(2.3.1)**. — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-compact et quasi-séparé,* $g: Y' \to Y$ *un morphisme plat; posons* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$. *Alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathcal{F}$, *l'homomorphisme canonique*

$$g^*(f_*(\mathcal{F})) \to f'_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}) \tag{2.3.1.1}$$

est bijectif.

C'est un cas particulier de (**III**, 1.4.15) (amélioré en (1.7.21)).

Proposition **(2.3.2)**. — *Soient* S *un préschéma,* $f: X \to Y$ *un* S*-morphisme quasi-compact et quasi-séparé; soient* Z *le sous-préschéma de* Y, *image fermée de* X *par* f ((**I**, 9.5.3) *et* (1.7.8)), *et soit* $j: Z \to Y$ *l'injection canonique, de sorte que l'on a* $f = j \circ g$, *où* $g: X \to Z$ *est un morphisme (loc. cit.). Soit* $h: S' \to S$ *un morphisme plat, et posons* $f' = f_{(S')}: X_{(S')} \to Y_{(S')}$; *alors* $j' = j_{(S')}: Z_{(S')} \to Y_{(S')}$ *s'identifie à l'injection canonique du sous-préschéma de* $Y_{(S')}$, *image fermée de* $X_{(S')}$ *par* f'.

Comme le morphisme $Y_{(S')} \to Y$ est plat (2.1.4), on peut se borner au cas où $S = Y$ (**I**, 3.3.11); si $f = (\psi, \theta)$, on sait que Z est le sous-préschéma fermé de S défini par l'Idéal (quasi-cohérent) $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_S$, noyau de l'homomorphisme $\theta: \mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$ (**I**, 9.5.2). Comme h est un morphisme plat, l'Idéal quasi-cohérent $\mathcal{J}\mathcal{O}_{S'}$ de $\mathcal{O}_{S'}$ s'identifie au noyau de $h^*(\theta): \mathcal{O}_{S'} \to h^*(f_*(\mathcal{O}_X))$. Or, si $f' = (\psi', \theta')$, on vérifie facilement (par exemple en se ramenant au cas où Y et Y′ sont affines et utilisant (**I**, 2.2.4)) que $\theta': \mathcal{O}_{S'} \to f'_*(\mathcal{O}_{X'})$ est composé de l'homomorphisme canonique (2.3.1.1) $h^*(f_*(\mathcal{O}_X)) \to f'_*(\mathcal{O}_{X'})$ et de $h^*(\theta)$; la conclusion résulte donc de (2.3.1) et de (**I**, 9.5.2), puisque f' est quasi-compact et quasi-séparé (1.1.2 et 1.2.2).

(2.3.3) Nous dirons qu'un morphisme $f: X \to Y$ est *quasi-plat* s'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$ *de type fini* qui soit *f-plat* et dont le support soit *égal à* X. Nous dirons que f est *quasi-fidèlement plat* s'il est *quasi-plat* et *surjectif.* Tout morphisme plat (resp. fidèlement plat) est quasi-plat (resp. quasi-fidèlement plat), car alors $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ vérifie les conditions précédentes.

Il résulte aussitôt de (2.1.4) et de (**I**, 9.1.13), que si f est quasi-plat, alors, pour tout morphisme $Y' \to Y$, le morphisme $f_{(Y')}: X \times_Y Y' \to Y'$ est quasi-plat. De même (compte tenu de (**I**, 3.5.2)), si f est quasi-fidèlement plat, il en est de même de $f_{(Y')}$.

Proposition **(2.3.4)**. — *Soit* $f: X \to Y$ *un morphisme quasi-plat* (2.3.3). *Alors* f *possède les propriétés suivantes (qui sont équivalentes en vertu de* (1.10.4)) :

(i) *Pour tout* $x \in X$ *et toute générisation* y' *de* $y = f(x)$, *il existe une générisation* x' *de* x *telle que* $f(x') = y'$.

(ii) *Pour tout* $x \in X$, *l'image par* f *de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ *est* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$.

(iii) *Pour toute partie fermée irréductible* Y′ *de* Y, *toute composante irréductible de* $f^{-1}(Y')$ *domine* Y′.

Il suffit par exemple de prouver (ii). Par hypothèse, il y a un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathcal{F}$, qui est f-plat et tel que $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})=X$. Pour tout $x\in X$, $\mathcal{F}_x$ est alors un $\mathcal{O}_x$-module de type fini, non réduit à 0, et en outre $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module *plat*, pour l'homomorphisme $\rho : \mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$. Comme ce dernier est local et que $\mathcal{F}_x \neq 0$, le lemme de Nakayama montre que $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y) \neq 0$, donc $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module *fidèlement plat* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.4.1). Il en résulte que pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathcal{O}_y$, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_x$ tel que $\mathfrak{q}=\rho^{-1}(\mathfrak{p})$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.1), ce qui prouve (ii).

Corollaire (**2.3.5**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme vérifiant les conditions équivalentes* (i), (ii), (iii) *de* (2.3.4) (en particulier un morphisme *quasi-plat* ou un morphisme *ouvert* (1.10.4)).

(i) *Soient* Z, Z′ *deux parties fermées irréductibles de* Y *telles que* $Z\subset Z'$, *et soit* T *une composante irréductible de* $f^{-1}(Z)$; *alors il existe une composante irréductible* T′ *de* $f^{-1}(Z')$ *contenant* T (*et dominant* Z′).

(ii) *Pour toute composante irréductible* T *de* X, $\overline{f(T)}$ *est une composante irréductible de* Y.

(iii) *Supposons* Y *irréductible, et, si* y *est son point générique, supposons que* $f^{-1}(y)$ *soit irréductible. Alors* X *est irréductible.*

(i) Il suffit d'appliquer (2.3.4, (i)) en prenant pour x le point générique de T ($y=f(x)$ étant alors le point générique de Z) et pour y' le point générique de Z′.

(ii) Il est clair que $\overline{f(T)}=Z$ est irréductible, et en vertu de (i), Z ne peut être strictement contenue dans une partie fermée irréductible Z′ de Y.

(iii) En vertu de (ii), toute composante irréductible de X domine Y, donc rencontre $f^{-1}(y)$; la conclusion résulte alors de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.8).

Proposition (**2.3.6**). — *Soit* Y *un préschéma dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini* (ce qui est le cas si l'espace sous-jacent à Y est *localement noethérien* (cf. **I**, 6.1.9)).

(i) *Toute partie fermée* W *de* Y *stable par générisation* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.2) *est ouverte. En particulier, toute composante connexe de* Y *est ouverte.*

(ii) *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme* fermé *vérifiant en outre les conditions équivalentes* (i), (ii), (iii) *de* (2.3.4) (ce qui sera le cas si f est *quasi-plat* ou *ouvert*). *Alors l'image par* f *de toute composante connexe* C *de* X *est une composante connexe de* Y.

(iii) *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme vérifiant les conditions équivalentes* (i), (ii), (iii) *de* (2.3.4) *et tel en outre que pour tout* $y\in Y$, *l'ensemble* $f^{-1}(y)$ *soit fini* (ce qui sera le cas si f est *quasi-fini* ou *radiciel*). *Alors l'ensemble des composantes irréductibles de* X *est localement fini.*

(i) Si $y\in W$, les points génériques η_i ($1\leqslant i\leqslant m$) des composantes irréductibles Y_i de Y contenant y appartiennent par hypothèse à W, donc, puisque W est fermé, ces composantes elles-mêmes sont contenues dans W; comme il y a par hypothèse un voisinage U de y tel que U soit réunion des $U\cap Y_i$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.6), on a $U\subset W$, donc W est ouvert. Comme pour tout $y \in \mathrm{Y}$, $\overline{\{y\}}$ est connexe, une composante connexe de Y est stable par générisation, donc la seconde assertion résulte aussitôt de la première.

(ii) Comme C est fermé dans X, $f(\mathrm{C})$ est fermé dans Y par hypothèse. En outre, comme C est stable par générisation, l'hypothèse sur f entraîne que $f(\mathrm{C})$ est stable par générisation ; donc, en vertu de (i), $f(\mathrm{C})$ est ouvert et fermé, et comme il est connexe c'est une composante connexe de Y.

(iii) Soit $x \in \mathrm{X}$; par hypothèse, il y a un voisinage ouvert U de $y=f(x)$ ne rencontrant qu'un nombre fini de composantes irréductibles Y_i de Y $(1 \leqslant i \leqslant n)$; soit y_i le point générique de Y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Pour toute composante irréductible Z de X rencontrant $f^{-1}(\mathrm{U})$, le point générique z de Z est nécessairement dans l'un des ensembles $f^{-1}(y_i)$ (2.3.4). Comme chacun de ces ensembles est fini par hypothèse, cela prouve notre assertion.

Proposition **(2.3.7)**. — *Soient* $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme,* $g : \mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme quasi-plat,* $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$, $f' = f_{(\mathrm{Y}')} : \mathrm{X}' \rightarrow \mathrm{Y}'$.

(i) *Si* f *est quasi-compact et dominant, il en est de même de* f'.

(ii) *Si toute composante irréductible de* X *domine une composante irréductible de* Y, *alors toute composante irréductible de* X′ *domine une composante irréductible de* Y′.

Désignons par $g' : \mathrm{X}' \rightarrow \mathrm{X}$ la projection canonique, qui est un morphisme quasi-plat (2.3.3).

(i) On sait déjà (1.1.2) que f' est quasi-compact; en outre, si y' est un point maximal (1.1.4) de Y′, $y=g(y')$ est point maximal de Y, comme il résulte de (2.3.4, (iii)). Par hypothèse (1.1.5), il existe $x \in \mathrm{X}$ tel que $f(x)=y$; donc (**I**, 3.4.7), il existe $x' \in \mathrm{X}'$ tel que $f'(x')=y'$.

(ii) Soit x' un point maximal de X′, et soit $x=g'(x')$; il résulte de (2.3.4, (ii)) que x est point maximal de X, et par hypothèse $y=f(x)$ est point maximal de Y. Posons $y'=f'(x')$, de sorte que $g(y')=y$; il s'agit de montrer que y' est point maximal de Y′. En vertu de (**I**, 5.1.7) et (2.3.3), on peut se borner au cas où X et Y sont *réduits*, donc $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$ sont des *corps*; en outre, en vertu de (**I**, 3.6.5) appliqué deux fois et de (**I**, 2.4.4), on peut se borner au cas où $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ et $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{y'})$. Alors f est un morphisme *plat* puisque $\mathcal{O}_y$ est un corps (2.1.2), et il en est de même de f' (2.1.4); donc il résulte de (2.3.4, (ii)) que $y'=f'(x')$ est point maximal de Y′.

Corollaire **(2.3.8)** (Zariski). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ *leurs idéaux maximaux respectifs,* $\varphi : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ *un homomorphisme local. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

1° B *est une* A-*algèbre essentiellement de type fini* (1.3.8).

2° *Le complété* $\widehat{\mathrm{A}}$ *de* A *pour la topologie* $\mathfrak{m}$-*adique est intègre.*

3° φ *est injectif.*

Alors la topologie $\mathfrak{m}$-*adique de* A *est induite par la topologie* $\mathfrak{n}$-*adique de* B.

Posons $\mathrm{B}' = \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{A}}$; en vertu de 1°, B′ est de la forme $\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{C} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{A}})$, où C est une A-algèbre de type fini et S est une partie multiplicative de C, donc B′ est un anneau *noethérien*. Comme A s'identifie à un sous-anneau de $\widehat{\mathrm{A}}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5), A est intègre par 2°. L'hypothèse 3° entraîne alors qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B induisant l'idéal o de A ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.5.8), et par suite l'homomorphisme local $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}/\mathfrak{q}$ est injectif. On peut donc se borner à prouver la conclusion de (2.3.8) en ajoutant l'hypothèse que B est un anneau local *intègre*. Appliquons (2.3.7, (ii)) à $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, $\mathrm{Y}' = \mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{X}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}')$; comme le morphisme $\mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$ est plat et que X (qui est intègre) domine le schéma intègre Y, toute composante irréductible de X′ domine le schéma (intègre par hypothèse) Y′. Si y, x, y' sont les points fermés de Y, X et Y′ respectivement, il y a un point $x' \in X'$ (d'ailleurs unique) au-dessus de x et y' (**I**, 3.4.9) et $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{x'})$ domine donc $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{y'})$; on a par suite un diagramme commutatif d'homomorphismes *locaux* d'anneaux locaux noethériens

$$\begin{tikzcd} B = \mathcal{O}_x \arrow[r] & \mathcal{O}_{x'} \\ A = \mathcal{O}_y \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "u"'] & \mathcal{O}_{y'} = \widehat{A} \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

tel que u et v soient *injectifs* (**I**, 1.2.7); identifiant A et $\widehat{A}$ à des sous-anneaux de $\mathcal{O}_{x'}$, et désignant par $\mathfrak{r}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{x'}$, l'intersection des idéaux $\mathfrak{r}^k \cap \widehat{A}$ est donc nulle ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5); comme $\widehat{A}$ est *complet* et que ces idéaux sont ouverts dans $\widehat{A}$, cela entraîne (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, nº 7, prop. 8) que la topologie de $\widehat{A}$ est *induite* par la topologie $\mathfrak{r}$-préadique de $\mathcal{O}_{x'}$; *a fortiori* il en est de même de la topologie de A ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5). D'ailleurs on a $\mathfrak{n}^k \cap A \subset \mathfrak{r}^k \cap A$, donc la topologie $\mathfrak{n}$-préadique de B induit sur A une topologie *plus fine* que la topologie $\mathfrak{m}$-préadique; mais comme $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{n}^k \cap A$, ces deux topologies sont *identiques*. C.Q.F.D.

Remarque (**2.3.9**). — Nous verrons plus loin (7.8.3, (vii)) que pour les anneaux locaux noethériens A les plus usuels en Géométrie algébrique, l'hypothèse que A est intègre et intégralement clos implique qu'il en est de même de $\widehat{A}$. C'est pourquoi, en Géométrie algébrique sur un corps de base, on énonce généralement (2.3.8) sous l'hypothèse que A est *intègre et intégralement clos*.

Théorème (**2.3.10**). — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme quasi-plat* (2.3.3). *Alors, pour toute partie proconstructible* (1.9.4) Z *de* Y, *on a* $f^{-1}(\overline{Z}) = \overline{f^{-1}(Z)}$.

Comme f est continue, on a $\overline{f^{-1}(Z)} \subset f^{-1}(\overline{Z})$ et tout revient à prouver que pour tout $x \in X$ tel que $f(x) \in \overline{Z}$, x est adhérent à $f^{-1}(Z)$; il est clair que la question est locale sur Y, donc on peut supposer Y affine. En vertu de l'hypothèse, il existe un schéma affine Y′ et un morphisme $g : Y' \to Y$ tels que $g(Y') = Z$ (1.9.5, (ix)). Soit Y_1 l'image fermée de Y′ par g (**I**, 9.5.3), et soit X_1 le sous-préschéma fermé $f^{-1}(Y_1)$ de X; si $f_1 : X_1 \to Y_1$ est la restriction de f à X_1, on sait que f_1 est quasi-plat (2.3.3); on peut par suite remplacer X, Y par X_1, Y_1 respectivement, autrement dit supposer que g est *dominant*. Posons alors $X' = X \times_Y Y'$, et soient f' et g' les projections de X′ dans Y′ et X respectivement, de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Comme f est quasi-plat, g quasi-compact et dominant, il résulte de (2.3.7) (où les rôles de f et g sont intervertis) que g' est un morphisme dominant, ce qui démontre le théorème.

Corollaire (**2.3.11**). — *Soient f un morphisme quasi-plat et quasi-compact*, F *une partie fermée de* X *telle que* $F = f^{-1}(f(F))$; *alors on a* $F = f^{-1}(\overline{f(F)})$.

Soient Y′ le sous-préschéma réduit de X ayant F comme espace sous-jacent (**I**, 5.2.1) et soit $j : Y' \to X$ l'injection canonique; alors $f \circ j$ est quasi-compact (1.1.2), donc $Z = f(F)$ est pro-constructible dans Y (1.9.5, (vii)), et le corollaire résulte de ce que F est fermé.

On peut encore écrire le résultat de (2.3.11) sous la forme $F = f^{-1}(f(X) \cap \overline{f(F)})$, autrement dit, les ensembles fermés du sous-espace $f(X)$ de Y sont les parties $Z \subset f(X)$ telles que $f^{-1}(Z)$ soit fermé dans X; cela signifie aussi que *la topologie induite par* Y *sur* $f(X)$ *est quotient de celle de* X *par la relation d'équivalence définie par* f. En particulier :

Corollaire **(2.3.12)**. — *Soit* $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme quasi-fidèlement plat* (2.3.3) *et quasi-compact. Alors la topologie de* Y *est quotient de celle de* X *par la relation d'équivalence définie par* f (autrement dit, pour que $Z \subset Y$ soit *ouvert* (resp. *fermé*) dans Y, il faut et il suffit que $f^{-1}(Z)$ soit *ouvert* (resp. *fermé*) dans X).

En effet, on a alors $f(X) = Y$.

Corollaire **(2.3.13)**. — *Soient* X, Y *deux* S-*préschémas*, $f: X \rightarrow Y$ *un* S-*morphisme fidèlement plat et quasi-compact. Pour que* Y *soit séparé au-dessus de* S, *il faut et il suffit que l'immersion canonique* $j: X \times_Y X \rightarrow X \times_S X$ (**I**, 5.3.10) *soit fermée.*

Notons pour cela que l'on a le diagramme commutatif (**I**, 5.3.5)

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{j} & X \times_S X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f \times_S f} \\ Y & \xrightarrow[\Delta_Y]{} & Y \times_S Y \end{array}$$

identifiant $X \times_Y X$ au produit des $(Y \times_S Y)$-préschémas Y et $X \times_S X$. Comme f est surjectif, il en est de même de π et de $f \times_S f$, donc la diagonale $\Delta_Y(Y)$ a pour image réciproque par $f \times_S f$ l'image $j(X \times_Y X)$ (**I**, 3.4.8). Comme $f \times_S f$ est fidèlement plat et quasi-compact (1.1.2 et 2.2.13), il suffit d'appliquer (2.3.12) à ce morphisme.

Corollaire **(2.3.14)**. — *Soit* $f: X \rightarrow Y$ *un morphisme quasi-fidèlement plat et quasi-compact, et soit* Z *une partie de* Y. *Pour que* Z *soit une partie localement fermée pro-constructible de* Y, *il faut et il suffit que* $f^{-1}(Z)$ *soit une partie localement fermée pro-constructible de* X.

On sait déjà (1.9.12) que, pour que Z soit une partie pro-constructible de Y, il faut et il suffit que $f^{-1}(Z)$ soit une partie pro-constructible de X. La condition est évidemment nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, considérons le sous-préschéma fermé réduit Y_1 de Y ayant $\overline{Z}$ pour espace sous-jacent et, soit X_1 son image réciproque par f, qui a pour espace sous-jacent $f^{-1}(\overline{Z}) = \overline{f^{-1}(Z)}$ en vertu de (2.3.10). Comme $f^{-1}(Z)$ est localement fermé dans X, il est ouvert dans $\overline{f^{-1}(Z)}$, donc dans X_1; or, le morphisme $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$ déduit de f par restriction est quasi-fidèlement plat et quasi-compact (1.1.2 et 2.3.3); on déduit donc de (2.3.12) que Z est ouvert dans $\overline{Z}$, ce qui montre que Z est localement fermé dans Y.

Remarque **(2.3.15)**. — Il ne suffit pas, dans (2.3.12), de supposer seulement que f est *fidèlement plat.* Par exemple, prenons pour Y une courbe algébrique réduite irréductible

(**II**, 7.4.2), pour X le préschéma *somme* des schémas $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$, où y parcourt Y (**I**, 3.1), pour f le morphisme canonique, qui est fidèlement plat (**I**, 2.4.2); si η désigne le point générique de Y, $Z=\{\eta\}$ n'est pas ouvert dans Y (**II**, 7.4.3), mais $f^{-1}(Z)=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_\eta)$ puisque $\mathcal{O}_\eta$ est un corps, et par suite $f^{-1}(Z)$ est ouvert dans X.

2.4. Morphismes universellement ouverts et morphismes plats.

(2.4.1) Nous avons déjà défini (**II**, 5.4.9) la notion de morphisme *universellement fermé*; de la même manière, on pose les définitions suivantes :

Définition **(2.4.2)**. — *On dit qu'un morphisme de préschémas* $f : X \to Y$ *est universellement ouvert* (resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*) *si, pour tout morphisme* $g : Y' \to Y$, *le morphisme* $f_{(Y')} : X \times_Y Y' \to Y'$ *est ouvert* (resp. *un homéomorphisme sur son image*, resp. *un homéomorphisme sur* Y').

Nous verrons plus loin (14.3.2) que lorsque Y est localement noethérien, la définition de morphisme universellement ouvert donnée ici est équivalente à la définition (**III**, 4.3.9) pour les morphismes de type fini; le lecteur pourra vérifier que nous n'utilisons pas cette dernière définition avant le § 14.

Proposition **(2.4.3)**. — (i) *Une immersion* (resp. *une immersion ouverte*, resp. *une immersion fermée*) *est universellement bicontinue* (resp. *universellement ouverte*, resp. *universellement fermée*).

(ii) *Le composé de deux morphismes universellement ouverts* (resp. *universellement fermés*, resp. *universellement bicontinus*, resp. *deux homéomorphismes universels*) *l'est aussi.*

(iii) *Si* $f : X \to Y$ *est un* S*-morphisme universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*), *il en est de même de* $f_{(S')} : X_{(S')} \to Y_{(S')}$ *pour tout changement de base* $S' \to S$.

(iv) *Si* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes universellement ouverts* (resp. *universellement fermés*, resp. *universellement bicontinus*, resp. *deux homéomorphismes universels*), *il en est de même de* $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$.

(v) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes tels que* f *soit surjectif; si* $g \circ f$ *est universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*), *il en est de même de* g.

(vi) *Pour que* f *soit un morphisme universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*), *il faut et il suffit que* f_{red} *le soit.*

(vii) *Soit* (U_α) *un recouvrement ouvert de* Y. *Pour que* $f : X \to Y$ *soit universellement ouvert* (resp. *universellement fermé*, resp. *universellement bicontinu*, resp. *un homéomorphisme universel*), *il faut et il suffit que pour tout* α, *sa restriction* $f^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ *le soit.*

L'assertion (i) résulte de (**I**, 4.3.2). L'assertion (ii) résulte aussitôt des définitions, et il en est de même de (iii) en se ramenant au cas où $Y=S$, $Y'=S'$, ce que l'on peut faire grâce à (**I**, 3.3.11); on sait que (iv) découle de (ii) et (iii) (**I**, 3.5.1). Pour prouver (v), notons que pour tout morphisme $Z' \to Z$, $f_{(Z')} : X_{(Z')} \to Y_{(Z')}$ est surjectif (**I**, 3.5.2); on peut donc se borner à prouver que si $g \circ f$ est ouvert (resp. fermé, resp. un homéomorphisme sur son image, resp. un homéomorphisme bijectif), il en est de même de g, et il s'agit donc d'une question purement topologique. Pour le cas où $g \circ f$ est ouvert (resp. fermé), le fait que g est alors ouvert (resp. fermé) résulte de Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I^{er}, 3^{e} éd., § 5, n^{o} 1, prop. 1; pour les deux autres cas, on peut se borner à supposer que $g(f(\mathrm{X}))=g(\mathrm{Y})=\mathrm{Z}$, autrement dit au cas où $g \circ f$ est un homéomorphisme de X sur Z; comme f est surjectif, g est nécessairement bijectif, et comme g est une application continue ouverte d'après ce qui précède, g est bien un homéomorphisme de Y sur Z.

Pour prouver (vi), notons que dire qu'un morphisme g est ouvert (resp. fermé, resp. un homéomorphisme sur son image, resp. un homéomorphisme bijectif) équivaut à dire que g_{red} possède la même propriété. D'autre part (**I**, 5.1.8), pour tout morphisme $\mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$, on a $(\mathrm{X}_{\text{red}} \times_{\mathrm{Y}_{\text{red}}} \mathrm{Y}'_{\text{red}})_{\text{red}}=(\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}')_{\text{red}}$, donc la remarque précédente montre que si f_{red} est universellement ouvert (resp. universellement fermé, resp. universellement bicontinu, resp. un homéomorphisme universel), il en est de même de f. La réciproque se prouve de même, en notant ici que pour tout morphisme $\mathrm{Y}'' \rightarrow \mathrm{Y}_{\text{red}}$, on a $(\mathrm{X}_{\text{red}} \times_{\mathrm{Y}_{\text{red}}} \mathrm{Y}'')_{\text{red}}=(\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'')_{\text{red}}$ (**I**, 5.1.8).

Enfin, la nécessité de (vii) résulte aussitôt de (iii). Inversement, supposons remplie la condition (vii), et soit $g: \mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$ un morphisme; alors les $g^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)=\mathrm{U}'_\alpha$ forment un recouvrement ouvert de Y' et si l'on note f_α la restriction $f^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \rightarrow \mathrm{U}_\alpha$ de f, et f' le morphisme $f_{(\mathrm{Y}')}$, la restriction $f'^{-1}(\mathrm{U}'_\alpha) \rightarrow \mathrm{U}'_\alpha$ n'est autre que $(f_\alpha)_{(\mathrm{U}'_\alpha)}$. On peut donc se borner à prouver que f est ouvert (resp. fermé, resp. un homéomorphisme sur son image, resp. un homéomorphisme sur Y), ce qui est immédiat.

Proposition (**2.4.4**). — *Un morphisme universellement bicontinu* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *est radiciel (donc séparé* (1.7.7.1)).

En effet, f est universellement injectif par hypothèse (**I**, 3.5.11).

Proposition (**2.4.5**). — (i) *Un morphisme* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *qui est entier, surjectif et radiciel est un homéomorphisme universel.*

(ii) *Inversement, supposons* Y *localement noethérien. Alors, si un morphisme de type fini* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *est un homéomorphisme universel, il est fini, surjectif et radiciel.*

(i) Il suffit d'observer que les trois propriétés de f se conservent par changement de base (**I**, 3.5.2, **I**, 3.5.7 et **II**, 6.1.5), et comme un morphisme entier est fermé (**II**, 6.1.10), il est clair que f est un homéomorphisme de X sur Y.

(ii) Comme f est de type fini et universellement fermé par hypothèse et qu'il est séparé par (2.4.4), il est propre (**II**, 5.4.1), et pour tout $y \in \mathrm{Y}$, $f^{-1}(y)$ est réduit à un seul élément; donc (**III**, 4.4.2) f est fini; il est clair que f est surjectif, et il est radiciel puisqu'il est universellement injectif (**I**, 3.5.11).

Théorème (**2.4.6**). — *Soit* $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme quasi-plat* (2.3.3) *et localement de présentation finie. Alors f est universellement ouvert. En particulier, un morphisme plat localement de présentation finie est universellement ouvert.*

On sait que pour tout changement de base $\mathrm{Y}' \rightarrow \mathrm{Y}$, $f_{(\mathrm{Y}')}$ est quasi-plat (2.3.3) et localement de présentation finie (1.4.3, (iii)). Il suffit donc de prouver que f est un morphisme *ouvert*. Mais cela résulte du critère (1.10.4) pour les morphismes localement de présentation finie, les conditions *b)*, *b')*, et *c)* de (1.10.4) n'étant autre que les conditions (i), (ii), (iii) de (2.3.4).

Corollaire (**2.4.7**). — *Pour tout préschéma* Y, *le morphisme structural* $\mathbf{V}_Y^n \to Y$ (où $\mathbf{V}_Y^n = Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n])$, aussi noté $Y[T_1, \ldots, T_n]$) *est universellement ouvert.*

En effet, pour $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $Y[T_1, \ldots, T_n] = \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_n])$, et $A[T_1, \ldots, T_n]$ est une A-algèbre libre de présentation finie.

Remarques (**2.4.8**). — (i) On notera qu'un morphisme $f : X \to Y$ fidèlement plat et quasi-compact *n'est pas nécessairement ouvert*, même lorsque X et Y sont noethériens. Prenons par exemple pour Y une courbe algébrique réduite irréductible (**II**, 7.4) de point générique y, et soit X le préschéma somme $Y \amalg \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, f étant le morphisme canonique; il est clair que f est plat et surjectif, donc fidèlement plat, et quasi-compact, mais l'image par f de la partie ouverte $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ de X est l'ensemble $\{y\}$, qui n'est pas ouvert dans Y (**II**, 7.4.3).

(ii) Pour tout préschéma X, le morphisme canonique $f : X_{\mathrm{red}} \to X$ est une immersion fermée et un *homéomorphisme universel* (2.4.4, (vi)); mais lorsque X est localement noethérien, f n'est *plat* que si X est réduit, donc $f = 1_X$ (2.2.17).

Proposition (**2.4.9**). — *Soit* Y *un préschéma* discret. *Alors tout morphisme* $f : X \to Y$ *est universellement ouvert.*

La question étant locale sur Y (2.4.3, (vii)), on peut se borner au cas où l'espace sous-jacent Y est réduit à un point; remplaçant f par f_{red} (2.4.3, (vi)), on peut en outre supposer que Y est le spectre d'un *corps* k; d'autre part, pour tout changement de base $Y' \to Y$, les ouverts de $X' = X \times_Y Y'$ images réciproques des ouverts affines de X recouvrent X', donc on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(B)$ affine, B étant une *k-algèbre*. Il s'agit donc de prouver que pour toute k-algèbre A', si l'on pose $B' = B \otimes_k A'$, l'image par $f' : \mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A')$ de tout ouvert de la forme $U = D(t)$ ($t \in B'$) est ouverte dans Spec(A'). Or, B est limite inductive de la famille filtrante croissante (B_α) de ses sous-k-algèbres *de type fini*, donc (le foncteur $\varinjlim$ commutant au produit tensoriel), B' est limite inductive des A'-algèbres $B_\alpha \otimes_k A' = B'_\alpha$; il existe α tel que t soit image dans B' d'un élément $t_\alpha \in B'_\alpha$, donc $D(t)$ est l'image réciproque par le morphisme canonique $u_\alpha : \mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(B'_\alpha)$ de l'ouvert $U_\alpha = D(t_\alpha)$ (**I**, 1.2.2.2). Mais comme k est un corps, B_α est une k-algèbre de présentation finie et un k-module plat, donc B'_α est une A'-algèbre de présentation finie et un A'-module plat; on conclut donc de (2.4.6) que l'image de U_α par $f'_\alpha : \mathrm{Spec}(B'_\alpha) \to \mathrm{Spec}(A')$ est *ouverte* dans Spec(A'). Tout revient par suite à voir que $f'(U) = f'_\alpha(U_\alpha)$; il est clair que $f'(U) \subset f'_\alpha(U_\alpha)$ et il reste donc à voir que pour tout point $y' \in f'_\alpha(U_\alpha)$, l'intersection $V = U \cap f'^{-1}(y')$ n'est pas vide. Or on a $V = u_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, où $V_\alpha = U_\alpha \cap f'^{-1}_\alpha(y')$; autrement dit, V_α est un ouvert non vide (par définition de y') du préschéma $\mathrm{Spec}(B'_\alpha \otimes_{A'} \boldsymbol{k}(y')) = \mathrm{Spec}(B_\alpha \otimes_k \boldsymbol{k}(y'))$ et V est son image réciproque par le morphisme $v : \mathrm{Spec}(B \otimes_k \boldsymbol{k}(y')) \to \mathrm{Spec}(B_\alpha \otimes_k \boldsymbol{k}(y'))$. Comme B_α est une sous-algèbre de B et que k est un corps, l'homomorphisme $B_\alpha \otimes_k \boldsymbol{k}(y') \to B \otimes_k \boldsymbol{k}(y')$

est *injectif* par platitude, donc le morphisme v est *dominant* (**I**, 1.2.7), ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**2.4.10**). — *Soient k un corps,* X, Y *des k-préschémas; alors le morphisme projection* $X\times_k Y\rightarrow X$ *est universellement ouvert. En particulier, pour toute extension* K *de k, le morphisme projection* $X_{(K)}\rightarrow X$ *est universellement ouvert.*

Il suffit d'appliquer (2.4.9) au morphisme structural $Y\rightarrow \operatorname{Spec}(k)$.

Remarque (**2.4.11**). — Si $f: X\rightarrow Y$ est un morphisme *ouvert*, on sait que, pour *toute* partie E de Y, on a $f^{-1}(\overline{E})=\overline{f^{-1}(E)}$ (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I, 3^e éd., § 5, n° 4, prop. 7). Cette remarque s'applique par exemple lorsque f est un morphisme *plat localement de présentation finie* (2.4.6), ou un morphisme projection $X\times_k Y\rightarrow X$ où X, Y sont des préschémas sur un corps k (2.4.10), et généralise alors (2.3.10).

2.5. Permanence des propriétés des Modules par descente fidèlement plate.

Proposition (**2.5.1**). — *Soient* $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $g: Y'\rightarrow Y$ *un morphisme fidèlement plat,* $X'=X\times_Y Y'$, $f'=f_{(Y')}: X'\rightarrow Y'$, $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{Y'}$. *Pour que* $\mathscr{F}$ *soit plat* (resp. *fidèlement plat*) *relativement à f, il faut et il suffit que* $\mathscr{F}'$ *soit plat* (resp. *fidèlement plat*) *relativement à f'.*

Il suffit d'appliquer (2.2.10) en remplaçant X, Y′, Z, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}'$ par Y′, X, Y, $\mathcal{O}_{Y'}$, $\mathscr{F}$ respectivement; on en conclut que pour que $\mathscr{F}$ soit plat (resp. fidèlement plat) relativement à f, il faut et il suffit que $\mathscr{F}'$ soit plat (resp. fidèlement plat) relativement à $g\circ f'$. Mais si $g': X'\rightarrow X$ est la projection canonique, g' est fidèlement plat (2.2.13) et on a $g\circ f'=f\circ g'$; donc pour que $\mathscr{F}'$ soit plat (resp. fidèlement plat) relativement à $f\circ g'$, il faut et il suffit que $\mathscr{F}$ le soit relativement à f (2.2.11, (iii)).

Proposition (**2.5.2**). — *Soient* $f: X'\rightarrow X$ *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $\mathscr{F}'=f^*(\mathscr{F})$. *Considérons, pour un Module quasi-cohérent, la propriété d'être :*

(i) *de type fini ;*

(ii) *de présentation finie ;*

(iii) *localement libre de type fini ;*

(iv) *localement libre de rang n.*

Alors, si **P** *désigne une des propriétés précédentes, pour que* $\mathscr{F}$ *possède la propriété* **P**, *il faut et il suffit que* $\mathscr{F}'$ *la possède.*

Pour qu'un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent soit localement libre de type fini, il faut et il suffit qu'il soit plat sur X et de présentation finie (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 2, cor. 2 du th. 1, compte tenu de (2.1.2)); comme $\mathscr{F}$ est plat sur X si et seulement si $\mathscr{F}'$ est plat sur X′ en vertu de (2.5.1) (appliqué en prenant pour f l'identité), on voit que pour prouver la proposition dans le cas (iii), il suffit de l'avoir fait dans les cas (i) et (ii); il en est de même pour prouver (iv), car $f^*(\mathcal{O}_Y^n)=\mathcal{O}_X^n$, donc si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont localement libres de type fini et $x=f(x')$, le rang de $\mathscr{F}$ en x est égal à celui de $\mathscr{F}'$ en x', et notre assertion résulte de ce que f est surjectif. Pour traiter les cas (i) et (ii), notons que la question est locale sur X, et l'on peut donc supposer X affine; on sait alors (2.2.12) qu'il y a un schéma *affine* X″ et un morphisme fidèlement plat $g: X'' \to X'$ qui soit un isomorphisme local; par suite, il revient au même de dire que $f^*(\mathscr{F})$ possède la propriété $\boldsymbol{P}$, ou que $g^*(f^*(\mathscr{F}))$ la possède. On est ainsi ramené au cas où $X = \operatorname{Spec}(A)$, $X' = \operatorname{Spec}(A')$; compte tenu de (2.2.3) et (**II**, 6.1.4.1), il suffit donc de prouver le

Lemme (**2.5.3**). — *Soient* A *un anneau,* A′ *une* A*-algèbre fidèlement plate,* M *un* A*-module;* $M' = M \otimes_A A'$. *Pour que* M *soit de type fini* (resp. *de présentation finie*), *il faut et il suffit que* M′ *le soit.*

Pour la démonstration, voir Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I^er, § 3, n° 6, prop. 11.

Remarque (**2.5.4**). — Les assertions de (2.5.2) pour les propriétés (i) et (ii) sont encore valables si l'on suppose seulement f *quasi-fidèlement plat* (2.3.3) et quasi-compact. On est en effet ramené (Bourbaki, *loc. cit.*) à prouver le

Lemme (**2.5.4.1**). — *Soit* $\rho: A \to A'$ *un homomorphisme d'anneaux, tel que le morphisme correspondant* $f: \operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$ *soit surjectif; supposons qu'il existe un* A′*-module* N′ *de type fini, qui soit* A*-plat et ait pour support* Spec(A′). *Alors, si* $u: P \to Q$ *est un homomorphisme de* A*-modules tel que* $u \otimes 1: P \otimes_A A' \to Q \otimes_A A'$ *soit surjectif,* u *est surjectif.*

En effet, on en déduit d'abord que l'homomorphisme $u \otimes 1_{N'}: (P \otimes_A A') \otimes_{A'} N' \to (Q \otimes_A A') \otimes_{A'} N'$ est surjectif. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de A′, et soit $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$; l'homomorphisme $(P \otimes_A N')_{\mathfrak{q}} \to (Q \otimes_A N')_{\mathfrak{q}}$ correspondant est surjectif, et il s'écrit $u_{\mathfrak{p}} \otimes 1: P_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N'_{\mathfrak{q}} \to Q_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N'_{\mathfrak{q}}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.5.4). Par hypothèse on a $N'_{\mathfrak{q}} \neq 0$ et $N'_{\mathfrak{q}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.1); en vertu du lemme de Nakayama, on a $\mathfrak{q}N'_{\mathfrak{q}} \neq N'_{\mathfrak{q}}$, et *a fortiori* $\mathfrak{p}N'_{\mathfrak{q}} \neq N'_{\mathfrak{q}}$, donc $N'_{\mathfrak{q}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module fidèlement plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.4.1). Il en résulte que $u_{\mathfrak{p}}$ est surjectif ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.4.1), et ceci ayant lieu pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, puisque f est surjectif, on en conclut finalement que u est surjectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, th. 1).

Proposition (**2.5.5**). — *Soient* $f: X \to Y$ *un morphisme,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent de type fini et* f*-plat,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent de type fini; pour tout* $y \in Y$, *on pose* $\mathscr{F}_y = \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \boldsymbol{k}(y)$. *Pour qu'un point* $x \in X$ *soit point maximal de* $\operatorname{Supp}(\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F})$, *il faut et il suffit que* $y = f(x)$ *soit point maximal de* $\operatorname{Supp}(\mathscr{E})$, *et que* x *soit point maximal de* $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}_y)$ *dans* $f^{-1}(y)$. *S'il en est ainsi, on a*

$$(2.5.5.1) \qquad \operatorname{long}((\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F})_x) = \operatorname{long}(\mathscr{E}_y) . \operatorname{long}((\mathscr{F}_y)_x)$$

Il est clair que $f(\operatorname{Supp}(\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F})) \subset \operatorname{Supp}(\mathscr{E})$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2); l'image par f de toute composante irréductible de $\operatorname{Supp}(\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F})$ est donc contenue dans une composante irréductible de $\operatorname{Supp}(\mathscr{E})$. On peut se borner au cas où $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) = X$. En effet ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 30), puisque $\mathscr{F}$ est de type fini, il existe un sous-préschéma fermé X′ de X ayant $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ pour espace sous-jacent et un $\mathcal{O}_{X'}$-Module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}$ tels que, si $j: X' \to X$ est l'injection canonique, on ait $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{G})$. Si l'on pose $f' = f \circ j$, il est clair que $\mathscr{G}$ est f'-plat et que l'on a $\operatorname{Supp}(\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F}) = \operatorname{Supp}(\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{G})$.

Supposons donc $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) = X$; si Z est une composante irréductible de $\operatorname{Supp}(\mathscr{E})$, on a $f^{-1}(Z) \subset \operatorname{Supp}(\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F})$ (**I**, 9.1.13), et il résulte de (2.3.4) que toute composante irréductible de $f^{-1}(Z)$ domine Z; autrement dit, si x est point générique d'une composante irréductible de $\operatorname{Supp}(\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F})$ contenue dans $f^{-1}(Z)$, $y = f(x)$ est le point générique de Z; en outre ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.8), x est point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(y) = \operatorname{Supp}(\mathscr{F}_y)$ (**I**, 9.1.13), et réciproquement tout point générique d'une de ces composantes est point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(Z)$.

Reste à prouver (2.5.5.1); on a $(\mathscr{E}\otimes_{Y}\mathscr{F})_x=\mathscr{E}_y\otimes_{\mathcal{O}_y}\mathscr{F}_x$ (**I**, 9.1.12) et $(\mathscr{F}_y)_x=\mathscr{F}_x/\mathfrak{m}_y\mathscr{F}_x$; on est donc ramené à prouver le

Lemme (**2.5.5.2**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux*, $\rho: A\to B$ *un homomorphisme local*, $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A. *Soient* M *un* A-*module*, N *un* B-*module qui est un* A-*module fidèlement plat et tel que* $N/\mathfrak{m}N$ *soit un* B-*module de longueur finie; alors on a*

$$\text{(2.5.5.3)}\qquad \operatorname{long}_B(M\otimes_A N)=\operatorname{long}_A(M).\operatorname{long}_B(N/\mathfrak{m}N).$$

Si M est de longueur infinie, il en est de même de $M\otimes_A N$, car pour toute suite strictement croissante de n sous-modules M_i de M $(1\leqslant i\leqslant n)$, les $M_i\otimes_A N$ s'identifient à des sous-B-modules de $M\otimes_A N$ deux à deux distincts; comme $N\neq\mathfrak{m}N$ puisque N est un A-module fidèlement plat, la formule (2.5.5.3) est vraie dans ce cas. Supposons donc M de longueur finie. Si $M=0$ les deux membres de (2.5.5.3) sont nuls, donc on peut supposer $M\neq 0$. Les $\mathfrak{m}^kM$ sont des sous-modules de M, donc de longueur finie, et si $\mathfrak{m}^kM\neq 0$, il résulte du lemme de Nakayama que $\mathfrak{m}^{k+1}M\neq\mathfrak{m}^kM$; donc il y a nécessairement un entier r tel que $\mathfrak{m}^rM=0$. Les $\mathfrak{m}^kM\otimes_A N$ s'identifient alors à des sous-B-modules de $M\otimes_A N$, $(\mathfrak{m}^kM\otimes_A N)/(\mathfrak{m}^{k+1}M\otimes_A N)$ étant isomorphe à $(\mathfrak{m}^kM/\mathfrak{m}^{k+1}M)\otimes_A N$, donc aussi à $(\mathfrak{m}^kM/\mathfrak{m}^{k+1}M)\otimes_{A/\mathfrak{m}}(N/\mathfrak{m}N)$ $(0\leqslant k\leqslant r-1)$; la longueur de ce dernier, considéré comme B-module, est donc le produit de $\operatorname{long}_B(N/\mathfrak{m}N)$ et du rang du $(A/\mathfrak{m})$-espace vectoriel $\mathfrak{m}^kM/\mathfrak{m}^{k+1}M$, rang qui est aussi la longueur du A-module $\mathfrak{m}^kM/\mathfrak{m}^{k+1}M$. Par addition (pour $0\leqslant k\leqslant r-1$), on en déduit aussitôt la formule (2.5.5.3).

Remarque (**2.5.5.4**). — On notera que lorsque N est un A-module *de type fini* dire que N est un A-module fidèlement plat équivaut à dire que $N\neq 0$ et que N est un A-module *plat*; en effet le lemme de Nakayama montre alors que $\mathfrak{m}N\neq N$.

Lemme (**2.5.6**). — *Soient* B *un anneau non nécessairement commutatif*, V, W *deux* B-*modules à gauche isomorphes*, C *l'anneau* $\operatorname{End}_B(V)$, *et soit* $M=\operatorname{Hom}_B(V, W)$, *muni de sa structure canonique de* C-*module à droite. Alors* M *est un* C-*module isomorphe à* C_d; *en outre, pour tout* $u\in M$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\{u\}$ *est une base du* C-*module* M.

b) u *est un isomorphisme de* V *sur* W.

Si u est un isomorphisme de V sur W, l'application $v\rightsquigarrow u\circ v$ de C dans M est évidemment une bijection, donc *b)* entraîne *a)*. Inversement, supposons que $\{u\}$ soit une base du C-module M. Par hypothèse, il existe un isomorphisme u' de V sur W, et $\{u'\}$ est par suite une base de M; il y a donc un élément inversible w de C (c'est-à-dire un automorphisme de V) tel que $u=u'\circ w$, ce qui entraîne que u est un isomorphisme de V sur W.

Corollaire (**2.5.7**). — *Les hypothèses sur* B, V *et* W *étant celles de* (2.5.6), *supposons en outre vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) V *et* W *sont des* B-*modules noethériens ;*

(ii) V *et* W *sont des modules de présentation finie sur un sous-anneau commutatif de* B.

Alors les conditions a) *et* b) *de* (2.5.6) *sont aussi équivalentes aux suivantes :*

a′) u *est un générateur du* C-*module* M.

b′) u *est un épimorphisme de* V *sur* W.

On sait en effet qu'un épimorphisme d'un A-module E sur lui-même est *bijectif* dans les deux cas suivants : 1° E est un A-module noethérien (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 2, n° 2, lemme 3); 2° A est commutatif et E est un A-module de présentation finie (8.9.3) [1]; donc *b)* et *b′)* sont équivalentes. D'autre part, si u engendre M

---

[1] Le lecteur pourra vérifier que (2.5.7) et (2.5.8) ne sont pas utilisés avant le § 9.

et si $\{u'\}$ est une base de M, il existe $v \in C$ tel que $u' = u \circ v$, ce qui prouve que u est surjectif; donc *a')* entraîne *b')*, et comme *a)* entraîne évidemment *a')*, cela achève de prouver le corollaire.

Proposition **(2.5.8)**. — *Soient* A *un anneau commutatif semi-local,* B *une* A*-algèbre (non nécessairement commutative),* V *et* W *deux* B*-modules. Soit* A′ *une* A*-algèbre commutative qui est un* A*-module* fidèlement plat; *on pose* $B' = B \otimes_A A'$, $V' = V \otimes_A A'$, $W' = W \otimes_A A'$, *de sorte que* B′ *est une* A′*-algèbre,* V′ *et* W′ *des* B′*-modules. On suppose en outre vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) A *et* A′ *sont noethériens,* V *et* W *sont des* A*-modules de type fini.*

(ii) B *est un* A*-module de type fini,* V *est un* B*-module projectif de type fini et un* A*-module de présentation finie.*

Alors, si V′ *et* W′ *sont des* B′*-modules isomorphes,* V *et* W *sont des* B*-modules isomorphes.*

Notons que dans le cas (ii), W′ étant A′-isomorphe à V′, est un A′-module de type fini, d'où résulte que W est un A-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. Ier, § 3, no 6, prop. 11); donc dans tous les cas V et W sont des A-modules de type fini. En outre :

(2.5.8.1) *Sous l'une des hypothèses* (i), (ii), $\mathrm{Hom}_B(V, W)$ *est un* A*-module de type fini.*

C'est évident dans le cas (i), car $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ est alors un A-module de type fini, et $\mathrm{Hom}_B(V, W)$ est un sous-A-module de $\mathrm{Hom}_A(V, W)$. Dans le cas (ii), V est facteur direct d'un B-module libre B_s^n, donc $\mathrm{Hom}_B(V, W)$ est facteur direct de $\mathrm{Hom}_B(B_s^n, W) = W^n$, et comme W est un A-module de type fini, il en est de même de $\mathrm{Hom}_B(V, W)$.

Posons

$$C = \mathrm{End}_B(V), \qquad M = \mathrm{Hom}_B(V, W)$$

qui sont des A-modules de type fini dans les cas (i) et (ii). On sait que sous l'une des conditions (i), (ii), l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_A A' \to \mathrm{Hom}_{A'}(V', W') \tag{2.5.8.2}$$

est *bijectif* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, no 10, prop. 11). Comme A′ est un A-module plat, $\mathrm{Hom}_B(V, W) \otimes_A A'$ s'identifie canoniquement à un sous-A′-module de $\mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_A A'$. L'image de ce sous-module par l'homomorphisme (2.5.8.2) est contenue dans $\mathrm{Hom}_{B'}(V', W')$, car si $u \in \mathrm{Hom}_B(V, W)$ et $a' \in A'$, l'image de $u \otimes a'$ par (2.5.8.2) est l'homomorphisme $u' : V' \to W'$ tel que $u'(x \otimes 1) = u(x) \otimes a'$; pour tout $b \in B$, on a donc $u'((b \otimes 1)(x \otimes 1)) = u'(bx \otimes 1) = u(bx) \otimes a' = bu(x) \otimes a' = (b \otimes 1)(u(x) \otimes a')$, d'où notre assertion. Cela étant :

(2.5.8.3) *Sous l'une des hypothèses* (i), (ii), *l'homomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_B(V, W) \otimes_A A' \to \mathrm{Hom}_{B'}(V', W') \tag{2.5.8.4}$$

est bijectif.

Pour tout $b \in B$, notons $h(b)$ (resp. $h'(b)$) l'homothétie $x \rightsquigarrow bx$ dans V (resp. W), qui est un A-endomorphisme. Soit $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ un système de générateurs de la A-algèbre B; l'application

$$u \rightsquigarrow (h'(b_\alpha) \circ u - u \circ h(b_\alpha))_{\alpha \in I}$$

de $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ dans $(\mathrm{Hom}_A(V, W))^I$ est A-linéaire, et par définition, son *noyau* n'est autre que $\mathrm{Hom}_B(V, W)$; autrement dit, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(V, W) \to \mathrm{Hom}_A(V, W) \to (\mathrm{Hom}_A(V, W))^I.$$

Le même raisonnement s'applique en remplaçant A, B, V, W par A′, B′, V′, W′; de plus, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_B(V, W) \otimes_A A' & \to & \mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_A A' & \to & (\mathrm{Hom}_A(V, W))^I \otimes_A A' \\
& \downarrow r & & \downarrow s & & \downarrow t \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{B'}(V', W') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A'}(V', W') & \longrightarrow & (\mathrm{Hom}_{A'}(V', W'))^I
\end{array} \tag{2.5.8.5}$$

où r est l'homomorphisme (2.5.8.4), s l'homomorphisme (2.5.8.2) et t l'homomorphisme composé

$$(\mathrm{Hom}_A(V, W))^I \otimes_A A' \xrightarrow{w} (\mathrm{Hom}_A(V, W) \otimes_A A')^I \xrightarrow{s^I} (\mathrm{Hom}_{A'}(V', W'))^I$$

w étant l'homomorphisme canonique (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 3, no 7). On vérifie aussitôt que le diagramme (2.5.8.5) est commutatif, et comme A′ est un A-module plat, ses lignes sont exactes. Enfin, on a vu que s est un isomorphisme, et il en est donc de même de s^{I}; dans le cas (ii), on peut prendre I *fini*, et on sait alors que w est bijectif (Bourbaki, *loc. cit.*, prop. 7); dans le cas (i), on note que si B′ (resp. B″) est l'image de B par h (resp. h') dans $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V})$ (resp. $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{W})$), B′ et B″ sont des A-modules de type fini, donc on peut encore prendre I *fini*. Ainsi, dans tous les cas, t est bijectif, et on en conclut donc qu'il en est de même de r.

Il résulte donc de (2.5.8.4) que si l'on pose

$$\mathrm{C}'=\mathrm{C}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}', \qquad \mathrm{M}'=\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$$

on a des bijections canoniques

(2.5.8.6) $$\mathrm{C}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{B}'}(\mathrm{V}'), \qquad \mathrm{M}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}'}(\mathrm{V}', \mathrm{W}')$$

dont la première est un isomorphisme de A′-algèbres, la seconde constituant avec la première un di-isomorphisme de C′-*modules* à droite.

(2.5.8.7) *Réduction au cas où* $\mathrm{V}=\mathrm{B}_s$. L'hypothèse que V′ et W′ sont des B′-modules isomorphes, entraîne que C'_d et M′ sont des C′-modules à droite *isomorphes* (2.5.6). Montrons que pour prouver (2.5.8), il suffit de trouver un élément $u\in\mathrm{M}$ qui soit un *générateur* de M en tant que C-module à droite. En effet, $u'=u\otimes 1$ sera un générateur de M′ en tant que C′-module à droite; or, dans le cas (i), V′ et W′ sont des A′-modules de type fini, donc noethériens puisque A′ est noethérien; dans le cas (ii), V′ et W′ sont des A′-modules (isomorphes) de présentation finie. On peut donc appliquer (2.5.7) à A′, B′, V′ et W′ et on en conclut que u' est un B′-isomorphisme de V′ sur W′. Mais comme A′ est fidèlement plat sur A, cela entraîne que u est bijectif ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.4.1), c'est-à-dire la conclusion de (2.5.8). Si l'on note que dans le cas (i), C et M sont des A-modules de type fini, et que dans le cas (ii), C est (comme on l'a vu dans (2.5.8.1)) facteur direct de V^n, donc un A-module projectif de type fini, on voit qu'on est ramené (en changeant les notations) à prouver (2.5.8) dans le cas particulier où $\mathrm{V}=\mathrm{B}_s$, et qu'il suffit de prouver l'existence d'un *générateur* du B-module W. On notera qu'alors B est un A-module *de type fini*.

(2.5.8.8) *Réduction au cas où* A *et* A′ *sont des corps*, B *une* A-*algèbre simple de centre* A. Soit $\mathfrak{r}$ le radical de l'anneau semi-local A; il suffit de prouver que $\mathrm{W}/\mathfrak{r}\mathrm{W}$ est un $(\mathrm{B}/\mathfrak{r}\mathrm{B})$-module monogène, car s'il existe un homomorphisme surjectif $\mathrm{B}_s/\mathfrak{r}\mathrm{B}_s\rightarrow\mathrm{W}/\mathfrak{r}\mathrm{W}$, il donne par composition un homomorphisme $\mathrm{B}_s\rightarrow\mathrm{B}_s/\mathfrak{r}\mathrm{B}_s\rightarrow\mathrm{W}/\mathfrak{r}\mathrm{W}$, qui lui-même (puisque B_s est un B-module libre) peut s'écrire $\mathrm{B}_s\xrightarrow{f}\mathrm{W}\rightarrow\mathrm{W}/\mathfrak{r}\mathrm{W}$, si bien que l'homomorphisme surjectif considéré est $f\otimes 1:\mathrm{B}_s\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{r})\rightarrow\mathrm{W}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{r})$. Comme W est un A-module de type fini, le lemme de Nakayama prouve que f est surjectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, nº 2, cor. 1 de la prop. 4). Si l'on pose $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}/\mathfrak{r}$, $\mathrm{A}'_1=\mathrm{A}'\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_1=\mathrm{A}'/\mathfrak{r}\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}_1=\mathrm{B}/\mathfrak{r}\mathrm{B}=\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_1$, $\mathrm{W}_1=\mathrm{W}/\mathfrak{r}\mathrm{W}=\mathrm{W}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_1$, les hypothèses (i) (resp. (ii)) restent vérifiées lorsque l'on y remplace A, A′, B, $\mathrm{V}=\mathrm{B}_s$, W par A_1, A'_1, B_1, $\mathrm{V}_1=(\mathrm{B}_1)_s$, W_1 respectivement; en outre, $\mathrm{V}'_1=\mathrm{V}'\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_1=\mathrm{V}_1\otimes_{\mathrm{A}_1}\mathrm{A}'_1$ et $\mathrm{W}'_1=\mathrm{W}'\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_1=\mathrm{W}_1\otimes_{\mathrm{A}_1}\mathrm{A}'_1$ sont B'_1-isomorphes (avec $\mathrm{B}'_1=\mathrm{B}'\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}_1=\mathrm{B}_1\otimes_{\mathrm{A}_1}\mathrm{A}'_1$) et A'_1 est un A_1-module fidèlement plat. On peut donc supposer pour démontrer (2.5.8) que A est un *produit fini de corps* (commutatifs). Comme B est un A-module de type fini, c'est un anneau *artinien*; soit $\mathfrak{R}$ son radical. Il suffira maintenant de prouver que $\mathrm{W}/\mathfrak{R}\mathrm{W}$ est un $(\mathrm{B}/\mathfrak{R})$-module monogène, car on voit comme ci-dessus, en utilisant le lemme de Nakayama, que cela entraîne que W est un B-module monogène; d'autre part, $\mathrm{W}'/\mathfrak{R}\mathrm{W}'$ est $(\mathrm{B}'/\mathfrak{R}\mathrm{B}')$-isomorphe à $(\mathrm{B}'/\mathfrak{R}\mathrm{B}')_s$, et l'on a $\mathrm{B}'/\mathfrak{R}\mathrm{B}'=(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')\otimes_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}/\mathfrak{R})=(\mathrm{B}/\mathfrak{R})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ et de même $\mathrm{W}'/\mathfrak{R}\mathrm{W}'=(\mathrm{W}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}')\otimes_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}/\mathfrak{R})=(\mathrm{W}/\mathfrak{R}\mathrm{W})\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$. On peut donc supposer en outre que $\mathfrak{R}=0$, c'est-à-dire que B est une A-algèbre *semi-simple*.

Notons maintenant que puisque A est un produit fini de corps k_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, A′ est composé direct de k_i-algèbres A'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, chacune des A'_i étant annulée par les k_j d'indice $j\neq 1$; l'hypothèse que A′ est un A-module fidèlement plat entraîne que les A'_i sont $\neq 0$; il y a par suite un quotient A''_i de A'_i qui est un corps, et A″, composé direct des A''_i, est un A-module fidèlement plat et un quotient de A′. Si l'on considère alors l'anneau $\mathrm{B}''=\mathrm{B}'\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{A}''=\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}''$, $\mathrm{W}''=\mathrm{W}'\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{A}''=\mathrm{W}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}''$ est un B″-module isomorphe à B''_s; on peut donc se borner à démontrer (2.5.8) en remplaçant A′ par A″, c'est-à-dire que l'on peut aussi supposer que A′ est un *produit fini de corps*.

Soit Z le centre de B, qui est un produit fini de corps et un A-module de type fini; notons que B et W sont des Z-modules de type fini, projectifs comme tout Z-module; en outre, on a $\mathrm{B}'=\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{Z}}\mathrm{Z}'$ et $\mathrm{W}'=\mathrm{W}\otimes_{\mathrm{Z}}\mathrm{Z}'$ en posant $\mathrm{Z}'=\mathrm{Z}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$, et Z′ est un Z-module fidèlement plat. On peut donc remplacer A par Z dans l'hypothèse, autrement dit, supposer que A est le *centre* de B, B étant semi-simple et A′ un produit fini de corps. Si k_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ sont les corps composants de A, B est composé direct d'anneaux simples B_i, k_i étant le centre de B_i, et W est somme directe de sous-modules W_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, W_i étant annulé par les B_j d'indice $j\neq i$; en outre, le raisonnement fait plus haut montre que l'on peut supposer que A′ est un produit de corps k'_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, k'_i étant une extension de k_i et étant annulé par les k_j d'indice $j\neq i$. L'hypothèse que B'_s et W′ sont des B′-modules isomorphes entraîne alors que, pour tout i, $(B_i \otimes_{k_i} k'_i)_s$ et $W_i \otimes_{k_i} k'_i$ sont des $(B_i \otimes_{k_i} k'_i)$-modules isomorphes; il suffit donc de prouver (2.5.8) lorsque $n=1$, c'est-à-dire dans le cas où A et A′ sont des *corps*, B une algèbre *simple* de *centre* A.

(2.5.8.9) *Fin de la démonstration.* On sait alors (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 5, prop. 6 et 8) que tout B-module est somme directe de modules isomorphes à un idéal minimal de B, et deux B-modules de rang fini sur A sont donc isomorphes si et seulement s'ils ont *même rang* sur A. Par hypothèse, on a $[W' : A'] = [B'_s : A']$. Mais on a $[W' : A'] = [W : A]$ et $[B'_s : A'] = [B_s : A]$; donc $[W : A] = [B_s : A]$, ce qui termine la démonstration.

2.6. Permanence de propriétés ensemblistes et topologiques de morphismes par descente fidèlement plate.

Proposition **(2.6.1)**. — *Soient* $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme de* S-*préschémas,* $g : S' \to S$ *un morphisme surjectif,* $X' \to X_{(S')}$, $Y' = Y_{(S')}$, $f' = f_{(S')} : X' \to Y'$. *Considérons, pour un morphisme, la propriété d'être :*

(i) *surjectif;*

(ii) *injectif;*

(iii) *à fibres finies* (en tant qu'*ensembles*) ;

(iv) *bijectif;*

(v) *radiciel.*

Alors, si **P** *désigne une des propriétés précédentes et si* f' *possède la propriété* **P**, *il en est de même de* f.

Comme le morphisme projection $Y' \to Y$ est lui aussi surjectif (**I**, 3.5.2), on peut, en vertu de (**I**, 3.3.11), se borner au cas où $Y = S$, $Y' = S'$. Pour tout $y \in Y$ (resp. $y' \in Y'$) désignons par X_y (resp. $X'_{y'}$) le préschéma fibre $f^{-1}(y)$ (resp. $f'^{-1}(y)$) (**I**, 3.6.2); on sait que pour $y' \in Y'$, $y = g(y')$, on a un isomorphisme canonique $X'_{y'} \simeq X_y \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(y')$ (**I**, 3.6.4); comme le morphisme $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y')) \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ est surjectif, il en est de même de la projection $X'_{y'} \to X_y$ (**I**, 3.5.2); donc si $X'_{y'}$ est non vide (resp. a au plus un point, resp. est un ensemble fini), il en est de même de X_y; comme $g : Y' \to Y$ est surjectif, cela démontre la proposition dans les cas (i), (ii) et (iii), et (iv) résulte de (i) et (ii); enfin, pour prouver (v), il suffit de montrer que si f' est universellement injectif (**I**, 3.5.11), il en est de même de f; or, soit $Y_1 \to Y$ un morphisme quelconque; posons $X_1 = X \times_Y Y_1$ et $f_1 = f_{(Y_1)}$. D'autre part, posons $Y'_1 = Y_1 \times_Y Y'$, $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$, $f'_1 = f'_{(Y'_1)} = (f_1)_{(Y'_1)} : X'_1 \to Y'_1$; comme $g' = g_{(Y_1)} : Y'_1 \to Y'$ est surjectif (**I**, 3.5.2) et que f' est universellement injectif, f'_1 est injectif, et il résulte de (ii) que f_1 est injectif, d'où notre assertion.

Proposition **(2.6.2)**. — *Les notations étant celles de* (2.6.1), *supposons le morphisme* $g : S' \to S$ *fidèlement plat et quasi-compact. Considérons, pour un morphisme, la propriété d'être :*

(i) *ouvert;*

(ii) *fermé;*

(iii) *quasi-compact et un homéomorphisme sur le sous-espace image;*

(iv) *un homéomorphisme.*

Alors, si **P** *désigne une des propriétés précédentes et si* f' *possède la propriété* **P**, *il en est de même de* f.

Comme le morphisme $Y' \to Y$ est fidèlement plat et quasi-compact (2.2.13 et 1.1.2), on peut, en vertu de (**I**, 3.3.11), se borner au cas où $Y = S$, $Y' = S'$. Si g' est la projection $X' \to X$, on sait que l'on a, pour toute partie M de X, $g^{-1}(f(M)) = f'(g'^{-1}(M))$ (**I**, 3.4.8). Si f' est un morphisme ouvert (resp. fermé) alors, pour toute partie ouverte (resp. fermée) M de X, $f'(g'^{-1}(M))$ est ouverte (resp. fermée) dans Y', et comme g est fidèlement plat et quasi-compact, on en conclut que $f(M)$ est ouverte (resp. fermée) dans Y en vertu de (2.3.12). Cela démontre la proposition dans les cas (i) et (ii). Démontrons-la dans le cas (iii) (ce qui l'entraînera dans le cas (iv), compte tenu de (2.6.1, (iv)). En vertu de (2.6.1, (ii)) f est injectif, et il reste à prouver que f, considéré comme application de X sur $f(X)$, est une application quasi-compacte et *ouverte*. Comme f' est quasi-compacte, il en est de même de f (1.1.4). Il suffit alors de prouver que pour toute partie fermée Z de X, on a $Z = f^{-1}(\overline{f(Z)})$; comme g' est surjective, cette relation équivaut à $g'^{-1}(Z) = g'^{-1}(f^{-1}(\overline{f(Z)}))$ ou encore à $g'^{-1}(Z) = f'^{-1}(g^{-1}(\overline{f(Z)}))$. Or, comme f est quasi-compact, il en est de même de sa composée avec l'injection canonique $Z \to X$ (Z étant ici le sous-préschéma fermé réduit de X ayant Z comme espace sous-jacent). Appliquant (2.3.10) à la partie $f(Z)$ de Y (image du morphisme $f|Z$), on obtient $g^{-1}(\overline{f(Z)}) = \overline{g^{-1}(f(Z))}$; la formule à démontrer équivaut donc à la suivante : $Z' = f'^{-1}(\overline{f'(Z')})$, où l'on a posé $Z' = g'^{-1}(Z)$; mais cette formule résulte de l'hypothèse que f' est un homéomorphisme de X' sur $f'(X')$.

Remarque (**2.6.3**). — Dans les cas (i) et (ii), les conclusions de (2.6.2) sont encore valables quand on suppose seulement g *quasi-fidèlement plat* (2.3.3) et *quasi-compact*; en effet, en vertu de (2.1.4), (**I**, 3.5.2) et (**I**, 9.1.13.1), on peut encore se ramener au cas où $Y = S$, $Y' = S'$; la conclusion résulte alors de (2.3.12). Dans les cas (iii) et (iv), les conclusions restent valables quand on suppose seulement g *quasi-fidèlement plat*, pourvu que l'on suppose déjà f quasi-compact; en effet, on n'utilise alors que (2.3.10) et le fait que g est surjectif. Enfin, si g est fidèlement plat et localement de présentation finie ou si g est surjectif et S discret, la conclusion de (2.6.2) est valable lorsque **P** est la propriété :

(iii *bis*) *être un homéomorphisme sur le sous-espace image*;

cela résulte en effet de la démonstration donnée dans (2.6.2) et de la Remarque (2.4.11).

Corollaire (**2.6.4**). — *Les notations étant celles de* (2.6.1), *supposons le morphisme* $g : S' \to S$ *fidèlement plat et quasi-compact. Considérons pour un morphisme, la propriété d'être :*

(i) *universellement ouvert ;*

(ii) *universellement fermé ;*

(iii) *quasi-compact et universellement bicontinu ;*

(iv) *un homéomorphisme universel ;*

(v) *quasi-compact ;*

(vi) *quasi-compact et dominant.*

Alors, si **P** *désigne une des propriétés précédentes, pour que f possède la propriété* **P**, *il faut et il suffit que f' la possède.*

Les propriétés (v) et (vi) ne sont mises que pour mémoire, étant conséquences de (1.1.4), (1.1.6) et (2.3.7). En ce qui concerne les autres, la condition est nécessaire en vertu de (2.4.3). Inversement, supposons par exemple que f' soit universellement ouvert, et soit $Y_1 \to Y$ un morphisme quelconque; posons $X_1 = X \times_Y Y_1$ et $f_1 = f_{(Y_1)}$. D'autre part, posons $Y'_1 = Y_1 \times_Y Y'$, $X'_1 = X' \times_{Y'} Y'_1 = X_1 \times_{Y_1} Y'_1$, $f'_1 = f'_{(Y'_1)} = f_{1(Y'_1)} : X'_1 \to Y'_1$; comme $g' = g_{(Y')} : Y'_1 \to Y'$ est fidèlement plat et quasi-compact (2.2.13 et 1.1.2), et que f' est universellement ouvert, f'_1 est ouvert et il résulte de (2.6.2) que f_1 est ouvert; donc f est universellement ouvert. Même raisonnement pour les autres cas.

On notera encore ici que l'on peut remplacer « fidèlement plat » par « quasi-fidèlement plat » et, lorsque g est en outre localement de présentation finie, ou que g est surjectif et S discret, on peut remplacer la propriété (iii) par :

(iii *bis*) *universellement bicontinu.*

2.7. Permanence de diverses propriétés des morphismes par descente fidèlement plate.

Proposition (**2.7.1**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un* S-*morphisme de* S-*préschémas,* $g : S' \to S$ *un morphisme fidèlement plat et quasi-compact,* $X' = X_{(S')}$, $Y' = Y_{(S')}$, $f' = f_{(S')} : X' \to Y'$. *Considérons, pour un morphisme, la propriété d'être :*

(i) *séparé ;*
(ii) *quasi-séparé ;*
(iii) *localement de type fini ;*
(iv) *localement de présentation finie ;*
(v) *de type fini ;*
(vi) *de présentation finie ;*
(vii) *propre ;*
(viii) *un isomorphisme ;*
(ix) *un monomorphisme ;*
(x) *une immersion ouverte ;*
(xi) *une immersion quasi-compacte ;*
(xii) *une immersion fermée ;*
(xiii) *affine ;*
(xiv) *quasi-affine ;*
(xv) *fini ;*
(xvi) *quasi-fini ;*
(xvii) *entier.*

Alors, si **P** *désigne une des propriétés précédentes, pour que f possède la propriété* **P**, *il faut et il suffit que f′ la possède.*

Il a été démontré aux chapitres Ier, II et dans le chapitre IV, § 1, que si f possède une des propriétés **P** ci-dessus, il en est de même de f' (sans hypothèse sur le morphisme $g : S' \to S$). Il reste donc à démontrer la réciproque; comme la projection $Y' \to Y$ est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact (2.2.13 et 1.1.2), on peut se borner au cas où $S = Y$, $S' = Y'$ en vertu de (**I**, 3.3.11).

(i) Dire que f est séparé signifie que le morphisme diagonal $\Delta_f : X \to X \times_Y X$ est *fermé*; comme $\Delta_{f'} = (\Delta_f)_{(Y')}$ (**I**, 5.3.4), si $\Delta_{f'}$ est fermé, il en est de même de Δ_f en vertu de (2.6.2), donc f est séparé.

(ii) a déjà été démontré sous des hypothèses plus faibles (1.2.5).

(iii) et (iv) : La question est évidemment locale sur X et Y, et, compte tenu de (2.2.12), il suffit donc de démontrer le

Lemme (**2.7.1.1**). — *Soient* A *un anneau,* B *une* A-*algèbre,* A′ *une* A-*algèbre qui soit un* A-*module fidèlement plat,* $B' = B \otimes_A A'$. *Pour que* B *soit une* A-*algèbre de type fini* (resp. *de présentation finie*), *il faut et il suffit que* B′ *soit une* A′-*algèbre de type fini* (resp. *de présentation finie*).

On sait déjà que la condition est nécessaire sans hypothèse sur A′ (1.3.4, 1.3.6, 1.4.3 et 1.4.6). Supposons que B′ soit une A′-algèbre de type fini; soit $(B_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres de B, de sorte que l'on a $B = \varinjlim B_\alpha$, et par suite aussi $B' = \varinjlim (B_\alpha \otimes_A A')$, le produit tensoriel permutant aux limites inductives; si (x'_i) est un système fini de générateurs de la A′-algèbre B′, il existe un indice α tel que tous les x'_i appartiennent à la sous-algèbre $B_\alpha \otimes_A A'$ de B′, d'où $B' = B_\alpha \otimes_A A'$, et comme A′ est fidèlement plat, $B = B_\alpha$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.4.1).

Supposons maintenant que B′ soit une A′-algèbre de présentation finie; on sait déjà d'après ce qui précède que B est une A-algèbre de type fini, donc il existe une A-algèbre de polynômes $C = A[T_1, \ldots, T_m]$ et un A-homomorphisme surjectif d'algèbres $C \to B$; soit $\mathfrak{J}$ le noyau de cet homomorphisme, de sorte que l'on a une suite exacte $0 \to \mathfrak{J} \to C \to B \to 0$, et par suite aussi une suite exacte $0 \to \mathfrak{J}' \to C' \to B' \to 0$ (puisque A′ est A-plat), en posant $C' = C \otimes_A A' = A'[T_1, \ldots, T_m]$, et $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} \otimes_A A'$ (identifié à un idéal de C′). Comme B′ est une A′-algèbre de présentation finie, $\mathfrak{J}'$ est un C′-module de type fini (1.4.4); mais on a $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} \otimes_C C'$ et C′ est un C-module fidèlement plat (2.2.13 et 2.2.3); on sait alors que l'hypothèse que $\mathfrak{J}'$ soit un C′-module de type fini entraîne que $\mathfrak{J}$ est un C-module de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I^er^, § 3, n° 6, prop. 11), donc B est une A-algèbre de présentation finie.

(v) résulte de (iii) et de (2.6.2, (v)) en vertu de (1.5.2).

(vi) résulte de même de (iv), (v) et (ii) en vertu de (1.6.1).

(vii) résulte de (i), (v) et (2.6.4, (ii)) (**II**, 5.4.1).

(viii) Notons d'abord que comme f' est un isomorphisme, c'est un homéomorphisme universel, donc il en est de même de f (2.6.4); on en conclut déjà que f est quasi-compact et séparé (2.4.4). Posons $f = (\psi, \theta)$, où ψ est donc un homéomorphisme; il s'agit de prouver que $\theta : \mathcal{O}_Y \to f_*(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Modules. Or, si l'on pose $f' = (\psi', \theta')$, l'homomorphisme $\theta' : \mathcal{O}_{Y'} \to f'_*(\mathcal{O}_{X'})$ est composé de l'homomorphisme canonique $g^*(f_*(\mathcal{O}_X)) \to f'_*(\mathcal{O}_{X'})$ et de $g^*(\theta)$ (2.3.2); mais le premier de ces deux homomorphismes est bijectif en vertu de l'hypothèse sur g (2.3.1), donc si θ' est bijectif, il en est de même de $g^*(\theta)$, et comme g est fidèlement plat, θ est bijectif (2.2.7), ce qui prouve (viii).

(ix) La proposition résulte de (viii), de (**I**, 5.3.4) et de (**I**, 5.3.8) qui ramène les monomorphismes aux isomorphismes.

(x) Si f' est une immersion ouverte, $f'(X')$ est ouvert dans Y', et l'on a $f'(X')=g^{-1}(f(X))$ (**I**, 3.4.8); il résulte de (2.3.12) que $f(X)$ est ouvert. On peut alors remplacer Y (resp. Y') par le sous-préschéma induit sur l'ouvert $f(X)$ (resp. $f'(X')$), compte tenu de (1.1.2) et (2.2.13); alors f' devient un isomorphisme, donc il en est de même de f par (viii), et cela établit (x).

(xi) Si f' est une immersion quasi-compacte, f' est un morphisme quasi-compact et quasi-séparé (1.2.2), donc il en est de même de f par (ii) et (2.6.2, (v)). Soit Z le sous-préschéma de Y image fermée de X par f (1.7.8), et posons $f=j\circ g$, où $j : Z\rightarrow Y$ est l'injection canonique; on a alors $f'=j'\circ g'$ avec $j'=j_{(Y')}$, $g'=g_{(Y')}$, et l'on sait que j' s'identifie à l'injection canonique $Z'\rightarrow Y'$ du sous-préschéma Z' de Y', image fermée de X' par f' (2.3.2). L'hypothèse sur f' signifie alors que g' est une immersion ouverte (**I**, 9.5.10), donc il en est de même de g par (x), et cela montre que f est une immersion.

(xii) Dire que f (resp. f') est une immersion fermée signifie que f (resp. f') est une immersion quasi-compacte et un morphisme fermé; on voit donc que (xii) résulte de (xi) et de (2.6.2, (ii)).

(xiii) et (xiv) Supposons f' affine (resp. quasi-affine); notons alors que f' est quasi-compact et quasi-séparé (**II**, 5.1.1), donc il en est de même de f par (ii) et (2.6.2, (v)). Posons $\mathscr{A}=f_*(\mathcal{O}_X)$, $\mathscr{A}'=f'_*(\mathcal{O}_{X'})$; en vertu de (2.3.1), l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{Y'}$-Algèbres $g^*(\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{A}'$ est bijectif; par conséquent, si $h : Z=\mathrm{Spec}(\mathscr{A})\rightarrow Y$ est le morphisme structural, le morphisme structural $h' : Z'=\mathrm{Spec}(\mathscr{A}')\rightarrow Y'$ s'identifie à $h_{(Y')}$ (**II**, 1.5.2). Soit alors $u : X\rightarrow Z$ (resp. $u' : X'\rightarrow Z'$) le Y-morphisme (resp. Y'-morphisme) canonique correspondant à l'homomorphisme identique de $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{A}'$) (**II**, 1.2.7); comme on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l] \\ Z \arrow[from=1-1, d, "u"'] & Z' \arrow[l, "g'"'] \arrow[from=1-2, d, "u'"] \\ Y \arrow[from=2-1, d, "h"'] & Y' \arrow[l, "g"] \arrow[from=2-2, d, "h'"] \end{tikzcd}$$

et que $h'\circ u'=f'$, il résulte de (**II**, 1.2.7) que $u'=u_{(Z')}$. En outre, g' est fidèlement plat et quasi-compact (1.1.2 et 2.2.13). Cela étant, l'hypothèse sur f' signifie que u' est un isomorphisme (resp. une immersion ouverte) (**II**, 5.1.6); il résulte alors de (viii) (resp. (x)) que u est un isomorphisme (resp. une immersion ouverte), d'où (xiii) (resp. (xiv)).

(xv) Si f' est fini, il est affine, donc aussi f d'après (xiii); en outre, avec les notations de la démonstration de (xiii), $\mathscr{A}'$ est un $\mathcal{O}_{Y'}$-Module de type fini, et $\mathscr{A}'$ est isomorphe à $g^*(\mathscr{A})$; il résulte de (2.5.2) que $\mathscr{A}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module de type fini, donc f est un morphisme fini.

(xvi) Dire que f est quasi-fini signifie que f est un morphisme de type fini et que pour tout $y \in Y, f^{-1}(y)$ est fini (**II**, 6.2.2 et **I**, 6.4.4); la conclusion résulte donc de (v) et de (xv).

(xvii) On voit comme dans (xv) que f est affine. On peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $Y' = \mathrm{Spec}(A')$, et alors $X = \mathrm{Spec}(B)$, $X' = \mathrm{Spec}(B')$, où $B' = B \otimes_A A'$; B est égale à la limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini B_α, donc on a $B' = \varinjlim B'_\alpha$, où $B'_\alpha = B_\alpha \otimes_A A'$, et B'_α est une A'-algèbre de type fini. Mais par hypothèse B' est entière sur A', donc B'_α est un A'-*module* de type fini, et B_α est donc un A-module de type fini (2.5.2). C.Q.F.D.

Corollaire **(2.7.2)**. — *Les hypothèses et notations étant celles de* (2.7.1), *supposons f quasi-compact; soient $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-Module inversible, $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y'}$ son image réciproque. Pour que $\mathscr{L}$ soit ample* (resp. *très ample*) *pour f, il faut et il suffit que $\mathscr{L}'$ soit ample* (resp. *très ample*) *pour f'.*

La condition est nécessaire sans hypothèse sur $g : S' \to S$ (**II**, 4.4.10 et 4.6.13); pour voir qu'elle est suffisante, on peut comme dans (2.7.1) se limiter au cas où $S = Y$, $S' = Y'$. L'hypothèse sur $\mathscr{L}'$ implique que f' est quasi-compact et séparé (**II**, 4.6.1), donc il en est de même de f ((2.6.2, (v)) et (2.7.1, (i))). Posons $\mathscr{E} = f_*(\mathscr{L})$, $\mathscr{E}' = f'_*(\mathscr{L}')$; il résulte de (2.3.1) que l'homomorphisme canonique $u : g^*(\mathscr{E}) \to \mathscr{E}'$ est bijectif. Si $\mathscr{L}'$ est *très ample* pour f, l'homomorphisme canonique $\sigma' : f'^*(\mathscr{E}') \to \mathscr{L}'$ est surjectif, et le morphisme $r' = r_{\mathscr{L}', \sigma'} : X' \to \mathbf{P}(\mathscr{E}')$ est une *immersion* (**II**, 4.4.4, *b)*) nécessairement quasi-compacte (1.1.2, (v)). Le fait que $u : g^*(\mathscr{E}) \to \mathscr{E}'$ soit bijectif entraîne que si $h : \mathbf{P}(\mathscr{E}) \to Y$, $h' : \mathbf{P}(\mathscr{E}') \to Y'$ sont les morphismes structuraux, h' s'identifie à $h_{(Y')}$ (**II**, 4.1.3); d'autre part, en désignant par g' la projection $X' \to X$, g' est fidèlement plat (2.2.13), on a $f \circ g' = g \circ f'$, et l'on vérifie aisément que l'homomorphisme $g'^*(\sigma) : g'^*(f^*(f_*(\mathscr{L}))) \to g'^*(\mathscr{L})$ est identique à l'homomorphisme composé

$$f'^*(g^*(f_*(\mathscr{L}))) \xrightarrow{f'^*(u)} f'^*(f'_*(\mathscr{L}')) \xrightarrow{\sigma'} \mathscr{L}'$$

(par exemple en se ramenant au cas où Y et Y' sont affines). Comme σ' est surjectif et $f'^*(u)$ bijectif, on voit que $g'^*(\sigma)$ est surjectif, donc il en est de même de σ (2.2.7). On en conclut que le morphisme $r = r_{\mathscr{L}, \sigma} : X \to \mathbf{P}(\mathscr{E})$ est partout défini (**II**, 3.7.4); en outre, si l'on pose $P = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, $P' = \mathbf{P}(\mathscr{E}')$ et si g'' est la projection $P' \to P$, r' s'identifie à $r_{(P')}$ (**II**, 4.2.10) et g'' est fidèlement plat et quasi-compact (1.1.2 et 2.2.13). On conclut donc de (2.7.1, (xi)) que r est une immersion, et par suite $\mathscr{L}$ est *très ample* (**II**, 4.4.4, *b)*).

Supposons maintenant que $\mathscr{L}'$ soit *ample* pour f'; pour démontrer que $\mathscr{L}$ est ample pour f, on peut se borner au cas où Y est affine (**II**, 4.6.4), et en vertu de (2.2.12) et de (**II**, 4.6.13), on peut aussi supposer que Y' est affine. Alors X et X' sont des schémas quasi-compacts, et pour prouver que $\mathscr{L}$ est f-ample, on peut appliquer le critère de (**II**, 4.6.8, *c)*). Soit donc $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de type fini; si $\sigma : f^*(f_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})) \to \mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}$ est l'homomorphisme canonique, on voit comme ci-dessus que $g'^*(\sigma)$ est l'homomorphisme composé

$$f'^*(g^*(f_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n}))) \xrightarrow{f'^*(u)} f'^*(f'_*(\mathscr{F}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})) \xrightarrow{\sigma'} \mathscr{F}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n}$$

en posant $\mathscr{F}'=g'^*(\mathscr{F})$, tenant compte de $(\mathbf{0}_I, 4.3.3.1)$ et désignant par u l'homomorphisme canonique $g^*(f_*(\mathscr{F}\otimes\mathscr{L}^{\otimes n})) \to f'_*(\mathscr{F}'\otimes\mathscr{L}'^{\otimes n})$. Or, on sait que u est bijectif quel que soit n (2.3.1); d'autre part, comme $\mathscr{F}'$ est quasi-cohérent et de type fini, l'hypothèse que $\mathscr{L}'$ est ample pour f' entraîne l'existence d'un n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, σ' soit surjectif; on voit donc que $g'^*(\sigma)$ est surjectif pour $n\geqslant n_0$, et comme g' est fidèlement plat, σ est surjectif pour ces valeurs de n (2.2.7), ce qui achève la démonstration.

Remarques (**2.7.3**). — (i) Il résulte de (2.6.1), (2.6.4) et (2.5.4.1) que les conclusions de (2.7.1) sont encore valables dans les cas (i), (iii), (v), (vii) et (xvi) lorsqu'on suppose seulement que g est quasi-compact et *quasi-fidèlement plat* (2.3.3); on a déjà remarqué que (2.7.1) est valable dans le cas (ii) en supposant seulement g surjectif et quasi-compact.

(ii) Avec les notations et hypothèses de (2.7.1), il peut se faire que f *soit propre et* f' *projectif sans que* f *soit quasi-projectif*. En effet, Hironaka [34] a donné un exemple de morphisme propre non projectif $f : X\to Y$, où X et Y sont deux schémas algébriques réguliers $(\mathbf{0}_I, 4.1.4)$ sur un même corps k, Y étant projectif sur k; en outre Y est réunion de deux ouverts affines Y_i $(i=1, 2)$ tels que $f_i : X\times_Y Y_i\to Y_i$ soit projectif pour $i=1, 2$. Soit alors $Y'=Y_1\amalg Y_2$ le préschéma somme; il est clair que le morphisme canonique $g : Y'\to Y$ coïncidant avec les injections canoniques dans Y_1 et Y_2, est fidèlement plat, et il est quasi-compact en vertu de (**I**, 5.5.10); pourtant, bien que $f' : X\times_Y Y'\to Y'$ (coïncidant avec f_i dans chacun des Y_i) soit projectif (**II**, 5.5.6), il n'en est pas de même de f. Il existe donc un $\mathcal{O}_{X'}$-Module inversible $\mathscr{L}'$ qui est f'-ample mais qui *n'est pas de la forme* $g'^*(\mathscr{L})$ *pour un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible* $\mathscr{L}$, en vertu de (2.7.2).

(iii) Sous les hypothèses de (2.7.1), il peut se faire que f' soit un *isomorphisme local* sans que f soit une immersion locale. Soient en effet k un corps, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k, K une extension séparable de degré fini de k, distincte de k; alors le morphisme structural $f : X\to Y$, où $X=\operatorname{Spec}(K)$ et $Y=\operatorname{Spec}(k)$, n'est pas une immersion locale, mais si on prend $Y'=\operatorname{Spec}(\overline{k})$, le morphisme $Y'\to Y$ est fidèlement plat et quasi-compact et f' est un isomorphisme local, puisque $X'=X\times_Y Y'$ est somme d'un nombre fini de schémas isomorphes à Y'.

2.8. Préschémas sur une base régulière de dimension 1; adhérence d'un sous-préschéma fermé de la fibre générique.

Proposition (**2.8.1**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien, régulier, irréductible et de dimension* 1, *de point générique* η, $f : X\to Y$ *un morphisme*, $X_\eta=f^{-1}(\eta)$ *la fibre au point* *générique,* $i : X_\eta \to X$ *le morphisme canonique. Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $\mathscr{F}_\eta = i^*(\mathscr{F})$, $\mathscr{G}'$ *un* $\mathcal{O}_{X_\eta}$*-Module quotient de* $\mathscr{F}_\eta$*, et soit* $\overline{\mathscr{G}'}$ *le* $\mathcal{O}_X$*-Module image de* $\mathscr{F}$ *par l'homomorphisme composé* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3.2)

$$\mathscr{F} \xrightarrow{\rho_{\mathscr{F}}} i_*(i^*(\mathscr{F})) \longrightarrow i_*(\mathscr{G}').$$

Alors $\overline{\mathscr{G}'}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module quotient de* $\mathscr{F}$*, quasi-cohérent et f-plat, tel que* $i^*(\overline{\mathscr{G}'}) = \mathscr{G}'$*, et c'est le seul* $\mathcal{O}_X$*-Module quotient de* $\mathscr{F}$ *ayant ces propriétés.*

Comme i_* est quasi-compact et quasi-séparé (1.1.2 et 1.2.2), il résulte de (1.7.4) que pour tout $\mathcal{O}_{X_\eta}$-Module quasi-cohérent $\mathscr{H}'$, $i_*(\mathscr{H}')$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent; en outre, pour tout ouvert U de X, on a $(i_*(\mathscr{H}'))|U = (i|U \cap X_\eta)_*(\mathscr{H}'|U \cap X_\eta)$ par définition ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 3.4.1). Si l'on démontre la proposition lorsque X et Y sont affines, elle en résultera par recollement dans le cas général, vu l'assertion d'unicité valable dans le cas affine. Autrement dit, on est ramené à prouver le

Lemme (**2.8.1.1**). — *Soient* A *un anneau noethérien régulier* ($\mathbf{0}$, 17.3.6), *intègre de dimension* 1, K *son corps des fractions,* M *un* A*-module,* N′ *un* K*-module quotient de* $M_{(K)} = M \otimes_A K$ *par un sous-*K*-module* P′, $\overline{N'}$ *l'image de* M *par l'homomorphisme composé* $M \to M_{(K)} \to N'$. *Alors* $\overline{N'}$ *est un* A*-module plat, et est l'unique module quotient* N *de* M *qui soit un* A*-module plat et tel que le noyau de l'homomorphisme surjectif* $M_{(K)} \to N_{(K)}$ *soit égal à* P′.

Comme pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_\mathfrak{m}$ est un anneau local régulier de dimension 1, donc un anneau de valuation discrète, il revient au même de dire qu'un A-module N est plat ou qu'il est *sans torsion* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.3.4). Comme N′ est un K-espace vectoriel, c'est un A-module sans torsion, donc il en est de même de $\overline{N'}$, sous-module de N′; en outre, il est immédiat de vérifier que $\overline{N'}_{(K)}$ s'identifie à N′. Inversement, si N est un A-module quotient de M ayant les propriétés de l'énoncé, le fait que N soit un A-module plat entraîne que l'homomorphisme canonique $N \to N_{(K)} = N \otimes_A K$ est *injectif.* Comme $N_{(K)}$ s'identifie à N′, la conclusion résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{(K)} & \longrightarrow & N_{(K)} \end{array}$$

Corollaire (**2.8.2**). — *Sous les conditions de* (2.8.1), *pour que* $\mathscr{F}$ *soit f-plat, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique* $\mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}_\eta) = i_*(i^*(\mathscr{F}))$ *soit injectif.*

(**2.8.3**) La formation du $\mathcal{O}_X$-Module $\overline{\mathscr{G}'}$ est *fonctorielle en* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}'$: de façon précise, si $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ sont deux $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, $u : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ un $\mathcal{O}_X$-homomorphisme, $\mathscr{G}'_i$ un $\mathcal{O}_{X_\eta}$-Module quotient de $(\mathscr{F}_i)_\eta$ $(i = 1, 2)$ et $v : \mathscr{G}'_1 \to \mathscr{G}'_2$ un homomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{F}_1)_\eta & \xrightarrow{i^*(u)} & (\mathscr{F}_2)_\eta \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{G}'_1 & \xrightarrow[v]{} & \mathscr{G}'_2 \end{array}$$

(homomorphisme déterminé de façon unique (lorsqu'il existe) par cette propriété), alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_1 & \xrightarrow{u} & \mathscr{F}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ i_*(\mathscr{G}'_1) & \xrightarrow[i_*(v)]{} & i_*(\mathscr{G}'_2) \end{array}$$

est commutatif, et il y a par suite un seul homomorphisme $w : \overline{\mathscr{G}'_1} \to \overline{\mathscr{G}'_2}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_1 & \xrightarrow{u} & \mathscr{F}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathscr{G}'_1} & \xrightarrow[w]{} & \overline{\mathscr{G}'_2} \end{array}$$

Proposition **(2.8.4).** — *Les hypothèses sur* Y *étant celles de* (2.8.1), *soient* X_1, X_2 *deux* Y-*préschémas,* $\mathscr{F}_i$ *un* $\mathcal{O}_{X_i}$-*Module quasi-cohérent,* $\mathscr{G}'_i$ *un* $\mathcal{O}_{(X_i)_\eta}$-*Module quotient de* $(\mathscr{F}_i)_\eta$ $(i=1,\ 2)$. *Alors on a*

(2.8.4.1) $$\overline{\mathscr{G}'_1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \overline{\mathscr{G}'_2} = \overline{\mathscr{G}'_1 \otimes_{\mathbf{k}(\eta)} \mathscr{G}'_2}.$$

En effet, posons $X = X_1 \times_Y X_2$; le premier membre de (2.8.3.1) est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent qui est Y-*plat* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.2.1), dont l'image réciproque dans X_η est $\mathscr{G}'_1 \otimes_{\mathbf{k}(\eta)} \mathscr{G}'_2$ (**I**, 9.1.5) et qui est un quotient de $\mathscr{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathscr{F}_2$; la conclusion résulte donc de la propriété d'unicité de (2.8.1).

Proposition **(2.8.5).** — *Les hypothèses sur* X *et* Y *étant celles de* (2.8.1), *soit* Z' *un sous-préschéma fermé de* X_η. *Il existe alors un unique sous-préschéma fermé* $\overline{Z'}$ *de* X *qui soit* Y-plat *et tel que* $i^{-1}(\overline{Z'}) = Z'$.

Si $\mathscr{J}'$ est l'Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{X_\eta}$ définissant Z', il suffit d'appliquer (2.8.1) au cas où $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$ et $\mathscr{G}' = \mathcal{O}_{X_\eta}/\mathscr{J}'$; si $\overline{\mathscr{G}'} = \mathcal{O}_X/\mathscr{J}$, on a en effet $\mathscr{J}' = i^*(\mathscr{J})\mathcal{O}_{X_\eta}$, donc $i^{-1}(\overline{Z'}) = Z'$ (**I**, 4.4.5).

On notera que le préschéma $\overline{Z'}$ est l'*image fermée* de Z' par le morphisme composé $Z' \to X_\eta \xrightarrow{i} X$, où la première flèche est l'injection canonique (**I**, 9.5.3); son espace sous-jacent est l'adhérence *dans* X de Z' (**I**, 9.5.4), ce qui justifie la notation adoptée. On dit encore que $\overline{Z'}$ est le sous-préschéma de X *adhérence* de Z'.

Corollaire **(2.8.6).** — *Soient* X_1, X_2 *deux* Y-*préschémas,* Z'_i *un sous-préschéma fermé de* $(X_i)_\eta$ $(i=1,\ 2)$. *Alors on a*

(2.8.6.1) $$\overline{Z'_1} \times_Y \overline{Z'_2} = \overline{Z'_1 \times_{\mathbf{k}(\eta)} Z'_2}.$$

Cela résulte de (2.8.4) et (2.8.5).

§ 3. CYCLES PREMIERS ASSOCIÉS ET DÉCOMPOSITIONS PRIMAIRES

Nous donnons surtout dans ce paragraphe la traduction des résultats sur les modules exposés dans Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, que nous suivons de très près. Les notions qui suivent ne semblent guère avoir d'intérêt que dans le cas de préschémas *localement noethériens*.

3.1. Cycles premiers associés à un Module.

Définition (**3.1.1**). — *Soient* X *un préschéma*, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent. On dit qu'un point* $x \in X$ *est associé à* $\mathscr{F}$ *si l'idéal maximal* $\mathfrak{m}_x$ *de* $\mathcal{O}_x$ *est associé au* $\mathcal{O}_x$*-Module* $\mathscr{F}_x$ (autrement dit, si $\mathfrak{m}_x$ est l'*annulateur* d'un élément de $\mathscr{F}_x$). *On dénote par* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ *l'ensemble des* $x \in X$ *associés à* $\mathscr{F}$. *On dit qu'une partie fermée irréductible* Z *de* X *est un cycle premier associé à* $\mathscr{F}$ *si son point générique est associé à* $\mathscr{F}$. *Lorsque* $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$, *on dira aussi que les points* (resp. *cycles premiers*) *associés à* $\mathscr{F}$ *sont associés au préschéma* X.

On dit qu'un cycle premier associé à $\mathscr{F}$ (resp. X) est *immergé* s'il est contenu dans un *autre* cycle premier associé à $\mathscr{F}$ (resp. X) (autrement dit, s'il n'est pas *maximal* dans l'ensemble de ces cycles).

Si X est localement noethérien, les *composantes irréductibles* de X ne sont autres que les cycles premiers *maximaux* (ou *non immergés*) associés à X.

Il est clair que si $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, on a $\mathscr{F}_x \neq 0$, autrement dit

$$\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Supp}(\mathscr{F}). \tag{3.1.1.1}$$

Si $x \in X$ est associé à $\mathscr{F}$, il est évidemment associé à $\mathscr{F}|U$ pour tout voisinage ouvert U de x, et réciproquement, s'il est associé à $\mathscr{F}|U$ pour un de ces voisinages, il est associé à $\mathscr{F}$.

On notera enfin que pour un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, l'existence de cycles premiers associés immergés est une question *locale*, car si y et z sont deux points de $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ tels que $y \in \overline{\{z\}}$, tout voisinage de y contient z.

Proposition (**3.1.2**). — *Soient* A *un anneau noethérien*, M *un* A*-module*, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$; *pour qu'un point* $x \in X$ *soit associé à* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que l'idéal premier* $\mathfrak{j}_x$ *de* A *soit associé au module* M (autrement dit, soit l'*annulateur* d'un élément $f \in M$).

Cela résulte de la définition (3.1.1) et de Bourbaki, *loc. cit.*, § 1, n° 2, cor. de la prop. 5, appliqué à $S = A - \mathfrak{j}_x$.

Proposition (**3.1.3**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien*, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent*, x *un point de* X, Z *le sous-préschéma fermé réduit de* X *ayant* $\overline{\{x\}}$ *pour espace sous-jacent* (**I**, 5.2.1). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$.

b) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *et une section* $f \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ *tels que* $\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}$ *soit égal à* $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{\mathrm{U}} . f)$.

b') *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *et une section* $f \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ *tels que* $\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}$ *soit une composante irréductible de* $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{\mathrm{U}} . f)$.

c) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *et un sous-Module de* $\mathscr{F}|\mathrm{U}$ *isomorphe à* $\mathcal{O}_{\mathrm{Z}}|\mathrm{U}$ ($\mathcal{O}_{\mathrm{Z}}$ étant identifié à un quotient de $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$).

c') *Il existe un voisinage ouvert* U *de* x *et un sous-Module cohérent* $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{F}|\mathrm{U}$ *tels que* $\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}$ *soit une composante irréductible de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{G})$.

Il est clair que *c)* implique *b)*, car il suffit de prendre pour f l'élément de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{F})$ qui correspond à la section unité de $\mathcal{O}_{\mathrm{Z}}|\mathrm{U}$. Comme $\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}$ est irréductible ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.6), *b)* implique *b')* et *b')* implique *c')* puisque $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ est cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.4). Pour voir que *c')* implique *a)*, on peut se borner au cas où $\mathrm{U} = \mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est affine, A étant donc noethérien, et où $\mathscr{F} = \widetilde{\mathrm{M}}$, où M est un A-module, et $\mathscr{G} = \widetilde{\mathrm{N}}$, où N est un sous-module de M, de type fini. On sait alors que les éléments minimaux de $\mathrm{Supp}(\mathscr{G})$ sont les points maximaux de $\mathrm{V}(\mathrm{Ann}(\mathrm{N}))$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.7.4), et ce sont aussi les éléments minimaux de Ass(N) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 3, cor. 1 de la prop. 7); comme $\mathrm{Ass}(\mathrm{N}) \subset \mathrm{Ass}(\mathrm{M}) = \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, on voit que *c')* implique *a)*. Enfin *a)* implique *c)* en vertu de (3.1.2), en prenant encore X affine, $\mathscr{F} = \widetilde{\mathrm{M}}$, et Z défini par l'idéal $f\mathrm{A}$ (avec les notations de (3.1.2)).

Corollaire **(3.1.4)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module cohérent. Alors les cycles premiers maximaux associés à* $\mathscr{F}$ *sont les composantes irréductibles de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, *et les points génériques de ces composantes sont les points* $x \in \mathrm{X}$ *tels que* $\mathscr{F}_x$ *soit un* $\mathcal{O}_x$*-Module de longueur finie et* $\neq 0$.

En effet, si x est le point générique d'une des composantes irréductibles Z de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, il résulte de l'équivalence de *a)* et *c')* dans (3.1.3) que x appartient à $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, et Z est un cycle premier associé à $\mathscr{F}$, nécessairement maximal en vertu de (3.1.1.1); la réciproque résulte trivialement de (3.1.1.1); enfin, la dernière assertion étant évidemment locale résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 2 de la prop. 7.

Corollaire **(3.1.5)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent. Pour que* $\mathscr{F} = 0$, *il faut et il suffit que* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) = \emptyset$.

La question étant locale, on est ramené au cas où X est affine, et la conclusion résulte aussitôt de (3.1.2) et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 1 de la prop. 2.

Proposition **(3.1.6)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module cohérent; alors* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ *est localement fini* (c'est-à-dire que tout point de X admet un voisinage dont l'intersection avec $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ est finie).

Il suffit de considérer le cas où X est affine, donc noethérien, et alors la proposition résulte de (3.1.2) et de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 4, cor. du th. 2.

Proposition **(3.1.7).** — *Soit* X *un préschéma.*

(i) *Soit* $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents. Alors* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}') \subset \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Ass}(\mathscr{F}') \cup \mathrm{Ass}(\mathscr{F}'')$.

(ii) *Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* $(\mathscr{F}_\alpha)$ *une famille de sous-*$\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents de* $\mathscr{F}$ *telle que* $\mathscr{F}$ *soit réunion des* $\mathscr{F}_\alpha$. *Alors* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) = \bigcup_\alpha \mathrm{Ass}(\mathscr{F}_\alpha)$.

(iii) *Pour toute famille* $(\mathscr{F}_\alpha)$ *de* $\mathcal{O}_X$*-Modules quasi-cohérents, on a* $\mathrm{Ass}(\bigoplus_\alpha \mathscr{F}_\alpha) = \bigcup_\alpha \mathrm{Ass}(\mathscr{F}_\alpha)$.

On est aussitôt ramené aux propositions correspondantes pour les modules (Bourbaki, *loc. cit.*, § 1, n° 1, formule (1), prop. 3 et cor. 1 de la prop. 3).

Proposition **(3.1.8).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* U *un ouvert de* X, $\mathscr{J}$ *un Idéal cohérent de* $\mathcal{O}_X$ *définissant un sous-préschéma fermé de* X *ayant* $X - U$ *pour espace sous-jacent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset U$.

b) *Pour tout ouvert affine* V, *toute section de* $\mathscr{F}$ *au-dessus de* V, *dont la restriction à* $V \cap U$ *est nulle, est égale à* 0.

c) *L'homomorphisme canonique* $\mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{J}, \mathscr{F})$ *est injectif.*

La question étant locale, on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine, A étant un anneau noethérien, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module, et $\mathscr{J} = \widetilde{\mathfrak{J}}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal de A. L'homomorphisme $M \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{J}, M)$ fait correspondre à $m \in M$ l'homomorphisme $x \rightsquigarrow xm$ de $\mathfrak{J}$ dans M; dire qu'il n'est pas injectif signifie qu'il existe un $m \neq 0$ dans M tel que $\mathfrak{J}m = 0$.

Montrons d'abord que *c)* implique *a)* : en effet, si $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ rencontrait alors $X - U$, il y aurait un idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ contenant $\mathfrak{J}$, donc un élément $m \neq 0$ de M tel que $\mathfrak{J}m = 0$. En second lieu, *b)* implique *c)* : en effet, si l'on avait alors $\mathfrak{J}m = 0$ pour un $m \neq 0$ dans M, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \not\supset \mathfrak{J}$, il existe un $a \in \mathfrak{J}$ non dans $\mathfrak{q}$, donc la relation $am = 0$ entraîne que l'image canonique de m dans $M_\mathfrak{q}$ est 0, autrement dit m serait une section $\neq 0$ de $\mathscr{F}$ au-dessus de X dont la restriction à U serait nulle. Enfin *a)* entraîne *b)*. Pour le voir, notons que l'homomorphisme canonique $M \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} M_\mathfrak{p}$ est *injectif* : en effet, si N est le noyau de cet homomorphisme, on a $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M)$; s'il existait un $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N)$, il y aurait un élément $n \in N$ dont $\mathfrak{p}$ serait l'annulateur; mais par définition de N, il y a un élément $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $sn = 0$, ce qui est absurde; on en conclut que $\mathrm{Ass}(N) = \emptyset$, d'où $N = 0$. Or la condition *a)* entraîne que si $m \in M$ est une section de $\mathscr{F}$ dont la restriction à U est nulle, l'image canonique de m dans $M_\mathfrak{p}$ est nulle pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, donc $m = 0$. C.Q.F.D.

Corollaire **(3.1.9).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent,* f *une section de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X. *Pour que* f *soit* $\mathscr{F}$*-régulière* (**0**, 15.2.2), *il faut et il suffit que* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset X_f$.

En effet, il est immédiat que dire que f est $\mathscr{F}$-régulière signifie que l'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f\mathcal{O}_X, \mathscr{F})$ est injectif, et il suffit d'appliquer (3.1.8) à l'Idéal $\mathscr{J} = f\mathcal{O}_X$.

Proposition **(3.1.10)**. — *Soient* X, Y *des préschémas localement noethériens,* $f: X \to Y$ *un morphisme entier. Alors, pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a* $f(\mathrm{Ass}(\mathscr{F})) = \mathrm{Ass}(f_*(\mathscr{F}))$.

La question étant locale sur Y et le morphisme f étant affine, on est immédiatement ramené au cas où Y est affine, autrement dit au

Lemme **(3.1.10.1)**. — *Soient* A, B *deux anneaux noethériens,* $\rho: A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux faisant de* B *une* A*-algèbre entière,* M *un* B*-module. Alors les idéaux premiers* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M_{[\rho]})$ *sont les images réciproques par* ρ *des idéaux premiers* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$.

En effet, si $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$, $\mathfrak{q}$ est l'annulateur dans B d'un élément $x \in M$, donc $\rho^{-1}(\mathfrak{q})$ est l'annulateur dans A de x. Inversement, soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M_{[\rho]})$, de sorte que $\mathfrak{p}$ est l'image réciproque par ρ de l'annulateur $\mathfrak{b}$ dans B d'un élément $x \in M$; il résulte donc du premier théorème de Cohen-Seidenberg qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de B contenant $\mathfrak{b}$ et dont l'image réciproque est $\mathfrak{p}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, cor. 2 du th. 1); en considérant un des idéaux premiers minimaux parmi ceux contenus dans $\mathfrak{q}$ et contenant $\mathfrak{b}$, on peut évidemment supposer que $\mathfrak{q}$ lui-même est un de ces idéaux minimaux. Mais comme $B.x \subset M$ est isomorphe à $B/\mathfrak{b}$, on sait que l'on a alors $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(B/\mathfrak{b}) \subset \mathrm{Ass}(M)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 4, th. 2).

Corollaire **(3.1.11)**. — *Sous les hypothèses de* (3.1.10), *pour que* $\mathscr{F}$ *soit sans cycle premier associé immergé, il suffit qu'il en soit de même de* $f_*(\mathscr{F})$.

Supposons en effet que $f_*(\mathscr{F})$ n'ait pas de cycle premier associé immergé. Notons que si A est une algèbre entière sur un corps k, tous les idéaux premiers de A sont maximaux (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1); il résulte donc de (**I**, 6.2.2) que les fibres de f sont des espaces *discrets*; si x, x' sont deux points distincts de $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, aucun d'eux ne peut donc être adhérent à l'autre si $f(x) = f(x')$; et si $f(x) \neq f(x')$, (3.1.10) et l'hypothèse entraînent qu'aucun des deux points $f(x)$, $f(x')$ ne peut être adhérent à l'autre, donc il en est de même de x et x'.

Remarque **(3.1.12)**. — Sous les hypothèses de (3.1.10), il peut se faire par contre que $\mathscr{F}$ soit sans cycle premier associé immergé, mais non $f_*(\mathscr{F})$. Prenons par exemple $Y = \mathrm{Spec}(k[T])$ où k est un corps (« droite affine »), et X *somme* de $X_1 = Y$ et de $X_2 = \mathrm{Spec}(k)$, le morphisme $X_2 \to Y$ correspondant à l'homomorphisme canonique $k[T] \to k[T]/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal (T). Il est clair que le morphisme $f: X \to Y$ est fini; si l'on prend $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$, $\mathscr{F}$ est sans cycle premier associé immergé, mais $f_*(\mathscr{F}) = \widetilde{M}$, où M est le $k[T]$-module somme directe de $k[T]$ et de k, donc $\mathrm{Ass}(M)$ est formé du point générique (0) de Y et du point $\mathfrak{m}$.

Proposition **(3.1.13)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* U *un ouvert de* X, $i: U \to X$ *l'injection canonique. Pour tout* $\mathcal{O}_U$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a* $\mathrm{Ass}(i_*(\mathscr{F})) = \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$.

Rappelons que $i_*(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent (1.2.2 et 1.7.4); comme $i_*(\mathscr{F})|U = \mathscr{F}$, on a $(\mathrm{Ass}(i_*(\mathscr{F}))) \cap U = \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, et il reste donc à prouver que $\mathrm{Ass}(i_*(\mathscr{F})) \subset U$. Mais d'après (3.1.8), cette relation signifie que pour tout ouvert affine V de X, toute section de $i_*(\mathscr{F})$ au-dessus de V qui est nulle dans $U \cap V$, est nulle, condition trivialement vérifiée puisque $\Gamma(V, i_*(\mathscr{F})) = \Gamma(U \cap V, \mathscr{F}) = \Gamma(U \cap V, i_*(\mathscr{F}))$.

3.2. Décompositions irredondantes.

Proposition (**3.2.1**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* U *un ouvert dense dans* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est réduit.*

b) *Le sous-préschéma induit sur* U *est réduit et* X *est sans cycle premier immergé.*

c) X *est sans cycle premier immergé et pour tout point générique x d'une composante irréductible de* X, *on a* $\operatorname{long}(\mathcal{O}_x) = 1$.

Les cycles premiers associés à X *sont alors identiques aux composantes irréductibles de* X.

Il est clair que si X est réduit il en est de même du sous-préschéma induit sur U. En outre, l'existence des cycles premiers immergés étant locale, on peut se borner à considérer le cas où $X = \operatorname{Spec}(A)$ est affine, A étant noethérien. Si A est réduit, on sait que les idéaux premiers minimaux de A forment une décomposition primaire réduite de (0) (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, prop. 10) et sont les éléments de $\operatorname{Ass}(A)$, donc il n'existe pas d'idéaux premiers immergés associés à A, ce qui montre que *a)* implique *b)*. Il est immédiat que *b)* entraîne *c)*, car un point générique x d'une composante irréductible de X appartient à U, donc $\mathcal{O}_x$ est un corps. Enfin, *c)* entraîne *a)* : il suffit en effet de remarquer que si $\mathcal{N}$ est le Nilradical de $\mathcal{O}_X$, qui est un Idéal cohérent, $\operatorname{Supp}(\mathcal{N})$ ne peut contenir aucun des points génériques des composantes irréductibles de X par hypothèse; si $\operatorname{Supp}(\mathcal{N})$ n'était pas vide et si x était un des points maximaux de cet ensemble fermé, le critère (3.1.3, *c')*) montrerait que $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_X)$, et $\overline{\{x\}}$ serait donc un cycle premier *immergé* de X, contrairement à l'hypothèse; donc $\mathcal{N} = 0$.

Définition (**3.2.2**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. On dit que* $\mathcal{F}$ *est réduit s'il vérifie les deux conditions suivantes :* 1° $\mathcal{F}$ *est sans cycle premier associé immergé;* 2° *pour tout point maximal x de* $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$, *on a* $\operatorname{long}(\mathcal{F}_x) = 1$.

La condition 1° signifie que les cycles premiers associés à $\mathcal{F}$ sont les composantes irréductibles de $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ (3.1.4), et la condition 2° signifie que pour tout point générique x d'une telle composante on a $\operatorname{long}(\mathcal{F}_x) = 1$.

Pour un schéma affine X, cette définition donne en particulier la notion de *module réduit* sur un anneau noethérien A; un A-module de type fini M est dit *réduit*, s'il n'a pas d'idéaux premiers associés immergés et si, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, $\operatorname{long}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 1$. Revenant au cas d'un préschéma localement noethérien X et d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, on dit que $\mathcal{F}$ est *réduit en un point* $x \in X$ si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$*-module réduit*; cela signifie encore que, sur le schéma local $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x)$, $\widetilde{\mathcal{F}_x}$ est réduit; il revient donc au même de dire *que x n'appartient à aucun cycle premier associé immergé de* $\mathcal{F}$ *et que* $\operatorname{long}(\mathcal{F}_z) = 1$ *pour tous les points maximaux z de* $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ *tels que* $x \in \overline{\{z\}}$. Il est clair que si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent réduit, il est réduit en chaque point de X; inversement, si $\mathcal{F}$ est *réduit au point x*, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|U$ soit un $\mathcal{O}_U$-Module *réduit* : il suffit en effet de prendre U ne rencontrant aucun cycle premier associé immergé de $\mathcal{F}$ (un tel voisinage existe puisque ces cycles forment un ensemble localement fini de parties fermées de X). Dire que $\mathcal{O}_X$ est réduit en un point x équivaut à dire que X est *réduit* au point x.

Proposition **(3.2.3).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* U *un ouvert dans* X, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent tel que* $U \cap \operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ *soit dense dans* $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{F}$ *est réduit.*

b) $\mathscr{F}|U$ *est réduit, et* $\mathscr{F}$ *est sans cycle premier associé immergé.*

c) *Il existe un sous-préschéma fermé réduit* X' *de* X *et un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module cohérent* $\mathscr{F}'$ *sans torsion et de rang 1 sur toute composante irréductible de* X', *tels que si* $j : X' \to X$ *est l'injection canonique, on ait* $j_*(\mathscr{F}') = \mathscr{F}$.

En outre, lorsqu'il en est ainsi le sous-préschéma X' *est défini par l'Idéal* $\mathscr{J}$ *de* $\mathcal{O}_X$ *annulateur de* $\mathscr{F}$.

Pour voir que *c)* implique *a)*, on peut, en vertu de (3.1.3), se limiter au cas où $X' = X$ est intègre, de point générique x et l'on peut en outre supposer $X = \operatorname{Spec}(A)$ affine et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où A est donc intègre et M est un A-module sans torsion de rang 1; l'annulateur de tout élément de M étant alors réduit à 0, on a $\operatorname{Ass}(\mathscr{F}) = \{x\}$ et $\mathscr{F}_x$ est isomorphe à $\mathcal{O}_x$, corps des fractions de A, donc les conditions de la définition (3.2.2) sont satisfaites. Comme l'existence de cycles premiers associés immergés est locale, il est clair que si $\mathscr{F}$ n'a pas de tels cycles et si $U \cap \operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ est dense dans $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$, on a $\operatorname{Ass}(\mathscr{F}) = \operatorname{Ass}(\mathscr{F}|U)$, donc *a)* et *b)* sont équivalentes. Si *a)* est satisfaite, prenons pour X' le sous-préschéma fermé réduit de X dont $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ est l'espace sous-jacent (**I**, 5.2.1), et soit $\mathscr{F}' = j^*(\mathscr{F})$; un point x de $\operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ est nécessairement point maximal de X' et comme $\operatorname{long}(\mathscr{F}_x) = 1$, $\mathscr{F}'_x$ est isomorphe à $\mathscr{F}_x$, donc au corps $\boldsymbol{k}(x) = \mathcal{O}_{X',x}$, ce qui prouve que $\mathscr{F}'$ est sans torsion et de rang 1 (**I**, 7.4.6 et 7.4.2). Enfin, la dernière assertion est triviale, puisque pour tout $y \in X'$, l'annulateur du $\mathcal{O}_{X',y}$-Module $\mathscr{F}'_y$ est nul.

Définition **(3.2.4).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent. On dit que* $\mathscr{F}$ *est irredondant si* $\operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ *est réduit à un seul élément* x *; si* $\mathscr{F}$ *est de type fini, on dit que* $\mathscr{F}$ *est intègre si de plus* $\mathscr{F}$ *est réduit* (autrement dit si $\operatorname{long}(\mathscr{F}_x) = 1$). *On dit qu'un sous-*$\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{G}$ *d'un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$ *est primaire dans* $\mathscr{F}$ *si* $\mathscr{F}/\mathscr{G}$ *est irredondant.*

Pour un schéma affine X, cette définition donne en particulier la notion de *module intègre* sur un anneau noethérien A; un A-module M est dit *intègre* s'il est de type fini, si M est *primaire* (c'est-à-dire que $\operatorname{Ass}(M)$ est réduit à un seul idéal premier $\mathfrak{p}$) et si en outre $\operatorname{long}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 1$. Revenant au cas d'un préschéma localement noethérien quelconque X et d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F}$, on dit que $\mathscr{F}$ est *intègre en un point* $x \in X$ si $\mathscr{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$*-module intègre* : cela signifie encore que x *n'appartient qu'à un seul cycle premier associé (nécessairement non immergé) à* $\mathscr{F}$ *et que* $\operatorname{long}(\mathscr{F}_z) = 1$ *en son point générique* z. Il est clair que si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent intègre, il est intègre en tout point de X; inversement, si $\mathscr{F}$ est *intègre en un point* x, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$

soit un $\mathcal{O}_U$-Module *intègre* : il suffit en effet de prendre U tel que $\mathcal{F}|U$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module réduit (3.2.2).

On dit que le préschéma localement noethérien X est *irredondant* si $\mathcal{O}_X$ est irredondant (ce qui implique que X est *irréductible*); pour que X soit *intègre*, il faut et il suffit que le $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{O}_X$ soit intègre ((**I**, 2.1.8) et (3.2.1)). Si $\mathcal{O}_X$ est intègre en un point x, c'est-à-dire si l'anneau $\mathcal{O}_x$ est intègre, on dit que X est *intègre au point* x. On dit qu'un sous-préschéma fermé Y de X est *primaire* dans X si l'Idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_X$ qui définit Y est primaire dans $\mathcal{O}_X$.

Définition **(3.2.5)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. On appelle décomposition irredondante de* $\mathcal{F}$ *une famille* $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ *de* $\mathcal{O}_X$*-Modules quotients de* $\mathcal{F}$ *telle que les* $\mathcal{F}_\alpha$ *soient irredondants, que la famille* $(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_\alpha))$ *soit localement finie, et que l'homomorphisme canonique* $\mathcal{F}\to\bigoplus_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ *soit injectif. On dit qu'une telle décomposition est réduite si les ensembles* $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}_\alpha)$ *sont deux à deux distincts, et s'il n'existe aucune partie* $J\neq I$ *telle que la sous-famille* $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in J}$ *soit une décomposition irredondante de* $\mathcal{F}$.

Si $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ est une décomposition irredondante (resp. irredondante réduite) de $\mathcal{F}$ et si l'on pose $\mathcal{F}_\alpha=\mathcal{F}/\mathcal{G}_\alpha$, on dit encore que la famille $(\mathcal{G}_\alpha)_{\alpha\in I}$ de sous-$\mathcal{O}_X$-Modules de $\mathcal{F}$ est une *décomposition primaire de* 0 *dans* $\mathcal{F}$; on observera que l'hypothèse d'injectivité de l'homomorphisme canonique $\mathcal{F}\to\bigoplus_{\alpha\in I}\mathcal{F}_\alpha$ équivaut à la condition $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{G}_\alpha=0$.

Si $(\mathcal{F}_\alpha)$ est une décomposition irredondante de $\mathcal{F}$, dire qu'elle est *réduite* équivaut à dire que les $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}_\alpha)$ sont deux à deux distincts et contenus dans $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$; si $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}_\alpha)=\{x_\alpha\}$ pour tout $\alpha\in I$, $\alpha\rightsquigarrow x_\alpha$ est une *bijection* de I sur $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$: ces propriétés sont en effet locales et résultent donc de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 3, prop. 4.

Proposition **(3.2.6)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Alors il existe une décomposition irredondante réduite* $(\mathcal{F}^{(x)})_{x\in\mathrm{Ass}(\mathcal{F})}$, *formée de* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents tels que pour tout* $x\in\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$, *on ait* $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}^{(x)})=\{x\}$. *Pour tout* $x\in\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ *tel que* $\overline{\{x\}}$ *ne soit pas immergé,* $\mathcal{F}^{(x)}$ *est déterminé de façon unique comme image de l'homomorphisme canonique* $\mathcal{F}\to i_*(i^*(\mathcal{F}))$, *où* i *est le morphisme canonique* $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))\to X$.

Pour tout $x\in\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$, soit U un voisinage ouvert affine de x, d'anneau A, et soit $\mathcal{F}|U=\widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini. On sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, prop. 4) qu'il existe un sous-module N de M tel que, si l'on pose $P=M/N$, on ait $\mathrm{Ass}(P)=\{x\}$ et $\mathrm{Ass}(N)=\mathrm{Ass}(M)-\{x\}$. Soit $\mathcal{G}=\widetilde{P}$, qui est un $\mathcal{O}_U$-Module quasi-cohérent, et soit j l'injection canonique $U\to X$; soit $u:j^*(\mathcal{F})\to\mathcal{G}$ l'homomorphisme surjectif correspondant à l'homomorphisme $M\to P$; on en déduit un homomorphisme $j_*(u):j_*(j^*(\mathcal{F}))\to j_*(\mathcal{G})$, d'où par composition un homomorphisme

$$v:\mathcal{F}\xrightarrow{\rho_{\mathcal{F}}}j_*(j^*(\mathcal{F}))\xrightarrow{j_*(u)}j_*(\mathcal{G})$$

dont u est la restriction à U; nous désignerons par $\mathcal{F}^{(x)}$ l'image de $\mathcal{F}$ par cet homomorphisme, qui est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent (**I**, 6.1.1). On a $\mathrm{Ass}(j_*(\mathcal{G}))=\{x\}$ en vertu de (3.1.13), et *a fortiori* (3.1.7) $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}^{(x)})=\{x\}$, puisque $\mathcal{F}^{(x)}\neq 0$. En outre, si

$\mathcal{N}^{(x)} = \operatorname{Ker}(v)$, on a $\mathcal{N}^{(x)}|U = \widetilde{N}$, donc $x \notin \operatorname{Ass}(\mathcal{N}^{(x)})$. Il en résulte que l'homomorphisme $\mathcal{F} \to \bigoplus_{x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})} \mathcal{F}^{(x)}$ est injectif, car son noyau $\mathcal{H}$ est contenu dans tous les $\mathcal{N}^{(x)}$, donc $\operatorname{Ass}(\mathcal{H})$ est contenu dans l'intersection des $\operatorname{Ass}(\mathcal{N}^{(x)})$, qui est vide; par suite (3.1.5), $\mathcal{H} = 0$. Compte tenu de ce que $\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$ est localement fini (3.1.6), il est clair que $(\mathcal{F}^{(x)})_{x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})}$ est une décomposition irredondante réduite de $\mathcal{F}$ vérifiant les conditions de l'énoncé. La caractérisation de $\mathcal{F}^{(x)}$ lorsque $\overline{\{x\}}$ n'est pas immergé résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 3, prop. 5, la question étant locale, et compte tenu de (**I**, 1.6.7).

Corollaire (**3.2.7**). — *Sous les hypothèses de* (3.2.6), *si* $\mathcal{F}$ *n'a pas de cycle premier associé immergé, il n'existe qu'une seule décomposition irredondante réduite de* $\mathcal{F}$.

Corollaire (**3.2.8**). — *Soient* X *un préschéma noethérien,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Il existe une filtration finie* $(\mathcal{F}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n = 0$, *formée de* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents et tels que les quotients* $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$ *soient nuls ou irredondants, et* $\operatorname{Ass}(\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}) \subset \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$.

En effet, $\mathcal{F}$ est isomorphe à un sous-$\mathcal{O}_X$-Module d'une somme directe finie $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{G}_j$, où les $\mathcal{G}_j$ sont irredondants et cohérents (3.2.6); comme tout sous-$\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de $\mathcal{G}_j$ est nul ou irredondant (3.1.7), les $\mathcal{F}_i = \mathcal{F} \cap (\bigoplus_{j=1}^{n-i} \mathcal{G}_j)$ répondent à la question, $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i+1}$ étant isomorphe à un sous-$\mathcal{O}_X$-Module cohérent de $\mathcal{G}_{n-i}$.

3.3. Relations avec la platitude.

Proposition (**3.3.1**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent et f-plat,* $\mathcal{E}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-Module quasi-cohérent. Si, pour tout* $y \in Y$, *on pose* $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \boldsymbol{k}(y)$, *on a*

$$\operatorname{Ass}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}) \supset \bigcup_{y \in \operatorname{Ass}(\mathcal{E})} \operatorname{Ass}(\mathcal{F}_y) \tag{3.3.1.1}$$

et les deux membres sont égaux si Y *est localement noethérien.*

(Bien entendu, $\mathcal{F}_y$ est un faisceau sur la fibre $f^{-1}(y)$, et on identifie cette fibre à un sous-espace de X (**I**, 3.6.1).) La question étant locale sur X et sur Y, on est ramené au cas où X et Y sont affines, et la proposition est alors démontrée dans Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 6, th. 2.

Corollaire (**3.3.2**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien sans cycles premiers associés immergés,* $f : X \to Y$ *un morphisme,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent et f-plat. Alors, pour tout* $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$, $f(x)$ *est point maximal de* Y.

Il suffit d'appliquer (3.3.1) avec $\mathcal{E} = \mathcal{O}_Y$, puisque $\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_Y)$ est par hypothèse l'ensemble des points maximaux de Y.

Corollaire (**3.3.3**). — *Sous les hypothèses de* (3.3.1), *supposons en outre que* X *et* Y *soient localement noethériens,* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *cohérents. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{E} \otimes_Y \mathcal{F}$ *est sans cycle premier associé immergé.*

b) *Pour tout point* $y \in \operatorname{Ass}(\mathcal{E}) \cap f(\operatorname{Supp}(\mathcal{F}))$, $\overline{\{y\}}$ *est un cycle premier associé non immergé de* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}_y$ *est sans cycle premier associé immergé.*

Supposons *a)* vérifiée. Les hypothèses entraînent que $\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module cohérent ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.11 et 5.3.5); ses cycles premiers associés sont donc les composantes irréductibles de $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})$ (3.1.4) et pour tout point maximal x de $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})$, $f(x)=y$ est point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ et x point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_y)$ (2.5.5). Comme, en vertu de (3.3.1) et du fait que la relation $y\in f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$ entraîne $\mathscr{F}_y\neq 0$ (**I**, 9.1.13), tout point de $\mathrm{Ass}(\mathscr{E})\cap f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$ est l'image par f d'un point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})$, on voit que la condition *b)* est vérifiée.

Inversement, supposons *b)* vérifiée, et montrons que si z, z' sont deux points distincts de $\mathrm{Ass}(\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})$, aucun d'eux ne peut être adhérent à l'autre. En premier lieu, si $f(z)=f(z')=y$, on a $y\in\mathrm{Ass}(\mathscr{E})$ et z et z' appartiennent à $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}_y)$ par (3.3.1), d'où $y\in f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$; comme par hypothèse aucun des deux points z, z' n'est adhérent à l'autre *dans* $f^{-1}(y)$, aucun d'eux ne peut être adhérent à l'autre *dans* X. Si $y=f(z)$ et $y'=f(z')$ sont distincts, ils appartiennent à $\mathrm{Ass}(\mathscr{E})\cap f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$, donc aucun d'eux ne peut être adhérent à l'autre dans Y; il résulte de la continuité de f qu'aucun des points z, z' ne peut être adhérent à l'autre dans X.

Proposition **(3.3.4)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *un morphisme,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module cohérent,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module cohérent et f-plat. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F}$ *est réduit* (3.2.2).

b) *Pour tout point* $y\in\mathrm{Ass}(\mathscr{E})\cap f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$, $\overline{\{y\}}$ *est un cycle premier associé non immergé de* $\mathscr{E}$, $\mathrm{long}(\mathscr{E}_y)=1$ *et* $\mathscr{F}_y$ *est réduit.*

Supposons *a)* vérifiée. On sait déjà (3.3.3) que pour tout $y\in\mathrm{Ass}(\mathscr{E})\cap f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$, $\overline{\{y\}}$ est un cycle premier associé non immergé de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}_y$ est sans cycle premier associé immergé. En outre (2.5.5), pour tout $x\in\mathrm{Ass}(\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})\cap f^{-1}(y)$, on a $1=\mathrm{long}((\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})_x)=\mathrm{long}(\mathscr{E}_y).\mathrm{long}((\mathscr{F}_y)_x)$, donc $\mathrm{long}(\mathscr{E}_y)=\mathrm{long}((\mathscr{F}_y)_x)=1$, ce qui prouve *b)*.

Inversement, supposons *b)* vérifiée; on sait déjà que tout point $x\in\mathrm{Ass}(\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})$ est point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})$, que $y=f(x)$ est point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{E})$ et x point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_y)$ (3.3.1 et 3.3.3); en outre il résulte de l'hypothèse et de (2.5.5) que $\mathrm{long}((\mathscr{E}\otimes_{\mathrm{Y}}\mathscr{F})_x)=1$, ce qui prouve *a)*.

Corollaire **(3.3.5)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *un morphisme plat; si* Y *est réduit aux points de* $f(\mathrm{X})$ *et si* $f^{-1}(y)$ *est un* $\boldsymbol{k}(y)$*-préschéma réduit pour tout* $y\in f(\mathrm{X})$, *alors* X *est réduit.*

Comme le Nilradical $\mathscr{N}_{\mathrm{Y}}$ est cohérent, l'ensemble des points où Y est réduit est *ouvert* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2), et on peut se borner au cas où Y est réduit. Il suffit alors d'appliquer (3.3.4) à $\mathscr{E}=\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$ et $\mathscr{F}=\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$.

Proposition **(3.3.6)**. — *Soient* $f:\mathrm{X}\to\mathrm{S}$, $g:\mathrm{Y}\to\mathrm{S}$ *deux morphismes,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent,* $\mathscr{G}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{Y}}$*-Module quasi-cohérent. On suppose que :* 1° $\mathscr{G}$ *est g-plat*; 2° X *est localement noethérien, et pour tout* $s\in\mathrm{S}$, $g^{-1}(s)$ *est localement noethérien (ce qui aura lieu si* Y *est aussi localement noethérien). Soit* $\mathrm{Z}=\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}$; *pour tout couple* (x, y) *tel que* $x\in\mathrm{X}$, $y\in\mathrm{Y}$ *et*

$f(x)=g(y)=s$, *soit* $T_{x,y}$ *le préschéma* $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(x)\otimes_{\mathbf{k}(s)}\boldsymbol{k}(y))$, *et soit* $I_{x,y}$ *l'image de* $\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{T_{x,y}})$ *par le monomorphisme canonique* $T_{x,y}\to Z$ (**I**, 3.4.9). *On a alors*

(3.3.6.1) $$\operatorname{Ass}(\mathcal{F}\otimes_S\mathcal{G})=\bigcup_{x\in\operatorname{Ass}(\mathcal{F})}\Big(\bigcup_{y\in\operatorname{Ass}(\mathcal{G}_{f(x)})}I_{x,y}\Big)$$

où pour tout $s\in S$, $\mathcal{G}_s=\mathcal{G}\otimes_{\mathcal{O}_S}\boldsymbol{k}(s)$.

Soient $p:Z\to X$, $q:Z\to Y$ les projections canoniques, de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{p} & Z \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ S & \xleftarrow[g]{} & Y \end{array}$$

Posons $\mathcal{G}'=q^*(\mathcal{G})$, de sorte que $\mathcal{F}\otimes_S\mathcal{G}=\mathcal{F}\otimes_X\mathcal{G}'$; comme $\mathcal{G}'$ est p-plat (2.1.4), il résulte de (3.3.1) que l'on a

(3.3.6.2) $$\operatorname{Ass}(\mathcal{F}\otimes_S\mathcal{G})=\bigcup_{x\in\operatorname{Ass}(\mathcal{F})}\operatorname{Ass}(\mathcal{G}'_x)$$

avec $\mathcal{G}'_x=\mathcal{G}'\otimes_{\mathcal{O}_X}\boldsymbol{k}(x)$. Si $s=f(x)$, on a $\mathcal{G}'_x=\mathcal{G}_s\otimes_{\mathbf{k}(s)}\boldsymbol{k}(x)$, et $p^{-1}(x)=g^{-1}(s)\otimes_{\mathbf{k}(s)}\boldsymbol{k}(x)$; en outre, comme le corps $\boldsymbol{k}(x)$ est un $\boldsymbol{k}(s)$-module plat, le morphisme $p^{-1}(x)\to g^{-1}(s)$ est plat (2.1.4); appliquant (3.3.1) à ce morphisme, il vient

(3.3.6.3) $$\operatorname{Ass}(\mathcal{G}'_x)=\bigcup_{y\in\operatorname{Ass}(\mathcal{G}_s)}\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{T_{x,y}})$$

d'où la proposition.

On notera que si, dans l'énoncé, on supprime l'hypothèse 2° on peut encore conclure, en vertu de (3.3.1), la relation

(3.3.6.4) $$\operatorname{Ass}(\mathcal{F}\otimes_S\mathcal{G})\supset\bigcup_{x\in\operatorname{Ass}(\mathcal{F})}\Big(\bigcup_{y\in\operatorname{Ass}(\mathcal{G}_{f(x)})}I_{x,y}\Big).$$

Corollaire **(3.3.7)**. — *Sous les hypothèses de* (3.3.6), *supposons en outre que* S *soit localement noethérien et que* $f(\operatorname{Ass}(\mathcal{F}))\subset\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_S)$. *Alors on a*

(3.3.7.1) $$\operatorname{Ass}(\mathcal{F}\otimes_S\mathcal{G})=\bigcup_{(x,y)\in C}I_{x,y}$$

où C *est l'ensemble des couples* (x,y) *tels que* $x\in\operatorname{Ass}(\mathcal{F})$, $y\in\operatorname{Ass}(\mathcal{G})$ *et* $f(x)=g(y)$.

Comme $\mathcal{G}$ est g-plat, il résulte en effet de (3.3.1) que la relation « $s\in\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_S)$ et $y\in\operatorname{Ass}(\mathcal{G}_s)$ » équivaut à $y\in\operatorname{Ass}(\mathcal{G})$: la conclusion résulte de (3.3.6.1).

Remarques **(3.3.8)**. — Nous verrons plus loin (4.2.2) que sous les hypothèses de (3.3.6), $T_{x,y}$ est un préschéma *sans cycle premier associé immergé*; il en résultera que si $\mathcal{F}$ et les $\mathcal{G}_s$ sont sans cycle premier associé immergé, il en est de même de $\mathcal{F}\otimes_S\mathcal{G}$.

Corollaire **(3.3.9)**. — *Sous les conditions de* (3.3.7), *on a*

(3.3.9.1) $$q(\operatorname{Ass}(\mathcal{F}\otimes_S\mathcal{G}))\subset\operatorname{Ass}(\mathcal{G})$$

(où $q:X\times_S Y\to Y$ *est la projection canonique).*

En effet, si $(x,y)\in Z$, on a $q(I_{x,y})=\{y\}\subset\operatorname{Ass}(\mathcal{G})$.

3.4. Propriétés des faisceaux $\mathcal{F}/t\mathcal{F}$.

Proposition (**3.4.1**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien, t une section de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X, Y *le sous-préschéma fermé de* X *défini par l'Idéal* $t\mathcal{O}_X$ *de* $\mathcal{O}_X$. *Soient* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent,* S *le sous-préschéma fermé réduit de* X *ayant pour espace sous-jacent* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$, (S_i) *la famille des sous-préschémas fermés réduits de* X *ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de* S; *on désigne par* s_i *le point générique de* S_i. *Enfin, soient* Z *une composante irréductible de* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}/t\mathcal{F}) = S \cap Y$, z *son point générique.*

(i) *Pour tout i tel que* $Z \subset S_i$, Z *est une composante irréductible de* $S_i \cap Y$.

(ii) *Si* Z *n'est pas égal à un des* S_i, *on a*

$$\text{(3.4.1.1)} \qquad \mathrm{long}((\mathcal{F}/t\mathcal{F})_z) \geqslant \sum_i \mathrm{long}(\mathcal{F}_{s_i})$$

où la somme du second membre est étendue à tous les i tels que $Z \subset S_i$.

(iii) *Supposons que* Z *ne soit égal à aucun des* S_i. *Pour que les deux membres de* (3.4.1.1) *soient égaux, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

α) t_z *est* $\mathcal{F}_z$*-régulier* (**0**, 15.1.4).

β) *Pour tout i tel que* $Z \subset S_i$, *l'image canonique du germe* t_z *dans* $\mathcal{O}_{S_i,z}$ *engendre l'idéal maximal de cet anneau* (ce qui entraîne que $\mathcal{O}_{S_i,z}$ est un *anneau de valuation discrète* et l'image de t_z une *uniformisante* de cet anneau).

(i) Si $j : Y \to X$ est l'injection canonique, on a $\mathcal{F}/t\mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y = j^*(\mathcal{F})$, donc $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}/t\mathcal{F}) = j^{-1}(S) = S \cap Y$ (**I**, 9.1.13), d'où l'assertion.

(ii) et (iii). Comme les s_i tels que $Z \subset S_i$ sont ceux qui appartiennent à $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_z)$, on peut, pour démontrer (ii) et (iii), remplacer X par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_z)$; et si $M = \mathcal{F}_z$, on peut donc supposer que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, d'où $\mathcal{F}_{s_i} = M_{\mathfrak{p}_i}$, en désignant par $\mathfrak{p}_i$ les idéaux minimaux de $\mathcal{O}_z$. D'ailleurs, comme M est un $\mathcal{O}_z$-module de type fini, on a $S = S'_{\mathrm{red}}$, avec $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_z/\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est l'annulateur de M dans $\mathcal{O}_z$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.7.4), et les deux membres de (3.4.1.1) gardent les mêmes valeurs, que l'on considère M comme $\mathcal{O}_z$-module ou comme un $(\mathcal{O}_z/\mathfrak{a})$-module; on voit donc qu'on peut finalement remplacer X par $S' = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local noethérien, M étant un A-module *fidèle*; comme Z est fermé dans S, l'hypothèse que $Z \neq S_i$ pour tous les i signifie que $s_i \notin Z$, donc que $\dim(A) > 0$; enfin, dire que z est point générique de Z, composante irréductible de $S_i \cap V(t)$, signifie que A/tA est de dimension 0 (autrement dit est un anneau local *artinien*). On est donc ramené à prouver l'énoncé suivant :

Lemme (**3.4.1.2**). — *Soient* A *un anneau local noethérien de dimension* >0, $\mathfrak{p}_i$ *les idéaux premiers minimaux de* A, $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal, t un élément de* $\mathfrak{m}$ *tel que* A/tA *soit artinien. Alors, pour tout* A*-module de type fini* M, *on a*

$$\text{(3.4.1.3)} \qquad \mathrm{long}(M/tM) \geqslant \sum_i \mathrm{long}(M_{\mathfrak{p}_i})\,;$$

en outre, pour que les deux membres de (3.4.1.3) *soient égaux, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :*

α) *t est* M-*régulier;*

β) *pour tout i tel que* $M_{\mathfrak{p}_i} \neq 0$, *l'image de t dans* $A/\mathfrak{p}_i$ *engendre l'idéal maximal de cet anneau* (ce qui entraîne que $A/\mathfrak{p}_i$ est un *anneau de valuation discrète*).

Comme A n'est pas de dimension 0 et que A/tA est artinien, on a nécessairement $\dim(A)=1$ (**0**, 16.3.4) et $t \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i : l'idéal principal (t) est donc un idéal de définition de A, et contient par suite une puissance de son idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soit N le sous-module des éléments de M annulés par une puissance de t (ou par une puissance de $\mathfrak{m}$, ce qui revient au même comme on vient de le voir); si l'on pose $P=M/N$, t est P-*régulier*, car la relation $tx \in N$ pour un $x \in M$ entraîne $t^k(tx)=0$ pour un entier k, donc $x \in N$. Cela étant, on a le

Lemme (**3.4.1.4**). — *Soient* A *un anneau,*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de A-*modules. Si* $t \in A$ *est* M″-*régulier, la suite*

$$0 \to M'/tM' \to M/tM \to M''/tM'' \to 0$$

est exacte.

Comme $M/tM = M \otimes_A (A/tA)$, il suffit de prouver l'exactitude en M'/tM'; or, si l'image $x \in M$ d'un élément x' de M′ est telle que $x=ty$ avec $y \in M$, on en déduit, pour les images x'', y'' de x, y dans M″, $x''=ty''$; mais comme $x''=0$, l'hypothèse entraîne $y''=0$, donc y est l'image d'un élément $y' \in M'$, et la relation $x=ty$ entraîne $x'=ty'$ puisque $M' \to M$ est injectif.

Ce lemme étant établi, on en tire la relation

$$\text{(3.4.1.5)} \qquad \operatorname{long}(M/tM) = \operatorname{long}(N/tN) + \operatorname{long}(P/tP).$$

D'autre part, pour tout i, on a $N_{\mathfrak{p}_i}=0$ puisque $t \notin \mathfrak{p}_i$; donc $M_{\mathfrak{p}_i}=P_{\mathfrak{p}_i}$; pour prouver (3.4.1.3), il suffit de le faire en y remplaçant M par P; d'autre part, si les deux membres de (3.4.1.3) sont égaux, il résulte de la même inégalité pour P et de (3.4.1.5) que l'on a nécessairement $\operatorname{long}(N/tN)=0$, donc $N/tN=0$ et finalement $N=0$, par le lemme de Nakayama, N étant de type fini; or, $N=0$ signifie que t est M-régulier. On peut donc se ramener au cas où $M=P$, c'est-à-dire supposer déjà que t est M-*régulier*. Notons que cela entraîne que $\mathfrak{m} \notin \operatorname{Ass}(M)$, puisque t ne peut annuler un élément $\neq 0$ de M. Comme A est de dimension 1, on a donc nécessairement $\operatorname{Ass}(M) \subset \bigcup_i \{\mathfrak{p}_i\}$.

Procédons alors par récurrence sur $n=\sum_i \operatorname{long}(M_{\mathfrak{p}_i})$. Si $n=0$, on a nécessairement $M_{\mathfrak{p}_i}=0$ pour tout i, donc $M=0$ puisque aucun des $\mathfrak{p}_i$ n'appartient à Ass(M); les deux membres de (3.4.1.3) sont alors nuls, et l'assertion β) de (3.4.1.2) est triviale. Si $n>0$, le raisonnement du début de la démonstration de (3.4.1) permet de supposer en outre que le A-module M est *fidèle* : cela entraîne $M_{\mathfrak{p}_i} \neq 0$ pour tout i (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 2, cor. 2 de la prop. 4), et par suite $\operatorname{Ass}(M)=\bigcup_i \{\mathfrak{p}_i\}$.

Supposons d'abord $n=1$; il n'y a alors qu'un seul idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A, et dire que $M_{\mathfrak{p}}$ est de longueur 1 signifie que $M_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe au corps résiduel $k = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ en tant que $A_{\mathfrak{p}}$-module. Par suite $M_{\mathfrak{p}}$ est annulé par $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, donc $\mathfrak{p}$ est l'annulateur de M (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 4, formule (9)), ce qui entraîne $\mathfrak{p} = 0$ puisque M est supposé fidèle; l'anneau A est donc intègre. Cela étant, l'hypothèse $M \neq 0$ entraîne $M/tM \neq 0$ par le lemme de Nakayama, et par suite $\mathrm{long}(M/tM) \geqslant 1$, ce qui démontre (3.4.1.3) dans ce cas. En outre, si $\mathrm{long}(M/tM) = 1$, M est nécessairement *monogène* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 2, cor. 2 de la prop. 4) donc isomorphe à un quotient $A/\mathfrak{b}$; comme il est fidèle, on a nécessairement $\mathfrak{b} = 0$ et M est isomorphe à A; comme $\mathrm{long}(A/tA) = 1$, tA est nécessairement égal à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et comme A est un anneau local intègre noethérien, cela prouve que A est un anneau de valuation discrète (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6, prop. 9), dont t est l'uniformisante. Réciproquement, si A est un anneau de valuation discrète, t son uniformisante, $\mathrm{long}(M_{\mathfrak{p}}) = 1$ et si t est M-régulier, M est sans torsion, donc isomorphe à un sous-module de A (M étant de type fini), et par suite isomorphe à A lui-même, d'où $\mathrm{long}(M/tM) = \mathrm{long}(A/tA) = 1$.

Supposons maintenant $n \geqslant 2$; il existe alors une suite exacte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

avec $M' \neq 0$, $M'' \neq 0$ et $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(M') \cup \mathrm{Ass}(M'')$; en effet, si $\mathrm{Ass}(M)$ n'est pas réduit à un seul élément, cela résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, prop. 4; si au contraire $\mathrm{Ass}(M)$ est réduit à un seul idéal premier, ce dernier est nécessairement l'unique idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de A; l'hypothèse entraîne alors $\mathrm{long}(M_{\mathfrak{p}}) \geqslant 2$ et il suffit de prendre pour M' l'image réciproque d'un sous-module de $M_{\mathfrak{p}}$ distinct de 0 et de $M_{\mathfrak{p}}$. Comme t est M-régulier, t n'appartient à aucun des idéaux premiers de $\mathrm{Ass}(M)$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 2 de la prop. 2), donc, pour la même raison, t est *M'-régulier* et *M''-régulier*. Cette dernière propriété entraîne par (3.4.1.4) que la suite

$$0 \to M'/tM' \to M/tM \to M''/tM'' \to 0$$

est exacte; comme par ailleurs il en est de même de la suite

$$0 \to M'_{\mathfrak{p}_i} \to M_{\mathfrak{p}_i} \to M''_{\mathfrak{p}_i} \to 0$$

pour tout i, on a

$$\mathrm{long}(M/tM) = \mathrm{long}(M'/tM') + \mathrm{long}(M''/tM'')$$
$$\mathrm{long}(M_{\mathfrak{p}_i}) = \mathrm{long}(M'_{\mathfrak{p}_i}) + \mathrm{long}(M''_{\mathfrak{p}_i})$$

et l'hypothèse de récurrence entraîne donc l'inégalité (3.4.1.3). En outre les deux membres ne peuvent être égaux que si les inégalités analogues pour M' et M'' sont aussi des égalités. En vertu de l'hypothèse de récurrence, cela équivaut à la propriété β) pour les $\mathfrak{p}_i$ tels que $M'_{\mathfrak{p}_i} \neq 0$ ou $M''_{\mathfrak{p}_i} \neq 0$; mais ces idéaux sont précisément ceux pour lesquels $M_{\mathfrak{p}_i} \neq 0$. C.Q.F.D.

Corollaire **(3.4.2)**. — *Sous les hypothèses générales de* (3.4.1), *supposons que* Z *ne soit pas égal à un des* S_i *et que* $\mathrm{long}((\mathscr{F}/t\mathscr{F})_z)=1$. *Alors il existe un seul des* S_i *contenant* Z, *et pour cette valeur de i, on a* $\mathrm{long}(\mathscr{F}_{s_i})=1$; *en outre* $\mathcal{O}_{S,z}$ *est un anneau de valuation discrète dont* t_z *est une uniformisante, et* t_z *est* $\mathscr{F}_z$*-régulier.*

Cela résulte de (3.4.1), les deux membres de (3.4.1.1) étant alors égaux.

Proposition **(3.4.3)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien, t une section de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X, Y *le sous-préschéma fermé de* X *défini par l'Idéal* $t\mathcal{O}_X$ *de* $\mathcal{O}_X$. *Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent,* T *un cycle premier associé à* $\mathscr{F}$, T' *une composante irréductible de* $T\cap Y$, *x le point générique de* T'. *Supposons que* t_x *soit* $\mathscr{F}_x$*-régulier; alors on a* $x\in\mathrm{Ass}(\mathscr{F}/t\mathscr{F})$.

Comme dans la démonstration de (3.4.1), on peut se ramener au cas où $X=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$; la proposition est alors (compte tenu de (3.1.2)) conséquence de (**0**, 16.4.6.3).

Proposition **(3.4.4)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien, t une section de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X, Y *le sous-préschéma fermé de* X *défini par l'Idéal* $t\mathcal{O}_X$ *de* $\mathcal{O}_X$. *Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent,* (S_i) *la famille des composantes irréductibles de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$. *Soit y un point de* Y *tel que* t_y *soit* $\mathscr{F}_y$*-régulier et qu'aucun des cycles premiers associés immergés de* $\mathscr{F}/t\mathscr{F}$ *ne contienne y. Alors les composantes irréductibles de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}/t\mathscr{F})$ *qui contiennent y sont exactement les composantes irréductibles des* $S_i\cap Y$ *qui contiennent y, et les cycles premiers associés à* $\mathscr{F}$ *qui contiennent y sont non immergés.*

Prouvons d'abord la dernière assertion. Soient $T\supset T_1$ deux cycles premiers associés à $\mathscr{F}$ contenant y; si x est point générique d'une composante irréductible de $T\cap Y$ contenant y, x est générisation de y, donc contenu dans tout voisinage de y, et l'hypothèse que t_y est $\mathscr{F}_y$-régulier entraîne que t_x est $\mathscr{F}_x$-régulier (**0**, 15.2.4), donc, en vertu de (3.4.3), on a $x\in\mathrm{Ass}(\mathscr{F}/t\mathscr{F})$. Soit x_1 le point générique d'une composante irréductible de $T_1\cap Y$ contenant y, et soit x le point générique d'une composante irréductible de $T\cap Y$ contenant x_1; il résulte de ce qui précède que x_1 et x appartiennent tous deux à $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}/t\mathscr{F})$, et comme $x_1\in\overline{\{x\}}$, l'hypothèse entraîne que $x_1=x$. Désignons encore par T et T_1 les sous-préschémas fermés intègres de X ayant T et T_1 comme espaces sous-jacents respectifs, et posons $A=\mathcal{O}_{T,x}$, $A_1=\mathcal{O}_{T_1,x}$; on a donc $A_1=A/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A. Par définition de x et x_1, A/tA et A_1/tA_1 sont des anneaux *artiniens*; d'autre part, on a vu plus haut que t_x est $\mathscr{F}_x$-régulier, donc x ne peut appartenir à $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, et par suite A_1 n'est pas artinien. On a donc $\dim A=\dim A_1=1$; mais cela entraîne $\mathfrak{p}=0$ et $A=A_1$ (**0**, 16.1.2.2); comme Spec(A) et $\mathrm{Spec}(A_1)$ sont respectivement denses dans T et T_1, on a bien $T=T_1$.

Les S_i qui contiennent y sont donc tous les cycles premiers associés à $\mathscr{F}$ contenant y; si x est le point générique d'une composante irréductible de $S_i\cap Y$ contenant y, on déduit encore de (**0**, 15.2.4) que t_x est $\mathscr{F}_x$-régulier, donc, par (3.4.3), que $x\in\mathrm{Ass}(\mathscr{F}/t\mathscr{F})$; cela démontre la première assertion de (3.4.4).

Proposition **(3.4.5)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien, t une section de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X, Y *le sous-préschéma fermé de* X *défini par l'Idéal* $t\mathcal{O}_X$ *de* $\mathcal{O}_X$. *Soient* $\mathscr{F}$

un $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent,* y *un point de* Y; *supposons que* t_y *soit* $\mathcal{F}_y$*-régulier et que* $\mathcal{F}/t\mathcal{F}$ *soit intègre au point* y (3.2.4). *Alors* $\mathcal{F}$ *est intègre au point* y.

Compte tenu de (3.4.4), il suffit de prouver que y est contenu dans *une seule* composante irréductible de $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$, et que si s est le point générique de cette composante, on a $\mathrm{long}(\mathcal{F}_s)=1$. Or, par hypothèse, y n'appartient qu'à une seule composante irréductible de $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}/t\mathcal{F})$, et si z est le point générique de cette composante, on a $\mathrm{long}((\mathcal{F}/t\mathcal{F})_z)=1$; la conclusion résulte donc de (3.4.2).

Proposition **(3.4.6)**. — *Les hypothèses étant celles de* (3.4.1), *soit* x *un point de* Y. *Supposons que* Y *ne contienne aucun des* S_i *contenant* x, *et que* $\mathcal{F}/t\mathcal{F}$ *soit réduit au point* x (3.2.2). *Alors* t_x *est* $\mathcal{F}_x$*-régulier et* $\mathcal{F}$ *est réduit au point* x. *En outre, si* z_j *est point générique d'une composante irréductible de* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}/t\mathcal{F})$ *contenant* x, z_j *est contenu dans un seul des* S_i, *et* $\mathcal{O}_{S,z_j}$ *est un anneau de valuation discrète dont* t_{z_j} *est une uniformisante.*

Le fait que t_x est $\mathcal{F}_x$-régulier résulte du lemme suivant appliqué à l'anneau $\mathcal{O}_x$:

Lemme **(3.4.6.1)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* M *un* A*-module de type fini,* $\mathfrak{p}_i$ *les éléments minimaux de* $\mathrm{Supp}(M)$, t *un élément de* A. *On suppose que* t *n'appartient à aucun des* $\mathfrak{p}_i$ *et que* M/tM *est un* A*-module réduit* (3.2.2). *Alors* t *est* M*-régulier.*

Tout idéal premier $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(M)$ contient un des $\mathfrak{p}_i$; comme t n'appartient à aucun des $\mathfrak{p}_i$, l'homothétie de rapport t dans $M_\mathfrak{p}$ n'est pas nilpotente (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 4, cor. de la prop. 9). Désignons par N le sous-module de M formé des éléments annulés par une puissance de t, et posons $P=M/N$; nous allons montrer que $N=0$. Comme t est P-régulier, on a une suite exacte (3.4.1.4)

$$0\rightarrow N/tN\rightarrow M/tM\rightarrow P/tP\rightarrow 0.$$

Comme N est de type fini, il est annulé par une puissance de t, et il suffit donc de montrer que $N/tN=0$. Comme N/tN est un sous-module de M/tM, il suffit de prouver que $(N/tN)_\mathfrak{p}=0$ pour tout $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M/tM)$, ou encore que l'homomorphisme $u_\mathfrak{p}:(M/tM)_\mathfrak{p}\rightarrow(P/tP)_\mathfrak{p}$ est bijectif pour tout $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M/tM)$. Or on a $(P/tP)_\mathfrak{p}\neq 0$; en effet, comme $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(M/tM)=\mathrm{Supp}(M)\cap V(t)$ $(\mathbf{0}_\mathrm{I}, 1.7.5)$, l'image de t dans $A_\mathfrak{p}$ est contenue dans l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, donc l'hypothèse $P_\mathfrak{p}=tP_\mathfrak{p}$ entraînerait $P_\mathfrak{p}=0$ par le lemme de Nakayama; on aurait donc $M_\mathfrak{p}=N_\mathfrak{p}$ et l'homothétie de rapport t dans $M_\mathfrak{p}$ serait nilpotente; mais cela contredit la remarque faite au début, puisque $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(M)$. Cela étant, l'hypothèse que M/tM est réduit entraîne $\mathrm{long}((M/tM)_\mathfrak{p})=1$, et comme $(P/tP)_\mathfrak{p}\neq 0$, $u_\mathfrak{p}$ est nécessairement bijectif, ce qui prouve le lemme.

Par hypothèse, aucun des cycles premiers associés immergés de $\mathcal{F}/t\mathcal{F}$ ne contient x, donc aucun des cycles premiers associés immergés de $\mathcal{F}$ ne contient x, en vertu de (3.4.4). D'autre part, appliquant (3.4.2) à une composante irréductible de $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}/t\mathcal{F})$ contenant x, on voit que $\mathrm{long}(\mathcal{F}_{s_i})=1$ pour tout S_i contenant x, ce qui achève de montrer que $\mathcal{F}_x$ est réduit; enfin, les dernières assertions sont aussi conséquences de (3.4.2).

Corollaire **(3.4.7)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* M *un* A*-module de type fini,* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ *une famille d'éléments de* $\mathfrak{m}$ *formant une partie d'un système de* *paramètres pour* M (**0**, 16.3.6). *Si le* A-*module* $N = M/(\sum_{i=1}^{k} x_i M)$ *est intègre* (3.2.4), *alors* M *est intègre et la suite* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ *est* M-*régulière*.

Par récurrence sur k, on est aussitôt ramené au cas $k=1$; nous écrirons x au lieu de x_1; l'hypothèse que x fait partie d'un système de paramètres pour M entraîne que $\dim(N) = \dim(M) - 1$ (**0**, 16.3.7). Posons $n = \dim(N)$; il y a donc un élément minimal $\mathfrak{p}$ de Supp(M) tel que $\dim(M/\mathfrak{p}M) = n+1$ (**0**, 16.3.4), et pour tout entier $j>0$ on a alors aussi $\dim(M/\mathfrak{p}^j M) = n+1$ (**0**, 16.3.5) ; en outre x fait partie d'un système de paramètres pour $M/\mathfrak{p}^j M$ (**0**, 16.3.5), donc, si l'on pose $M' = M/\mathfrak{p}^j M$ et $N' = M'/xM'$, on a $\dim(N') = n$. Il est clair que l'on a un homomorphisme surjectif $v : N \rightarrow N'$; montrons que v est *bijectif*. En effet, si $P = \operatorname{Ker}(v)$, on a $\operatorname{Ass}(P) \subset \operatorname{Ass}(N)$ et puisque N est intègre, l'hypothèse $P \neq 0$ entraînerait que Ass(P) et Ass(N) seraient tous deux réduits à l'unique point $\mathfrak{q}$ de $\operatorname{Ass}(N) = \operatorname{Supp}(N)$; mais comme $\dim(N') = \dim(N)$, on a $N'_\mathfrak{q} \neq 0$, et l'hypothèse $\operatorname{long}(N_\mathfrak{q}) = 1$ entraîne $\operatorname{long}(N'_\mathfrak{q}) = 1$ puisque $N_\mathfrak{q} \rightarrow N'_\mathfrak{q}$ est surjective. On aurait donc $P_\mathfrak{q} = 0$, contrairement à l'hypothèse, d'où notre assertion. Mais alors N', étant isomorphe à N, est intègre; en outre, le support de N' (égal à l'intersection de Supp(M) et de $V(x)$) ne peut contenir Supp(M'), et ce dernier ensemble est irréductible par construction. L'hypothèse que M'/xM' est intègre (donc réduit) entraîne alors que x est M'-régulier en vertu de (3.4.6). On en conclut que le noyau de l'homothétie $z \rightarrow xz$ dans M est contenu dans $\mathfrak{p}^j M \subset \mathfrak{m}^j M$ pour tout entier j, et ce noyau est donc réduit à 0 ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.5), ce qui prouve que x est M-régulier. On peut alors appliquer (3.4.5), ce qui prouve que M est intègre.

Remarque (**3.4.8**). — La proposition analogue à (3.4.7), où on remplace « intègre » par « réduit » n'est plus nécessairement exacte. Considérons par exemple l'anneau de polynômes $C = K[X, Y, Z]$ sur un corps K, l'anneau quotient $B = C/\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{p} = CZ$, $\mathfrak{q} = CX^2 + CY$; soit A l'anneau local de B correspondant à l'idéal maximal image de $CX + CY + CZ$ dans B. Si x, z sont les images canoniques de X, Z dans A, il est clair que $xz \neq 0$ mais $x^2z^2 = 0$; d'autre part, comme A/xA est isomorphe à $K[Y, Z]/(YZ)$, on a $\dim(A/xA) = 1$ tandis que $\dim(A) = 2$, donc x appartient à un système de paramètres de A (**0**, 16.3.4), A/xA est réduit, mais A ne l'est pas.

Proposition (**3.4.9**). — *Soient* A *un anneau noethérien,* M *un* A-*module de type fini,* f *un élément* M-*régulier de* A *tel que* M/fM *n'ait pas d'idéaux premiers associés immergés. Si* $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ *sont les idéaux premiers associés à* M/fM, *alors, pour tout entier* $n>0$, $f^n M$ *est l'intersection des images réciproques des* $f^n M_{\mathfrak{p}_i}$ *par les applications canoniques* $M \rightarrow M_{\mathfrak{p}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Tout revient à montrer que les $\mathfrak{p}_i$ sont aussi les idéaux premiers associés à $M/f^n M$, car alors les saturés des $f^n M$ pour les $\mathfrak{p}_i$ sont les sous-modules de la décomposition primaire réduite (nécessairement unique) de $f^n M$ dans M. Or, on a

$$\operatorname{Ass}(f^{n-1}M/f^n M) \subset \operatorname{Ass}(M/f^n M) \subset \operatorname{Ass}(M/f^{n-1}M) \cup \operatorname{Ass}(f^{n-1}M/f^n M)$$

par (3.1.7), et comme f est M-régulier, $f^{n-1}M/f^n M$ est isomorphe à M/fM; il suffit alors de raisonner par récurrence sur n.

§ 4. CHANGEMENT DU CORPS DE BASE DANS LES PRÉSCHÉMAS ALGÉBRIQUES

4.1. Dimension des préschémas algébriques.

Nous développerons au § 5 la théorie générale de la dimension des préschémas; mais la théorie de la dimension des préschémas *algébriques* peut se développer de façon plus élémentaire, et comme elle présente en outre de nombreux caractères spéciaux, nous en donnerons ici un exposé rapide, indépendant de la théorie générale.

Si K est un corps et L une extension de K, on notera $\deg.\mathrm{tr}_K L$ le *degré de transcendance* de L sur K.

Définition (**4.1.1**). — *Soient k un corps*, X *un préschéma localement de type fini sur k. On appelle dimension de* X *le nombre*

(**4.1.1.1**) $$\dim X = \sup_x \deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(x)$$

où x parcourt l'ensemble des points maximaux de X.

Nous verrons au § 5 (5.2.2) que la définition (4.1.1) ne dépend qu'en apparence du corps de base k sur lequel X est localement de type fini, et que le nombre dim(X) ainsi défini coïncide avec la dimension de l'*espace sous-jacent* X (définie dans (**0**, 14.1.2)). On a évidemment $\dim X = \dim X_{\mathrm{red}}$.

On notera que chaque $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension *de type fini* de k (**I**, 6.3.3) donc a un degré de transcendance fini sur k. Si X est de type fini sur k et non vide, il est noethérien (**I**, 6.3.7), donc n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, et par suite dim(X) est *finie* et $\geqslant 0$; la définition (4.1.1) donne

$$\dim(\emptyset) = -\infty.$$

Il est clair que, si l'on désigne par (X_α) la famille des sous-préschémas fermés réduits de X ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de X (**I**, 5.2.1), on a

(**4.1.1.2**) $$\dim(X) = \sup_\alpha \dim(X_\alpha).$$

Cela ramène donc le calcul de la dimension au cas des préschémas *intègres* (localement de type fini sur k). Enfin, on a évidemment

(**4.1.1.3**) $$\dim(X) = \dim(U)$$

pour tout sous-préschéma induit sur un ouvert *partout dense* U de X; cela ramène donc finalement la notion de dimension au cas d'un schéma *affine de type fini sur k*.

Théorème (**4.1.2**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement de type fini sur un corps k*, $f : X \to Y$ *un k-morphisme.*

(i) *Si f est quasi-compact et dominant, on a* $\dim(Y) \leqslant \dim(X)$.

(ii) *Si f est quasi-fini, on a* $\dim(X) \leqslant \dim(Y)$.

(iii) *Supposons que* X *soit de type fini sur* k. *Pour que* $\dim(X) \geqslant n$ (resp. $\dim(X) \leqslant n$, $\dim(X) = n$), *il faut et il suffit qu'il existe un ouvert* U *dense dans* X, *et un k-morphisme* $g : U \rightarrow \mathbf{V}(k^n) (= \operatorname{Spec}(k[T_1, \ldots, T_n])$, *que nous noterons aussi* $\mathbf{V}_k^n$) *qui soit surjectif* (resp. *fini*, resp. *fini et surjectif*). *Si* X *est un schéma affine, on peut prendre* $U = X$.

(i) Soit y un point maximal de Y; on sait que $f^{-1}(y)$ contient un point maximal x de X (1.1.5), donc $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension de $\boldsymbol{k}(y)$, d'où l'inégalité $\deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(y) \leqslant \deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(x) \leqslant \dim(X)$, ce qui démontre (i).

(ii) Si x est point maximal de X, $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension finie de $\boldsymbol{k}(f(x))$ (**II**, 6.2.2), donc a même degré de transcendance sur k. Si l'on considère le sous-préschéma fermé réduit de Y ayant $\overline{\{f(x)\}}$ comme espace sous-jacent, on voit qu'on est ramené à démontrer le

Corollaire (**4.1.2.1**). — *Soient* Y *un k-préschéma localement de type fini; pour tout sous-préschéma* Z *de* Y, *on a* $\dim(Z) \leqslant \dim(Y)$. *Supposons en outre que les composantes irréductibles de* Y *aient toutes même dimension; alors, pour que* Z *soit rare dans* Y, *il faut et il suffit que* $\dim(Z) < \dim(Y)$.

En effet, soit z un point maximal de Z; en considérant un des sous-préschémas fermés réduits de Y ayant pour espace sous-jacent une des composantes irréductibles de Y contenant z, on se ramène au cas où Y est intègre de point générique y, puis, en considérant dans Y un ouvert affine contenant z, au cas où Y est affine et de type fini sur k, soit $Y = \operatorname{Spec}(A)$, et Z fermé dans Y, soit $Z = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal de l'anneau intègre A, distinct de A. En vertu du lemme de normalisation (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, th. 1) il existe une suite finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de A, algébriquement indépendants sur k, tels que A soit entier sur l'anneau $B = k[x_1, \ldots, x_n]$ et que $\mathfrak{a} \cap B$ soit engendré par une sous-famille $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ (éventuellement vide) de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Soit $g : Y \rightarrow \operatorname{Spec}(B) = \mathbf{V}_k^n$ le morphisme fini dominant qui correspond à l'injection canonique $B \rightarrow A$; comme $C = B/(\mathfrak{a} \cap B)$ est isomorphe à $k[x_{p+1}, \ldots, x_n]$, g induit sur Z un morphisme fini dominant $Z \rightarrow \mathbf{V}_k^{n-p}$; on a donc $\deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(y) = n$ et $\deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(z) = n - p$, puisque $\boldsymbol{k}(y)$ (resp. $\boldsymbol{k}(z)$) est une extension finie de $\boldsymbol{k}(g(y))$ (resp. $\boldsymbol{k}(g(z))$). Cela démontre la première assertion de (4.1.2.1). En outre, si $p = 0$, on a nécessairement $z = y$, car y est le seul point de Y dont l'image par g soit le point générique de $\mathbf{V}_k^n$; dans ce cas, Z contient donc un ouvert non vide de Y. Si au contraire $p > 0$, on a nécessairement $z \neq y$ et $\overline{\{z\}}$ est donc *rare* dans $\overline{\{y\}}$, ce qui achève de prouver (4.1.2.1).

(iii) Le fait que les conditions énoncées sont suffisantes résulte aussitôt de (i) et (ii) et de (1.5.4, (v)). Pour prouver qu'elles sont nécessaires, on peut considérer un ouvert dense U de X, réunion d'ouverts affines U_i deux à deux disjoints et irréductibles ($1 \leqslant i \leqslant m$), dont chacun contient un des points maximaux de X ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.6); on peut en outre supposer X réduit et si X est affine, on peut bien entendu prendre $U = X$. Le même raisonnement que dans (4.1.2.1) montre que si $\dim(U_i)=n_i$, il existe un k-morphisme $g_i : U_i \to \mathbf{V}_k^{n_i}$ qui est fini et dominant, donc surjectif (**II**, 6.1.10). Soit $n=\dim(X)=\sup_i n_i$; pour chaque n_i il y a donc un morphisme $h_i : \mathbf{V}_k^{n_i} \to \mathbf{V}_k^n$ qui est une immersion fermée correspondant à l'homomorphisme canonique $k[T_1, \ldots, T_n] \to k[T_1, \ldots, T_{n_i}]$, et qui est l'identité pour $n_i = n$. Comme U est somme des U_i, on prendra pour g le morphisme qui dans chaque U_i coïncide avec $h_i \circ g_i$; il est évidemment fini et surjectif. Lorsque $n' \geqslant n$ on aura un morphisme fini $U \to \mathbf{V}_k^{n'}$ en composant l'immersion fermée canonique $\mathbf{V}_k^n \to \mathbf{V}_k^{n'}$ avec g; lorsque $n' \leqslant n$, on compose de même avec g le morphisme canonique $p : \mathbf{V}_k^n \to \mathbf{V}_k^{n'}$ correspondant à l'injection canonique $k[T_1, \ldots, T_{n'}] \to k[T_1, \ldots, T_n]$, en notant que p est fidèlement plat, donc *surjectif*.

Remarque (**4.1.3**). — Le corollaire (4.1.2.1) montre que dans la formule (4.1.1.1), on peut supposer que x parcourt l'ensemble de *tous les points* de X.

Corollaire (**4.1.4**). — *Soient* X *un préschéma localement de type fini sur un corps* k, K *une extension de* k*; alors* $\dim(X \otimes_k K) = \dim(X)$.

On peut évidemment se borner au cas où X est de type fini sur k; alors le morphisme $u : X \otimes_k K \to X$ est fidèlement plat (2.2.13, (i)), donc si U est un ouvert partout dense dans X, $u^{-1}(U) = U \otimes_k K$ est dense dans $X \otimes_k K$ (2.3.10); si $g : U \to \mathbf{V}_k^n$ est fini et surjectif, il en est de même de $g_{(K)} : U \otimes_k K \to \mathbf{V}_K^n$ (**I**, 3.5.2 et **II**, 6.1.5), d'où le corollaire.

Corollaire (**4.1.5**). — *Soient* X *et* Y *deux préschémas localement de type fini sur un corps* k*; alors* $\dim(X \times_k Y) = \dim(X) + \dim(Y)$.

Il suffit de démontrer que si U (resp. V) est un voisinage affine d'un point x (resp. y) de X (resp. Y) tel que $\deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(x) = m = \dim U$ et $\deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(y) = n = \dim V$, alors on a $\dim(U \times_k V) = m + n$, autrement dit, on peut supposer en vertu de (4.1.2) qu'il existe des k-morphismes finis surjectifs $f : X \to \mathbf{V}_k^m$, $g : Y \to \mathbf{V}_k^n$; alors $f \times g : X \times_k Y \to \mathbf{V}_k^{m+n}$ est fini et surjectif (**I**, 3.5.2 et **II**, 6.1.5), d'où le corollaire.

4.2. Cycles premiers associés sur les préschémas algébriques.

Proposition (**4.2.1**). — *Soient* K *et* L *deux extensions d'un corps* k, *telles que* $K \otimes_k L$ *soit noethérien. Alors les idéaux premiers associés à* $K \otimes_k L$ *sont minimaux, et si* E *est le corps résiduel de l'anneau local d'un tel idéal, on a*

(**4.2.1.1**) $$\deg.\mathrm{tr}_K E = \deg.\mathrm{tr}_k L, \qquad \deg.\mathrm{tr}_L E = \deg.\mathrm{tr}_k K$$

d'où

(**4.2.1.2**) $$\deg.\mathrm{tr}_k E = \deg.\mathrm{tr}_k K + \deg.\mathrm{tr}_k L.$$

On sait que K est une extension algébrique d'une extension transcendante pure $K' = k(\mathbf{t})$, où $\mathbf{t} = (t_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une famille d'indéterminées; l'anneau $k[\mathbf{t}] \otimes_k L = L[\mathbf{t}]$ est intègre, donc il en est de même de $K' \otimes_k L$, qui en est un anneau de fractions, et le corps des fractions de $K'\otimes_k L$ est $L(\mathbf{t})$; on a le diagramme commutatif d'homomorphismes canoniques

(4.2.1.3)

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & K\otimes_k L & \longrightarrow & K\otimes_{K'} L(\mathbf{t}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ K' & \longrightarrow & K'\otimes_k L & \longrightarrow & L(\mathbf{t}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ k & \longrightarrow & L & & \end{array}$$

Comme K est fidèlement plat sur K', $K\otimes_k L = K\otimes_{K'}(K'\otimes_k L)$ est fidèlement plat sur $K'\otimes_k L$, donc $K'\otimes_k L$ est noethérien ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.2) ; en outre $K'\otimes_k L$ s'identifie à un sous-anneau de $K\otimes_k L$; la trace sur $K'\otimes_k L$ d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ associé à $K\otimes_k L$ est l'idéal o, un élément $\neq 0$ de $K'\otimes_k L$ n'étant pas diviseur de zéro dans $K\otimes_k L$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.4 et Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 1, cor. 3 de la prop. 2). Comme en outre K est algébrique sur K', $K\otimes_k L$ est une algèbre entière sur $K'\otimes_k L$, et les idéaux premiers de $K\otimes_k L$ induisant o sur $K'\otimes_k L$ sont nécessairement sans relation d'inclusion mutuelle (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, cor. 1 de la prop. 1) ; cela prouve la première assertion (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 3, cor. 1 de la prop. 7). De plus, le corps résiduel E de $\mathfrak{p}$ est algébrique sur le corps résiduel de l'idéal (o) de $K'\otimes_k L$, c'est-à-dire $L(\mathbf{t})$; donc $\deg.\mathrm{tr}_k E = \deg.\mathrm{tr}_k L(\mathbf{t}) = \mathrm{Card}(I) = \deg.\mathrm{tr}_k K$, autrement dit on a la première relation (4.2.1.1) ; échangeant les rôles de K et L, on a la seconde relation (4.2.1.1), d'où (4.2.1.2).

Corollaire **(4.2.2)**. — *Sous les hypothèses de* (3.3.6), *si les préschémas* $T_{x,y}$ *sont localement noethériens, ils n'ont pas de cycle premier associé immergé.*

Corollaire **(4.2.3)**. — *Sous les hypothèses de* (3.3.6) (resp. (3.3.7)), *si les* $T_{x,y}$ *sont localement noethériens et si* $\mathscr{F}$ *et les* $\mathscr{G}_s$ *(pour* $s\in S$) (resp. $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$) *sont sans cycle premier associé immergé, il en est de même de* $\mathscr{F}\otimes_S\mathscr{G}$.

Cela résulte de (4.2.2), (3.3.2) et de la démonstration de (3.3.6). En particulier, comme tout préschéma sur un corps k est *plat* sur k, on a ainsi démontré l'assertion (i) de la

Proposition **(4.2.4)**. — *Soient k un corps,* X *et* Y *deux k-préschémas localement noethériens tels que* $X\times_k Y$ *soit localement noethérien. Supposons de plus* X *et* Y *intègres. Alors :*

(i) $X\times_k Y$ *est sans cycle premier associé immergé; chacune des composantes irréductibles de* $X\times_k Y$ *domine* X *et* Y, *et l'ensemble de ces composantes est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des composantes irréductibles de* $\mathrm{Spec}(R(X)\otimes_k R(Y))$ (autrement dit *l'ensemble des idéaux premiers minimaux de* $R(X)\otimes_k R(Y)$), *où* R(X) *et* R(Y) *sont les corps des fonctions rationnelles de* X *et* Y *respectivement.*

(ii) *Si un point maximal z de* $X\times_k Y$ *est identifié à un idéal premier minimal* $\mathfrak{p}$ *de* $R(X)\otimes_k R(Y)$, *l'anneau local* $\mathscr{O}_{X\times_k Y, z}$ *est isomorphe à l'anneau de fractions* $(R(X)\otimes_k R(Y))_{\mathfrak{p}}$. *En particulier, si* R(X) *ou* R(Y) *est séparable sur k,* $X\times_k Y$ *est réduit.*

(iii) *Si en outre* X *et* Y *sont localement de type fini sur* k, *toute composante irréductible de* $X\times_k Y$ *est de dimension* $\dim(X)+\dim(Y)$.

L'assertion (iii) résulte de (4.2.1.2), compte tenu de (i) et (ii). Pour démontrer (ii), on peut évidemment se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$ sont affines, A et B étant donc des anneaux intègres de corps des fractions respectifs $K=R(X)$ et $L=R(Y)$; l'assertion (i) montre que tout idéal premier minimal $\mathfrak{q}$ de $A\otimes_k B$ est la trace sur $A\otimes_k B$ d'un idéal premier minimal $\mathfrak{p}$ de $K\otimes_k L$; comme $K\otimes_k L$ est un anneau de fractions de $A\otimes_k B$, l'isomorphie des anneaux $(A\otimes_k B)_{\mathfrak{q}}$ et $(K\otimes_k L)_{\mathfrak{p}}$ résulte de $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 1.2.5)$.

Enfin, si par exemple $R(Y)$ est séparable sur k, on sait que l'anneau $R(X)\otimes_k R(Y)$ est réduit (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 3, th. 1); il en est donc de même des anneaux locaux des points maximaux de $X\times_k Y$. On en déduit que $X\times_k Y$ est réduit (3.2.1).

Proposition **(4.2.5).** — *Soient* k *un corps*, X *et* Y *des* k*-préschémas localement noethériens*, $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) *un* $\mathcal{O}_X$*-Module* (resp. *un* $\mathcal{O}_Y$*-Module*) *quasi-cohérent. Soit* (Z'_λ) (resp. (Z''_μ)) *la famille des cycles premiers associés à* $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$), *et désignons encore par* Z'_λ (resp. Z''_μ) *le sous-préschéma réduit de* X (resp. Y) *ayant* Z'_λ (resp. Z''_μ) *comme espace sous-jacent. Alors, si* $Z'_\lambda\times_k Z''_\mu$ *est localement noethérien, les composantes irréductibles* $Z_{\lambda\mu\nu}$ *de* $Z'_\lambda\times_k Z''_\mu$ *dominent* Z'_λ *et* Z''_μ, *et* $(Z_{\lambda\mu\nu})$ *est la famille des cycles premiers distincts associés à* $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}$.

Il suffit d'appliquer (4.2.4) au produit $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))\times_k\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$.

En particulier :

Corollaire **(4.2.6).** — *Soient* k *un corps*, X, Y *deux* k*-préschémas localement noethériens tels que* $X\times_k Y$ *soit localement noethérien. Soit* (Z'_λ) (resp. (Z''_μ)) *la famille des sous-préschémas réduits de* X (resp. Y) *ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de* X (resp. Y). *Alors les composantes irréductibles* $Z_{\lambda\mu\nu}$ *de* $Z'_\lambda\times_k Z''_\mu$ *dominent* Z'_λ *et* Z''_μ, *et* $(Z_{\lambda\mu\nu})$ *est la famille des composantes irréductibles de* $X\times_k Y$.

En effet, on peut se borner au cas où X et Y sont réduits (**I**, 5.1.8); les composantes irréductibles de X (resp. Y) sont alors les cycles premiers associés à $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_Y$) (3.2.1). Appliquons (4.2.5) à $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X$ et $\mathscr{G}=\mathcal{O}_Y$, en notant que par définition $\mathcal{O}_X\otimes_k\mathcal{O}_Y=\mathcal{O}_{X\times_k Y}$; le corollaire résulte de ce que $\mathcal{O}_X\otimes_k\mathcal{O}_Y$ n'a pas de cycles premiers associés immergés puisqu'il en est ainsi de $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{O}_Y$ par hypothèse (4.2.3).

Appliquons les résultats qui précèdent au cas où Y est le spectre d'une *extension* K de k :

Proposition **(4.2.7).** — *Soient* k *un corps*, X *un* k*-préschéma*, K *une extension de* k *telle que* $X\otimes_k K$ *soit localement noethérien*, $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent*, x' *un point de* $X\otimes_k K$, x *son image dans* X.

(i) *Soit* (Z_λ) *la famille des sous-préschémas réduits de* X *ayant pour espaces sous-jacents les cycles premiers associés à* $\mathscr{F}$; *alors les composantes irréductibles* $Z_{\lambda\mu}$ *des* $Z_\lambda\otimes_k K$ *sont les cycles premiers associés à* $\mathscr{F}\otimes_k K$, *et* $Z_{\lambda\mu}$ *domine* Z_λ; *en outre, pour qu'un* $Z_{\lambda\mu}$ *soit immergé, il faut et il suffit que* Z_λ *le soit.*

(ii) *Pour que* x *appartienne à un cycle premier associé immergé de* $\mathscr{F}$, *il faut et il suffit que* x' *appartienne à un cycle premier associé immergé de* $\mathscr{F}\otimes_k K$; *pour que* $\mathscr{F}$ *soit sans cycle premier associé immergé, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de* $\mathscr{F}\otimes_k K$.

(iii) *Les indices* λ *tels que* $x \in Z_\lambda$ *sont les mêmes que ceux pour lesquels il existe un indice* μ *tel que* $x' \in Z_{\lambda\mu}$. *En particulier, si* x' *n'appartient qu'à un seul cycle premier associé à* $\mathscr{F} \otimes_k K$, x *n'appartient qu'à un seul cycle premier associé à* $\mathscr{F}$.

(iv) *Si* X *est localement de type fini sur* k, *on a* $\dim(Z_{\lambda\mu}) = \dim(Z_\lambda)$.

On notera que l'hypothèse entraîne que X lui-même est localement noethérien (2.2.13 et 2.2.14); l'assertion (i) résulte de (4.2.5) et de la démonstration de (4.2.3), pour $\mathscr{G} = \mathcal{O}_Y$, avec $Y = \operatorname{Spec}(K)$; (ii) et (iii) résultent de (i) et de (2.3.5); enfin, (iv) est un cas particulier de (4.2.4, (iii)).

Corollaire **(4.2.8)**. — *Si* X *est localement de type fini sur* k, *l'ensemble des dimensions des cycles premiers associés est le même pour* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{F} \otimes_k K$; *l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles est le même pour* X *et* $X \otimes_k K$.

Proposition **(4.2.9)**. — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (4.2.5), *et supposons en outre que* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *soient cohérents. Soient* $(\mathscr{F}_\lambda)_{\lambda \in L}$ *et* $(\mathscr{G}_\mu)_{\mu \in M}$ *des décompositions irredondantes de* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *respectivement; pour tout couple* $(\lambda, \mu) \in L \times M$, *soit* $(\mathscr{H}_{\lambda\mu\nu})_{\nu \in S(\lambda,\mu)}$ *une décomposition irredondante réduite de* $\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu$, *où* $S(\lambda, \mu) = \operatorname{Ass}(\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu)$ (3.2.5). *Alors* $(\mathscr{H}_{\lambda\mu\nu})$ (*pour tous les triplets* (λ, μ, ν)) *est une décomposition irredondante de* $\mathscr{F} \otimes_k \mathscr{G}$; *elle est réduite si* $(\mathscr{F}_\lambda)$ *et* $(\mathscr{G}_\mu)$ *le sont.*

Notons que $\mathscr{F} \otimes_k \mathscr{G}$ et chacun des $\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu$ sont cohérents, et chacun des $\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu$ s'identifie à un quotient de $\mathscr{F} \otimes_k \mathscr{G}$; chacun des $\mathscr{H}_{\lambda\mu\nu}$ s'identifie par définition à un quotient cohérent de $\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu$, donc aussi à un quotient cohérent de $\mathscr{F} \otimes_k \mathscr{G}$. La famille des supports des $\mathscr{H}_{\lambda\mu\nu}$ est localement finie, car $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu)$ est contenu dans l'espace sous-jacent à $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}_\lambda) \times_k \operatorname{Supp}(\mathscr{G}_\mu)$ (où $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}_\lambda)$ et $\operatorname{Supp}(\mathscr{G}_\mu)$ désignent les sous-préschémas fermés réduits correspondants), et pour λ et μ donnés, la famille des supports des $\mathscr{H}_{\lambda\mu\nu}$ est localement finie par hypothèse; notre assertion résulte donc de ce que les familles $(\operatorname{Supp}(\mathscr{F}_\lambda))$ et $(\operatorname{Supp}(\mathscr{G}_\mu))$ sont localement finies. Pour démontrer que $(\mathscr{H}_{\lambda\mu\nu})$ est une décomposition irredondante de $\mathscr{F} \otimes_k \mathscr{G}$, il suffit donc de prouver que l'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \otimes_k \mathscr{G} \to \bigoplus_{\lambda,\mu,\nu} \mathscr{H}_{\lambda\mu\nu}$ est injectif; or, il est composé des homomorphismes $\mathscr{F} \otimes_k \mathscr{G} \to \bigoplus_{\lambda,\mu} (\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu) \to \bigoplus_{\lambda,\mu,\nu} \mathscr{H}_{\lambda\mu\nu}$; le second de ces homomorphismes est injectif par définition, et il en est de même du premier, qui n'est autre que le produit tensoriel des homomorphismes canoniques injectifs $\mathscr{F} \to \bigoplus_\lambda \mathscr{F}_\lambda$, $\mathscr{G} \to \bigoplus_\mu \mathscr{G}_\mu$ (on se souviendra que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *plats* sur k). Enfin, si $(\mathscr{F}_\lambda)$ et $(\mathscr{G}_\mu)$ sont réduites, on peut supposer que $L = \operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ et $M = \operatorname{Ass}(\mathscr{G})$; le fait que les $\mathscr{H}_{\lambda\mu\nu}$ forment alors une décomposition réduite résulte de ce que les $\operatorname{Ass}(\mathscr{F}_\lambda \otimes_k \mathscr{G}_\mu)$ forment une partition de $\operatorname{Ass}(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G})$ en vertu de (4.2.2) (cf. (3.2.5)).

Corollaire **(4.2.10)**. — *Sous les hypothèses de* (4.2.7), *supposons en outre* $\mathscr{F}$ *cohérent, et soit* $(\mathscr{F}_\lambda)_{\lambda \in L}$ *une décomposition irredondante de* $\mathscr{F}$; *pour tout* $\lambda \in L$, *soit* $(\mathscr{F}_{\lambda\mu})_{\mu \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F}_\lambda \otimes_k K)}$ *une décomposition irredondante réduite de* $\mathscr{F}_\lambda \otimes_k K$. *Alors* $(\mathscr{F}_{\lambda\mu})$ *est une décomposition irredondante de* $\mathscr{F} \otimes_k K$; *elle est réduite si* $(\mathscr{F}_\lambda)$ *l'est.*

On applique (4.2.9) avec $Y = \operatorname{Spec}(K)$, $\mathscr{G} = \mathcal{O}_Y = K$, M réduit à un seul élément.

4.3. Rappels sur les produits tensoriels de corps.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici certaines propriétés des produits tensoriels de corps dont nous ferons usage dans les numéros suivants; pour les démonstrations, nous renvoyons à [1].

(4.3.1) Rappelons qu'une extension L d'un corps k est dite *primaire* si la plus grande extension algébrique séparable de k contenue dans L est k lui-même.

Proposition **(4.3.2).** — *Soient* K, L *deux extensions d'un corps* k. *Si* L *est une extension primaire de* k, *alors* $\mathrm{Spec}(\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K})$ *est irréductible, et si* ξ *est son point générique,* $\boldsymbol{k}(\xi)$ *est une extension primaire de* K. *Réciproquement, si pour toute extension finie séparable* K *de* k, $\mathrm{Spec}(\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K})$ *est irréductible,* L *est une extension primaire de* k.

Voir la démonstration dans [1], p. 14-03 à 14-06.

Corollaire **(4.3.3).** — *Si* k *est séparablement clos* (i.e. *si sa clôture algébrique est radicielle sur* k), *alors, pour deux extensions quelconques* K, L *de* k, $\mathrm{Spec}(\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K})$ *est irréductible, et réciproquement.*

Cela découle aussitôt de (4.3.2).

Corollaire **(4.3.4).** — *Soient* L *une extension d'un corps* k, L_s *la plus grande extension algébrique séparable de* k *contenue dans* L (parfois appelée la *fermeture algébrique séparable* de k dans L); *supposons* L_s *de degré fini sur* k, *et soit* K *une extension galoisienne de* k *contenant* L_s. *Alors* $\mathrm{Spec}(\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K})$ *a* $[\mathrm{L}_s : k]$ *composantes irréductibles dont il est la somme et les corps résiduels aux points génériques de ces composantes sont des extensions primaires de* K.

En effet, on a $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K} = \mathrm{L}\otimes_{\mathrm{L}_s}(\mathrm{L}_s\otimes_k \mathrm{K})$ et on sait que $\mathrm{L}_s\otimes_k \mathrm{K}$ est isomorphe à un produit de $[\mathrm{L}_s : k]$ corps isomorphes à K (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 3, cor. 2 du th. 1); donc $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K}$ est isomorphe à un produit de $[\mathrm{L}_s : k]$ anneaux isomorphes à $\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{L}_s}\mathrm{K}$; comme L est une extension primaire de L_s, la conclusion résulte de (4.3.2).

Proposition **(4.3.5).** — *Soient* K, L *deux extensions d'un corps* k. *Si* L *est une extension séparable de* k, *l'anneau* $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K}$ *est réduit. Réciproquement, si pour toute extension finie radicielle* K *de* k, *l'anneau* $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K}$ *est réduit,* L *est une extension séparable de* k.

Pour la démonstration, voir Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, n° 3, th. 1.

Corollaire **(4.3.6).** — *Si* k *est parfait, alors, pour deux extensions quelconques* K, L *de* k, $\mathrm{K}\otimes_k \mathrm{L}$ *est réduit, et réciproquement.*

Cela résulte aussitôt de (4.3.5).

Corollaire **(4.3.7).** — *Soit* L *une extension séparable de* k *et soit* K *une extension de* k *telle que* K *ou* L *soit finie sur* k; *alors les corps résiduels de l'anneau semi-local* $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K}$ *sont des extensions séparables de* K.

On sait en effet que $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K}$ est composé direct de ces corps résiduels E_i; pour toute extension K' de K, $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K}'$ est donc isomorphe au composé direct des anneaux $\mathrm{E}_i\otimes_{\mathrm{K}}\mathrm{K}'$; comme $\mathrm{L}\otimes_k \mathrm{K}'$ est réduit, les E_i sont séparables sur K en vertu de (4.3.5).

Corollaire **(4.3.8).** — *Si* K *et* L *sont deux extensions finies séparables de* k, $\mathrm{K}\otimes_k \mathrm{L}$ *est produit d'un nombre fini d'extensions séparables de* k.

Proposition **(4.3.9)**. — *Si k est algébriquement clos, alors, pour deux extensions quelconques* K, L *de k,* $L\otimes_k K$ *est intègre, et réciproquement.*

C'est une conséquence de (4.3.3) et (4.3.6), un corps parfait et séparablement clos étant algébriquement clos.

4.4. Préschémas irréductibles et préschémas connexes sur un corps algébriquement clos.

(4.4.1) Soient k un corps, X un k-préschéma, K une extension de k. Comme le morphisme $\operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(k)$ est fidèlement plat, quasi-compact, et universellement ouvert (2.4.9), il en est de même du morphisme projection $p : X\otimes_k K \to X$ (2.2.13). Il résulte donc de (2.3.5) que toute composante irréductible de $X\otimes_k K$ *domine* une composante irréductible de X, et (comme p est surjectif) toute composante irréductible de X est dominée par une composante irréductible de $X\otimes_k K$; on déduit ainsi de p une application *surjective* de l'ensemble des composantes irréductibles de $X\otimes_k K$ dans l'ensemble des composantes irréductibles de X. De même, il résulte du fait que p est continu et surjectif que toute composante connexe de X est image par p d'une réunion de composantes connexes de $X\otimes_k K$, d'où une application *surjective* de l'ensemble des composantes connexes de $X\otimes_k K$ dans l'ensemble des composantes connexes de X. On en conclut que toute composante irréductible (resp. connexe) Z' de $X\otimes_k K$ est contenue dans un *unique* ensemble de la forme $p^{-1}(Z)$, où Z est une composante irréductible (resp. connexe) de X; pour tout sous-préschéma de X ayant Z pour espace sous-jacent (et encore noté Z), Z' est une composante irréductible (resp. connexe) de $Z\otimes_k K$. En particulier, si $X\otimes_k K$ a un nombre fini n (resp. n') de composantes irréductibles (resp. connexes) (ce qui sera le cas lorsque X est *de type fini* sur k, car alors $X\otimes_k K$ est de type fini sur K, donc noethérien), le nombre de composantes irréductibles (resp. connexes) de X est $\leqslant n$ (resp. $\leqslant n'$); dire qu'il est égal à n (resp. n') signifie que pour tout sous-préschéma réduit Z de X ayant pour espace sous-jacent une composante irréductible (resp. connexe) de X, $Z\otimes_k K$ est irréductible (resp. connexe) (**I**, 5.1.8); le nombre de composantes irréductibles (resp. connexes) de $X\otimes_k K$ est donc indépendant de K si et seulement si pour toute composante irréductible (resp. connexe) Z de X, $Z\otimes_k K$ est irréductible (resp. connexe) pour *toute* extension K de k.

En particulier, si $X\otimes_k K$ est irréductible (resp. connexe), il en est de même de X (ce qui résulte déjà du fait que p est surjectif). De même, si $X\otimes_k K$ est *réduit* (resp. *intègre*), il en est de même de X puisque p est fidèlement plat (2.1.13).

Dans ce numéro et le suivant, nous allons examiner de plus près ce qu'on peut dire des composantes irréductibles (resp. connexes) de $X\otimes_k K$ lorsque K varie; ce qui précède nous montre déjà que le nombre de ces composantes est fonction *croissante* de K.

Lemme **(4.4.2)**. — *Soient* X', X *deux espaces topologiques,* $f : X' \to X$ *une application continue. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) *f est surjective ouverte* (resp. *telle que l'espace topologique* X *s'identifie canoniquement au quotient de* X *par la relation d'équivalence définie par f*).

(ii) *Pour tout* $x \in X$, $f^{-1}(x)$ *est irréductible* (resp. *connexe*).

Alors pour que X′ *soit irréductible* (resp. *connexe*), *il faut et il suffit que* X *le soit.*

L'assertion relative à la connexité n'est autre que Bourbaki, *Top. gén.*, chap. Ier, 3e éd., § 11, no 3, prop. 7. Prouvons l'assertion relative à l'irréductibilité; la condition étant trivialement nécessaire puisque f est surjective, prouvons qu'elle est suffisante. Soient donc X'_1, X'_2 deux parties fermées de X′ telles que $X' = X'_1 \cup X'_2$, et désignons par X_i $(i=1, 2)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f^{-1}(x) \subset X'_i$; on a donc $X_i = X - f(X' - X'_i)$, et comme f est ouverte, on en conclut que X_i est une partie *fermée* de X $(i=1, 2)$. D'autre part, pour tout $x \in X$, $f^{-1}(x)$ est irréductible par hypothèse, et est réunion des deux parties fermées $X'_1 \cap f^{-1}(x)$ et $X'_2 \cap f^{-1}(x)$; l'une de ces deux parties doit donc être égale à $f^{-1}(x)$, ce qui signifie que l'on doit avoir $x \in X_1$ ou $x \in X_2$; on a donc $X = X_1 \cup X_2$, et comme X est irréductible par hypothèse, on en déduit $X = X_1$ ou $X = X_2$, donc $X' = X'_1$ ou $X' = X'_2$.

Remarque **(4.4.3)**. — Si la topologie de X n'est pas quotient de celle de X′ par la relation d'équivalence définie par f, il peut se faire que X et toutes les fibres $f^{-1}(x)$ soient irréductibles, sans que X′ soit connexe : on en a un exemple en prenant pour X un schéma irréductible (par exemple la droite affine $\mathrm{Spec}(k[T])$ sur un corps k algébriquement clos), en considérant un point fermé x_0 de X et en prenant pour X′ l'espace *somme* de $\{x_0\}$ et du sous-espace ouvert $X - \{x_0\}$ de X. De même, si l'on remplace l'hypothèse « f ouverte » par « f fermée » (et même « f propre ») (ce qui entraîne pourtant que la topologie de X est alors quotient de celle de X′ par la relation définie par f), il peut se faire que X et toutes les fibres $f^{-1}(x)$ soient irréductibles sans que X′ le soit. Prenons encore pour X la droite affine sur k, désignons par S le produit $X \times_k P$, où P est la droite projective sur k; si x_0 est un point fermé de X, t_0 un point fermé de P, $p : S \to X$, $q : S \to P$ les projections, désignons par X′ le sous-préschéma réduit ayant pour espace sous-jacent l'ensemble fermé $p^{-1}(x_0) \cup q^{-1}(t_0)$, et prenons pour f la restriction à X′ de p; f est propre mais X′ n'est pas irréductible.

Théorème **(4.4.4)**. — *Soient k un corps algébriquement clos*, X *un k-préschéma. Si* X *est irréductible* (resp. *connexe*), *il en est de même de* $X \otimes_k K$ *pour toute extension* K *de k.*

On a vu en effet (4.4.1) que le morphisme $p : X \otimes_k K \to X$ est fidèlement plat et ouvert; pour pouvoir appliquer le lemme (4.4.2), il suffit donc de vérifier que les fibres $p^{-1}(x)$ sont irréductibles pour tout $x \in X$. Mais le $\boldsymbol{k}(x)$-préschéma $p^{-1}(x)$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x) \otimes_k K)$ (**I**, 3.6.2), donc intègre en vertu de l'hypothèse sur k et de (4.3.9).

Corollaire **(4.4.5)**. — *Soient k un corps algébriquement clos*, X *un k-préschéma*, K *une extension de k*, $p : X \otimes_k K \to X$ *la projection canonique. Si* Z *est une partie irréductible* (resp. *connexe*) *de* X, $p^{-1}(Z)$ *est irréductible* (resp. *connexe*); *en particulier, si* X_0 *est une composante irréductible* (resp. *la composante connexe*) *de* X *contenant* Z, $p^{-1}(X_0)$ *est une composante irréductible* (resp. *connexe*) *de* $X \otimes_k K$ *contenant* $p^{-1}(Z)$.

La seconde assertion résulte de (4.4.1) et de la première appliquée en remplaçant Z par X_0; pour prouver la première, soient X′ l'espace sous-jacent à $X \otimes_k K$, $Z' = p^{-1}(Z)$; la relation d'équivalence R définie par p sur X′ est ouverte, donc il en est de même de la relation $R_{Z'}$ qu'elle induit sur la partie saturée Z′, et Z s'identifie à l'espace quotient $Z'/R_{Z'}$ (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. I^er, 3^e éd., § 5, n^o 2, prop. 4); on peut donc appliquer à Z et Z′ le lemme (4.4.2), d'où la première assertion de (4.4.4).

Corollaire **(4.4.6)**. — *Les hypothèses et notations étant celles de* (4.4.5), *l'application* $Z \rightsquigarrow p^{-1}(Z)$ *est une bijection de l'ensemble des composantes irréductibles* (resp. *connexes*) *de* X *sur l'ensemble des composantes irréductibles* (resp. *connexes*) *de* $X \otimes_k K$, *dont la bijection réciproque est* $Z' \rightsquigarrow p(Z')$.

4.5. Préschémas géométriquement irréductibles et géométriquement connexes.

Proposition **(4.5.1)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma,* Ω *une extension algébriquement close de k. Soit n* (resp. *n′*) *le cardinal de l'ensemble des composantes irréductibles* (resp. *des composantes connexes*) *de* $X \otimes_k \Omega$; *ce nombre est indépendant de l'extension algébriquement close* Ω *choisie. En outre, pour toute extension* K *de k, le cardinal de l'ensemble des composantes irréductibles* (resp. *des composantes connexes*) *de* $X \otimes_k K$ *est* $\leqslant n$ (resp. $\leqslant n'$).

En effet, deux extensions algébriquement closes Ω, Ω′ de k peuvent toujours être considérées comme des sous-extensions d'une même extension E de k; il suffit alors d'appliquer (4.4.6) à $X \otimes_k \Omega$ et $X \otimes_k \Omega'$ et à l'extension commune E de Ω et Ω′ pour démontrer la première assertion. La seconde s'obtient en prenant pour Ω une extension algébriquement close de K et en utilisant (4.4.1).

Définition **(4.5.2)**. — *Le cardinal n* (resp. *n′*) *de* (4.5.1) *s'appelle le nombre géométrique de composantes irréductibles* (resp. *de composantes connexes*) *de* X *(relativement à k). Si* $n=1$ (resp. $n' \leqslant 1$) *on dit que* X *est un k-préschéma géométriquement irréductible* (resp. *géométriquement connexe*).

On retrouve ainsi une définition donnée pour un cas particulier dans (**III**, 4.3.4). En vertu de (4.5.1), les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) X est géométriquement irréductible (resp. géométriquement connexe).

b) Pour une extension algébriquement close Ω de k, $X \otimes_k \Omega$ est irréductible (resp. connexe).

c) Pour toute extension K de k, $X \otimes_k K$ est irréductible (resp. connexe).

(4.5.3) Soient X un k-préschéma, Z une partie localement fermée de X. Si l'on désigne encore par Z un quelconque des sous-préschémas de X ayant Z pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.1), il résulte de (**I**, 5.1.8) que pour une extension K de k, le nombre de composantes irréductibles (resp. connexes) de $Z \otimes_k K$ est indépendant du sous-préschéma d'espace sous-jacent Z que l'on a choisi; aussi définit-on le nombre géométrique de composantes irréductibles (resp. de composantes connexes) de Z comme celui de tout sous-préschéma de X ayant Z pour espace sous-jacent.

Proposition **(4.5.4)**. — *Soient* X, Y *deux k-préschémas,* $f: X \to Y$ *un k-morphisme surjectif. Si* X *est géométriquement irréductible* (resp. *géométriquement connexe*), *il en est de même de* Y.

En effet, pour toute extension K de k, $f_{(K)} : X_{(K)} \to Y_{(K)}$ est surjectif (**I**, 3.5.2), et $X_{(K)}$ étant irréductible (resp. connexe) par hypothèse, il en est de même de $Y_{(K)}$.

Définition (**4.5.5**). — *On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de préschémas est irréductible* (resp. *connexe*), *si, pour tout $y \in Y$, le $\boldsymbol{k}(y)$-préschéma $f^{-1}(y)$ est géométriquement irréductible* (resp. *géométriquement connexe*).

Proposition (**4.5.6**). — (i) *Soient* X *un k-préschéma,* K *une extension de k. Alors le nombre géométrique de composantes irréductibles* (resp. *connexes*) *de* $X_{(K)}$ *relativement à* K *est égal au nombre géométrique de composantes irréductibles* (resp. *connexes*) *de* X *relativement à k. En particulier, pour que le* K*-préschéma* $X_{(K)}$ *soit géométriquement irréductible* (resp. *géométriquement connexe*), *il faut et il suffit que le k-préschéma* X *le soit.*

(ii) *Soient* $f : X \to Y$, $g : Y' \to Y$ *deux morphismes, et posons* $X' = X_{(Y')} = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')} : X' \to Y'$. *Si f est irréductible* (resp. *connexe*), *il en est de même de* f'. *La réciproque est vraie si g est surjectif.*

(i) Si Ω est une extension algébriquement close de K, on a $X \otimes_k \Omega = X_{(K)} \otimes_K \Omega$, d'où l'assertion.

(ii) Pour tout $y' \in Y'$, si l'on pose $y = g(y')$, on a $f'^{-1}(y') = f^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(y')$ (**I**, 3.6.4), donc les deux assertions résultent de (i).

Proposition (**4.5.7**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme surjectif irréductible* (resp. *connexe*), $g : Y' \to Y$ *un morphisme, et posons* $X' = X \times_Y Y'$. *Si en outre* Y' *est irréductible* (resp. *connexe*), *et f universellement ouvert* (resp. *plat et quasi-compact, ou universellement ouvert, ou universellement fermé*), *alors* X' *est irréductible* (resp. *connexe*).

Les propriétés de f que l'on considère étant toutes stables par changement de base, on peut se borner au cas où $Y' = Y$; il suffit alors d'appliquer (4.4.2) (compte tenu de (2.3.12)).

Corollaire (**4.5.8**). — *Soient* X, Y *deux k-préschémas.*

(i) *Si* X *est géométriquement irréductible* (resp. *géométriquement connexe*) *et* Y *irréductible* (resp. *connexe*), *alors* $X \times_k Y$ *est irréductible* (resp. *connexe*).

(ii) *Si* X *et* Y *sont géométriquement irréductibles* (resp. *géométriquement connexes*), *il en est de même de* $X \times_k Y$.

(i) Le morphisme structural $X \to \operatorname{Spec}(k)$ est surjectif et universellement ouvert (2.4.9) et en outre irréductible (resp. connexe); il suffit donc d'appliquer (4.5.7).

(ii) Si Ω est une extension algébriquement close de k, on a $(X \times_k Y)_{(\Omega)} = X_{(\Omega)} \times_\Omega Y_{(\Omega)}$ (**I**, 3.3.10); par hypothèse $X_{(\Omega)}$ et $Y_{(\Omega)}$ sont des Ω-préschémas géométriquement irréductibles (resp. géométriquement connexes) (4.5.6) et il suffit donc d'appliquer (i).

Proposition (**4.5.9**). — *Soit* X *un k-préschéma. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est géométriquement irréductible* (autrement dit, pour *toute* extension K de k, $X \otimes_k K$ est irréductible).

b) *Pour toute extension finie séparable* K *de k,* $X \otimes_k K$ *est irréductible.*

c) X *est irréductible, et si x est son point générique,* $\boldsymbol{k}(x)$ *est une extension primaire de k.*

Il est clair que *a)* entraîne *b)*. Pour voir que *b)* entraîne *c)*, considérons une extension finie séparable K de k; si $p : X \otimes_k K \to X$ est la projection canonique, les points maximaux de $X \otimes_k K$ sont ceux de la fibre $p^{-1}(x) = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x) \otimes_k K)$ ((2.3.4) et $(\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.1.8)); dire que cette fibre est irréductible pour toute extension finie séparable K de k revient à dire que $\boldsymbol{k}(y)$ est une extension primaire de k, en vertu de (4.3.2). Inversement, si *c)* est vérifiée, le même raisonnement (compte tenu de (4.3.2)) montre que pour *toute* extension K de k, $X \otimes_k K$ est irréductible, donc *c)* implique *a)*.

Corollaire **(4.5.10)**. — *Soient* X *un* k*-préschéma irréductible,* x *son point générique,* k' *la fermeture algébrique séparable de* k *dans* $\boldsymbol{k}(x)$, k'' *une extension galoisienne de* k *(de degré fini ou non) contenant* k'. *On suppose* k' *fini sur* k*; alors les composantes irréductibles de* $X \otimes_k k''$ *sont géométriquement irréductibles; leur nombre est égal à* $[k' : k]$ *et est aussi le nombre géométrique de composantes irréductibles de* X.

Comme dans (4.5.9), on est ramené à considérer les points maximaux de la fibre $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x) \otimes_k k'')$; en vertu de (4.3.4), ils sont au nombre de $[k' : k]$ et les corps résiduels en ces points (qui sont aussi ceux de $X \otimes_k k''$) sont des extensions primaires de k'', ce qui, compte tenu de (4.5.9), prouve le corollaire.

Corollaire **(4.5.11)**. — *Soit* X *un* k*-préschéma; supposons que* X *n'ait qu'un nombre fini de points maximaux* x_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *et que pour chaque* i*, la fermeture algébrique séparable* k'_i *de* k *dans* $\boldsymbol{k}(x_i)$ *soit de degré fini sur* k*. Alors il existe une extension finie séparable* L *de* k *telle que les composantes irréductibles de* $X \otimes_k L$ *soient géométriquement irréductibles; leur nombre, égal à* $\sum_i [k'_i : k]$, *est le nombre géométrique des composantes irréductibles de* X.

Les points maximaux de $X \otimes_k L$ sont ceux des diverses fibres $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x_i) \otimes_k L)$ en vertu de (2.3.4) et $(\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.1.8) appliqué aux composantes irréductibles de X et à leurs images réciproques dans $X \otimes_k L$. Il suffit donc de prendre pour L une extension galoisienne finie de k contenant tous les k'_i et d'appliquer (4.5.10).

On notera que (4.5.11) s'applique en particulier à tout k-préschéma X *de type fini sur* k, car X est alors noethérien, donc n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, et chacun des $\boldsymbol{k}(x_i)$ est une extension de type fini de k, donc il en est de même de la fermeture algébrique de k dans $\boldsymbol{k}(x_i)$ ([1], p. 6-06, lemme 5).

Remarques **(4.5.12)**. — (i) Les notions définies dans (4.5.2) dépendent du corps de base k. Pour abréger, et lorsqu'il sera nécessaire de mentionner le corps de base, on pourra dire « k-irréductible » (resp. « k-connexe ») au lieu de « géométriquement irréductible (resp. connexe) relativement à k ». On notera que cette terminologie, tout à fait naturelle dans le contexte des schémas, est exactement à l'opposé de celle de Weil : chez cet auteur, « k-irréductible » (resp. « k-connexe », « k-normal », etc.) désigne une propriété *intrinsèque* d'un préschéma X, indépendante du corps k pris comme « corps de base » (autrement dit, du morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ choisi); nous exprimons ces propriétés en disant simplement que X est irréductible (resp. connexe, normal, etc.). Weil dit d'autre part « *absolument irréductible* », « *absolument connexe* », « *absolument normal* », etc., pour les notions correspondantes relatives au préschéma $X \otimes_k \Omega$, où Ω est une extension algébriquement close convenable de k. Cette terminologie s'explique par le point de vue différent auquel se place cet auteur : pour lui, une « variété algébrique » V est donnée *d'abord* comme un objet géométrique au-dessus d'un corps *algébriquement clos* Ω; la donnée d'un « corps de définition » k plus petit (i.e., d'un schéma sur k définissant V par extension du corps de base à Ω) est pour lui une structure supplémentaire et, dans une certaine mesure, secondaire, de sorte que sa qualification d' « absolu » ou « intrinsèque » d'un côté, « relatif à k » de l'autre, est à l'opposé de la nôtre [1]. Nous éviterons donc par la suite d'utiliser le qualificatif « absolu », qui peut prêter à confusion, et lorsque nous utiliserons la terminologie abrégée introduite plus haut (en conflit avec la terminologie reçue), nous renverrons à (4.5.12) pour éviter toute ambiguïté.

(ii) La proposition (4.5.9) donne un critère « birationnel » (autrement dit, ne dépendant que du corps résiduel au point générique) pour qu'un k-préschéma X soit géométriquement irréductible. Il n'y a pas de critère analogue pour que X soit géométriquement connexe. Par exemple, prenons $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{R}[[T, U]]/(T^2+U^2))$ (T, U indéterminées); X est un $\mathbf{R}$-schéma intègre, et son corps de fonctions rationnelles $\boldsymbol{k}(x)$ est $\mathbf{C}((T))$, comme on le vérifie aisément; $X \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ se décompose en deux composantes irréductibles (les deux « droites isotropes ») qui ont un point commun (l'idéal maximal image dans $\mathbf{C}[[T, U]]/(T^2+U^2)$ de l'idéal maximal $(T)+(U)$ de $\mathbf{C}[[T, U]]$); donc $X \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ est connexe. Soit X' le complémentaire (ouvert) du point fermé de X correspondant à l'idéal maximal $(T)+(U)$ de $\mathbf{R}[[T, U]]$; alors $X' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ n'est pas connexe, bien que X et X' aient même corps de fonctions rationnelles.

Proposition **(4.5.13)**. — *Soient* X, Y *deux k-préschémas,* $f: Y \to X$ *un k-morphisme. Supposons* Y *géométriquement connexe et non vide, et* X *connexe. Alors* X *est géométriquement connexe.*

Soient Ω une clôture algébrique de k, $X' = X_{(\Omega)}$, $Y' = Y_{(\Omega)}$, $f' = f_{(\Omega)} : Y' \to X'$; il faut montrer que X' est connexe. Soit U' une partie ouverte et fermée non vide de X'; notons que les morphismes $p: X' \to X$ et $q: Y' \to Y$ sont *ouverts* (2.4.10) et *fermés* puisque Ω est extension algébrique de k (**II**, 6.1.10). Donc $U = p(U')$ est ouvert et fermé non vide dans X, et par suite égal à X. Comme Y est non vide, on en conclut (**I**, 3.4.7) que $V' = f'^{-1}(U')$ n'est pas vide; d'ailleurs, c'est une partie ouverte et fermée de Y', et ce dernier espace est connexe par hypothèse; donc $V' = Y'$. On en déduit que $U' = X'$, sans quoi le même raisonnement appliqué à l'ensemble ouvert et fermé $X' - U'$, montrerait que $f'^{-1}(X' - U') = Y'$, ce qui est absurde puisque Y' n'est pas vide.

Corollaire **(4.5.13.1)**. — (i) *Soient* X, Y *deux k-préschémas,* $f: Y \to X$ *un k-morphisme. Si* Y *est géométriquement connexe et non vide, la composante connexe* X_0 *de* X *contenant* $f(Y)$ *est géométriquement connexe.*

(ii) *Soit* X *un k-préschéma. Si* Y *est une composante irréductible de* X *qui est géométriquement irréductible, alors la composante connexe* X_0 *de* X *contenant* Y *est géométriquement connexe.*

(i) On peut supposer Y réduit, de sorte que f se factorise en $f: Y \xrightarrow{g} X_0 \xrightarrow{j} X$, X_0

[1] Le point de vue de Zariski est déjà plus proche du nôtre, et sa terminologie n'est généralement pas en conflit avec celle introduite ici.

désignant le sous-préschéma réduit de X ayant X_0 pour espace sous-jacent (**I**, 5.2.2); il suffit d'appliquer (4.5.13) à g.

(ii) En considérant un préschéma ayant Y pour espace sous-jacent, et remarquant que Y est *a fortiori* géométriquement connexe, il suffit d'appliquer (i) à l'injection canonique $Y \to X$.

Corollaire **(4.5.14)**. — *Soit* X *un* k*-préschéma. Si* x *est un point de* X *tel que* $\boldsymbol{k}(x)$ *soit une extension primaire de* k (en particulier si x est un *point rationnel* de X), *la composante connexe de* x *dans* X *est géométriquement connexe.*

Il suffit d'appliquer (4.5.13.1) à $Y = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x))$ et au morphisme canonique $Y \to X$, en tenant compte de (4.5.9), qui entraîne que Y est géométriquement irréductible.

Proposition **(4.5.15)**. — *Soient* X *un* k*-préschéma,* x *un point de* X, k' *la fermeture algébrique séparable de* k *dans* $\boldsymbol{k}(x)$. *On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(i) X *est connexe.*

(ii) k' *est une extension finie de* k.

Alors le nombre géométrique des composantes connexes de X *est* $\leqslant [k' : k]$, *et si* k'' *est une extension galoisienne finie de* k *contenant* k', *les composantes connexes de* $X \otimes_k k''$ *sont géométriquement connexes.*

On notera que la condition (ii) est vérifiée si X est *localement de type fini sur* k.

Il existe des extensions galoisiennes finies k'' de k contenant k' en vertu de la condition (ii). Posons $X'' = X \otimes_k k''$; le morphisme projection $p : X'' \to X$ est fidèlement plat et fini, donc fermé (**II**, 6.1.10) et par suite (2.3.6, (ii)) l'image par p de toute composante connexe X''_α de X'' est égale à X; X''_α contient donc un point $x''_\alpha \in p^{-1}(x)$. Mais $p^{-1}(x)$ a un nombre de points égal au nombre des composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x) \otimes_k k'')$ (**I**, 3.4.9), c'est-à-dire à $[k' : k]$ (4.3.4), et *a fortiori* le nombre des composantes connexes de X'' est $\leqslant [k' : k]$. Pour tout $x''_\alpha \in p^{-1}(x)$, $\boldsymbol{k}(x''_\alpha)$ est une extension primaire de k'' en vertu de (4.3.5) et de (**I**, 3.4.9). On peut donc appliquer à x''_α et X'' le corollaire (4.5.14), qui prouve que toutes les composantes connexes de X'' sont géométriquement connexes.

Corollaire **(4.5.16)**. — *Soient* X *un* k*-préschéma,* (X_α) *la famille de ses composantes connexes, et pour tout* α, *soit* $x_\alpha \in X_\alpha$. *On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(i) *La famille* (X_α) *est finie.*

(ii) *Pour tout* α, *la fermeture algébrique séparable* k'_α *de* k *dans* $\boldsymbol{k}(x_\alpha)$ *est une extension finie de* k.

Alors le nombre géométrique de composantes connexes de X *est au plus* $\sum_\alpha [k'_\alpha : k]$, *et il existe une extension finie séparable* k'' *de* k *telle que toutes les composantes connexes de* $X \otimes_k k''$ *soient géométriquement connexes.*

Notant que les composantes connexes de X sont ouvertes en vertu de la condition (i), il suffit d'appliquer à chacun des sous-préschémas de X induits sur les ouverts X_α le résultat de (4.5.15); pour avoir une extension k'' répondant à la question, il suffit de prendre une extension galoisienne finie de k contenant tous les k'_α.

Corollaire **(4.5.17).** — *Supposons que le k-préschéma* X *contienne un point x tel que la fermeture algébrique séparable de k dans* $\boldsymbol{k}(x)$ *soit finie sur k. Pour que* X *soit géométriquement connexe, il faut et il suffit que pour toute extension finie séparable* K *de k,* $X\otimes_k K$ *soit connexe.*

Remarque **(4.5.18).** — Nous verrons au § 8 (8.4.5) que la conclusion de (4.5.17) est encore valable si, au lieu de supposer vérifiée la condition de l'énoncé, on suppose que X est *quasi-compact.*

Proposition **(4.5.19).** — *Soient* X *un k-préschéma,* Z *une partie de* X, *k' une extension algébriquement close de k,* $X'=X\otimes_k k'$, $p: X'\rightarrow X$ *la projection canonique. On suppose que* $Z'=p^{-1}(Z)$ *est contenu dans* une seule *composante irréductible* X'_0 *de* X'. *Alors on a* $X'_0=p^{-1}(X_0)$, *où* $X_0=p(X'_0)$ *est une composante irréductible de* X *contenant* Z, *et en outre* X_0 *est géométriquement irréductible. Si de plus* X'_0 *est la seule composante irréductible de* X' *qui* rencontre Z', *alors* X_0 *est la seule composante irréductible de* X *qui rencontre* Z.

Pour montrer que $X'_0=p^{-1}(X_0)$, nous allons appliquer le

Lemme **(4.5.19.1).** — *Soient* T, T' *deux préschémas,* $p: T'\rightarrow T$ *un morphisme; considérons le préschéma* $T''=T'\times_T T'$, *et soient* $p_1: T''\rightarrow T'$, $p_2: T''\rightarrow T'$ *les projections canoniques. Pour qu'une partie* U' *de* T' *soit de la forme* $p^{-1}(U)$, *où* $U\subset T$, *il faut et il suffit que l'on ait* $p_1^{-1}(U')=p_2^{-1}(U')$.

Le morphisme structural $q: T''\rightarrow T$ est égal à $p\circ p_1$ et à $p\circ p_2$ par définition, donc la relation est nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée; soient u' un point de U', t' un point de $p^{-1}(p(u'))$; comme $p(t')=p(u')$, il existe un point $t''\in T''$ tel que $p_1(t'')=u'$, $p_2(t'')=t'$ (**I**, 3.4.7); donc $t''\in p_1^{-1}(U')=p_2^{-1}(U')$ par hypothèse, et par suite $t'=p_2(t'')\in U'$, ce qui prouve le lemme.

Ce lemme étant établi, pour démontrer que $X'_0=p^{-1}(X_0)$, formons donc le produit $X''=X'\times_X X'$ (relatif au morphisme $p: X'\rightarrow X$); si p_1 et p_2 sont les projections canoniques de X'' dans X', il s'agit donc de montrer que $p_1^{-1}(X'_0)=p_2^{-1}(X'_0)$. Or, si l'on pose $S=\mathrm{Spec}(k)$, $S'=\mathrm{Spec}(k')$, observons que si $S''=S'\times_S S'=\mathrm{Spec}(k'\otimes_k k')$, on peut aussi écrire $X''=X'\times_{S'}S''$. Si $\varphi'': X''\rightarrow S''$ est le morphisme structural, il suffit de prouver que pour tout $s''\in S''$, on a $p_1^{-1}(X'_0)\cap\varphi''^{-1}(s'')=p_2^{-1}(X'_0)\cap\varphi''^{-1}(s'')$. Si l'on pose $T=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(s''))$, $U=X''\times_{S''}T=\varphi''^{-1}(s'')$, et si $v: U\rightarrow X''$ est la projection canonique, il s'agit donc de prouver que $U_1=v^{-1}(p_1^{-1}(X'_0))$ et $U_2=v^{-1}(p_2^{-1}(X'_0))$, qui sont des composantes irréductibles de U (4.4.5) sont identiques. On a le diagramme

(4.5.19.2)
$$\begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{p} & X' & \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} & X'' & \xleftarrow{v} & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi''} & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S' & \leftleftarrows & S'' & \longleftarrow & T \end{array}$$

Par construction, U_1 et U_2 contiennent toutes deux l'ensemble $w^{-1}(Z)$, où

$$w=p\circ p_1\circ v=p\circ p_2\circ v.$$

Or, il existe un corps K, extension commune de k' et de $\boldsymbol{k}(s'')$, de sorte que si l'on pose $P=\operatorname{Spec}(K)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S' & \longleftarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & T \end{array}$$

soit commutatif; si l'on pose $Q=X\otimes_k K$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{q} & Q \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ X & \xleftarrow[w]{} & U \end{array}$$

est donc lui aussi commutatif, et les deux composantes irréductibles $r^{-1}(U_1)$ et $r^{-1}(U_2)$ de Q (4.4.5) contiennent par suite $q^{-1}(Z')$. Or, en vertu de (4.4.5), les images $q(r^{-1}(U_1))$ et $q(r^{-1}(U_2))$ sont des composantes irréductibles de X' contenant Z'; elles sont donc toutes deux égales à X'_0, donc $r^{-1}(U_1)=r^{-1}(U_2)$ en vertu de (4.4.5), et finalement $U_1=U_2$.

Comme p est surjectif et que X'_0 domine une composante irréductible de X, $X_0=p(X'_0)$ est une composante irréductible de X contenant Z, et comme $p^{-1}(X_0)$ est une composante irréductible de X', X_0 est géométriquement irréductible.

Pour prouver la dernière assertion, soit X_1 une seconde composante irréductible de X rencontrant Z. Prenant $z\in Z\cap X_1$, on voit qu'il existe une composante irréductible de X' rencontrant Z' et dominant X_1 (2.3.5) ; mais comme X'_0 est par hypothèse la seule composante irréductible de X' rencontrant Z', on a nécessairement $X_1=X_0$.

Remarque **(4.5.20)**. — Le fait que Z' soit contenu dans une seule composante irréductible X'_0 de X' *n'entraîne pas* que $X_0=p(X'_0)$ soit la seule composante irréductible de X contenant Z. Prenons en effet $k=\mathbf{R}$, $k'=\mathbf{C}$, et pour X le k-schéma obtenu par recollement [1] en un point (non générique) de $X_1=\operatorname{Spec}(\mathbf{R}[S, T]/(S^2+T^2+1))$ et de $X_2=\operatorname{Spec}(\mathbf{C}[T])$ (les anneaux locaux de ces deux courbes en chacun de leurs points fermés ayant même corps résiduel isomorphe à $\mathbf{C}$) ; X_1 et X_2 s'identifient aux deux composantes irréductibles de X; si x est leur point commun, $p^{-1}(x)$ est formé de deux points distincts y', z', $p^{-1}(X_1)$ est irréductible, et $p^{-1}(X_2)$ est somme de deux composantes irréductibles Y', Z' de X' telles que $y'\in Y'$ et $z'\in Z'$, de sorte que $p^{-1}(x)$ n'est contenu que dans une seule composante irréductible de X'.

Proposition **(4.5.21)**. — *Soit k un corps séparablement clos, et soit k' une clôture algébrique de k. Pour tout k-préschéma* X, *la projection canonique* $X\otimes_k k'\to X$ *est un homéomorphisme universel.*

---

[1] La technique de « recollement » des préschémas sera développée en détail au chap. V ; pour le cas considéré ici (où il s'agit de courbes algébriques), on peut consulter [38], p. 68-71.

En particulier les composantes irréductibles (resp. *connexes*) *de* X *sont géométriquement irréductibles* (resp. *géométriquement connexes*).

Par définition, k' est une extension radicielle de k; le morphisme $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ est entier, surjectif et radiciel, donc la première assertion résulte de (2.4.5, (i)); la seconde en résulte, vu (4.5.1).

4.6. Préschémas algébriques géométriquement réduits.

Proposition **(4.6.1)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma,* Ω *une extension parfaite de k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout k-préschéma réduit* S, $X \times_k S$ *est réduit.*

b) *Pour toute extension* K *de k,* $X \otimes_k K$ *est réduit.*

c) $X \otimes_k \Omega$ *est réduit.*

d) *Pour toute extension radicielle finie k' de k,* $X \otimes_k k'$ *est réduit.*

e) X *est réduit, et pour toute composante irréductible* X_α *de* X, *de point générique* x_α, $\boldsymbol{k}(x_\alpha)$ *est une extension séparable de k.*

Il est trivial que *a)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)*; comme k' peut être considérée comme sous-extension de Ω, on a vu (4.4.1) que *c)* implique *d)*. Montrons que *d)* implique *e)*. En prenant $k'=k$, on voit d'abord que X est réduit; pour prouver que $\boldsymbol{k}(x_\alpha)$ est séparable sur k, il suffit de montrer que $\boldsymbol{k}(x_\alpha)\otimes_k k'$ est un anneau réduit pour toute extension finie radicielle k' de k (4.3.5). On peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, A étant une k-algèbre réduite; alors par hypothèse l'anneau $A\otimes_k k'$ est réduit (**I**, 5.1.4) et $\boldsymbol{k}(x_\alpha)\otimes_k k'$ est un anneau de fractions de cet anneau, donc il est réduit ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 1.2.8). Enfin, pour prouver que *e)* entraîne *a)*, on peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, $S=\mathrm{Spec}(B)$ sont affines, A et B étant des k-algèbres. Les $\boldsymbol{k}(x_\alpha)$ sont les corps des fractions des anneaux quotients $A/\mathfrak{p}_\alpha$, où $\mathfrak{p}_\alpha=\mathfrak{j}_{x_\alpha}$ sont les idéaux premiers minimaux de A; comme par hypothèse $\bigcap_\alpha \mathfrak{p}_\alpha=0$, A est contenu dans le produit $\prod_\alpha A/\mathfrak{p}_\alpha$, donc dans $\prod_\alpha \boldsymbol{k}(x_\alpha)$; on peut de même considérer B comme une sous-algèbre d'un produit $\prod_\beta L_\beta$ d'extensions de k. Il en résulte que $A\otimes_k B$ s'identifie à une sous-algèbre de $(\prod_\alpha \boldsymbol{k}(x_\alpha))\otimes_k(\prod_\beta L_\beta)$, et ce produit tensoriel s'identifie lui-même à une sous-algèbre de $\prod_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{k}(x_\alpha)\otimes_k L_\beta)$ (Bourbaki, *Alg.*, chap. II, 3e éd., § 7, no 7, prop. 15). Or par hypothèse les $\boldsymbol{k}(x_\alpha)\otimes_k L_\beta$ sont réduits (4.3.5), donc il en est de même de $A\otimes_k B$.

Définition **(4.6.2)**. — *Si les conditions équivalentes* a) *à* e) *de la proposition* (4.6.1) *sont remplies, on dit que* X *est* séparable (*ou* géométriquement réduit, *ou* universellement réduit) sur k. *On dit qu'un k-préschéma* X *est* géométriquement intègre sur k *si, pour toute extension* K *de k,* $X\otimes_k K$ *est intègre; il revient au même* (*en vertu de* (4.6.1)) *de dire que* X *est séparable et géométriquement irréductible sur k.*

On dira qu'une k-algèbre A (commutative) est *séparable* si Spec(A) est séparable sur k; cela signifie donc que pour toute extension K de k, l'anneau $A_{(K)}=A\otimes_k K$ est réduit. On notera que cette définition coïncide avec celle de Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII,

§ 7, n° 5, déf. 1, lorsque A est de rang *fini* sur k (*loc. cit.*, cor. de la prop. 7), mais non en général, une k-algèbre pouvant avoir un radical $\neq 0$ même si elle est intègre.

Corollaire **(4.6.3)**. — *Soit* X *un* k*-préschéma intègre; pour que* X *soit géométriquement réduit* (resp. *géométriquement intègre*) *sur* k, *il faut et il suffit que son corps de fonctions rationnelles* R(X) *soit une extension séparable* (resp. *séparable et primaire*) *de* k.

Cela résulte aussitôt de (4.5.9) et (4.6.1).

Corollaire **(4.6.4)**. — *Soit* X *un* k*-préschéma réduit. Alors, pour toute extension séparable* k' *de* k, $X' = X \otimes_k k'$ *est réduit.*

Il suffit d'appliquer l'équivalence de *a)* et *e)* dans (4.6.1), en remplaçant X par Spec(k') et S par X.

Proposition **(4.6.5)**. — (i) *Soient* X *un* k*-préschéma,* K *une extension de* k. *Pour que* X *soit géométriquement réduit* (resp. *géométriquement intègre*) *sur* k, *il faut et il suffit que* $X \otimes_k K$ *soit géométriquement réduit* (resp. *géométriquement intègre*) *sur* K.

(ii) *Soient* X, Y *deux* k*-préschémas. Si* X *et* Y *sont géométriquement réduits* (resp. *géométriquement intègres*) *sur* k, *il en est de même de* $X \times_k Y$.

L'assertion (i) est conséquence triviale des définitions et de (4.4.1). Pour démontrer la partie de l'assertion de (ii) concernant la séparabilité, on observe que si Ω est une extension algébriquement close de k, on a $(X \times_k Y) \otimes_k \Omega = X \times_k (Y \otimes_k \Omega)$; comme $Y \otimes_k \Omega$ est réduit, il en est de même de $X \times_k (Y \otimes_k \Omega)$ en vertu de (4.6.1, *a)*). Le reste de l'assertion (ii) résulte de ce qui précède et de (4.5.8, (ii)).

Proposition **(4.6.6)**. — *Soit* X *un* k*-préschéma de type fini. Il existe une extension radicielle finie* k' *de* k *telle que* $(X_{(k')})_{\mathrm{red}}$ *soit géométriquement réduit sur* k'.

Comme X peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines U_i, on peut se borner au cas où X est affine : en effet, si pour chaque i, k_i est une extension radicielle finie de k telle que $(U_i \otimes_k k_i)_{\mathrm{red}}$ soit géométriquement réduit sur k_i, on peut supposer que les k_i sont contenus dans une même extension radicielle finie k' de k; $(U_i \otimes_k k')_{\mathrm{red}}$ s'identifie à $(U_i \otimes_k k_i)_{\mathrm{red}} \otimes_{k_i} k'$ en vertu de (**I**, 5.1.8), donc est géométriquement réduit sur k' par hypothèse, et il en est donc de même de $(X \otimes_k k')_{\mathrm{red}}$. Supposons donc que $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une k-algèbre de type fini, et soit Ω une clôture algébrique de k. Désignons par $\mathfrak{N}'$ le nilradical de $A \otimes_k \Omega$; comme $A \otimes_k \Omega$ est un anneau noethérien, $\mathfrak{N}'$ est un idéal engendré par un nombre fini d'éléments de la forme $y_i = \sum_j x_{ij} \otimes \xi_{ij}$ où $x_{ij} \in A$, $\xi_{ij} \in \Omega$. Soient K une sous-extension finie de Ω contenant les ξ_{ij}, et $\mathfrak{N}$ l'idéal de $A \otimes_k K$ engendré par les y_i ($A \otimes_k K$ étant identifié à un sous-anneau de $A \otimes_k \Omega$); il est clair que les y_i sont nilpotents dans $A \otimes_k K$; d'autre part, comme $\mathfrak{N} \otimes_K \Omega = \mathfrak{N}'$ (et par suite $\mathfrak{N}' \cap (A \otimes_k K) = \mathfrak{N}$), $\mathfrak{N}$ contient le nilradical de $A \otimes_k K$, donc il est égal à ce nilradical. Comme $(A \otimes_k \Omega)/\mathfrak{N}' = ((A \otimes_k K)/\mathfrak{N}) \otimes_K \Omega$, on voit que $(X \otimes_k K)_{\mathrm{red}} \otimes_K \Omega$ est réduit, et par suite (4.6.1), $(X_{(K)})_{\mathrm{red}}$ est géométriquement réduit sur K. En remplaçant K par l'extension quasi-galoisienne sur k qu'il engendre dans Ω, on voit par (**I**, 5.1.8) que l'on peut supposer en outre K quasi-galoisienne sur k, donc extension séparable d'une extension radicielle finie k' de k (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 10, n° 9, prop. 14). En vertu de (**I**, 5.1.8), $(X_{(k')})_{\mathrm{red}} \otimes_{k'} K$ est isomorphe à $(X_{(K)})_{\mathrm{red}}$, donc est géométriquement réduit; il en est alors de même de $(X_{(k')})_{\mathrm{red}}$ en vertu de (4.6.5, (i)).

Corollaire (**4.6.7**). — *Si* K *est une extension de type fini de k, il existe une extension radicielle finie k' de k telle que les corps résiduels de l'anneau semi-local* $K \otimes_k k'$ *soient séparables sur k'.*

Il suffit d'appliquer (4.6.6) à $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une k-algèbre de type fini dont K est le corps des fractions.

Corollaire (**4.6.8**). — *Soit* X *un k-préschéma de type fini. Il existe une extension finie k' de k telle que* $(X_{(k')})_{\mathrm{red}}$ *soit géométriquement réduit sur k' et que les composantes irréductibles de* $X_{(k')}$ *soient géométriquement irréductibles et les composantes connexes de* $X_{(k')}$ *géométriquement connexes.*

Cela résulte aussitôt de (4.6.6), de (4.5.10) et (4.5.15).

Définition (**4.6.9**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma, x un point de* X. *On dit que* X *est* géométriquement réduit (*ou* séparable) (resp. géométriquement ponctuellement intègre) *au point x sur k, si, pour toute extension k' de k et tout point x' de* $X' = X \otimes_k k'$ *au-dessus de x,* X' *est réduit* (resp. *intègre*) *en x'* (i.e., $\mathcal{O}_{X',x'}$ *est réduit* (resp. *intègre*)). *On dit que* X *est* géométriquement ponctuellement intègre *si* X *est géométriquement ponctuellement intègre en tous ses points, autrement dit si, pour toute extension k' de k, tous les anneaux locaux de* $X \otimes_k k'$ *sont intègres* (auquel cas on dit aussi que $X \otimes_k k'$ est *ponctuellement intègre*).

Notons que, pour que X soit géométriquement réduit sur k (4.6.2), il faut et il suffit qu'il soit géométriquement réduit sur k en tout point $x \in X$.

Proposition (**4.6.10**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma, k' une extension de k, x' un point de* $X' = X \otimes_k k'$, *x son image dans* X. *Pour que* X *soit géométriquement réduit* (resp. *géométriquement ponctuellement intègre*) *en x sur k, il faut et il suffit que* X' *le soit en x' sur k'. En particulier, pour que* X *soit géométriquement ponctuellement intègre sur k, il faut et il suffit que* X' *soit géométriquement ponctuellement intègre sur k'.*

Il suffit de prouver la première assertion. La condition étant évidemment nécessaire, prouvons qu'elle est suffisante. Supposons donc X' géométriquement réduit (resp. géométriquement ponctuellement intègre) au point x' sur k' et prouvons que X l'est au point x sur k, autrement dit que pour toute extension k'' de k et tout point x'' de $X'' = X \otimes_k k''$ au-dessus de x, $\mathcal{O}_{X'',x''}$ est réduit (resp. intègre). Pour cela, notons qu'il existe un point z de $X' \times_X X''$ qui se projette en x' et x'' (**I**, 3.4.7). Soit s le point de $\mathrm{Spec}(k' \otimes_k k'')$ image de z (**I**, 3.4.9); posons $K = \boldsymbol{k}(s)$, $Z = X \otimes_k K$, de sorte que K peut être considéré comme extension composée de k' et k'', et z comme un point de Z dont l'image dans X' (resp. X'') est x' (resp. x''). Comme X' est géométriquement réduit (resp. géométriquement ponctuellement intègre) au point x' sur k', l'anneau $\mathcal{O}_{Z,z}$ est réduit (resp. intègre), et comme $\mathcal{O}_{Z,z}$ est un $\mathcal{O}_{X'',x''}$-module fidèlement plat, il s'ensuit que $\mathcal{O}_{X'',x''}$ est réduit (resp. intègre) ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.5.1).

Corollaire (**4.6.11**). — *Supposons k parfait* (resp. *algébriquement clos*). *Pour que* X *soit géométriquement réduit* (resp. *géométriquement ponctuellement intègre*) *au point x sur k, il faut et il suffit que* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit réduit* (resp. *intègre*).

C'est évidemment nécessaire. Inversement, si cette condition est remplie, alors, pour toute extension k' de k, $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \otimes_k k'$ est réduit (4.6.4) (resp. intègre (4.4.4));

donc, pour tout point x' de $X'=X\otimes_k k'$ au-dessus de x, $\mathcal{O}_{X',x'}$, qui est isomorphe à un anneau local de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})\otimes_k k'$, est réduit (resp. intègre).

Proposition **(4.6.12)**. — *Soient k un corps, X un k-préschéma, x un point de X, Ω une extension parfaite de k. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *X est géométriquement réduit sur k au point x, autrement dit, pour toute extension k' de k et tout point x' de $X'=X\otimes_k k'$ au-dessus de x, $\mathcal{O}_{X',x'}$ est réduit.*

b) *Le préschéma $X\otimes_k\Omega$ est réduit en un point au-dessus de x.*

c) *Pour toute extension finie radicielle k' de k, $X'=X\otimes_k k'$ est réduit en l'unique point au-dessus de x.*

d) *$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ est géométriquement réduit sur k.*

e) *$\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit, et pour toute composante irréductible Z de X contenant x, de point générique z, $\boldsymbol{k}(z)$ est une extension* séparable *de k.*

Les implications *d)* $\Rightarrow$ *a)* $\Rightarrow$ *b)* $\Rightarrow$ *c)* sont immédiates, en tenant compte pour la dernière de (4.6.10), (4.6.11) et de ce que toute extension radicielle de k est isomorphe à une sous-extension de Ω. Prouvons que *c)* implique *d)*. Il suffit de montrer que pour toute extension radicielle finie k' de k, $\mathcal{O}_{X,x}\otimes_k k'$ est réduit (4.6.1) ; or cet anneau est l'anneau local de $X'=X\otimes_k k'$ en l'unique point x' de X' au-dessus de x (**I**, 3.5.8 et 3.5.7) ; il est donc réduit en vertu de l'hypothèse *c)*. Enfin, l'équivalence de *d)* et de *e)* résulte de l'équivalence de *b)* et *e)* dans (4.6.1), puisque les composantes irréductibles de X contenant x correspondent biunivoquement aux composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ (**I**, 2.4.2).

Corollaire **(4.6.13)**. — *Sous les hypothèses de* (4.6.12), *supposons de plus que X soit localement noethérien. Alors les conditions a) à e) de* (4.6.12) *équivalent aussi à la suivante :*

f) *Il existe un voisinage ouvert U de x qui est géométriquement réduit sur k.*

En effet, cette condition implique trivialement que X est géométriquement réduit au point x sur k. Inversement, s'il en est ainsi, puisque l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit, il existe un voisinage ouvert U de x dans X qui est réduit (**I**, 6.1.13) ; prenant U assez petit, on peut en outre supposer que U ne rencontre aucune des composantes irréductibles de X ne contenant pas x. Alors le critère (4.6.12, *e)*) prouve que U est géométriquement réduit sur k, compte tenu du critère (4.6.1, *e)*).

Il résulte de (4.6.13) que lorsque X est localement noethérien, l'ensemble des $x\in X$ où X est géométriquement réduit sur k est *ouvert*, et c'est le plus grand ouvert de X qui soit géométriquement réduit sur k.

(4.6.14) Il résulte de (4.6.10) et (4.6.11) que si Ω est une extension algébriquement close de k, il revient au même de dire que X est géométriquement ponctuellement intègre au point x, ou que $X\otimes_k\Omega$ est intègre en *un* point au-dessus de x.

Pour que X soit géométriquement ponctuellement intègre au point x, il est nécessaire que X soit intègre au point x, et que si z est le point générique de l'unique composante irréductible de X contenant x, $\boldsymbol{k}(z)$ soit une extension séparable de k ; cela résulte de (4.6.10). Mais ces conditions *ne sont pas suffisantes*, comme il résulte de l'exemple (4.5.12, (ii)). Une condition suffisante mais non nécessaire est que X soit géométriquement réduit au point x et n'appartienne qu'à une seule composante irréductible de X, que l'on suppose en outre *géométriquement irréductible*; si de plus X est localement noethérien, il y a alors un voisinage ouvert de x dans X qui est *géométriquement intègre*.

Rappelons que si un préschéma *localement noethérien* est ponctuellement intègre, il est *localement intègre* (**I**, 6.1.13). Si un k-préschéma X, localement de type fini sur k, est géométriquement ponctuellement intègre sur k, il résulte donc de cette remarque que, pour toute extension k' de k, $X\otimes_k k'$ est *localement intègre* (on dit encore dans ce cas que X est *géométriquement localement intègre*).

Proposition (**4.6.15**). — (i) *Soient k un corps,* X *un k-préschéma de type fini. Pour que* X *soit géométriquement ponctuellement intègre, il faut et il suffit qu'il soit géométriquement réduit et que le nombre géométrique de ses composantes irréductibles soit égal au nombre géométrique de ses composantes connexes.*

(ii) *Soit* X *un préschéma localement de type fini sur k. Si* X *est géométriquement ponctuellement intègre en un point x, il existe un voisinage ouvert* U *de x qui est géométriquement ponctuellement intègre. En d'autres termes, l'ensemble des $x\in X$ où* X *est géométriquement ponctuellement intègre est ouvert dans* X.

(i) Étant donnée une extension algébriquement close Ω de k, $X_{(\Omega)}$ est ponctuellement intègre (ou localement intègre, ce qui revient au même puisque $X_{(\Omega)}$ est noethérien) si et seulement s'il est réduit et si le nombre de ses composantes connexes est égal au nombre de ses composantes irréductibles (**I**, 6.1.10). Il suffit alors d'appliquer (4.5.1), (4.6.1) et la première remarque de (4.6.14).

(ii) La question étant locale sur X, on peut se borner au cas où X est un préschéma de type fini sur k. En outre, on sait qu'il y a un voisinage ouvert de x dans X qui est géométriquement réduit (4.6.13), donc on peut supposer X géométriquement réduit. Il existe alors une extension finie k' de k tel que $X'=X\otimes_k k'$ soit réduit et que ses composantes irréductibles soient géométriquement irréductibles (4.6.8). Soit $p: X'\to X$ la projection canonique, qui est un morphisme fini surjectif, et soient x'_j ($1\leqslant j\leqslant r$) les points de $p^{-1}(x)$; par hypothèse, X' est intègre en chacun des x'_j, donc chaque x'_j a un voisinage ouvert V'_j dans X' qui est intègre. Comme p est fermé (**II**, 6.1.10), chacun des $p(V'_j)$ est un voisinage de x, donc il existe un voisinage ouvert U de x tel que $p^{-1}(U)$ soit contenu dans la réunion des V'_j, et soit par suite intègre en chacun de ses points, donc localement intègre. Les composantes irréductibles de $p^{-1}(U)$ sont donc ouvertes et deux à deux disjointes, et comme elles sont géométriquement irréductibles (4.5.9), $p^{-1}(U)=U\otimes_k k'$ est géométriquement ponctuellement intègre en vertu de (i), et il en est donc de même de U par définition.

Proposition (**4.6.16**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement noethérien, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour toute extension de type fini k' de k, si l'on pose $X'=X\otimes_k k'$, alors $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\otimes_k k'$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module réduit* (3.2.2).

b) *Pour toute extension finie radicielle k' de k, $\mathscr{F}'$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-Module réduit.*

c) *$\mathscr{F}$ est réduit, et si $\mathscr{J}$ est l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ annulateur de $\mathscr{F}$, le sous-préschéma fermé défini par $\mathscr{J}$ est géométriquement réduit sur k.*

En outre, si X *est localement de type fini sur* k, *ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :*

d) *Pour toute extension* k' *de* k (ou *pour* une *extension algébriquement close* k' *de* k), $\mathscr{F}'$ *est un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module réduit.*

Il est clair que *a)* entraîne *b)*. La condition *b)* entraîne d'abord que $\mathscr{F}$ est réduit : cela signifie (3.2.3) que si Y est le sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathcal{O}_X$, annulateur de $\mathscr{F}$, Y est *réduit*, et il y a un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent sans torsion $\mathscr{G}$ de rang 1 sur toute composante irréductible de Y, tel que $j_*(\mathscr{G})=\mathscr{F}$, $j: Y\rightarrow X$ étant l'injection canonique. Or, pour *toute* extension k' de k, l'annulateur de $\mathscr{F}'$ est $\mathscr{J}'=\mathscr{J}\otimes_k k'$, le morphisme projection $X'\rightarrow X$ étant plat (2.1.11); le sous-préschéma fermé de X' défini par $\mathscr{J}'$ est $Y'=Y\otimes_k k'$, et si $j': Y'\rightarrow X'$ est l'injection canonique, et $\mathscr{G}'=\mathscr{G}\otimes_k k'$, on a $\mathscr{F}'=j'_*(\mathscr{G}')$. Notons aussi que, pour toute extension k' de k telle que X' soit localement noethérien, $\mathscr{F}'$ est sans cycle premier associé immergé (4.2.7). De plus, tout point maximal y' de Y' est au-dessus d'un point maximal y de Y; comme $\mathscr{G}_y$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{Y,y}$, $\mathscr{G}'_{y'}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{Y',y'}$. On voit donc (par (3.2.3)) qu'il revient au même de dire que $\mathscr{F}'$ est réduit ou que le préschéma Y' est réduit, lorsque X' est *localement noethérien.* Le fait que *b)* entraîne *c)* et que *c)* entraîne *a)* est donc conséquence de (4.6.1, *d)* et *b)*); dans *a)*, l'hypothèse que k' est une extension de type fini de k n'est faite que pour assurer que X' est localement noethérien. Lorsque X est localement de type fini, X' est localement noethérien pour toute extension k' de k, ce qui prouve dans ce cas l'équivalence de *d)* et des autres conditions.

Définition **(4.6.17)**. — *Lorsque* $\mathscr{F}$ *vérifie les conditions équivalentes de* (4.6.16), *on dit que* $\mathscr{F}$ *est géométriquement réduit sur* k, *ou séparable sur* k.

Proposition **(4.6.18)**. — *Soient* k *un corps,* X *un* k*-préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour toute extension de type fini* k' *de* k, *si l'on pose* $X'=X\otimes_k k'$, *alors* $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\otimes_k k'$ *est un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module intègre* (3.2.4).

b) *Pour toute extension finie* k' *de* k, $\mathscr{F}'$ *est un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module intègre.*

c) $\mathscr{F}$ *est réduit (ou intègre), et si* $\mathscr{J}$ *est l'Idéal de* $\mathcal{O}_X$ *annulateur de* $\mathscr{F}$, *le sous-préschéma fermé défini par* $\mathscr{J}$ *est géométriquement intègre.*

En outre, si X *est localement de type fini sur* k, *ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :*

d) *Pour toute extension* k' *de* k (ou *pour* une *extension algébriquement close* k' *de* k), $\mathscr{F}'$ *est un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module intègre.*

Les conditions *a)*, *b)* et *c)* entraînent que $\mathscr{F}$ est intègre, donc $\operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ réduit à un seul point x, qui est le point générique de $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$. Pour *toute* extension k' de k pour laquelle X' est localement noethérien, les cycles premiers associés à $\mathscr{F}'$ sont donc non immergés, et sont les points maximaux de $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}')$, qui sont tous au-dessus de x. D'autre part, en vertu de (4.6.16), chacune des conditions *a)*, *b)*, *c)* entraîne que $\mathscr{F}$ est géométriquement réduit; il est trivial que *a)* entraîne *b)*, et *b)* entraîne que $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$ est géométriquement irréductible (4.5.9), donc *c)*, puisque le sous-préschéma Y défini par $\mathscr{J}$ est alors géométriquement réduit et géométriquement irréductible, donc géométriquement intègre. Inversement, si Y est géométriquement intègre, pour *toute* extension k' de k, $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ est irréductible, donc, si X' est localement noethérien, $\mathscr{F}'$ est intègre; cela montre que *c)* entraîne *a)*, et que *c)* entraîne *d)* lorsque X est localement de type fini sur k.

Définition (**4.6.19**). — *Lorsque $\mathscr{F}$ vérifie les conditions équivalentes de* (4.6.18), *on dit que $\mathscr{F}$ est géométriquement intègre sur k.*

Proposition (**4.6.20**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement noethérien, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent. Soit* K *une extension de k telle que* $X\otimes_k K$ *soit localement noethérien. Alors, si $\mathscr{F}$ est géométriquement réduit* (resp. *géométriquement intègre*) *sur k,* $\mathscr{F}\otimes_k K$ *est géométriquement réduit* (resp. *géométriquement intègre*) *sur* K.

En effet, pour toute extension finie K' de K, $(X\otimes_k K)\otimes_K K' = X\otimes_k K'$ est localement noethérien, et on a vu dans les démonstrations de (4.6.16) et (4.6.18) que l'hypothèse sur $\mathscr{F}$ entraîne que $\mathscr{F}\otimes_k K'$ est réduit (resp. intègre), d'où la conclusion.

Proposition (**4.6.21**). — *Soient k un corps,* X, Y *deux k-préschémas localement noethériens tels que* $X\times_k Y$ *soit localement noethérien. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_Y$-Module cohérent.*

(i) *Si $\mathscr{F}$ est géométriquement réduit* (resp. *géométriquement intègre*) *et $\mathscr{G}$ réduit* (resp. *intègre*), *alors* $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}$ *est réduit* (resp. *intègre*).

(ii) *Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont géométriquement réduits* (resp. *géométriquement intègres*), *il en est de même de* $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}$.

(i) Utilisant (3.2.3), (4.6.16) et (4.6.18), on peut se borner au cas où $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})=X$, $\mathrm{Supp}(\mathscr{G})=Y$, X étant géométriquement réduit (resp. géométriquement intègre), Y réduit (resp. intègre), $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sans cycles premiers associés immergés, et $\mathscr{F}_x$ étant isomorphe à $\mathscr{O}_x$ en tout point maximal x de X, $\mathscr{G}_y$ isomorphe à $\mathscr{O}_y$ en tout point maximal y de Y. On sait alors (4.2.3) que $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}$ est sans cycle premier associé immergé, et que les cycles premiers associés à $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}$ sont exactement les composantes irréductibles de $X\times_k Y$ (4.2.5). On peut donc se borner au cas où X et Y sont irréductibles; alors, si X est géométriquement réduit et Y réduit, on sait (4.2.4, (ii)) que $X\times_k Y$ est réduit; si X est géométriquement intègre et Y intègre, on sait que $X\times_k Y$ est en outre irréductible (4.5.8, (i)), donc intègre. Enfin, tout point maximal z de $X\times_k Y$ est au-dessus de x et de y, donc les hypothèses sur $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ entraînent, en vertu de (**I**, 9.1.12) que $(\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G})_z$ est isomorphe à $\mathscr{O}_z$, ce qui achève la démonstration dans ce cas.

(ii) Le raisonnement est analogue, mais ici (après réduction au cas où $X=\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, $Y=\mathrm{Supp}(\mathscr{G})$), $X\times_k Y$ est géométriquement réduit (resp. géométriquement intègre) en vertu de (4.6.5, (ii)).

Les définitions (4.6.18) et (4.6.19) se localisent :

Définition (**4.6.22**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement noethérien, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent. On dit que $\mathscr{F}$ est* géométriquement réduit *ou* séparable (resp. géométriquement ponctuellement intègre) *en un point* $x\in X$ *si, pour toute extension finie radicielle* (resp. *finie*) *k' de k,* $\mathscr{F}\otimes_k k'$ *est réduit* (resp. *intègre*) *en chacun des points x' de* $X\otimes_k k'$ *au-dessus de x* (cf. (3.2.2) et (3.2.4)).

Si $\mathscr{F}$ est réduit en x, il y a un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit réduit (3.2.2). En raisonnant comme dans (4.6.16), on voit que dire que $\mathscr{F}$ est géométriquement réduit au point x équivaut à dire que $\mathscr{F}$ est réduit au point x et que le sous-préschéma fermé Y défini par l'annulateur $\mathscr{J}$ de $\mathscr{F}$ est *géométriquement réduit au point* x; il en résulte qu'il y a un voisinage ouvert U de x tel que $\mathscr{F}|U$ soit *géométriquement réduit* (4.6.11). Les raisonnements de (4.6.16) et (4.6.18) montrent aussi que si X est localement de type fini sur k, dire que $\mathscr{F}$ est géométriquement ponctuellement intègre au point x équivaut à dire que $\mathscr{F}$ est réduit au point x et que le sous-préschéma Y est *géométriquement ponctuellement intègre au point* x.

4.7. Multiplicités dans la décomposition primaire sur un préschéma algébrique.

Lemme **(4.7.1)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local. On suppose que* B *soit un* A*-module plat, et* $B/\mathfrak{m}B$ *un* B*-module de longueur finie. Alors, pour qu'un* A*-module* M *soit de longueur finie, il faut et il suffit que* $M_{(B)}$ *soit un* B*-module de longueur finie, et on a*

(4.7.1.1) $$\operatorname{long}_B(M_{(B)}) = \operatorname{long}_A(M) . \operatorname{long}_B(B/\mathfrak{m}B).$$

C'est un cas particulier de (2.5.5.2).

Corollaire **(4.7.2)**. — *Soient* A, B *deux anneaux noethériens,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux tel que* B *soit un* A*-module plat. Soient* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier minimal de* B, $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$, M *un* A*-module de type fini; alors* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier minimal de* A, $M_\mathfrak{p}$ *est un* $A_\mathfrak{p}$*-module de longueur finie et l'on a*

(4.7.2.1) $$\operatorname{long}_{B_\mathfrak{q}}(M_{(B)})_\mathfrak{q} = (\operatorname{long}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}))(\operatorname{long}_{B_\mathfrak{q}}(B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q})).$$

En effet, $B_\mathfrak{q}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.3.2) et l'homomorphisme $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ est local, donc $B_\mathfrak{q}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module fidèlement plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.6.2); le fait que $\mathfrak{p}$ est minimal dans A résulte de (2.3.5). En outre, $A_\mathfrak{p}$ est alors un anneau artinien (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, prop. 9) et $M_\mathfrak{p}$ est donc un $A_\mathfrak{p}$-module de longueur finie; la formule (4.7.2.1) est donc un cas particulier de (4.7.1.1).

Proposition **(4.7.3)**. — *Soient k un corps d'exposant caractéristique p,* X *un préschéma intègre localement noethérien,* $K = R(X)$ *le corps des fonctions rationnelles sur* X. *Soient k' une extension de k,* (X'_α) *la famille des composantes irréductibles de* $X' = X_{(k')}$, x'_α *le point générique de* X'_α.

(i) *On suppose que* X' *soit localement noethérien* (ce qui a lieu si X est *localement de type fini sur k,* ou si k' est une extension *de type fini* de k). *Soient alors k'' une extension quelconque de k',* $X'' = X \otimes_k k''$, (X''_β) *la famille des composantes irréductibles de* X'', x''_β *le point générique de* X''_β. *Si* x''_β *est au-dessus de* x'_α, *on a*

(4.7.3.1) $$\operatorname{long}(\mathscr{O}_{x''_\beta}) = \operatorname{long}(\mathscr{O}_{x'_\alpha}) . \operatorname{long}(\mathscr{O}_{Z'', x''_\beta})$$

où l'on a posé $Z'' = (X'_{\mathrm{red}}) \otimes_{k'} k''$. *En particulier, si k'' est une extension* séparable *de k' telle que* Z'' *soit localement noethérien, on a* $\operatorname{long}(\mathscr{O}_{x''_\beta}) = \operatorname{long}(\mathscr{O}_{x'_\alpha})$.

(ii) *Si* X *est localement de type fini sur* k, *ou si* k' *est une extension de type fini de* k, *les nombres* $\operatorname{long}(\mathcal{O}_{x'_\alpha})$ *sont des puissances de* p.

(iii) *On suppose que* X *est localement de type fini sur* k. *Alors, si* k' *est parfait, tous les nombres* $\operatorname{long}(\mathcal{O}_{x'_\alpha})$ *sont égaux et ne dépendent que de l'extension* K *de* k (et non de l'extension parfaite particulière k' de k considérée). *En outre, il existe une extension radicielle finie* k_1 *de* k *telle que, si* x_1 *est le point générique de* $X_1 = X \otimes_k k_1$ *(qui est irréductible), on ait* $\operatorname{long}(\mathcal{O}_{x'_\alpha}) = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{x_1})$ *pour tout* α.

(i) Rappelons (4.2.4) que les composantes irréductibles X'_α, qui sont en nombre fini, correspondent biunivoquement aux idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_\alpha$ de $K \otimes_k k'$, et que $\mathcal{O}_{x'_\alpha}$ est un anneau *artinien*, isomorphe à $(K \otimes_k k')_{\mathfrak{p}_\alpha}$; ces anneaux ne dépendent donc que des extensions K et k' de k (et sont par suite les mêmes (k' étant fixé) pour tous les k-préschémas intègres ayant même corps K de fonctions rationnelles). La formule (4.7.3.1) résulte de (4.7.2.1) appliquée à l'anneau noethérien A d'un voisinage affine de x'_α dans X', et à l'anneau B d'un voisinage affine assez petit de x''_β dans X'', $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ étant les idéaux premiers minimaux correspondant à x'_α et x''_β respectivement, et en prenant $M = A$: on notera que $A/\mathfrak{p}$ est l'anneau d'un voisinage affine de x'_α dans X'_{red}, et que $B = A \otimes_{k'} k''$; si $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}/\mathfrak{p}B$, idéal premier minimal de $B/\mathfrak{p}B$, on a $\mathcal{O}_{Z'', x''_\beta} = (B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}'} = B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$, d'où (4.7.3.1). La dernière assertion de (i) résulte de ce que dans ce cas Z'' est réduit (4.2.4), donc $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$.

(ii) Si k' est une extension de type fini de k, il y a une extension transcendante pure k'_0 de k telle que k' soit une extension finie de k'_0; comme k'_0 est séparable sur k, il résulte de (i) appliqué en remplaçant k' et k'' par k et k'_0 respectivement, que l'on peut remplacer X par $X \otimes_k k'_0$, autrement dit, supposer que k' est une extension *finie* de k. Il y a alors une extension finie quasi-galoisienne k'' de k contenant k', et la formule (4.7.3.1) montre qu'il suffit de prouver l'assertion pour k''. Mais k'' est une extension *séparable* d'une extension radicielle finie k_1 de k, donc, en vertu de (i), on est ramené dans ce cas à prouver l'assertion lorsque $k' = k_1$ est en outre *radicielle*. On sait alors que $K \otimes_k k_1$ est un anneau artinien n'ayant qu'un seul idéal premier minimal (4.3.2); si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, la longueur de $K \otimes_k k_1$ divise celle de l'anneau artinien $\overline{K} \otimes_k k_1$ en vertu de (4.7.1.1). Mais $\overline{K} \otimes_k k_1$ est une $\overline{K}$-algèbre artinienne n'ayant qu'un seul idéal premier (nécessairement maximal), et son quotient par cet idéal est une extension finie de $\overline{K}$, donc nécessairement égale à $\overline{K}$; la longueur de $\overline{K} \otimes_k k_1$ est donc égale à son rang sur $\overline{K}$, c'est-à-dire à $[k_1 : k]$, qui est une puissance de p.

Supposons ensuite que X soit localement de type fini sur k; alors, X'' est localement noethérien pour toute extension k'' de k'. Prenant pour k'' une extension algébriquement close de k', on est ramené, en vertu de (4.7.3.1), à prouver l'assertion lorsque k' est *algébriquement clos*. Comme k' est alors une extension *séparable* de la clôture algébrique $\overline{k}$ de k, il résulte encore de (i) qu'on est ramené au cas où $k' = \overline{k}$. Or, on sait (en remplaçant X par un ouvert affine de type fini sur k) qu'il y a une extension radicielle finie k_1 de k telle que $(X \otimes_k k_1)_{\text{red}}$ soit séparable sur k_1 (4.6.6); donc $(X \otimes_k k_1)_{\text{red}} \otimes_{k_1} \overline{k}$ est réduit (4.6.4). En vertu de (4.7.3.1), on est donc de nouveau ramené au cas où k' est une extension finie radicielle de k, et on conclut comme plus haut.

(iii) Notons que deux extensions k', k'' de k sont contenues dans une même extension algébriquement close de k; pour montrer que l'ensemble des nombres $\operatorname{long}(\mathcal{O}_{x'_\alpha})$, pour k' *parfaite*, ne dépend pas du choix de k', on peut donc se borner à comparer ces nombres pour k' et pour une extension algébriquement close k'' de k'; dans ce cas, l'assertion résulte de (i), puisque k'' est *séparable* sur k'. Pour montrer que tous les nombres $\operatorname{long}(\mathcal{O}_{x'_\alpha})$ sont égaux, on peut donc se borner au cas où $k' = \overline{k}$, clôture algébrique de k. Or, l'extension radicielle finie k_1 de k étant alors déterminée comme dans (ii), les x'_α sont tous au-dessus de l'unique point générique de $X_1 = X \otimes_k k_1$, et la relation $\operatorname{long}(\mathcal{O}_{x'_\alpha}) = \operatorname{long}(\mathcal{O}_{x_1})$ pour tout α résulte encore de (4.7.3.1), vu le choix de k_1.

Définition **(4.7.4)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma intègre,* K *le corps des fonctions rationnelles sur* X. *On appelle* multiplicité radicielle *de* K *(ou de* X*) sur k la borne supérieure des longueurs des anneaux artiniens $K \otimes_k k_1$, lorsque k_1 parcourt l'ensemble des extensions radicielles finies de k. On appelle* multiplicité séparable *de* K *(ou de* X*) sur k le nombre géométrique des composantes irréductibles de* X *si ce nombre est fini, et $+\infty$ dans le cas contraire. Enfin, on appelle* multiplicité totale *de* K *(ou de* X*) sur k le produit de la multiplicité radicielle et de la multiplicité séparable de* K *sur k.*

On notera que si p est l'exposant caractéristique de k et si la multiplicité radicielle de K sur k est finie, c'est une puissance $q = p^f$ de p, comme il résulte de (4.7.3, (ii)); lorsque $p \neq 1$, f est bien déterminé et est appelé l'*exposant d'inséparabilité* de K sur k; lorsque $p = 1$, la multiplicité radicielle est toujours égale à 1.

Dire que la multiplicité radicielle (resp. séparable, resp. totale) de X sur k est 1 signifie que X est géométriquement réduit (resp. géométriquement irréductible, resp. géométriquement intègre) sur k.

Lorsque X est localement de type fini, la multiplicité radicielle de X sur k est encore la longueur commune des anneaux locaux A_i aux idéaux premiers minimaux de l'anneau total des fractions A de $K \otimes_k k'$, pour toute extension parfaite k' de k; la multiplicité séparable de X sur k est le nombre d'idéaux premiers minimaux de $A = K \otimes_k \Omega$ pour toute extension algébriquement close Ω de k, et enfin la multiplicité totale est la somme des longueurs des anneaux locaux A_i de $A = K \otimes_k \Omega$ en ses idéaux premiers minimaux; ces nombres sont tous trois *finis* dans ce cas.

Définition **(4.7.5)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement de type fini sur k, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, x un point de* X *tel que $\mathscr{F}_x$ soit un $\mathcal{O}_x$-module de longueur finie. On appelle* longueur géométrique *de $\mathscr{F}$ en x (relative à k), ou* multiplicité radicielle *de x pour $\mathscr{F}$ le produit $\lambda_x(\mathscr{F}) = (\operatorname{long}_{\mathcal{O}_x}(\mathscr{F}_x))\mu_i(\boldsymbol{k}(x)|k)$, où $\mu_i(\boldsymbol{k}(x)|k)$ désigne la multiplicité radicielle de $\boldsymbol{k}(x)$ sur k.*

Lorsque X est *intègre*, et x le point générique de X, on a $\operatorname{long}(\mathcal{O}_x) = 1$, donc la multiplicité radicielle de x pour $\mathcal{O}_X$ n'est autre que la multiplicité radicielle de X sur k, définie dans (4.7.4).

Proposition **(4.7.6).** — *Soit* $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_X$*-Modules cohérents. Si en un point* $x \in X$ *la longueur géométrique* $\lambda_x(\mathscr{F})$ *de* $\mathscr{F}$ *en ce point est définie, il en est de même des longueurs géométriques* $\lambda_x(\mathscr{F}')$ *et* $\lambda_x(\mathscr{F}'')$, *de* $\mathscr{F}'$ *et* $\mathscr{F}''$ *au point* x, *et réciproquement ; en outre, on a*

$$\lambda_x(\mathscr{F}) = \lambda_x(\mathscr{F}') + \lambda_x(\mathscr{F}'') \tag{4.7.6.1}$$

La proposition résulte aussitôt de la définition, car $\mathrm{long}(\mathscr{F}_x)$ est finie si et seulement si $\mathrm{long}(\mathscr{F}'_x)$ et $\mathrm{long}(\mathscr{F}''_x)$ sont finies, et l'on a $\mathrm{long}(\mathscr{F}_x) = \mathrm{long}(\mathscr{F}'_x) + \mathrm{long}(\mathscr{F}''_x)$.

(4.7.7) Sous les hypothèses de (4.7.5), les seuls points $x \in X$ tels que $\mathscr{F}_x$ soit un $\mathcal{O}_x$-module de longueur finie *non nulle* sont (en vertu de (3.1.2)) *les points maximaux de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, comme il résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 2 de la prop. 7, la question étant locale sur X. On sait qu'il existe un sous-préschéma fermé Y ayant $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ pour espace sous-jacent, et un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent $\mathscr{G}$ tel que $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{G})$, $j : Y \to X$ étant l'injection canonique. Si x est point maximal de Y, on voit que les longueurs géométriques de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G}$ en x sont *égales*, $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{O}_{Y,x}$ ayant même corps résiduels. On en déduit la caractérisation suivante de la longueur géométrique :

Proposition **(4.7.8).** — *Sous les hypothèses de* (4.7.5), *soit* x *un point maximal de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$. *Soit* k' *une extension parfaite de* k ; *posons* $X' = X \otimes_k k'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_k k'$; *alors la longueur géométrique* $\lambda_x(\mathscr{F})$ *de* $\mathscr{F}$ *en* x *est égale à la longueur du* $\mathcal{O}_{x'}$*-module* $\mathscr{F}'_{x'}$ *en tout point maximal* x' *de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ *au-dessus de* x. *En outre, il existe une extension radicielle finie* k_1 *de* k *telle que, en posant* $X_1 = X \otimes_k k_1$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F} \otimes_k k_1$, $\lambda_x(\mathscr{F})$ *soit égale à la longueur du* $\mathcal{O}_{x_1}$*-module* $(\mathscr{F}_1)_{x_1}$ *en tout point maximal* x_1 *de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}_1)$ *au-dessus de* x.

La remarque de (4.7.7) montre qu'on peut se borner au cas où x est point maximal de X. En outre, la question est locale sur X et l'on peut donc supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine noethérien, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini; soient $B = A \otimes_k k'$, $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{q}$) l'idéal premier minimal de A (resp. B) correspondant à x (resp. x'). On a alors, en appliquant la formule (4.7.2.1)

$$\mathrm{long}_{\mathcal{O}_{x'}}(\mathscr{F}'_{x'}) = \mathrm{long}_{\mathcal{O}_x}(\mathscr{F}_x) . \mathrm{long}_{B_\mathfrak{q}}(B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q}).$$

Mais comme $\boldsymbol{k}(x) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, le même raisonnement que dans (4.7.3) montre que $\mathrm{long}_{B_\mathfrak{q}}(B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q})$ est égal à la longueur de l'anneau local $(B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}'}$, où $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}/\mathfrak{p}B$. L'anneau $(B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{q}'}$ est un anneau local de $(A/\mathfrak{p}) \otimes_k k'$ pour un idéal premier minimal de cet anneau, donc aussi un anneau local de l'anneau total des fractions de $\boldsymbol{k}(x) \otimes_k k'$, et la longueur d'un tel anneau est par définition $\mu_i(\boldsymbol{k}(x) \mid k)$, d'où la première assertion. La seconde se démontre de même, en remplaçant k' par k_1 et utilisant (4.7.3, (iii)).

On dit encore, dans le cas où x est point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, que la longueur géométrique de $\mathscr{F}$ en x est la *multiplicité radicielle du cycle premier maximal* $\overline{\{x\}}$ associé à $\mathscr{F}$.

Corollaire **(4.7.9).** — *Sous les hypothèses de* (4.7.5), *soient* k' *une extension de* k, $X' = X \otimes_k k'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_k k'$; *soient* Z *une composante irréductible de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, *et* Z' *une composante irréductible de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ *qui domine* Z (4.2.7). *Alors les multiplicités radicielles de* Z *par rapport à* $\mathscr{F}$ *et de* Z' *par rapport à* $\mathscr{F}'$ *sont les mêmes.*

Il suffit de considérer une extension parfaite k'' de k' et en posant $X'' = X \otimes_k k''$, $\mathscr{F}'' = \mathscr{F} \otimes_k k''$, un point maximal x'' de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}'')$ qui est au-dessus du point générique de Z'; alors il résulte de (4.7.8) que $\mathrm{long}(\mathscr{F}''_{x''})$ est égal aux multiplicités de Z et de Z'.

Proposition **(4.7.10)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement de type fini sur k, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, x un point de* X, *z_i les points génériques des composantes irréductibles de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *qui contiennent x. Pour que $\mathscr{F}$ soit géométriquement réduit au point x* (4.6.22), *il faut et il suffit que x n'appartienne à aucun cycle premier associé immergé de $\mathscr{F}$ et que, pour tout i, la longueur géométrique $\lambda_{z_i}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$ au point z_i soit égale à* 1.

Montrons d'abord que les conditions de l'énoncé sont suffisantes. En effet, si k' est une extension finie de k, x' un point de $X' = X \otimes_k k'$ au-dessus de x, et $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_k k'$, x' n'appartient à aucun cycle premier associé immergé de $\mathscr{F}'$ en vertu de (4.2.7); en outre, en vertu de (4.7.8), la longueur géométrique de $\mathscr{F}'$ est égale à 1 en tout point générique z'_j d'une composante irréductible de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ contenant x', un tel point étant au-dessus d'un des z_i en vertu de (2.3.4); *a fortiori* on a $\mathrm{long}(\mathscr{F}'_{z'_j}) = 1$, ce qui prouve que $\mathscr{F}'$ est réduit au point x'.

Inversement, il résulte d'abord de (4.2.7) que si, pour *une* extension finie k' de k, $\mathscr{F}'$ est réduit en tous les points x' de X' au-dessus de x, alors x n'appartient à aucun cycle premier associé immergé de $\mathscr{F}$. En outre, en prenant pour k' le corps k_1 de l'énoncé de (4.7.8) (où x est remplacé par un des z_i), l'hypothèse que $\mathscr{F}$ est géométriquement réduit au point x entraîne que $\lambda_{z_i}(\mathscr{F}) = 1$.

Proposition **(4.7.11)**. — *Soient k un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur k, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, k' une extension de k, $X' = X \otimes_k k'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_k k'$, x un point de* X, *x' un point de X' au-dessus de x. Pour que $\mathscr{F}$ soit géométriquement réduit* (resp. *géométriquement ponctuellement intègre*) *au point x, il faut et il suffit que $\mathscr{F}'$ soit géométriquement réduit* (resp. *géométriquement ponctuellement intègre*) *au point x'.*

Les composantes irréductibles de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ contenant x' dominent chacune une composante irréductible de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ contenant x, et inversement chacune de ces dernières est dominée par une composante irréductible de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ contenant x' ((4.2.7, (i)) et (2.3.4)). L'assertion concernant la propriété de séparabilité résulte donc de (4.2.7, (ii)), (4.7.9) et (4.7.10). Soient Y le sous-préschéma fermé de X défini par l'Idéal $\mathscr{J}$ annulateur de $\mathscr{F}$, de sorte que $Y' = Y \otimes_k k'$ est le sous-préschéma fermé de X' défini par l'Idéal $\mathscr{J}' = \mathscr{J} \otimes_k k'$ annulateur de $\mathscr{F}'$; dire que $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$) est géométriquement ponctuellement intègre au point x (resp. x') revient à dire que $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$) est géométriquement réduit au point x (resp. x') et que Y (resp. Y') est géométriquement ponctuellement intègre au point x (resp. x'). En vertu de l'assertion de l'énoncé concernant la séparabilité, l'hypothèse que $\mathscr{F}$ est géométriquement ponctuellement intègre au point x, ou l'hypothèse que $\mathscr{F}'$ est géométriquement ponctuellement intègre au point x', entraînent toutes deux qu'il existe dans Y un voisinage de x qui est séparable, et la conclusion résulte de (4.6.10).

Définition **(4.7.12)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement de type fini sur k, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent, x un point maximal du support de $\mathscr{F}$. On appelle multiplicité* *totale de x (ou du cycle premier $\overline{\{x\}}$) pour $\mathscr{F}$ (relative à k) le produit de la multiplicité radicielle de x pour $\mathscr{F}$ par la multiplicité séparable de $\boldsymbol{k}(x)$ sur k.*

Il revient au même de dire que la multiplicité totale de x pour $\mathscr{F}$ est le produit de la *longueur* $\mathrm{long}_{\mathcal{O}_x}(\mathscr{F}_x)$ par la multiplicité totale de $\boldsymbol{k}(x)$ sur k (4.7.4). Avec les notations de (4.7.11), la multiplicité totale de x pour $\mathscr{F}$ est égale à la *somme* des multiplicités totales pour $\mathscr{F}'$ des points maximaux x'_i de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ qui sont au-dessus de x; en outre, il existe une extension *finie* k' de k, telle que la multiplicité totale de x pour $\mathscr{F}$ soit *égale à* $\sum_i \mathrm{long}(\mathscr{F}'_{x'_i})$.

Proposition **(4.7.13)**. — *Les hypothèses et les notations étant celles de* (4.7.10), *pour que $\mathscr{F}$ soit géométriquement ponctuellement intègre au point x, il suffit que x n'appartienne qu'à un seul cycle premier associé (nécessairement non immergé) de $\mathscr{F}$ et que la multiplicité totale pour $\mathscr{F}$ du point générique z de ce cycle soit égale à* 1.

En effet, si k' est une extension finie de k, x' un point de $X'=X\otimes_k k'$ au-dessus de x et $\mathscr{F}'=\mathscr{F}\otimes_k k'$, x' ne peut appartenir qu'à un seul cycle premier associé à $\mathscr{F}$, puisqu'il n'y a qu'un seul point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ au-dessus de z par hypothèse; en outre, $\mathscr{F}$ est géométriquement réduit d'après (4.7.10), d'où la conclusion.

4.8. Corps de définition.

(4.8.1) Étant donné un préschéma X, nous désignerons, dans ce numéro, par $\mathfrak{S}(X)$ l'ensemble des sous-préschémas de X, et comme d'ordinaire par $\mathfrak{P}(X)$ l'ensemble des parties de l'espace sous-jacent à X; pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, nous désignerons par $\Phi(\mathscr{F})$ l'ensemble des sous-$\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents de $\mathscr{F}$.

(4.8.2) Soient k un corps, X, Y deux k-préschémas, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, K, K' deux extensions de k telles que $K'\subset K$. On a alors, correspondant au morphisme $\mathrm{Spec}(K)\to\mathrm{Spec}(K')$, des applications canoniques

(4.8.2.1) $$\Phi(\mathscr{F}\otimes_k K')\to\Phi(\mathscr{F}\otimes_k K)$$

(4.8.2.2) $$\mathrm{Hom}(\mathscr{F}\otimes_k K', \mathscr{G}\otimes_k K')\to\mathrm{Hom}(\mathscr{F}\otimes_k K, \mathscr{G}\otimes_k K)$$

(4.8.2.3) $$\mathfrak{S}(X_{(K')})\to\mathfrak{S}(X_{(K)})$$

(4.8.2.4) $$\mathrm{Hom}_{K'}(X_{(K')}, Y_{(K')})\to\mathrm{Hom}_K(X_{(K)}, Y_{(K)})$$

(4.8.2.5) $$\mathfrak{P}(X_{(K')})\to\mathfrak{P}(X_{(K)})$$

Si $p_X: X_{(K)}\to X_{(K')}$ est la projection canonique, l'application (4.8.2.5) est $M\rightsquigarrow p_X^{-1}(M)$, et de même (4.8.2.3) est $Z\rightsquigarrow p_X^{-1}(Z)=Z\otimes_{K'}K$ (**I**, 4.4.1). L'application (4.8.2.1) est $\mathscr{H}\rightsquigarrow p_X^*(\mathscr{H})=\mathscr{H}\otimes_{\mathcal{O}_{X_{(K')}}}\mathcal{O}_{X_{(K)}}$; (4.8.2.2) est $u\rightsquigarrow p_X^*(u)$ et enfin (4.8.2.4) est l'application $f\rightsquigarrow f_{(K)}$.

Si l'on désigne par $\varepsilon_{K,K'}$ une quelconque de ces applications canoniques, il est clair que si K'', K', K sont trois extensions de k telles que $K''\subset K'\subset K$, on a

(4.8.2.6) $$\varepsilon_{K,K''}=\varepsilon_{K,K'}\circ\varepsilon_{K',K''}.$$

Proposition **(4.8.3).** — *Les applications canoniques* (4.8.2.1) *à* (4.8.2.5) *sont injectives.*

On sait en effet que p_X est *fidèlement plat* et *quasi-compact*; le fait que (4.8.2.5) soit injectif résulte donc de ce que p_X est surjectif. L'injectivité de (4.8.2.1) résulte de (2.2.2), celle de (4.8.2.2) de (2.2.7), celle de (4.8.2.3) de (2.2.15) et enfin celle de (4.8.2.4) de (2.2.16).

Définition **(4.8.4).** — *Les notations étant celles de* (4.8.2), *on dit qu'un sous-*$\mathcal{O}_{X_{(K)}}$*-Module quasi-cohérent de* $\mathcal{F}\otimes_k K$ (resp. *un homomorphisme* $\mathcal{F}\otimes_k K \to \mathcal{G}\otimes_k K$, resp. *un sous-préschéma de* $X_{(K)}$, resp. *un* K*-morphisme* $X_{(K)} \to Y_{(K)}$, resp. *un sous-ensemble de* $X_{(K)}$) *est* défini sur K' *s'il appartient à l'image de l'application* (4.8.2.1) (resp. (4.8.2.2), resp. (4.8.2.3), resp. (4.8.2.4), resp. (4.8.2.5)). *On dit alors que* K' *est un corps de définition de l'objet considéré.*

Il est clair que K lui-même est corps de définition d'un élément de l'un quelconque des cinq ensembles d'arrivée des applications (4.8.2.1) à (4.8.2.5). On notera toutefois que pour un K-préschéma Z, dire par exemple qu'un $\mathcal{O}_Z$-Module quasi-cohérent $\mathcal{H}$ est « défini sur un sous-corps K' de K » n'a de sens que si Z *a été donné* sous la forme $X_{(K)}$ pour un préschéma X sur un sous-corps k de K, et si $\mathcal{H}$ est un sous-$\mathcal{O}_Z$-Module d'un $\mathcal{O}_Z$-Module qui *a été donné* sous la forme $\mathcal{F}\otimes_k K$, où $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent; on a des remarques analogues pour les autres notions. Il résulte de (4.8.2.6) que si un élément de l'un des ensembles d'arrivée des applications de (4.8.2) est *défini sur* K', il est aussi défini sur tout corps K'' tel que $K' \subset K'' \subset K$. Enfin, avec les notations de (4.8.2.6), si K_1 est une extension de K, pour qu'un élément de l'ensemble d'arrivée de $\varepsilon_{K,K'}$ soit défini sur K', il faut et il suffit que son image par $\varepsilon_{K_1,K}$ soit définie sur K', en vertu de la relation $\varepsilon_{K_1,K'} = \varepsilon_{K_1,K} \circ \varepsilon_{K,K'}$.

Proposition **(4.8.5).** — *Avec les notations de* (4.8.2), *soit* (X_α) *un recouvrement ouvert de* X. *Pour qu'un élément* $\mathcal{H}\in\Phi(\mathcal{F}\otimes_k K)$ (resp. $u\in\mathrm{Hom}(\mathcal{F}\otimes_k K, \mathcal{G}\otimes_k K)$, resp. $Z\in\mathfrak{S}(X_{(K)})$, resp. $M\in\mathfrak{P}(X_{(K)})$) *soit défini sur* K', *il faut et il suffit que pour tout* α, $\mathcal{H}|(X_\alpha)_{(K)}$ (resp. $u|(X_\alpha)_{(K)}$, $Z\cap(X_\alpha)_{(K)}$, $M\cap(X_\alpha)_{(K)}$) *soit défini sur* K'.

Cela résulte aussitôt de l'injectivité des applications (4.8.2.1), (4.8.2.2), (4.8.2.3) et (4.8.2.5) : par exemple, si pour tout α, il y a un sous-$\mathcal{O}_{(X_\alpha)_{(K')}}$-Module quasi-cohérent $\mathcal{H}'_\alpha$ de $(\mathcal{F}|X_\alpha)\otimes_k K'$ tel que $\mathcal{H}|(X_\alpha)_{(K)} = \mathcal{H}'_\alpha\otimes_{K'}K$, pour deux indices α, β quelconques, on aura $\mathcal{H}|(X_\alpha\cap X_\beta)_{(K)} = (\mathcal{H}'_\alpha|(X_\alpha\cap X_\beta)_{(K')})\otimes_{K'}K = (\mathcal{H}'_\beta|(X_\alpha\cap X_\beta)_{(K')})\otimes_{K'}K$, donc nécessairement $\mathcal{H}'_\alpha|(X_\alpha\cap X_\beta)_{(K')} = \mathcal{H}'_\beta|(X_\alpha\cap X_\beta)_{(K')}$ quels que soient α et β et il y a par suite un sous-$\mathcal{O}_{X_{(K')}}$-Module quasi-cohérent $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{F}\otimes_k K'$ tel que $\mathcal{H}'|(X_\alpha)_{(K')} = \mathcal{H}'_\alpha$ pour tout α, donc $\mathcal{H} = \mathcal{H}'\otimes_{K'}K$. On raisonne de même dans les autres cas.

Lemme **(4.8.6).** — *Soient* k *un corps,* K *une extension de* k, A *une* k*-algèbre,* M *un* A*-module,* $\overline{N}$ *un sous-*$A_{(K)}$*-module de* $M_{(K)}$, K' *une sous-extension de* K. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\overline{N}$ *est de la forme* $N'\otimes_{K'}K$, *où* N' *est un sous-*$A_{(K')}$*-module de* $M_{(K')}$.

b) *Si* $X = \mathrm{Spec}(A)$, *le* $\mathcal{O}_{X_{(K)}}$*-Module quasi-cohérent* $(\overline{N})^\sim$ *sur* $X_{(K)} = \mathrm{Spec}(A_{(K)})$ *est défini sur* K'.

c) $\overline{N}$ *est de la forme* $N'\otimes_{K'}K$, *où* N' *est un sous-*K'*-espace vectoriel de* $M_{(K')}$.

L'équivalence de *a)* et *b)* résulte trivialement de (**I**, 1.6.5); il est clair d'autre part que *a)* entraîne *c)*. Inversement, si *c)* est vérifiée, on sait que l'on peut écrire (à identification canonique près) $N' = \overline{N} \cap M_{(K')}$. Comme $\overline{N}$ et $M_{(K')}$ sont par hypothèse des $A_{(K')}$-modules, il en est de même de N'.

Corollaire (**4.8.7**). — *Sous les hypothèses de* (4.8.6), *il existe un plus petit sous-corps* K' *de* K *contenant k tel que les conditions équivalentes de* (4.8.6) *soient vérifiées.*

Il suffit de le voir pour la condition *c)*, où cela résulte de Bourbaki, *Alg.*, chap II, 3e éd., § 8, no 6, prop. 6.

Lemme (**4.8.8**). — *Les notations étant celles de* (4.8.2) :

(i) *Soit* $\overline{u} : \mathscr{F} \otimes_k K \rightarrow \mathscr{G} \otimes_k K$ *un* $\mathcal{O}_{X_{(K)}}$*-homomorphisme, et soit* $\overline{\mathscr{H}} \subset (\mathscr{F} \otimes_k K) \oplus (\mathscr{G} \otimes_k K)$ *son graphe. Pour que* $\overline{u}$ *soit défini sur* K', *il faut et il suffit que* $\overline{\mathscr{H}}$ *le soit.*

(ii) *Soit* $\overline{Z}$ *un sous-préschéma fermé de* $X_{(K)}$, *et soit* $\overline{\mathscr{J}}$ *l'Idéal quasi-cohérent de* $\mathcal{O}_{X_{(K)}}$ *définissant* $\overline{Z}$. *Pour que* $\overline{Z}$ *soit défini sur* K', *il faut et il suffit que* $\overline{\mathscr{J}}$ *le soit.*

(iii) *Soit* $\overline{f}$ *un* K*-morphisme :* $X_{(K)} \rightarrow Y_{(K)}$ *et soit* $\overline{Z}$ *le sous-préschéma de* $X_{(K)} \times_K Y_{(K)}$, *graphe de* $\overline{f}$ (**I**, 5.3.11); *pour que* $\overline{f}$ *soit défini sur* K', *il faut et il suffit que* $\overline{Z}$ *le soit.*

L'assertion (ii) résulte aussitôt de (**I**, 4.4.5). La nécessité dans l'assertion (iii) est évidente; supposons réciproquement que l'on ait $\overline{Z} = Z'_{(K')}$, où Z' est un sous-préschéma de $(X \times_k Y)_{(K')}$; si $p' : Z' \rightarrow X_{(K')}$ est la restriction à Z' de la première projection, on sait que $p'_{(K)}$ est un isomorphisme de préschémas, donc il en est de même de p' (2.7.1, (viii)); mais cela signifie (**I**, 5.3.11) que Z' est le graphe d'un K'-morphisme $f' : X_{(K')} \rightarrow Y_{(K')}$, et l'on a alors $f = f'_{(K)}$ (**I**, 5.3.12).

Enfin, pour prouver (i), on peut, en vertu de (4.8.5), supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, $\mathscr{G} = \widetilde{N}$, où M et N sont des A-modules, et $\overline{u} = (\overline{v})^{\sim}$, où $\overline{v} : M_{(K)} \rightarrow N_{(K)}$ est un $A_{(K)}$-homomorphisme. Supposons que le graphe de $\overline{v}$ soit de la forme $P'_{(K)}$, où P' est un sous-$A_{(K')}$-module de $M_{(K')} \oplus N_{(K')}$; si $p' : P' \rightarrow M_{(K')}$ est la restriction à P' de la première projection, on sait que $p' \otimes 1_K$ est un isomorphisme de $A_{(K)}$-modules, donc, par fidèle platitude ($\mathbf{0}_I$, 6.4.1), p' est un isomorphisme de $A_{(K')}$-modules, ce qui prouve que P' est le graphe d'un $A_{(K')}$-homomorphisme $v' : M_{(K')} \rightarrow N_{(K')}$ et l'on a évidemment $\overline{v} = v' \otimes 1_{K'}$.

Proposition (**4.8.9**). — *Soient k un corps,* K *une extension de k,* X *un k-préschéma,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent. Soit* $\overline{\mathscr{H}}$ *un sous-*$\mathcal{O}_{X_{(K)}}$*-Module quasi-cohérent de* $\mathscr{F} \otimes_k K$. *Alors il existe un plus petit corps de définition de* $\overline{\mathscr{H}}$.

Lorsque X est affine, l'assertion n'est autre que (4.8.7). Dans le cas général, considérons un recouvrement (X_α) de X par des ouverts affines; en vertu de ce qui précède, il existe pour tout α un plus petit sous-corps K'_α de K contenant k et tel que $\overline{\mathscr{H}} | (X_\alpha)_{(K)}$ soit défini sur K'_α. En vertu de (4.8.5), le sous-corps de K engendré par les K'_α est le plus petit corps de définition de $\overline{\mathscr{H}}$.

Corollaire (**4.8.10**). — *Les notations étant celles de* (4.8.9), *soit* $\mathscr{G}$ *un second* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent, et soit* $\overline{u} : \mathscr{F} \otimes_k K \rightarrow \mathscr{G} \otimes_k K$ *un* $\mathcal{O}_{X_{(K)}}$*-homomorphisme ; alors il existe un plus petit corps de définition de* $\overline{u}$.

En effet, il résulte de (4.8.8) qu'un tel corps est aussi un plus petit corps de définition du graphe de $\overline{u}$, et l'existence de ce dernier résulte de (4.8.9).

Corollaire **(4.8.11)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma,* K *une extension de k,* $\overline{Z}$ *un sous-préschéma fermé de* $X_{(K)}$; *alors il existe un plus petit corps de définition de* $\overline{Z}$.

En effet, si $\overline{\mathscr{J}}$ est l'Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_{X_{(K)}}$ définissant $\overline{Z}$, il résulte de (4.8.8) que cela équivaut à l'existence d'un plus petit corps de définition de $\overline{\mathscr{J}}$, qui résulte de (4.8.9).

Corollaire **(4.8.12)**. — *Soient k un corps,* X, Y *deux k-préschémas,* Y *étant supposé séparé,* K *une extension de k,* $\overline{f}: X_{(K)} \rightarrow Y_{(K)}$ *un* K-*morphisme. Il existe alors un plus petit corps de définition de* $\overline{f}$.

En effet, l'existence d'un tel corps, en vertu de (4.8.8), équivaut à celle d'un plus petit corps de définition du graphe $\overline{Z}$ de $\overline{f}$; mais comme $\overline{Z}$ est un sous-préschéma *fermé* de $(X \times_k Y)_{(K)}$ (**I**, 5.4.3), l'existence d'un plus petit corps de définition de $\overline{Z}$ résulte de (4.8.11).

Proposition **(4.8.13)**. — *Sous les hypothèses de* (4.8.11) (resp. (4.8.9), (4.8.10), (4.8.12)) *supposons en outre que* X *soit de type fini sur k* (resp. *que* X *soit de type fini sur k et* $\mathscr{F}$ *cohérent,* resp. *que* X *soit de type fini sur k et* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *cohérents,* resp. *que* X *et* Y *soient de type fini sur k*). *Alors le plus petit corps de définition de* $\overline{Z}$ (resp. *de* $\mathscr{H}$, *de* $\overline{u}$, *de* $\overline{f}$) *est une extension de type fini de k.*

On peut se borner à traiter le cas de (4.8.9), et supposer X affine puisque X est réunion finie d'ouverts affines de type fini sur k. Avec les notations de (4.8.6), tout revient à montrer que si A est une algèbre de type fini sur k et M un A-module de type fini, il y a une sous-extension K′ de K vérifiant les conditions *a)*, *b)* ou *c)* et qui soit de type fini sur k (toute sous-extension d'une extension de type fini étant de type fini). Or, soit $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système de générateurs du A-module M; comme A est noethérien, il en est de même de $A_{(K)}$, donc $\overline{N}$ est un $A_{(K)}$-module de type fini, admettant un système fini de générateurs n_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ tels que $n_j = \sum_i (m_i \otimes 1) b_{ij}$, où $b_{ij} \in A_{(K)}$; chaque b_{ij} s'écrit d'ailleurs $b_{ij} = \sum_h a_{ijh} \otimes c_{ijh}$, où $a_{ijh} \in A$ et $c_{ijh} \in K$; il est clair que l'extension K′ de k engendrée par les c_{ijh} répond à la question.

Proposition **(4.8.14)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma de type fini,* K *une extension de k contenant une extension parfaite de k. Alors le plus petit corps de définition du sous-préschéma fermé* $(X_{(K)})_{\mathrm{red}}$ *de* $X_{(K)}$ *est une extension finie radicielle de k.*

Si p est l'exposant caractéristique de k, l'hypothèse entraîne que $k' = k^{p^{-\infty}}$ est contenu dans K; on sait que $(X_{(k')})_{\mathrm{red}}$ est géométriquement réduit sur k' (4.6.1), donc $(X_{(k')})_{\mathrm{red}} \otimes_{k'} K$ est réduit, et par suite égal à $(X_{(K)})_{\mathrm{red}}$ (**I**, 5.1.8); en d'autres termes, k' est un corps de définition de $(X_{(K)})_{\mathrm{red}}$. Comme k' est une extension algébrique de k, la conclusion résulte de (4.8.13).

Remarques **(4.8.15)**. — (i) La conclusion de (4.8.14) ne subsiste plus nécessairement si l'on ne suppose pas que K contient une extension parfaite de k. Par exemple, soient k_0

un corps de caractéristique $p>0$, k le corps des fractions rationnelles $k_0(s, t)$ à 2 indéterminées, L le corps $k(s^{1/p}, t^{1/p})$ et $X=\mathrm{Spec}(L)$. Soient d'autre part u une troisième indéterminée et soit K le corps $k(u, s^{1/p}+ut^{1/p})$; on vérifie aisément que k est algébriquement fermé dans K et que $L\otimes_k K$ a un nilradical non nul, donc $X_{(K)}$ n'est pas réduit; mais comme $(X_{(K)})_{\mathrm{red}}$ n'est pas défini sur k, et que K ne contient aucune sous-extension de degré fini sur k autre que k, le plus petit corps de définition de $(X_{(K)})_{\mathrm{red}}$ ne peut être fini sur k.

(ii) Étant donné un élément de l'un des ensembles d'arrivée des applications (4.8.2), et une extension K_1 de K, il est équivalent de dire que l'objet considéré admet un plus petit corps de définition ou que son image par $\varepsilon_{K_1,K}$ admet un plus petit sous-corps de définition (les deux sous-corps étant nécessairement les mêmes), comme on l'a vu dans (4.8.4).

4.9. Corps de définition d'une partie d'un préschéma.

Proposition **(4.9.1)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma,* K *une extension de k,* $\overline{T}$ *une partie fermée de* $X_{(K)}$, K' *une sous-extension de* K. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\overline{T}$ *est définie sur* K'.

b) *La partie ouverte* $\overline{U}=X_{(K)}-\overline{T}$ *de* $X_{(K)}$ *est définie sur* K'.

b') *Le sous-préschéma de* $X_{(K)}$ *induit sur l'ouvert* $\overline{U}$ *est défini sur* K'.

c) *Il existe un sous-préschéma fermé* $\overline{Z}$ *de* $X_{(K)}$ *ayant* $\overline{T}$ *pour espace sous-jacent, et défini sur* K'.

Si $g : X_{(K)}\to X_{(K')}$ est la projection canonique, dire que $\overline{T}$ est définie sur K' signifie qu'il existe une partie fermée T' de $X_{(K')}$ telle que $\overline{T}=g^{-1}(T')$; comme $g^{-1}(X_{(K')}-T')=X_{(K)}-g^{-1}(T')$ pour toute partie T' de $X_{(K')}$, *a), b)* et *b')* sont équivalentes. Si $\overline{Z}$, ayant $\overline{T}$ pour espace sous-jacent, est défini sur K', on a $\overline{Z}=Z'\otimes_{K'}K$, où Z' est un sous-préschéma fermé de $X_{(K')}$, et si T' est le sous-espace sous-jacent à Z', on sait que $\overline{T}=g^{-1}(T')$ (**I**, 4.4.1), donc $\overline{T}$ est définie sur K'. Inversement, pour voir que *a)* entraîne *c)*, il suffit de considérer un sous-préschéma fermé Z' de $X_{(K')}$ ayant pour espace sous-jacent T' (**I**, 5.2.1) et de prendre $\overline{Z}=Z'\otimes_K K'$.

Corollaire **(4.9.2)**. — *Avec les notations de* (4.9.1), *supposons que* K' *soit un corps de définition de* $\overline{T}$; *toute extension* $K''\subset K'$ *de k, telle que* K' *soit extension radicielle de* K'', *est aussi un corps de définition de* $\overline{T}$.

Il suffit d'observer que la projection canonique $g : X_{(K')}\to X_{(K'')}$ est un morphisme entier, surjectif et radiciel, donc un homéomorphisme (2.4.5).

Remarque **(4.9.3)**. — Il résulte de (4.9.2) qu'une partie fermée $\overline{T}$ de $X_{(K)}$ n'admet pas nécessairement de *plus petit* corps de définition. Par exemple, si $K=k(t)$, où t est une indéterminée et k un corps parfait de caractéristique $p>0$, une partie fermée $\overline{F}$ de $X_{(K)}$ ne peut avoir de plus petit corps de définition que si elle est déjà définie sur k : en effet, pour tout sous-corps K' de K contenant k et $\neq k$, on a $K'^p\neq K'$, K'^p contient k et K' est une extension radicielle de K'^p, donc si K' est corps de définition de $\overline{F}$, il en est de même de K'^p. Toutefois :

Proposition **(4.9.4)**. — *Avec les notations de* (4.9.1), *supposons que* K *soit une extension séparable de* K'; *pour que* K' *soit un corps de définition de* $\overline{T}$, *il faut et il suffit que* K' *soit un corps de définition du sous-préschéma réduit de* $X_{(K)}$ *ayant* $\overline{T}$ *pour espace sous-jacent.*

La condition est évidemment suffisante en vertu de (4.9.1); pour voir qu'elle est nécessaire, notons que si $\overline{T}=g^{-1}(T')$, où T' est une partie fermée de $X_{(K')}$, et si Z' est le sous-préschéma réduit de $X_{(K')}$ ayant T' pour espace sous-jacent, alors $\overline{Z}=Z'\otimes_{K'}K=\operatorname{Spec}(K)\times_{K'}Z'$ est réduit en vertu du critère (4.6.1, *e*)) et de l'hypothèse sur K et a pour espace sous-jacent T.

Corollaire **(4.9.5)**. — *Supposons vérifiée l'une des hypothèses suivantes :*

a) *k est de caractéristique* 0.

b) K *est une extension algébrique de k et* X *est de type fini sur k.*

Alors toute partie fermée $\overline{T}$ *de* $X_{(K)}$ *possède un plus petit corps de définition, qui est une extension séparable de k (et finie sur k dans l'hypothèse* b)).

Dans l'hypothèse *a)*, K est séparable sur chacun de ses sous-corps, et il résulte donc de (4.9.4) que les corps de définition de $\overline{T}$ sont les mêmes que ceux du sous-préschéma réduit de $X_{(K)}$ ayant $\overline{T}$ pour espace sous-jacent. Le corollaire résulte alors de (4.8.11). Dans l'hypothèse *b)* on sait que K est une extension radicielle d'une extension séparable K_1 de *k*. Alors, pour toute sous-extension K' de K, K' est radicielle sur $K'\cap K_1$, donc, en vertu de (4.9.2), K' est un corps de définition de $\overline{T}$ si et seulement si $K'\cap K_1$ l'est. Cela nous ramène au cas où $K'=K_1$, donc au cas où K' est une extension *algébrique séparable* de *k*, et on achève le raisonnement comme dans le cas *a)*.

Proposition **(4.9.6)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma,* K *une extension de k,* $\overline{U}$ *une partie à la fois ouverte et fermée de* $X_{(K)}$, $\overline{V}$ *son complémentaire. Soit* K' *une sous-extension de* K; *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) K' *est un corps de définition de la partie* $\overline{U}$ *de* $X_{(K)}$.

a') K' *est un corps de définition du sous-préschéma fermé de* $X_{(K)}$ *induit sur l'ouvert* $\overline{U}$.

b) K' *est un corps de définition de la partie* $\overline{V}$ *de* $X_{(K)}$.

b') K' *est un corps de définition du sous-préschéma fermé de* $X_{(K)}$ *induit sur l'ouvert* $\overline{V}$.

Il est clair que *a')* entraîne *a)*, et *a)* entraîne *b')* en vertu de (4.9.1). Comme $\overline{U}$ et $\overline{V}$ jouent des rôles symétriques, *b')* entraîne *b)* et *b)* entraîne *a')*, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(4.9.7)**. — *Sous les hypothèses de* (4.9.6), *il existe un plus petit corps de définition* K' *pour la partie* $\overline{U}$ *de* $X_{(K)}$, *et* K' *est aussi le plus petit corps de définition de la partie* $\overline{V}$ *de* $X_{(K)}$ *et des sous-préschémas fermés de* $X_{(K)}$ *induits sur les ouverts* $\overline{U}$ *et* $\overline{V}$. *Si en outre* X *est de type fini sur k,* K' *est une extension finie séparable de k.*

Compte tenu de (4.9.6) et (4.8.11), il n'y a à démontrer que la dernière assertion. En vertu de (4.8.15, (ii)), on peut se borner au cas où K est algébriquement clos. Soit alors $\overline{k}$ la clôture algébrique de *k* contenue dans K, et désignons par W_i les composantes connexes de $X_{(\bar{k})}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$; si $p : X_{(K)} \rightarrow X_{(\bar{k})}$ est la projection canonique, on sait que les $p^{-1}(W_i)$ sont les composantes connexes de $X_{(K)}$ (4.4.6), donc U est une réunion d'un certain nombre de ces composantes, et est par suite défini sur $\bar{k}$; la conclusion résulte par suite de (4.9.5, *b*)).

§ 5. DIMENSION, PROFONDEUR, RÉGULARITÉ DANS LES PRÉSCHÉMAS LOCALEMENT NOETHÉRIENS

Ce paragraphe se borne à reprendre, dans le langage géométrique, et avec divers compléments de nature technique, les notions et résultats d'Algèbre commutative exposés dans le chapitre **0**, §§ 16 et 17.

5.1. Dimension des préschémas.

(5.1.1) Soient A un anneau, $\mathfrak{J}$ un idéal de A. Rappelons (**0**, 16.1) que les définitions de la théorie de la dimension d'un anneau (**0**, 16.1.1) et celles de la théorie de la dimension combinatoire des espaces topologiques (**0**, 14.1.2) donnent les relations suivantes :

(5.1.1.1)
$$\dim(\operatorname{Spec}(A)) = \dim(A)$$

(5.1.1.2)
$$\dim(V(\mathfrak{J})) = \dim(A/\mathfrak{J})$$

(5.1.1.3)
$$\operatorname{codim}(V(\mathfrak{J}), \operatorname{Spec}(A)) = \operatorname{ht}(\mathfrak{J})$$

(5.1.1.4) Spec(A) est un espace caténaire $\Leftrightarrow$ A est un anneau caténaire.

(5.1.1.5) Spec(A) est équidimensionnel $\Leftrightarrow$ A est équidimensionnel $\Leftrightarrow$ les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_\alpha$ de A sont tels que les dimensions des anneaux $A/\mathfrak{p}_\alpha$ soient toutes égales.

(5.1.1.6) Spec(A) est équicodimensionnel $\Leftrightarrow$ A est équicodimensionnel $\Leftrightarrow$ tous les idéaux maximaux de A ont même hauteur.

On rappelle qu'un anneau noethérien A est dit *biéquidimensionnel* si Spec(A) est biéquidimensionnel, c'est-à-dire si Spec(A) est noethérien et A est équidimensionnel, équicodimensionnel, caténaire et de dimension finie.

Proposition **(5.1.2)**. — *Soient* X *un préschéma,* Y *une partie fermée irréductible de* X, *y le point générique de* Y. *On a*

(5.1.2.1)
$$\operatorname{codim}(Y, X) = \dim(\mathcal{O}_{X,y})$$

En effet (**I**, 2.4.2) les parties fermées irréductibles de X contenant y sont canoniquement en correspondance biunivoque avec les parties fermées irréductibles de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$, donc sont en correspondance biunivoque avec les idéaux premiers de $\mathcal{O}_{X,y}$, et (5.1.2.1) résulte des définitions.

En particulier, on retrouve ainsi le fait que les points génériques des composantes irréductibles de X sont les *seuls* points $x \in X$ tels que $\dim(\mathcal{O}_x) = 0$ (**I**, 1.1.14).

Corollaire **(5.1.3).** — *Pour toute partie fermée* Y *d'un préschéma* X, *on a*

(5.1.3.1) $$\operatorname{codim}(Y, X) = \inf_{y\in Y} \dim(\mathcal{O}_{X,y}).$$

En outre, si X *est localement noethérien, on a, pour tout* $x \in Y$

(5.1.3.2) $$\operatorname{codim}_x(Y, X) = \inf_{y\in Y,\, x\in\overline{\{y\}}} \dim(\mathcal{O}_{X,y}).$$

La relation (5.1.3.2) résulte en effet de (5.1.3.1) et de (**0**, 14.2.6).

Ce corollaire permet de *définir*, pour une partie *quelconque* Y d'un préschéma X, la *codimension* codim(Y, X) de Y dans X comme égale au second membre de (5.1.3.1).

Proposition **(5.1.4).** — *Pour tout préschéma* X, *on a*

(5.1.4.1) $$\dim(X) = \sup_{x\in X}(\dim(\mathcal{O}_x)).$$

Si toute partie fermée irréductible de X *contient un point fermé, on a aussi*

(5.1.4.2) $$\dim(X) = \sup_{x\in F}(\dim(\mathcal{O}_x))$$

où F *est l'ensemble des points fermés de* X.

Il suffit de remarquer (en vertu de (**I**, 2.4.2)) que les chaînes de parties fermées irréductibles de X correspondent biunivoquement aux chaînes de parties fermées irréductibles d'un schéma local de X; lorsque toute partie fermée irréductible de X contient un point fermé, on peut évidemment se borner aux schémas locaux aux points fermés de X.

On notera que toute partie fermée irréductible de X contient un point fermé lorsque X est *quasi-compact* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.1.3); nous verrons un peu plus loin (5.1.11) qu'il en est de même lorsque X est *localement noethérien*.

Corollaire **(5.1.5).** — *Pour qu'un préschéma* X *soit caténaire, il faut et il suffit que, pour tout* $x \in X$, *l'anneau local* $\mathcal{O}_x$ *soit caténaire. Si de plus toute partie fermée irréductible de* X *contient un point fermé, il suffit, pour que* X *soit caténaire, que* $\mathcal{O}_x$ *soit caténaire pour tout point fermé* x *de* X.

Le raisonnement est le même que dans (5.1.4), puisqu'il s'agit de comparer des chaînes de parties fermées irréductibles ayant mêmes extrémités.

(5.1.6) Nous allons maintenant examiner les propriétés plus spéciales liées à des hypothèses noethériennes.

Rappelons (**0**, 16.2.3) qu'un anneau *local noethérien* $A \neq 0$ est de dimension *finie*, égale au nombre minimum de générateurs d'un idéal de définition de A; pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, la hauteur de $\mathfrak{p}$, égale à $\dim(A_\mathfrak{p})$, est donc aussi finie. Ces propriétés, jointes à (5.1.2), (5.1.3) et (5.1.4), montrent que :

Proposition **(5.1.7).** — *Pour toute partie fermée non vide* Y *d'un préschéma localement noethérien* X, codim(Y, X) *est finie. Si* X *est noethérien et affine et* Y *une partie fermée irréductible de* X, codim(Y, X) *est égal au nombre minimum des sections* s_i *de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X *telles que* Y *soit une composante irréductible de l'ensemble des* $x \in X$ *tels que* $s_i(x) = 0$ *pour tout* i.

Corollaire **(5.1.8).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathcal{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible,* f *une section de* $\mathcal{L}$ *au-dessus de* X. *Alors toute composante irréductible de l'ensemble* Z *des* $x \in X$ *tels que* $f(x)=0$ *est de codimension* $\leqslant 1$ *dans* X; *elle est de codimension* 1 *si* Z *ne contient aucune composante irréductible de* X.

On peut se borner au cas où $\mathscr{L}=\mathcal{O}_X$. Si y est un point générique d'une composante irréductible Y de Z, l'idéal (f_y) de $\mathcal{O}_{X,y}$ doit être tel que $\mathcal{O}_{X,y}/(f_y)$ n'ait qu'un seul idéal premier, ce qui signifie que f_y engendre un idéal de définition de l'anneau local noethérien $\mathcal{O}_{X,y}$; on a donc $\operatorname{codim}(Y, X) \leqslant 1$ (5.1.7); si Z ne contient aucune composante irréductible de X, on ne peut avoir $\operatorname{codim}(Y, X)=0$ en vertu de (**0**, 14.2.1).

Proposition **(5.1.9)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *une partie fermée de* X. *Si* $x \in Y$ *est tel que* $\mathcal{O}_{X,x}$ *soit un anneau caténaire, on a*

(5.1.9.1)
$$\begin{aligned}\operatorname{codim}_x(Y, X) &= \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, Y)\\ &= \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \dim(\mathcal{O}_{Y,x})\end{aligned}$$

Soient Y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les composantes irréductibles de Y contenant x (qui sont en nombre *fini* puisque Y est localement noethérien), et soit y_i le point générique de Y_i. Si l'on pose $A=\mathcal{O}_{X,x}$, et si $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal premier de A correspondant à $Y_i \cap \operatorname{Spec}(A)$, les parties fermées irréductibles de Y contenant x correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A contenant un des $\mathfrak{p}_i$, donc $\dim(\mathcal{O}_{Y,x})=\sup_i \dim(A/\mathfrak{p}_i)$; d'autre part, on a $\mathcal{O}_{X,y_i}=A_{\mathfrak{p}_i}$, et l'hypothèse sur A entraîne $\dim(A)=\dim(A/\mathfrak{p}_i)+\dim(A_{\mathfrak{p}_i})$ (**0**, 16.1.4); la conclusion résulte donc de la relation $\operatorname{codim}_x(Y, X)=\inf_i(\dim(\mathcal{O}_{X,y_i}))$ ((5.1.2) et (**0**, 14.2.6)).

Proposition **(5.1.10)**. — (i) *Dans tout préschéma* X, *toute partie localement constructible non vide* E *contient un point* x *tel que* $\{x\}$ *soit une partie localement fermée de* X (ou, ce qui revient au même, tel que x soit *isolé dans* $\overline{\{x\}}$).

(ii) *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* x *un point de* X *tel que* $\{x\}$ *soit localement fermé dans* X; *alors on a* $\dim(\overline{\{x\}}) \leqslant 1$; *tout point* $y \neq x$ *de* $\overline{\{x\}}$ *est par suite fermé dans* X.

(i) Le résultat est un cas particulier du lemme suivant :

Lemme **(5.1.10.1)**. — *Soit* X *un espace topologique ayant la propriété suivante : pour toute partie localement fermée* $Z \neq \emptyset$ *de* X, *il existe une partie* Z' *de* Z, *localement fermée dans* X (ou *dans* Z, ce qui revient au même) *et un point* $x \in Z'$, *fermé* dans Z'. *Alors toute partie localement fermée* $Z \neq \emptyset$ *de* X *contient un point* x *isolé dans* $\overline{\{x\}}$.

En effet, soit $Z' \subset Z$ une partie localement fermée de Z contenant un point x tel que x soit fermé *dans* Z'. Il y a un voisinage ouvert U de x dans X tel que $Z' \cap U$ soit fermé *dans* U, donc x est aussi fermé dans U; cela signifie que $U \cap \overline{\{x\}}=\{x\}$, autrement dit que x est isolé dans $\overline{\{x\}}$.

Le lemme s'applique à tout espace sous-jacent à un préschéma X, car Z est alors aussi espace sous-jacent à un préschéma (**I**, 5.2.1) et il suffit de prendre pour Z' un ouvert affine *dans* Z, qui est un espace de Kolmogoroff quasi-compact, donc contient un point fermé ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.3).

(ii) Soit Z le sous-préschéma réduit de X ayant $\overline{\{x\}}$ pour espace sous-jacent; l'hypothèse entraîne que $\{x\}$ est ouvert *dans* Z; donc, pour tout $z \in Z$, le point générique x de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z})$ est *isolé* dans $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Z,z})$; mais l'anneau $A = \mathcal{O}_{Z,z}$ est un anneau local noethérien intègre, et l'hypothèse entraîne qu'il existe un $f \in A$ tel que A_f soit un *corps*; on sait (**0**, 16.3.3) que cela entraîne $\dim(A) \leqslant 1$. Comme $\dim(\mathcal{O}_{Z,z}) \leqslant 1$ pour tout $z \in Z$, on a bien $\dim(Z) \leqslant 1$.

Corollaire **(5.1.11)**. — *Si* X *est un préschéma localement noethérien, toute partie fermée non vide de* X *contient un point fermé.*

En effet, toute partie fermée de X est constructible ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.1.1 et 9.1.5) et il suffit d'appliquer (5.1.10).

(5.1.12) Soient X un préschéma, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent *de type fini*, $S = \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ son support, qui est *fermé* dans X ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2). Si, pour tout $x \in X$, on considère $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_x)$ comme une partie fermée du schéma local $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$, on a, par définition (**0**, 16.1.7) $\dim(\mathcal{F}_x) = \dim(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_x))$; mais on a

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_x) = S \cap \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,x})$$

où, dans le dernier terme, S désigne un sous-préschéma fermé quelconque de X ayant S pour espace sous-jacent. Si l'on remarque que les composantes irréductibles de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,x})$ sont les intersections de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ et des composantes irréductibles de S contenant x, et correspondent biunivoquement à ces dernières, on voit que

$$\dim(\mathcal{F}_x) = \dim(\mathcal{O}_{S,x}) \tag{5.1.12.1}$$

en vertu de (5.1.1.1); il résulte aussi de (5.1.2) que l'on a

$$\dim(\mathcal{F}_x) = \mathrm{codim}(\overline{\{x\}}, S) \tag{5.1.12.2}$$

si X est localement noethérien.

On dit que $\mathcal{F}$ est *équidimensionnel au point* $x \in X$ si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module équidimensionnel, c'est-à-dire (**0**, 16.1.7) si $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}_x)$ est équidimensionnel en tant que partie fermée de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$; il revient au même de dire que l'anneau $\mathcal{O}_{S,x}$ est *équidimensionnel.*

On appelle *dimension de* $\mathcal{F}$ et l'on note $\dim(\mathcal{F})$ la dimension du *support* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$; il résulte de (5.1.4) et (5.1.12.1) que l'on a

$$\dim(\mathcal{F}) = \sup_{x \in X} \dim(\mathcal{F}_x). \tag{5.1.12.3}$$

Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine et si $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini, on a $\dim(\mathcal{F}) = \dim(M)$ en vertu de (**0**, 16.1.7) et (5.1.4).

Proposition **(5.1.13)**. — *Soient* X *un préschéma,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module quasi-cohérent de type fini,* x *un point de* X, x' *une générisation de* x *dans* X; *on a alors*

$$\dim(\mathcal{F}_{x'}) \leqslant \dim(\mathcal{F}_x) \tag{5.1.13.1}$$

Cela résulte aussitôt de (5.1.12.1) et des définitions.

5.2. Dimension d'un préschéma algébrique.

Proposition (**5.2.1**). — *Soient k un corps, X un préschéma irréductible localement de type fini sur k, ξ son point générique. Alors X est biéquidimensionnel et l'on a* $\dim(X) = \deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(\xi)$.

Tout anneau local $\mathcal{O}_x$ est anneau local d'une k-algèbre de type fini, donc quotient d'un anneau local régulier (**0**, 17.3.9), et l'on sait (**0**, 16.5.12) que ces anneaux sont caténaires; par suite X est un espace caténaire (5.1.5), et comme X est irréductible, il suffit (5.1.1) de montrer que pour *tout point fermé* $x \in X$, on a

(**5.2.1.1**) $$\dim(\mathcal{O}_x) = \deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(\xi).$$

On peut évidemment supposer X réduit et affine, donc *intègre* d'anneau A, algèbre de type fini sur k. Soit $n = \deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(\xi)$, $\boldsymbol{k}(\xi) = K$ étant le corps des fractions de A. On sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, th. 1) qu'il existe une sous-k-algèbre $B = k[t_1, \dots, t_n]$ de A, où les t_i sont algébriquement indépendants sur k, telle que A soit une B-algèbre *finie*. Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{j}_x$, qui est par hypothèse un idéal maximal de A; $\mathfrak{n} = B \cap \mathfrak{m}$ est donc un idéal maximal de B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1), et $A_\mathfrak{m}$ est un anneau local de la $B_\mathfrak{n}$-algèbre *finie* $S^{-1}A$, où $S = B - \mathfrak{n}$; comme $B_\mathfrak{n}$ est intégralement clos et $S^{-1}A$ intègre, on a $\dim(A_\mathfrak{m}) = \dim(B_\mathfrak{n})$ (**0**, 16.1.6). On peut donc se borner au cas où $A = k[t_1, \dots, t_n]$; on sait alors que $k' = \boldsymbol{k}(x)$ est une extension *finie* de k (**I**, 6.4.2); soit $A' = k'[t_1, \dots, t_n]$; compte tenu de (**I**, 2.4.6 et 3.3.14), il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}'$ de A' au-dessus de $\mathfrak{m}$ et tel que k' soit le corps résiduel de $A'_{\mathfrak{m}'}$. Comme A' est intègre et est une A-algèbre finie, le même raisonnement que ci-dessus montre que $\dim(A'_{\mathfrak{m}'}) = \dim(A_\mathfrak{m})$, si bien qu'on est ramené au cas où $A/\mathfrak{m} = k$. Or dans ce cas $\mathfrak{m}$ est engendré par des polynômes $t_i - a_i$ (où $a_i \in k$, $1 \leqslant i \leqslant n$, les a_i étant les images canoniques des t_i dans $A/\mathfrak{m}$). Remplaçant t_i par $t_i - a_i$, on voit finalement qu'on est ramené au cas où $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^{n} At_i$. Le complété de l'anneau local $A_\mathfrak{m}$ est alors l'anneau de séries formelles $k[[t_1, \dots, t_n]]$; on sait qu'il a même dimension que $A_\mathfrak{m}$ (**0**, 16.2.4), et d'autre part, la dimension de $k[[t_1, \dots, t_n]]$ est égale à n (**0**, 17.1.4); d'où la conclusion.

Corollaire (**5.2.2**). — *Pour un préschéma X localement de type fini sur un corps k,* $\dim(X)$ *coïncide avec le nombre défini dans* (4.1.1).

En effet, si X_α sont les sous-préschémas réduits ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de X, on a $\dim(X) = \sup_\alpha(\dim(X_\alpha))$ (**0**, 14.1.2.1) et il suffit d'appliquer (5.2.1) aux X_α.

Corollaire (**5.2.3**). — *Soient X un préschéma localement de type fini sur un corps k, x un point de X. On a*

(**5.2.3.1**) $$\dim_x(X) = \dim(\mathcal{O}_x) + \deg.\mathrm{tr}_k \boldsymbol{k}(x).$$

On sait qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $\dim_x(X) = \dim(U)$ (**0**, 14.1.4.1), et l'on peut supposer que les composantes irréductibles de U soient les $X_i \cap U$, où les X_i sont les composantes irréductibles de X contenant x; comme $U \cap X_i$

est dense dans X_i, il résulte de (4.1.1.3) que $\dim(X_i)=\dim(U\cap X_i)$, donc on a $\dim_x(X)=\sup_i(\dim(X_i))$. En outre, les idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}_x$ correspondent aux points génériques des X_i, donc (**0**, 16.1.1.1), on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x})=\sup(\dim(\mathcal{O}_{X_i,x}))$. On est donc ramené au cas où X est *irréductible*; comme X est biéquidimensionnel par (5.2.1), on a $\dim(X)=\dim(\overline{\{x\}})+\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X)$ (**0**, 14.3.5.1), et l'on sait que $\dim(\overline{\{x\}})=\deg.\operatorname{tr}_k \boldsymbol{k}(x)$ par (5.2.1) et $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X)=\dim(\mathcal{O}_x)$ par (5.1.2).

Corollaire (**5.2.4**). — *Soient* X *un préschéma localement de type fini sur un corps* k, $\mathscr{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible,* f *une section de* $\mathscr{L}$ *au-dessus de* X, *telle que l'ensemble* Y *des* $x\in X$ *tels que* $f(x)=0$ *soit rare dans* X. *Alors on a* $\dim(Y)\leqslant\dim(X)-1$; *les deux membres de cette inégalité sont égaux si* Y *rencontre toute composante irréductible de dimension maxima de* X.

Si (X_α) est la famille des composantes irréductibles de X, on a

$$\dim(Y)=\sup_\alpha(\dim(Y\cap X_\alpha))$$

et l'on est donc ramené au cas où X est irréductible ($Y\cap X_\alpha$ étant rare dans X_α puisque tout X_α a un intérieur non vide dans X). On peut se borner au cas où $Y\neq\emptyset$; alors, pour tout point maximal x de Y, on a (puisque X est biéquidimensionnel) $\dim(\overline{\{x\}})=\dim(X)-\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X)$, et puisque Y est rare dans X, on a

$$\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X)=1$$

par (5.1.8); d'où le corollaire.

Remarques (**5.2.5**). — (i) Contrairement à ce qui a lieu pour les k-préschémas algébriques, un préschéma localement noethérien X n'est pas nécessairement caténaire (cf. (5.6.11)); il l'est cependant si tous ses anneaux locaux $\mathcal{O}_x$ sont des quotients d'anneaux réguliers (**0**, 16.5.12) et en particulier si X est *régulier* (**I**, 4.1.4). Toutefois, même un schéma (intègre) $X=\operatorname{Spec}(A)$, où A est un anneau *régulier*, n'est pas nécessairement *biéquidimensionnel*, autrement dit (**0**, 14.3.3) les codimensions dans X des divers points fermés de X ne sont pas nécessairement les mêmes. Par exemple, soient B un anneau de valuation discrète, $\mathfrak{m}=B\pi$ son idéal maximal, $k=B/\mathfrak{m}$ son corps résiduel, K le corps des fractions de B; soit A l'anneau de polynômes B[T]. Il y a dans A des idéaux maximaux *de hauteur* 2, par exemple $(\pi)+(T)$; mais il y a aussi des idéaux maximaux *de hauteur* 1, par exemple l'idéal principal $(\pi T-1)$: en effet, un idéal premier principal $\neq 0$ est de hauteur 1 (5.1.8); d'autre part $A/(\pi T-1)$ est isomorphe à l'anneau de fractions B_π ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.2.3), qui n'est autre ici que K, ce qui prouve que l'idéal $(\pi T-1)$ est maximal et de hauteur 1.

(ii) Lorsque X est un préschéma localement de type fini sur un corps, on a vu (4.1.1.3) que $\dim(U)=\dim(X)$ pour tout ouvert partout dense U dans X. Ce résultat *ne s'étend pas* aux préschémas noethériens réguliers, même s'ils sont biéquidimensionnels. Par exemple, soient B un anneau de valuation discrète, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal; $X=\operatorname{Spec}(A)$ a deux points, l'idéal (0) et $\mathfrak{m}$, ce dernier étant le seul point fermé; on a $\dim(X)=1$, mais l'ensemble ouvert $U=\{(0)\}$ est de dimension 0 (cf. § 10).

5.3. Dimension du support d'un Module et polynôme de Hilbert.

Ce numéro utilise les résultats du chapitre III; il ne sera pas utilisé dans la suite de ce chapitre.

Proposition (5.3.1). — *Soient* A *un anneau local artinien,* X *un schéma projectif sur* Spec(A), $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module inversible très ample relativement à* A, $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent* $\neq 0$; *on pose* $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{L}^{\otimes n}$ *pour* $n \in \mathbf{Z}$. *Alors le degré du polynôme de Hilbert* $\mathrm{P}(n) = \chi_{\mathrm{A}}(\mathscr{F}(n))$ *de* $\mathscr{F}$ *par rapport à* A (**III**, 2.5.3) *est égal à la dimension de* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$.

Raisonnons par récurrence sur $d = \dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$. On sait qu'il existe un sous-préschéma fermé Y de X dont $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ est l'espace sous-jacent, et un $\mathscr{O}_Y$-Module cohérent $\mathscr{G}$ tel que $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{G})$, où $j : Y \rightarrow X$ est l'injection canonique (**Err**$_{\mathrm{III}}$, 30). Il est immédiat que les polynômes de Hilbert de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G}$ sont les mêmes, donc on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$. Supposons d'abord $d = 0$; tous les points de X étant fermés, X est un schéma artinien (**I**, 6.2.2), donc $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F}$ pour tout entier n, et l'on a par suite (**III**, 2.5.3)

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathscr{F}(n)) = \mathrm{long}_{\mathrm{A}}(\Gamma(X, \mathscr{F}))$$

pour n assez grand, et le degré du polynôme de Hilbert est donc 0. Supposons maintenant $d > 0$, et posons $Z = \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, qui est un ensemble fini (3.1.6); il existe un entier $m > 0$ et une section $f \in \Gamma(X, \mathscr{L}^{\otimes m})$ tels que X_f soit un voisinage de Z (**II**, 4.5.4). La multiplication par f est un homomorphisme

$$\mu_f : \mathscr{F} \rightarrow \mathscr{F}(m)$$

qui est injectif (3.1.8); on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathscr{F} \xrightarrow{\mu_f} \mathscr{F}(m) \rightarrow \mathscr{G} \rightarrow 0 \tag{5.3.1.1}$$

où $\mathscr{G}$ est cohérent. En vertu du lemme de Nakayama, les points $x \in \mathrm{Supp}(\mathscr{G})$ sont exactement ceux pour lesquels $f(x) = 0$. Nous allons en déduire que l'on a

$$\dim(\mathrm{Supp}(\mathscr{G})) = d - 1. \tag{5.3.1.2}$$

Cela résultera du lemme suivant :

Lemme (5.3.1.3). — *Soient* A *un anneau local artinien,* X *un schéma projectif sur* Spec(A), $\mathscr{L}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module inversible ample relativement à* A; *alors, pour toute section* g *de* $\mathscr{L}$ *au-dessus de* X, *l'ensemble* X_g *des* $x \in X$ *tels que* $g(x) = 0$ *rencontre toute composante irréductible de* X *de dimension* $\neq 0$.

En effet (**II**, 5.5.7), l'ensemble X_g est un ouvert affine de X, et s'il contient une composante irréductible X' de X, le sous-préschéma fermé réduit de X ayant X' pour espace sous-jacent est à la fois projectif et affine sur A, donc fini sur A (**III**, 4.4.2), et par suite un schéma artinien, donc de dimension 0.

Ce lemme étant établi, notons que puisque Z contient les points maximaux de X, X_f est dense, donc $\mathrm{Supp}(\mathscr{G})$ est rare dans X, et la relation (5.3.1.2) résulte du lemme et de (5.2.4).

Cela étant, de la suite exacte (5.3.1.1), on déduit, pour tout n, la suite exacte

$$0 \to \mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}(n+m) \to \mathscr{G}(n) \to 0$$

et pour n assez grand, on a donc aussi la suite exacte (**III**, 2.2.3)

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{F}(n)) \to \Gamma(X, \mathscr{F}(n+m)) \to \Gamma(X, \mathscr{G}(n)) \to 0$$

d'où, compte tenu de (**III**, 2.5.3), pour n assez grand,

$$\chi_A(\mathscr{G}(n)) = \chi_A(\mathscr{F}(n+m)) - \chi_A(\mathscr{F}(n)).$$

Comme en vertu de (5.3.1.2) et de l'hypothèse de récurrence, le degré du polynôme $\chi_A(\mathscr{G}(n))$ est $d-1$, la relation précédente entraîne que le degré de $\chi_A(\mathscr{F}(n))$ est d, C.Q.F.D.

5.4. Dimension de l'image d'un morphisme.

Proposition (**5.4.1**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f: X \to Y$ *un morphisme.*

(i) *Si f est quasi-fini, on a* $\dim(X) \leqslant \dim(\overline{f(X)}) \leqslant \dim(Y)$.

(ii) *Si f est surjectif et ouvert* (resp. *surjectif et fermé*), *on a* $\dim(X) \geqslant \dim(Y)$.

(i) On peut remplacer f par f_{red} (**II**, 6.2.4), donc supposer X et Y réduits; si Z est le sous-préschéma fermé réduit de Y ayant pour espace sous-jacent $\overline{f(X)}$, on a alors $f = j \circ g$, où $j: Z \to Y$ est l'injection canonique et $g: X \to Z$ est un morphisme quasi-fini (**I**, 5.2.2 et **II**, 6.2.4). On peut donc se borner au cas où $f(X)$ est dense dans Y. Pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ est alors un $\mathcal{O}_{f(x)}$-module quasi-fini (**II**, 6.2.2), et par suite $\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_x$ est un idéal de définition de $\mathcal{O}_x$ ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 7.4.4); mais on sait (**0**, 16.3.10) que si $A \to B$ est un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, tel que, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, $\mathfrak{m}B$ soit un idéal de définition de B, alors on a $\dim(B) \leqslant \dim(A)$; cela achève de démontrer (i) en vertu de (5.1.4).

(ii) La définition de la dimension (**0**, 14.1.2) montre qu'il suffit de prouver que pour toute suite $(y_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments distincts de Y telle que $y_i \in \overline{\{y_{i+1}\}}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ il existe une suite $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de points de X telle que $x_i \in \overline{\{x_{i+1}\}}$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $f(x_i) = y_i$ pour tout i. Supposons d'abord f surjectif et *ouvert* et démontrons l'existence de x_i par récurrence sur i; l'existence de $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = y_0$ résulte de ce que f est surjectif. Si les x_i ont été déterminés pour $i \leqslant m$ de façon à satisfaire à $f(x_i) = y_i$ pour $i \leqslant m$ et $x_i \in \overline{\{x_{i+1}\}}$ pour $i < m$, on note que puisque f est ouvert et y_{m+1} une générisation de y_m, il existe $x_{m+1} \in f^{-1}(y_{m+1})$ qui est une générisation de x_m (1.10.3) et la récurrence peut se poursuivre.

Supposons maintenant f surjectif et *fermé* et démontrons l'existence de x_i par récurrence *descendante* sur i, l'existence de x_n tel que $f(x_n) = y_n$ résultant encore de ce que f est surjectif. Si les x_i ont été déterminés de façon à satisfaire aux conditions voulues pour $i > m$, on note que $f(\overline{\{x_{m+1}\}})$ est l'adhérence de $\{f(x_{m+1})\} = \{y_{m+1}\}$ puisque f

est fermé (Bourbaki, *Top. gén.*, chap. Ier, 3e éd., § 5, n° 4, prop. 9); il existe donc $x_m \in \overline{\{x_{m+1}\}}$ tel que $f(x_m) = y_m$ et la récurrence descendante se poursuit encore.

Corollaire **(5.4.2)**. — *Si* X, Y *sont deux préschémas localement noethériens*, $f : X \to Y$ *un morphisme fini* (donc *fermé*), *on a* $\dim(X) = \dim(f(X))$. *Si en outre f est surjectif, on a* $\dim(X) = \dim(Y)$.

Remarques **(5.4.3)**. — (i) On a vu dans (4.1.2) que si X et Y sont des préschémas localement de type fini sur un corps k et f un k-morphisme, l'inégalité $\dim(Y) \leqslant \dim(X)$ est déjà vérifiée lorsque f est *quasi-compact et dominant*. Au contraire, on peut avoir $\dim(Y) > \dim(X)$ même lorsque f est *de type fini*, *bijectif* et une *immersion locale*, si l'on suppose seulement X et Y localement noethériens. Par exemple soient A un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, k son corps résiduel; si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, et si a est le point générique de Y et b son point fermé, on a donc $\boldsymbol{k}(a) = K$, $\boldsymbol{k}(b) = k$. Soit alors X le préschéma *somme* de Spec(K) et de Spec(k), $f : X \to Y$ le morphisme qui coïncide dans Spec(K) et Spec(k) avec les morphismes canoniques respectifs (**I**, 2.4.5); il est clair que f est une immersion locale bijective, $\{a\}$ étant ouvert dans Y; d'autre part, f est de type fini, car $K = A[\pi^{-1}]$, où π est une uniformisante de A, donc K est une A-algèbre de type fini. Cependant on a $\dim(X) = 0$ et $\dim(Y) = 1$.

(ii) Si A et B sont deux anneaux noethériens tels que $A \subset B$ et que B soit une A-algèbre *finie*, le corollaire (5.4.2) montre à nouveau que $\dim(B) = \dim(A)$ (**0**, 16.1.5). Supposons en outre que A soit un anneau *local* noethérien; alors B est un anneau noethérien *semi-local* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9); si $\mathfrak{n}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont les idéaux maximaux de B, on a donc

$$\textbf{(5.4.3.1)} \qquad \dim(A) = \sup_i \dim(B_{\mathfrak{n}_i}).$$

On observera que, dans ces conditions, on n'a pas nécessairement $\dim(B_{\mathfrak{n}_i}) = \dim(A)$ pour *tout* i : il suffit pour le voir de remplacer B par la composée directe de B et du corps résiduel k de A. Mais on a même des exemples où A et B sont en outre des *anneaux intègres de dimension* 2 et où certains des $B_{\mathfrak{n}_i}$ ont une dimension $< \dim(A)$ (5.6.11). Nous verrons toutefois plus loin ((5.6.4) et (5.6.10)) que ce dernier phénomène ne peut se présenter lorsque l'on suppose que A est un quotient d'anneau local régulier.

5.5. Formule des dimensions pour un morphisme de type fini.

(5.5.1) Rappelons (**0**, 16.3.9) que si A, B sont deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, $\varphi : A \to B$ un homomorphisme local, on a

$$\textbf{(5.5.1.1)} \qquad \dim(B) \leqslant \dim(A) + \dim(B \otimes_A k).$$

On en déduit :

Proposition **(5.5.2)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens*, $f : X \to Y$ *un morphisme*, x *un point de* X, $y = f(x)$. *Alors on a*

$$\textbf{(5.5.2.1)} \qquad \dim(\mathcal{O}_x) \leqslant \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)).$$

En particulier, si x est *point maximal de la fibre* $f^{-1}(y)$, on a

$$(5.5.2.2) \qquad \dim(\mathcal{O}_x) \leqslant \dim(\mathcal{O}_y)$$

puisque $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_x$ est l'anneau local de x dans le préschéma $f^{-1}(y)$, et est donc de dimension 0 par hypothèse.

Nous allons obtenir une formule plus précise que (5.5.2.1) lorsque l'on suppose que f est un morphisme *de type fini*.

Proposition **(5.5.3).** — *Soient* A *un anneau noethérien,* T *une indéterminée,* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A; *alors* $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}A[T]$ *est premier dans* $B = A[T]$ *et* $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$. *Il existe une infinité d'idéaux premiers de* B *distincts de* $\mathfrak{p}'$, *dont l'intersection avec* A *est* $\mathfrak{p}$; *ces idéaux sont deux à deux sans relation d'inclusion. En outre, si* $\mathfrak{q}$ *est un tel idéal, on a*

$$(5.5.3.1) \qquad \dim(B_{\mathfrak{q}}) = \dim(B_{\mathfrak{p}'}) + 1 = \dim(A_{\mathfrak{p}}) + 1.$$

Dans les premières assertions, on se ramène aussitôt, en remplaçant A par $A/\mathfrak{p}$ et observant que $A[T]/\mathfrak{p}A[T] = (A/\mathfrak{p})[T]$, au cas $\mathfrak{p} = 0$; elles résultent alors du fait que les idéaux premiers de $B = A[T]$ dont l'intersection avec A se réduit à 0 sont exactement ceux qui ne rencontrent pas la partie multiplicative $S = A - \{0\}$ de l'anneau *intègre* A; or on sait qu'il y a une bijection croissante de l'ensemble de ces idéaux sur l'ensemble des idéaux premiers de $S^{-1}A[T] = K[T]$, où K est le corps des fractions de A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, nº 5, prop. 11). En outre, on a, d'après (5.5.1.2), $\dim(B_{\mathfrak{q}}) \leqslant \dim(A_{\mathfrak{p}}) + \dim(B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}})$, et si k est le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$, $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ s'identifie canoniquement à $(k[T])_{\mathfrak{q}}$, donc est un anneau de valuation discrète, donc de dimension 1. Enfin, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{p}_m$ est une chaîne d'idéaux premiers de A de longueur maxima, les idéaux $\mathfrak{p}_j B$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$ sont premiers dans B, deux à deux distincts et contenus dans $\mathfrak{q}$; donc $\dim(B_{\mathfrak{q}}) \geqslant m + 1 = \dim(A_{\mathfrak{p}}) + 1$ et par suite $\dim(B_{\mathfrak{q}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) + 1$. Cette relation s'écrit encore $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$; comme $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}'$, on a d'ailleurs $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{p}') + 1 \geqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$ par définition de la hauteur d'un idéal premier; cela achève de prouver (5.5.3.1).

Corollaire **(5.5.4).** — *Pour tout anneau noethérien* A, *on a*

$$(5.5.4.1) \qquad \dim(A[T_1, \ldots, T_r]) = \dim(A) + r$$

(T_i *indéterminées*).

On notera par contre qu'il y a des exemples d'anneaux locaux *non noethériens* A tels que $\dim(A) = 1$ et $\dim(A[T]) = 3$ [30].

Corollaire **(5.5.5).** — *Pour tout préschéma localement noethérien* X, *la dimension de* $X[T_1, \ldots, T_r] = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_r]$ (T_i *indéterminées*) *est* $\dim(X) + r$.

Cela résulte de (5.5.4) et de (**0**, 14.1.7).

Corollaire **(5.5.6).** — *Sous les hypothèses de* (5.5.3), *soit* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* $B = A[T]$ *tel que* $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$; *si* k *et* k' *sont les corps résiduels de* $A_{\mathfrak{p}}$ *et* $B_{\mathfrak{q}}$ *respectivement, on a*

$$(5.5.6.1) \qquad \dim(A_{\mathfrak{p}}) + 1 = \dim(B_{\mathfrak{q}}) + \deg.\mathrm{tr}_k k'$$

Si $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}B$, on a, d'après (5.5.3.1), $\dim(B_{\mathfrak{q}})=\dim(A_{\mathfrak{p}})$, et dans ce cas $k'=k(T)$, donc la formule (5.5.6.1) est bien vérifiée. Dans le cas contraire, $\dim(B_{\mathfrak{q}})=\dim(A_{\mathfrak{p}})+1$, et comme $\mathfrak{q}$ correspond à un idéal premier $\mathfrak{q}'\neq 0$ de $k[T]$, k' est une extension algébrique de k, donc on a encore la formule (5.5.6.1).

Lemme **(5.5.7).** — *Soient* A *un anneau local intègre noethérien,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* k *son corps résiduel.*

(i) *Pour tout anneau intègre* B *contenant* A, *tel que* $B=A[x]$ (*pour un* $x\in B$) *et tout idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B *tel que* $\mathfrak{q}\cap A=\mathfrak{m}$, *on a*

(5.5.7.1) $$\dim(A)+\deg.\mathrm{tr}_A B\geqslant\dim(B_{\mathfrak{q}})+\deg.\mathrm{tr}_k k'$$

en désignant par k' *le corps résiduel de* $B_{\mathfrak{q}}$ *et par* $\deg.\mathrm{tr}_A B$ *le degré de transcendance du corps des fractions de* B *sur celui de* A.

(ii) *Supposons que pour tout idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* A[T] *tel que* $\mathfrak{n}\cap A=\mathfrak{m}$, *l'anneau* $(A[T])_{\mathfrak{n}}$ *soit caténaire; alors les deux membres de* (5.5.7.1) *sont égaux.*

(i) Si x est transcendant sur le corps des fractions de A, on a $\deg.\mathrm{tr}_A B=1$ et les deux membres de (5.5.7) sont égaux en vertu de (5.5.6). Dans le cas contraire, on a $B=A[T]/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier $\neq 0$ de A[T], tel que $\mathfrak{p}\cap A=0$ puisque B contient A; on a donc $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1$ en vertu de (5.5.3). L'idéal $\mathfrak{q}$ de B est de la forme $\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{n}\supset\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A[T] tel que $\mathfrak{n}\cap A=\mathfrak{m}$, et l'on a $B_{\mathfrak{q}}=(A[T])_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{p}(A[T])_{\mathfrak{n}}$; la formule (**0**, 16.1.4.1), appliquée à $X=\mathrm{Spec}((A[T])_{\mathfrak{n}})$ et à $Y=\mathrm{Spec}(B_{\mathfrak{q}})$, donne

(5.5.7.2) $$\dim((A[T])_{\mathfrak{n}})\geqslant\mathrm{ht}(\mathfrak{p}(A[T])_{\mathfrak{n}})+\dim(B_{\mathfrak{q}})=1+\dim(B_{\mathfrak{q}})$$

car $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}(A[T])_{\mathfrak{n}})=\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1$ en vertu de la correspondance biunivoque entre idéaux premiers de A[T] contenus dans $\mathfrak{n}$ et idéaux premiers de $(A[T])_{\mathfrak{n}}$. Enfin, la formule (5.5.6.1) donne

(5.5.7.3) $$\dim((A[T])_{\mathfrak{n}})=\dim(A)+1-\deg.\mathrm{tr}_k k'$$

puisque les corps résiduels de $B_{\mathfrak{q}}$ et de $(A[T])_{\mathfrak{n}}$ sont les mêmes; par ailleurs, on a alors $\deg.\mathrm{tr}_A B=0$, ce qui achève de prouver (5.5.7.1).

(ii) Si $(A[T]_{\mathfrak{n}})$ est caténaire, les deux membres de (5.5.7.2) sont égaux (**0**, 16.1.4), donc aussi les deux membres de (5.5.7.1).

Théorème **(5.5.8)** (formule des dimensions). — *Soient* A *un anneau local noethérien intègre,* B *un anneau intègre contenant* A *et qui est une* A-*algèbre de type fini,* $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* B *tel que* $\mathfrak{q}\cap A$ *soit l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, k *et* k' *les corps résiduels de* A *et* $B_{\mathfrak{q}}$ *respectivement. On a alors l'inégalité*

(5.5.8.1) $$\dim(A)+\deg.\mathrm{tr}_A B\geqslant\dim(B_{\mathfrak{q}})+\deg.\mathrm{tr}_k k'.$$

*En outre les deux membres sont égaux si, pour toute sous-*A-*algèbre* A' *de type fini de* B[T] *et tout idéal maximal* $\mathfrak{m}'$ *de* A' *tel que* $\mathfrak{m}'\cap A=\mathfrak{m}$, $A'_{\mathfrak{m}'}$ *est caténaire.*

Soit $B=A[x_1,\ldots,x_n]$ et raisonnons par récurrence sur n. Posons $C=A[x_1,\ldots,x_{n-1}]$ et $\mathfrak{r}=\mathfrak{q}\cap C$; $C_{\mathfrak{r}}$ est un anneau local intègre noethérien, et si on pose $S=C-\mathfrak{r}$, $B'=S^{-1}B$, $\mathfrak{q}'=S^{-1}\mathfrak{q}$, on a $B_{\mathfrak{q}}=B'_{\mathfrak{q}'}$, $B'=C_{\mathfrak{r}}[x_n]$ et $\mathfrak{q}'\cap C_{\mathfrak{r}}=\mathfrak{r}C_{\mathfrak{r}}$; en outre les corps des fractions de B′ et $C_\mathfrak{r}$ sont ceux de B et C respectivement. Si k_1 est le corps résiduel de $C_\mathfrak{r}$, on a donc, d'après (5.5.7.1)

(5.5.8.2) $$\dim(C_\mathfrak{r}) + \deg.\mathrm{tr}_C B \geqslant \dim(B_\mathfrak{q}) + \deg.\mathrm{tr}_{k_1} k'.$$

D'autre part l'hypothèse de récurrence donne

(5.5.8.3) $$\dim(A) + \deg.\mathrm{tr}_A C \geqslant \dim(C_\mathfrak{r}) + \deg.\mathrm{tr}_k k_1$$

d'où (5.5.8.1) en ajoutant (5.5.8.2) et (5.5.8.3) membre à membre. Pour démontrer la seconde assertion, notons d'abord que toute sous-A-algèbre de type fini de C[T] est aussi une sous-A-algèbre de type fini de B[T]; par récurrence sur n, on peut donc supposer que les deux membres de (5.5.8.3) sont égaux. D'autre part, pour voir que les deux membres de (5.5.8.2) sont égaux, il suffit, en vertu de (5.5.7), de vérifier que si $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de $C_\mathfrak{r}[T]$ tel que $\mathfrak{n} \cap C_\mathfrak{r} = \mathfrak{r}C_\mathfrak{r}$, alors $(C_\mathfrak{r}[T])_\mathfrak{n}$ est caténaire; mais on a $C_\mathfrak{r}[T] = S'^{-1}C[T]$ où $S' = C - \mathfrak{r}$; l'idéal $\mathfrak{n}$ est donc de la forme $S'^{-1}\mathfrak{n}'$, où $\mathfrak{n}'$ est un idéal premier de C[T] tel que $\mathfrak{n}' \cap C = \mathfrak{r}$, d'où $(C_\mathfrak{r}[T])_\mathfrak{n} = (C[T])_{\mathfrak{n}'}$; si $\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal de C[T] contenant $\mathfrak{n}'$, $(C[T])_{\mathfrak{n}'}$ est donc un anneau local de l'anneau $(C[T])_{\mathfrak{m}'}$, et comme par hypothèse ce dernier est caténaire, il en est de même de $(C[T])_{\mathfrak{n}'}$ (**0**, 16.1.4).

5.6. Formule des dimensions et anneaux universellement caténaires.

Proposition (**5.6.1**). — *Soit* A *un anneau noethérien. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *Tout anneau de polynômes* $A[T_1, \ldots, T_n]$ *est caténaire.*

b) *Toute algèbre de type fini sur* A *est caténaire.*

c) A *est caténaire, et pour toute* A*-algèbre intègre locale, essentiellement de type fini* (1.3.8) B′, *on a, en désignant par* $\mathfrak{p}$ *l'image réciproque dans* A *de l'idéal maximal* $\mathfrak{q}$ *de* B′, *par* A′ *l'image de* $A_\mathfrak{p}$ *dans* B′, *par* k *et* k' *les corps résiduels de* A′ *et* B′ *respectivement,*

(5.6.1.1) $$\dim(A') + \deg.\mathrm{tr}_{A'}(B') = \dim(B') + \deg.\mathrm{tr}_k k'.$$

Le fait que *b)* entraîne *c)* résulte de (5.5.8); en effet, B′ est une A′-algèbre locale essentiellement de type fini (1.3.10), donc de la forme $B''_{\mathfrak{q}''}$, où B″ est une sous-A′-algèbre de type fini de B′, $\mathfrak{q}''$ un idéal premier de B″ au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{p}'$ de A′; en outre les corps des fractions de B′ et B″ sont les mêmes, donc $\deg.\mathrm{tr}_{A'}(B') = \deg.\mathrm{tr}_{A'}(B'')$. Pour démontrer (5.6.1.1), il suffit de montrer que (sous l'hypothèse *b)*) toute sous-A′-algèbre A_1 de type fini de B′[T] est caténaire; en effet les deux membres de (5.5.8.1), où on remplace A, B et $\mathfrak{q}$ par A′, B″ et $\mathfrak{q}''$, seront alors égaux, d'où l'égalité (5.6.1.1). Or l'hypothèse *b)* entraîne que toute A-algèbre essentiellement de type fini est caténaire (**0**, 16.1.4), et A_1 est une telle A-algèbre (1.3.9).

Il est trivial que *b)* entraîne *a)*; inversement, *a)* entraîne *b)*, toute A-algèbre de type fini étant quotient d'une algèbre de polynômes (**0**, 16.1.4).

Reste à prouver que *c)* entraîne *b)*. Comme tout quotient par un idéal premier d'une A-algèbre de type fini est une A-algèbre intègre de type fini, il s'agit de voir que, si B est une A-algèbre intègre de type fini, $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ deux idéaux premiers de B tels que $\mathfrak{q}'\subset\mathfrak{q}$, on a (**0**, 16.1.4.2)

$$\textbf{(5.6.1.2)} \qquad \dim(B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}})+\dim(B_{\mathfrak{q}'})=\dim(B_{\mathfrak{q}}).$$

Soient $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ les images réciproques de $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ respectivement dans A, $\mathfrak{n}$ le noyau de l'homomorphisme $A_{\mathfrak{p}}\rightarrow B_{\mathfrak{q}}$.

L'image A' de $A_{\mathfrak{p}}$ dans $B_{\mathfrak{q}}$ étant isomorphe à $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{n}$, la formule (5.6.1.1) appliquée à A' et à $B'=B_{\mathfrak{q}}$, s'écrit

$$\textbf{(5.6.1.3)} \qquad \dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{n})+\deg.\mathrm{tr}_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{n}}(B_{\mathfrak{q}})=\dim(B_{\mathfrak{q}})+\deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(\mathfrak{p})}\boldsymbol{k}(\mathfrak{q}).$$

D'autre part, le noyau de $A_{\mathfrak{p}'}\rightarrow B_{\mathfrak{q}'}$ est $\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}'}$, donc, en appliquant la formule (5.6.1.1) où l'on remplace A' par $A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}'}$ et B' par $B_{\mathfrak{q}'}$, on a

$$\textbf{(5.6.1.4)} \qquad \dim(A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}'})+\deg.\mathrm{tr}_{A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}'}}(B_{\mathfrak{q}'})=\dim(B_{\mathfrak{q}'})+\deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(\mathfrak{p}')}\boldsymbol{k}(\mathfrak{q}').$$

Enfin, $B/\mathfrak{q}'$ est une A-algèbre intègre de type fini, l'image réciproque de $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}'$ dans A est $\mathfrak{p}$, et le noyau de l'homomorphisme $A_{\mathfrak{p}}\rightarrow B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}}$ est $\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}}$, donc, en appliquant (5.6.1.1) où l'on remplace A' par $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}}$ et B' par $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}}$, on a

$$\textbf{(5.6.1.5)} \qquad \dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}})+\deg.\mathrm{tr}_{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}})=\dim(B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}})+\deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(\mathfrak{p}(}\boldsymbol{k}(\mathfrak{q}).$$

Ajoutons maintenant (5.6.1.4) et (5.6.1.5) membre à membre, et notons que $\boldsymbol{k}(\mathfrak{p}')$ (resp. $\boldsymbol{k}(\mathfrak{q}')$) est le corps des fractions de $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}}$ (resp. $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}'B_{\mathfrak{q}}$); par ailleurs $A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p}'}$ et $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{n}$ ont même corps des fractions, et $B_{\mathfrak{q}'}$ et $B_{\mathfrak{q}}$ ont même corps des fractions; enfin, puisque A est supposé caténaire, on a (**0**, 16.1.4.2)

$$\dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}'A_{\mathfrak{p}})+\dim(A_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{n}A_{\mathfrak{p},})=\dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{n})$$

Tenant compte de ces remarques et de (5.6.1.3), il vient la relation (5.6.1.2).

C.Q.F.D.

Définition **(5.6.2)**. — *On dit qu'un anneau noethérien* A *est universellement caténaire s'il vérifie les conditions équivalentes* a), b), c) *de* (5.6.1).

Remarques **(5.6.3)**. — (i) Si A est universellement caténaire, il en est de même de $S^{-1}A$ pour toute partie multiplicative S de A, comme il résulte aussitôt de (5.6.1, *a)*) et du fait que tout anneau de fractions d'un anneau caténaire est caténaire. Inversement, si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est universellement caténaire, alors A est universellement caténaire : cela résulte de (5.6.1, *c)*), si l'on remarque qu'en posant $S=A-\mathfrak{p}$, $S^{-1}B$ est une $A_{\mathfrak{p}}$-algèbre de type fini, et $B_{\mathfrak{q}}=(S^{-1}B)_{S^{-1}\mathfrak{q}}$.

(ii) On dit qu'un préschéma localement noethérien X est *universellement caténaire* si, pour tout $x\in X$, l'anneau $\mathcal{O}_x$ est universellement caténaire. Il résulte de (i) que pour que A soit un anneau universellement caténaire, il faut et il suffit que le schéma Spec(A) le soit.

(iii) Le critère (5.6.1, *c)*) ne fait intervenir que les images de A dans des A-algèbres intègres de type fini, donc des *anneaux quotients intègres* de A. On en conclut que si

$\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les idéaux premiers minimaux de A, il revient au même de dire que A est universellement caténaire ou que chacun des $A/\mathfrak{p}_i$ l'est. Cela montre aussi qu'il revient au même de dire qu'un préschéma localement noethérien X est universellement caténaire, ou que X_{red} l'est.

(iv) Le critère (5.6.1, *b)*) et la remarque (i) montrent que, si A est un anneau universellement caténaire, il en est de même de toute A-*algèbre essentiellement de type fini* (1.3.8).

Proposition **(5.6.4)**. — *Tout anneau quotient d'un anneau régulier est universellement caténaire.*

Tout revient à voir qu'un anneau régulier A est universellement caténaire (5.6.3, (iv)); or, on sait que $A[T_1, \ldots, T_n]$ est régulier (**0**, 17.3.7), donc caténaire (**0**, 16.5.12), et l'on conclut par (5.6.1, *a)*).

En particulier, il résulte du théorème de Cohen (**0**, 19.8.8) que tout *anneau local noethérien complet* est universellement caténaire. De même, toute algèbre de type fini sur un corps étant quotient d'un anneau régulier, tout préschéma *localement de type fini sur un corps* est universellement caténaire.

Nous verrons plus loin (6.3.7) que dans (5.6.4), on peut remplacer « anneau régulier » par « anneau de Cohen-Macaulay ».

Proposition **(5.6.5)**. — *Soient* Y *un préschéma irréductible localement noethérien,* X *un préschéma irréductible,* $f : X \to Y$ *un morphisme dominant localement de type fini. Soit* ξ (resp. η) *le point générique de* X (resp. Y), *et soit* $e = \dim(f^{-1}(\eta)) = \deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(\eta)}\boldsymbol{k}(\xi)$ (« dimension de la fibre générique », cf. ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.8) et (4.1.1)). *Pour tout* $x \in X$, *on a alors, en posant* $y = f(x)$,

(5.6.5.1) $$e + \dim(\mathcal{O}_y) \geqslant \deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(y)}\boldsymbol{k}(x) + \dim(\mathcal{O}_x)$$

(5.6.5.2) $$\dim(\mathcal{O}_x) \leqslant \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)) - \delta(x)$$

en posant $\delta(x) = \dim_x(f^{-1}(y)) - e$.

En outre, si Y *est universellement caténaire, les deux membres de* (5.6.5.1) (resp. (5.6.5.2)) *sont égaux. Si de plus* x *est fermé dans* $f^{-1}(y)$, *on a*

(5.6.5.3) $$\dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) + e.$$

On peut évidemment se borner au cas où X et Y sont affines (donc f de type fini) et réduits (1.5.4), donc intègres. Comme f est dominant, $\mathcal{O}_y$ s'identifie alors à un sous-anneau de $\mathcal{O}_x$, et les corps des fractions respectifs de $\mathcal{O}_y$ et de $\mathcal{O}_x$ à $\boldsymbol{k}(\eta)$ et $\boldsymbol{k}(\xi)$ (**I**, 8.2.7); en outre, $\mathcal{O}_x$ est un anneau local d'une $\mathcal{O}_y$-algèbre intègre de type fini B en un idéal premier $\mathfrak{q}$ (**I**, 3.6.5); en appliquant (5.5.8.1) à $A = \mathcal{O}_y$, B et $\mathfrak{q}$, on obtient (5.6.5.1). En outre, $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_x$ n'est autre que l'anneau local de la fibre $f^{-1}(y)$ au point x (**I**, 3.6.1); comme $f^{-1}(y)$ est un préschéma de type fini sur $\boldsymbol{k}(y)$, il résulte de (5.2.3) que l'on a

$$\dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)) = \dim_x(f^{-1}(y)) - \deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(y)}\boldsymbol{k}(x)\ ;$$

l'inégalité (5.6.5.2) n'est donc qu'une autre forme de (5.6.5.1).

Le fait que les deux membres de (5.6.5.1) sont égaux lorsque Y est universellement

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES SCIENTIFIQUES BIBLIOTHÈQUE

caténaire n'est autre que l'égalité (5.6.1.1), appliquée à $A=\mathcal{O}_y$ et $B'=\mathcal{O}_x$. Pour démontrer que l'on a de plus (5.6.5.3) lorsque x est fermé dans $f^{-1}(y)$, il suffit de remarquer que, de façon générale, $\deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(y)}\boldsymbol{k}(x)$ est la dimension de $\overline{\{x\}}\cap f^{-1}(y)$, comme il résulte de (5.2.1) appliqué au sous-préschéma fermé réduit de $f^{-1}(y)$ ayant ce sous-espace comme espace sous-jacent.

Nous démontrerons plus loin (13.1.1) que, sous les conditions de (5.6.5), *on a toujours* $\delta(x)\geqslant 0$, et (5.6.5.2) précise donc dans ce cas (5.5.2.1).

Corollaire **(5.6.6).** — *Sous les hypothèses générales de* (5.6.5), *on a*

(5.6.6.1) $$\dim(X)\leqslant\dim(Y)+e.$$

Si l'on suppose en outre Y *universellement caténaire, alors, pour que les deux membres de* (5.6.6.1) *soient égaux, il faut et il suffit que l'on ait*

(5.6.6.2) $$\dim(Y)=\sup_{y\in f(X)}\dim(\mathcal{O}_y).$$

En particulier, les deux membres de (5.6.6.1) *sont égaux lorsque* Y *est localement de type fini sur un corps.*

L'inégalité (5.6.6.1) résulte en effet de (5.6.5.1) appliqué en un point fermé x de X, compte tenu de (5.1.4.2) et de (5.1.11). D'autre part, toute fibre non vide $f^{-1}(y)$ contient un point x fermé dans cette fibre (5.1.11), et si l'on suppose Y universellement caténaire, on a donc en ce point la relation (5.6.5.3). En prenant les bornes supérieures des deux membres de (5.6.5.3) lorsque x parcourt X, et en notant que tout point x fermé dans X est *a fortiori* fermé dans $f^{-1}(f(x))$, la seconde assertion du corollaire résulte de (5.1.4.1) et (5.1.4.2).

Pour prouver la dernière assertion, notons qu'il y a un voisinage ouvert affine U du point générique de X tel que $f|U$ soit de type fini, donc $f(U)$ est une partie *constructible* de Y, dense dans Y (1.8.5), et par suite contient une partie ouverte non vide (donc partout dense) de Y ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.2.2). L'hypothèse que Y est localement de type fini sur un corps assure alors, d'une part que Y est universellement caténaire (5.6.4), et d'autre part que les deux membres de (5.6.6.2) sont égaux (5.2.2 et 4.1.1.3).

On notera que la condition (5.6.6.2) est trivialement vérifiée lorsque f est *surjectif.*

Corollaire **(5.6.7).** — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme localement de type fini,* n *un entier. Si, pour tout* $y\in Y$, $\dim(f^{-1}(y))\leqslant n$, *alors on a*

(5.6.7.1) $$\dim(X)\leqslant\dim(Y)+n.$$

En vertu de (**0**, 14.1.7) et de (1.5.4), on peut se borner au cas où X et Y sont affines, donc f de type fini, X et Y réduits; soient X_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ les sous-préschémas fermés (intègres) de X ayant pour espaces sous-jacents les composantes irréductibles de X; on a $\dim(X)=\sup_i(\dim(X_i))$. Si Z_i est le sous-préschéma fermé réduit de Y ayant pour espace sous-jacent $\overline{f(X_i)}$, Z_i est intègre ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 2.1.5); la restriction $X_i\rightarrow Y$ de f se factorise en $X_i\xrightarrow{g_i}Z_i\xrightarrow{j_i}Y$, où j_i est l'injection canonique (**I**, 5.2.2), et g_i est dominant et de type fini (1.5.4). On a $\dim(Z_i) \leqslant \dim(Y)$ pour tout i; d'autre part, si z_i est le point générique de Z_i, on a $\dim(g_i^{-1}(z_i)) \leqslant n$ pour tout i par hypothèse; on voit ainsi que pour prouver (5.6.7.1), il suffit de démontrer que $\dim(X_i) \leqslant \dim(Z_i) + n$ pour tout i, ce qui résulte de (5.6.6.1).

Corollaire **(5.6.8).** — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien,* X *un préschéma* irréductible, $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini, n un entier* $\geqslant 0$. *On suppose que* Y *est universellement caténaire, et que pour tout* $y \in Y$, *on ait* $\dim(f^{-1}(y)) \geqslant n$ (resp. $\dim(f^{-1}(y)) = n$). *Alors on a*

(5.6.8.1) $$\dim(X) \geqslant \dim(Y) + n$$

(resp.

(5.6.8.2) $$\dim(X) = \dim(Y) + n).$$

Comme $n \geqslant 0$, l'hypothèse entraîne que f est *surjectif*, donc Y irréductible; en outre, si η est le point générique de Y, on a $\dim(f^{-1}(\eta)) \geqslant n$ (resp. $\dim(f^{-1}(\eta)) = n$). La conclusion résulte donc de (5.6.6).

Remarques **(5.6.9).** — (i) Même si Y est régulier, X irréductible, $f : X \to Y$ dominant et de type fini, les deux membres de (5.6.6.1) ne sont pas nécessairement égaux, comme le montre l'exemple où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ où A est un anneau de valuation discrète, $X = \mathrm{Spec}(K)$ où K est le corps des fractions de A, f étant le morphisme canonique.

(ii) L'exemple (5.4.3, (i)) montre que dans (5.6.6) et (5.6.8), on ne peut supprimer l'hypothèse que X est irréductible, les autres hypothèses étant vérifiées. Nous verrons toutefois (10.6.1) que moyennant des hypothèses supplémentaires sur Y, vérifiées par exemple lorsque Y est un préschéma localement de type fini sur un corps, ou sur un anneau de Dedekind ayant une infinité d'idéaux premiers, de tels phénomènes ne peuvent se présenter.

Proposition **(5.6.10).** — *Soient* A *un anneau local noethérien intègre universellement caténaire,* B *un anneau intègre contenant* A *et qui est une* A*-algèbre finie. Alors, pour tout idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* B, *on a* $\dim(B_{\mathfrak{n}}) = \dim(A)$.

En effet, on a $\deg.\mathrm{tr}_A B = 0$ et le corps résiduel k' de $B_{\mathfrak{n}}$ est une extension algébrique du corps des fractions de A. La conclusion résulte de la formule (5.6.1.1), tout idéal maximal de B étant au-dessus de celui de A.

Exemple **(5.6.11).** — Soit A un anneau local noethérien intègre et *intégralement clos*; alors, on a vu (**0**, 16.1.6) que la conclusion de (5.6.10) est valable pour toute A-algèbre finie intègre B contenant A. Par contre, nous allons construire un exemple d'anneau local noethérien intègre *caténaire* A pour lequel la conclusion de (5.6.10) sera en défaut. Nous utiliserons la construction de (5.2.5, (i)). Soient k_0 un corps, k une extension transcendante pure $k_0(S_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de degré de transcendance infini, V l'anneau de valuation discrète $k[S]_{(S)}$, anneau local de l'anneau de polynômes $k[S]$ en l'idéal premier (S); enfin soit E l'anneau de polynômes V[T]; on a vu que dans E l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (S) + (T)$ est de hauteur 2 et l'idéal maximal $\mathfrak{m}' = (ST - 1)$ de hauteur 1;

les corps résiduels correspondants sont $\boldsymbol{k}(\mathfrak{m})=k$ et $\boldsymbol{k}(\mathfrak{m}')=k(S)$, corps des fractions de V; en vertu du choix de k, ces corps sont *isomorphes*. Désignons par ε et ε' les homomorphismes canoniques de E sur $E/\mathfrak{m}=\boldsymbol{k}(\mathfrak{m})$ et $E/\mathfrak{m}'=\boldsymbol{k}(\mathfrak{m}')$ respectivement; soit d'autre part σ un isomorphisme de $\boldsymbol{k}(\mathfrak{m})$ sur $\boldsymbol{k}(\mathfrak{m}')$, et considérons le sous-anneau C de E formé des $x\in E$ tels que $\varepsilon'(x)=\sigma(\varepsilon(x))$ (cette construction est un cas particulier des « procédés de recollement » qui seront étudiés systématiquement au chap. V). Il est immédiat que $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\mathfrak{m}'=\mathfrak{m}\cap\mathfrak{m}'$ est un idéal maximal de C, $C/\mathfrak{m}\mathfrak{m}'$ s'identifiant au sous-corps de $(E/\mathfrak{m})\times(E/\mathfrak{m}')$ formé des couples $(z, \sigma(z))$. On a $E=C+C(ST-1)$, autrement dit E est une C-algèbre *finie* et est évidemment la clôture intégrale de C; nous allons voir en outre que C est *noethérien* : cela résultera du lemme suivant :

Lemme **(5.6.11.1)**. — *Soient* R *un anneau,* S *un sous-anneau,* $\mathfrak{K}=\mathrm{Ann}_S(R/S)$ *le conducteur de* S *dans* R (*plus grand idéal de* S *qui est aussi un idéal de* R).

(i) *Pour tout idéal* $\mathfrak{J}\subset\mathfrak{K}$ *de* R, *il existe une application strictement croissante de l'ensemble des idéaux* $\mathfrak{L}$ *de* S *tels que* $R.\mathfrak{L}=\mathfrak{J}$ *sur l'ensemble des sous-*$(S/\mathfrak{K})$*-modules de* $\mathfrak{J}/\mathfrak{K}\mathfrak{J}$.

(ii) *Si* $S/\mathfrak{K}$ *et* R *sont noethériens et si* R *est un* S*-module de type fini, alors toute suite croissante d'idéaux de* S *contenus dans* K *est stationnaire.*

(i) On a en effet, $\mathfrak{K}\mathfrak{J}=\mathfrak{K}(R.\mathfrak{L})=\mathfrak{K}\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{L}$ étant un idéal de S), d'où la conclusion.

(ii) Soit $(\mathfrak{L}_n)$ une suite croissante d'idéaux de S contenus dans $\mathfrak{K}$. La suite des idéaux $R.\mathfrak{L}_n$ de R est stationnaire puisque R est noethérien; on peut donc supposer que tous les idéaux $R.\mathfrak{L}_n$ sont égaux à un même idéal $\mathfrak{J}$ de R. Comme R est noethérien, $\mathfrak{J}/\mathfrak{K}\mathfrak{J}$ est un R-module de type fini, donc aussi un S-module de type fini, et par suite un $(S/\mathfrak{K})$-module de type fini. Mais comme $S/\mathfrak{K}$ est noethérien, $\mathfrak{J}/\mathfrak{K}\mathfrak{J}$ est un $(S/\mathfrak{K})$-module noethérien, et la conclusion résulte de (i).

Nous allons appliquer ce lemme en prenant $R=E$, $S=C$; il est clair que $\mathfrak{n}$ est le conducteur de C dans E; en outre, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de C, $\mathfrak{a}/(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{a})$ est isomorphe à $(\mathfrak{a}+\mathfrak{n})/\mathfrak{n}$, donc un sous-C-module de $C/\mathfrak{n}$, qui est un C-module simple; il suffit donc de démontrer que tout idéal $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{n}$ de C est de type fini, et cela résulte de (5.6.11.1).

Il résulte de (**0**, 16.1.5) que l'on a $\dim(C)=\dim(E)=2$. Prenons $A=C_\mathfrak{n}$; si $U=C-\mathfrak{n}$, l'anneau de fractions $B=U^{-1}E$ est donc la clôture intégrale de A, et c'est un A-module de type fini; d'ailleurs, comme $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sont les seuls idéaux premiers de E contenant $\mathfrak{n}$, B est un anneau semi-local dont les anneaux locaux en les deux idéaux maximaux sont isomorphes à $E_\mathfrak{m}$ et $E_{\mathfrak{m}'}$ respectivement, donc sont respectivement de dimension 2 et 1. Cela montre que $\dim(B)=2$, donc aussi $\dim(A)=2$ (**0**, 16.1.5). Comme A est un anneau local intègre, il est nécessairement caténaire (tout idéal premier distinct de 0 et de l'idéal maximal étant nécessairement de hauteur 1); mais il ne vérifie pas la conclusion de (5.6.10), et *a fortiori* n'est pas universellement caténaire.

Notons encore que $\mathfrak{n}$ est un idéal de hauteur 2 dans C, et que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 dans C, il existe *un seul* idéal premier $\mathfrak{p}'$ de E au-dessus de $\mathfrak{p}$, nécessairement de hauteur 1, et tel que $C_\mathfrak{p}=E_{\mathfrak{p}'}$. En effet, il y a au moins un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de E au-dessus de $\mathfrak{p}$ et il résulte du théorème de Cohen-Seidenberg qu'un tel idéal est nécessairement de hauteur 1; en outre, comme E est une C-algèbre finie et que $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{n}$, $C_\mathfrak{p}$ est intégralement clos (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 5, cor. 5 de la prop. 16), donc $E_\mathfrak{p} = C_\mathfrak{p}$, ce qui prouve nos assertions.

Il serait intéressant de savoir si tout anneau local intègre noethérien vérifiant la conclusion de (5.6.10) est universellement caténaire; c'est ce qu'a affirmé Nagata [33], mais sa démonstration ne paraît pas complète.

5.7. Profondeur et propriété (S_k).

Définition **(5.7.1).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. On appelle profondeur* (resp. *coprofondeur*) *de* $\mathscr{F}$ *en un point* $x \in X$ *le nombre* $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x)$ (resp. $\operatorname{coprof}(\mathscr{F}_x)$) (**0**, 16.4.5 et 16.4.9). *On appelle coprofondeur de* $\mathscr{F}$ *le nombre*

(7.5 1.1)
$$\operatorname{coprof}(\mathscr{F}) = \sup_{x \in X} \operatorname{coprof}(\mathscr{F}_x).$$

On dit que $\mathscr{F}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module de Cohen-Macaulay au point* x *si* $\mathscr{F}_x$ *est un* $\mathcal{O}_x$*-module de Cohen-Macaulay, c'est-à-dire* (**0**, 16.5.1) *si* $\operatorname{coprof}(\mathscr{F}_x) = 0$. *On dit que* $\mathscr{F}$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module de Cohen-Macaulay s'il l'est en tout point, autrement dit si* $\operatorname{coprof}(\mathscr{F}) = 0$. *Un point* $x \in X$ *tel que* $\mathcal{O}_x$ *soit un anneau de Cohen-Macaulay est encore appelé point de Cohen-Macaulay de* X.

On appelle *coprofondeur* de X et on note coprof(X) le nombre $\operatorname{coprof}(\mathcal{O}_X)$. On dit que X est un *préschéma de Cohen-Macaulay* si $\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-Module de Cohen-Macaulay, autrement dit si $\operatorname{coprof}(X) = 0$. Tout préschéma localement noethérien de *dimension* 0 est évidemment un préschéma de Cohen-Macaulay. Dire que Spec(A) est un schéma de Cohen-Macaulay signifie que A est un anneau de Cohen-Macaulay (**0**, 16.5.13).

Définition **(5.7.2).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent,* k *un entier positif ou négatif. On dit que* $\mathscr{F}$ *possède la propriété* (S_k) *si, pour tout* $x \in X$, *on a*

(5.7.2.1)
$$\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{F}_x))$$

On dit que $\mathscr{F}$ *possède la propriété* (S_k) *en un point* $x \in X$ *si, pour toute générisation* x' *de* x *dans* X, *on a*

(5.7.2.2)
$$\operatorname{prof}(\mathscr{F}_{x'}) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{F}_{x'})).$$

On dit que X vérifie la propriété (S_k) (resp. vérifie la propriété (S_k) en un point x) si $\mathcal{O}_X$ vérifie la propriété (S_k) (resp. vérifie la propriété (S_k) au point x).

Pour que $\mathscr{F}$ vérifie la propriété (S_k), il faut et il suffit évidemment qu'il la vérifie en tout point de X. Si U est un ouvert de X et si $\mathscr{F}$ vérifie (S_k), il en est de même de $\mathscr{F}|U$; réciproquement, si (U_α) est un recouvrement ouvert de X et si $\mathscr{F}|U_\alpha$ vérifie (S_k) pour tout α, $\mathscr{F}$ vérifie (S_k).

Remarques **(5.7.3).** — (i) Rappelons que l'on a toujours $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) \leqslant \dim(\mathscr{F}_x)$ (**0**, 16.4.5.1) si $\mathscr{F}_x \neq 0$. Dire que $\mathscr{F}$ possède la propriété (S_k) signifie donc que l'on a $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant k$ *sauf* aux points $x \in X$ tels que $\dim(\mathscr{F}_x) < k$ et qu'en ces derniers points on a $\dim(\mathscr{F}_x) = \operatorname{prof}(\mathscr{F}_x)$, c'est-à-dire (**0**, 16.5.1) que $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module *de Cohen-Macaulay* en ces points; on notera qu'aux points où $\dim(\mathscr{F}_x) = k$, on a $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) = k$, donc $\mathscr{F}$ est encore un $\mathcal{O}_X$-Module de Cohen-Macaulay en ces points. Dire que $\mathscr{F}$ possède la propriété (S_k) *pour tout* k signifie donc que $\mathscr{F}$ est un *$\mathcal{O}_X$-Module de Cohen-Macaulay.* Il est clair que pour $k'\geqslant k$, la propriété $(S_{k'})$ implique (S_k); pour $k\leqslant 0$, *tout* $\mathcal{O}_X$-Module cohérent a la propriété (S_k).

(ii) Pour vérifier la condition (5.7.2.1), on peut se borner au cas où $x\in\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$; dans le cas contraire on a en effet $\dim(\mathscr{F}_x)=-\infty$ (**0**, 14.1.2).

(iii) Si $X=\operatorname{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien, et $\mathscr{F}=\widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini, on dit que M possède la propriété (S_k) si $\mathscr{F}$ possède cette propriété. Pour un préschéma localement noethérien quelconque X, dire que $\mathscr{F}$ possède la propriété (S_k) *en un point* $x\in X$ signifie donc que si on pose $Y=\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x)$, le $\mathcal{O}_Y$-Module $\widetilde{\mathscr{F}_x}$ possède la propriété (S_k); on notera que la condition (5.7.2.1) en général *n'entraîne pas* (5.7.2.2) pour toute générisation x' de x, vu qu'on n'a aucune relation d'inégalité entre $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x)$ et $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_{x'})$ (**0**, 16.4.6).

(iv) Il résulte aussitôt de la définition que si $\mathscr{F}$ vérifie (S_k) en un point x, il vérifie aussi (S_k) en tout point x' *générisation* de x.

(v) La propriété (S_k) est surtout importante pour $k=1$ et $k=2$; elle a été introduite pour $k=2$ par Serre, pour exprimer son critère de normalité (cf. (5.8.5)).

(vi) Soient X un préschéma localement noethérien, Y un sous-préschéma fermé de X, $j: Y\rightarrow X$ l'injection canonique, $\mathscr{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Il est clair que pour tout $x\in Y$, on a $\dim(\mathscr{G}_x)=\dim((j_*(\mathscr{G}))_x)$ et $\operatorname{prof}(\mathscr{G}_x)=\operatorname{prof}((j_*(\mathscr{G}))_x)$, d'où $\operatorname{coprof}(\mathscr{G}_x)=\operatorname{coprof}((j_*(\mathscr{G}))_x)$. Pour que $\mathscr{G}$ vérifie (S_k), il faut et il suffit que $j_*(\mathscr{G})$ vérifie (S_k).

Proposition **(5.7.4)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Posons* $S=\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$, *et pour tout* $n\geqslant 0$, *désignons par* Z_n *l'ensemble des* $z\in X$ *tels que* $\operatorname{coprof}(\mathscr{F}_z)>n$, *de sorte que* $Z_n\subset S$.

(i) *Pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie la propriété* (S_k), *il faut et il suffit que, pour tout* $n\geqslant 0$, *on ait*

(5.7.4.1) $$\operatorname{codim}(Z_n, S)>n+k.$$

(ii) *Supposons en outre que les* Z_n *soient fermés dans* X. *Alors, pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie la propriété* (S_k) *en un point* $x\in S$, *il faut et il suffit que, pour tout* $n\geqslant 0$, *on ait*

(5.7.4.2) $$\operatorname{codim}_x(Z_n, S)>n+k.$$

(i) On a en effet, par définition (5.1.3), $\operatorname{codim}(Z_n, S)=\inf\limits_{z\in Z_n}(\dim(\mathcal{O}_{S,z}))$ et l'inégalité (5.7.4.1) signifie donc (5.1.12.2) que, pour tout $z\in X$, et tout $n\geqslant 0$, la relation

$$\dim(\mathscr{F}_z)-\operatorname{prof}(\mathscr{F}_z)\geqslant n+1$$

entraîne la relation

$$\dim(\mathscr{F}_z)\geqslant n+k+1$$

Mais si l'on pose $a=\dim(\mathscr{F}_z)$, $b=\operatorname{prof}(\mathscr{F}_z)$, on a $b\leqslant a$, et dire que pour tout $n\geqslant 0$, la relation $b\leqslant a-n-1$ implique $k\leqslant a-n-1$ équivaut à dire que $b\geqslant\inf(k, a)$, d'où la proposition.

(ii) Le raisonnement est le même que dans (i), à cela près qu'il faut se limiter aux $z \in X$ qui sont des *générisations* de x, et tenir compte de (5.1.3.2).

Proposition **(5.7.5).** — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_k) $(k \geqslant 1)$, *il faut et il suffit que pour tout entier r tel que* $0 \leqslant r < k$, *tout ouvert* U *de* X *et toute suite* $(\mathscr{F}|U)$*-régulière* $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ *de sections de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* U, $(\mathscr{F}|U)/(\sum_{i=1}^{r} f_i(\mathscr{F}|U))$ *soit sans cycle premier associé immergé.*

Démontrons d'abord la proposition pour $k = 1$; elle s'énonce alors encore en disant que *pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_1), *il faut et il suffit que* $\mathscr{F}$ *soit sans cycle premier associé immergé.* En effet, dire que $\mathscr{F}$ vérifie (S_1) signifie qu'aux points $x \in \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ tels que $\dim(\mathscr{F}_x) > 0$, on a $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant 1$ (puisque aux autres points de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ on a $\dim(\mathscr{F}_x) = 0$, donc $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) = 0$); mais dire que $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant 1$ signifie que $\mathfrak{m}_x$ *n'est pas associé à* $\mathscr{F}_x$ (**0**, 16.4.6, (i)), ou encore que x n'est pas associé à $\mathscr{F}$ (3.1.1); d'autre part, si S est un sous-préschéma de X ayant pour espace sous-jacent $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, on a (5.1.12.1) $\dim(\mathscr{F}_x) = \dim(\mathcal{O}_{S,x})$; dire que $\dim(\mathscr{F}_x) > 0$ signifie donc que x n'est pas point maximal de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ (5.1.2), d'où la conclusion.

En second lieu, montrons que, pour k quelconque > 1, la condition de l'énoncé est *nécessaire*. On peut se borner à considérer le cas où $U = X$, et notre assertion sera prouvée (par récurrence sur k et en vertu de la première partie du raisonnement) si nous montrons que lorsque $\mathscr{F}$ vérifie (S_k) $(k > 1)$ et que f est une section $\mathscr{F}$*-régulière* de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X, alors $\mathscr{F}/f\mathscr{F}$ *vérifie* (S_{k-1}) (i.e. vérifie (5.7.2.1) où k est remplacé par $k-1$). Or, pour tout $x \in X$, f_x est un élément $\mathscr{F}_x$-régulier; s'il est inversible, on a $\mathscr{F}_x/f_x\mathscr{F}_x = 0$ et la conclusion est triviale. Si au contraire $f_x \in \mathfrak{m}_x$, on sait que l'on a $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x/f_x\mathscr{F}_x) = \mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) - 1$ (**0**, 16.4.6, (i)), et $\dim(\mathscr{F}_x/f_x\mathscr{F}_x) = \dim(\mathscr{F}_x) - 1$ (**0**, 16.3.4), et notre assertion en résulte.

Prouvons enfin que pour $k > 1$, la condition de l'énoncé est *suffisante*. Nous allons procéder par récurrence sur k; soit x un point de X, et supposons d'abord que $\dim(\mathscr{F}_x) \geqslant k$. L'hypothèse de récurrence entraîne que $\mathscr{F}$ vérifie (S_{k-1}), donc $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant k-1$; compte tenu de (**0**, 15.2.4), il y a donc un voisinage ouvert U de x et une suite $(\mathscr{F}|U)$-régulière $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant k-1}$ de sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de U, telles que $(f_i)_x \in \mathfrak{m}_x$ pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$. L'hypothèse entraîne que $\mathscr{G} = (\mathscr{F}|U)/(\sum_{i=1}^{k-1} f_i(\mathscr{F}|U))$ est sans cycle premier associé immergé; mais on a $\dim(\mathscr{G}_x) = \dim(\mathscr{F}_x) - (k-1) \geqslant 1$ (**0**, 16.3.4), donc x n'est pas associé à $\mathscr{G}$; on a donc $\mathrm{prof}(\mathscr{G}_x) \geqslant 1$ (**0**, 16.4.6), et comme $\mathrm{prof}(\mathscr{G}_x) = \mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) - (k-1)$ (**0**, 16.4.6), on a $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant k$. Supposons en second lieu que $\dim(\mathscr{F}_x) = r < k$; comme $\mathscr{F}$ vérifie (S_{k-1}), on a $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant \inf(k-1, r) = r$, et cela achève la démonstration.

Corollaire **(5.7.6).** — *Supposons que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_k) $(k \geqslant 1)$; *si* (f_i) $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *est une suite* $\mathscr{F}$*-régulière de sections de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* X *et si* $r < k$, $\mathscr{F}/(\sum_{i=1}^{r} f_i\mathscr{F})$ *vérifie* (S_{k-r}).

Cela résulte immédiatement de (5.7.5).

Corollaire **(5.7.7).** — *Pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_2), *il faut et il suffit que* $\mathscr{F}$ *soit sans cycle premier associé immergé et que pour tout ouvert* U *de* X *et toute section* $(\mathscr{F}|U)$*-régulière* f *de* $\mathcal{O}_X$ *au-dessus de* U, $(\mathscr{F}|U)/f(\mathscr{F}|U)$ *soit sans cycle premier associé immergé.*

Remarques **(5.7.8)**. — Soit X un préschéma localement noethérien *de dimension* 1; il revient alors au même de dire que X est un préschéma de Cohen-Macaulay, ou qu'il vérifie (S_1), ou qu'il vérifie une des propriétés (S_n) pour $n \geqslant 1$, en vertu des définitions (5.7.1) et (5.7.2). En vertu de (5.7.5), il revient donc encore au même, pour les préschémas de dimension 1, de dire que X est un préschéma de Cohen-Macaulay ou qu'il n'a pas de cycle premier associé immergé. Par exemple, un préschéma localement noethérien *réduit* de dimension 1 est un préschéma de Cohen-Macaulay.

Proposition **(5.7.9)**. — *Soient* A, B *deux anneaux noethériens,* $\rho : A \rightarrow B$ *un homomorphisme d'anneaux,* M *un* B*-module tel que* $M_{[\rho]}$ *soit un* A*-module de type fini. Soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A; *les idéaux premiers de* B *au-dessus de* $\mathfrak{p}$ *et appartenant à* Supp(M) *sont en nombre fini, et si* $(\mathfrak{q}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est la famille de ces idéaux, on a*

$$\dim_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \sup_i \dim_{B_{\mathfrak{q}_i}}(M_{\mathfrak{q}_i}) \tag{5.7.9.1}$$

$$\operatorname{prof}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \inf_i \operatorname{prof}_{B_{\mathfrak{q}_i}}(M_{\mathfrak{q}_i}). \tag{5.7.9.2}$$

Si $\mathfrak{b}$ est l'annulateur de M, $B/\mathfrak{b}$ s'identifie à un sous-A-module de $\operatorname{End}_A(M_{[\rho]})$, donc est de type fini puisque A est noethérien; il n'y a donc qu'un nombre fini d'idéaux premiers de B au-dessus de $\mathfrak{p}$ et contenant $\mathfrak{b}$, et ce sont précisément ceux qui appartiennent à Supp(M). Remplaçant B par $B/\mathfrak{b}$, ce qui ne change pas les seconds membres de (5.7.9.1) et (5.7.9.2) (par (**0**, 16.1.9) et (**0**, 16.4.8)), on peut donc supposer que B est une A-algèbre *finie*. Posons $S = A - \mathfrak{p}$, et $B' = S^{-1}B$; B' est un anneau semi-local noethérien dont les idéaux maximaux sont $S^{-1}\mathfrak{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et comme $M_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module de type fini, on a $\dim_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \dim_{B'}(M_\mathfrak{p})$ (**0**, 16.1.9). Cela étant, la relation (5.7.9.1) devient un cas particulier de (**0**, 16.1.7.4). Pour démontrer la relation (5.7.9.2), on se ramène aussitôt comme dans (**0**, 16.4.8) au cas où $\operatorname{prof}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = 0$, et le même raisonnement que dans (**0**, 16.4.8) montre que $M_\mathfrak{p}$ contient un sous-B'-module de *longueur finie*, et par suite aussi un sous-B'-module *simple*; mais un tel sous-module est nécessairement isomorphe au corps résiduel de l'un des $B_{\mathfrak{q}_i}$, donc il y a au moins un indice i tel que $\operatorname{prof}_{B_{\mathfrak{q}_i}}(M_{\mathfrak{q}_i}) = 0$ (**0**, 16.4.6), ce qui termine la démonstration.

Corollaire **(5.7.10)**. — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (5.7.9), *et supposons en outre que* A *soit un anneau local; alors, pour que* M *soit un* A*-module de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que, pour tous les idéaux premiers* $\mathfrak{q}_i$ *de* B *au-dessus de l'idéal maximal de* A, $M_{\mathfrak{q}_i}$ *soit un* $B_{\mathfrak{q}_i}$*-module de Cohen-Macaulay, et de plus que tous les nombres* $\dim_{B_{\mathfrak{q}_i}}(M_{\mathfrak{q}_i})$ *soient égaux.*

Il résulte en effet de (5.7.9.1) et de (5.7.9.2) que ces conditions équivalent à la relation $\dim_A(M) = \operatorname{prof}_A(M)$.

Corollaire **(5.7.11)**. — *Supposons vérifiées les hypothèses de* (5.7.9).

(i) *Si* $M_{[\rho]}$ *vérifie la propriété* (S_k), *il en est de même de* M.

(ii) *Supposons que pour tout couple d'idéaux premiers* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ *de* B *tels que* $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = \rho^{-1}(\mathfrak{q}')$, *on ait* $\dim_{B_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) = \dim_{B_{\mathfrak{q}'}}(M_{\mathfrak{q}'})$. *Alors, si* M *vérifie la propriété* (S_k), *il en est de même de* $M_{[\rho]}$.

Cela résulte aussitôt des relations (5.7.9.1) et (5.7.9.2) et de la définition de la propriété (S_k).

(5.7.12) Conformément aux définitions de (5.7.1), étant donnés un anneau noethérien *quelconque* A et un A-module M de type fini, on définit $\operatorname{coprof}_A(M)$ comme égal à $\operatorname{coprof}(M) = \sup_{x \in X} (\operatorname{coprof}_{A_x}(M_x))$, où $X = \operatorname{Spec}(A)$; nous verrons plus loin (6.11.5) que cette définition *coïncide* avec celle de (**0**, 16.4.9) lorsque A est un anneau noethérien *local.*

Corollaire **(5.7.13).** — *Soient* A, B *deux anneaux noethériens,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme d'anneaux,* M *un* B-*module tel que* $M_{[\rho]}$ *soit un* A-*module de type fini. Alors on a*

$$\operatorname{coprof}_A(M_{[\rho]}) \geqslant \operatorname{coprof}_B(M). \tag{5.7.13.1}$$

Cela résulte de la définition précédente et des relations (5.7.9.1) et (5.7.9.2).

5.8. Préschémas réguliers et propriété (R_k). Critère de normalité de Serre.

(5.8.1) Rappelons ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.1.4) qu'un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$ est dit *régulier* en un point $x \in X$, si $\mathcal{O}_x$ est un anneau *régulier.* Quand il s'agira de préschémas, nous n'utiliserons cette terminologie dans ce chapitre que lorsque X est *localement noethérien.*

Définition **(5.8.2).** — *On dit qu'un préschéma localement noethérien* X *est* régulier en codimension $\leqslant k$, *ou* possède la propriété (R_k) *si l'ensemble des points où* X *n'est pas régulier est de codimension* $> k$ (autrement dit (5.1.3), *si, pour tout* $x \in X$, *la relation* $\dim(\mathcal{O}_x) \leqslant k$ *entraîne que* $\mathcal{O}_x$ *est régulier*).

Dire que X est régulier signifie que X possède la propriété (R_k) pour tout k.

Si $X = \operatorname{Spec}(A)$, où A est un anneau *noethérien,* on dira que A possède la propriété (R_k) si X possède cette propriété; dire que X est régulier signifie que l'anneau A est *régulier* (**0**, 17.3.6). Pour un préschéma localement noethérien quelconque X, on dira que X *possède la propriété* (R_k) *en un point* $x \in X$ si l'anneau local $\mathcal{O}_x$ possède la propriété (R_k) ; cela veut donc dire que pour toute *générisation* x' de x dans X, la relation $\dim(\mathcal{O}_{x'}) \leqslant k$ entraîne que $\mathcal{O}_{x'}$ est un anneau local régulier. Dire que X est régulier en un point x équivaut à dire que X vérifie la propriété (R_n) pour *tout* $n \geqslant 0$ au point x, en vertu de (**0**, 17.3.6).

Proposition **(5.8.3).** — *Si* k *est un corps,* X *un préschéma localement de type fini sur* k, *alors, pour tout* $x \in X$, *il existe un voisinage ouvert de* x *dans* X *isomorphe à un sous-schéma d'un* k-*schéma régulier.*

En effet, il y a un voisinage ouvert affine U de x isomorphe à un k-schéma de la forme Spec(A), où A est une k-algèbre de type fini; A est par suite isomorphe à un quotient d'une algèbre de polynômes $k[T_1, \ldots, T_n]$, et on sait que cette dernière est un anneau *régulier* (**0**, 17.3.7).

(5.8.4) En vertu de (5.8.2), dire que X possède la propriété (R_0) signifie que pour tout point maximal x de X, l'anneau $\mathcal{O}_x$ est un *corps* (**0**, 17.1.4), autrement dit que X est *réduit* en ce point. Comme l'ensemble U des $x \in X$ où X est réduit est *ouvert* (le nilradical de X étant un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent (**I**, 6.1.1 et $\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.2)), il revient au même de dire que X possède la propriété (R_0) ou que l'ensemble U est *partout dense*. Par suite :

Proposition **(5.8.5)**. — *Pour qu'un préschéma localement noethérien* X *soit réduit, il faut et il suffit qu'il vérifie les propriétés* (S_1) *et* (R_0).

Compte tenu de (5.7.5), cela résulte de la remarque précédente et de (3.2.1).

Théorème **(5.8.6)** (critère de Serre). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien. Pour que* X *soit normal, il faut et il suffit que* X *vérifie les propriétés* (S_2) *et* (R_1), *autrement dit, que pour tout* $x \in X$, *on ait les propriétés suivantes :*

(i) *Si* $\dim(\mathcal{O}_x) \leqslant 1$, $\mathcal{O}_x$ *est régulier* (c'est-à-dire est un *corps* ou un *anneau de valuation discrète* (**0**, 17.1.4)).

(ii) *Si* $\dim(\mathcal{O}_x) \geqslant 2$, *alors* $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_x) \geqslant 2$.

Les conditions sont *nécessaires*. En effet, dire que X est normal signifie que pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ est un anneau local noethérien intégralement clos. Si $\dim(\mathcal{O}_x)=0$ (resp. $\dim(\mathcal{O}_x)=1$), on en conclut que $\mathcal{O}_x$ est un corps puisque $\mathcal{O}_x$ est intègre (resp. que $\mathcal{O}_x$ est un anneau de valuation discrète, en vertu de (**II**, 7.1.6)). D'autre part, pour tout élément $f_x \neq 0$ de $\mathcal{O}_x$, on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 4, prop. 8) que les idéaux premiers associés à $\mathcal{O}_x/f_x\mathcal{O}_x$ sont non immergés, donc $\mathcal{O}_x$ vérifie (S_2) (5.7.7).

Les conditions sont *suffisantes*. En effet, il résulte d'abord de (5.8.5) que X est *réduit*. La question étant locale, on peut en outre supposer que $X=\operatorname{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien *réduit* (**I**, 5.1.4); si R est l'anneau total des fractions de A, R est composé direct d'un nombre fini de corps, et (compte tenu de (**II**, 6.3.6)), il suffira de prouver que A est *intégralement fermé dans* R. Soit donc $h=f/g$ un élément de R entier sur A, g et f étant des éléments de A tels que g soit non diviseur de 0. On a une relation de la forme

$$f^n + \sum_{i=1}^{n} a_i f^{n-i} g^i = 0 \qquad \text{avec } a_i \in A \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5.8.6.1}$$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A tel que $\dim(A_\mathfrak{p})=1$; si $f_\mathfrak{p}$ et $g_\mathfrak{p}$ sont les images de f et g dans $A_\mathfrak{p}$, il résulte de (5.8.6.1) que $f_\mathfrak{p}/g_\mathfrak{p}$ (qui appartient à l'anneau total des fractions de $A_\mathfrak{p}$, puisque $g_\mathfrak{p}$ est non diviseur de 0 dans $A_\mathfrak{p}$ par platitude ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.1)) est entier sur $A_\mathfrak{p}$; mais comme $A_\mathfrak{p}$ est régulier, donc intégralement clos, on a $f_\mathfrak{p}/g_\mathfrak{p} \in A_\mathfrak{p}$. En d'autres termes, on a $(fA)_\mathfrak{p} \subset (gA)_\mathfrak{p}$. Mais l'hypothèse (S_2) entraîne (5.7.7), puisque g est non diviseur de 0 dans A, que A/gA n'a que des idéaux premiers associés *non immergés* $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; or, gA est l'intersection d'idéaux primaires $\mathfrak{q}_i$ correspondant aux $\mathfrak{p}_i$, et d'après ce qu'on vient de voir, les $\mathfrak{q}_i$ sont les images réciproques dans A, par les homomorphismes $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}_i}$, des idéaux $(gA)_{\mathfrak{p}_i}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 3, prop. 5). Mais en vertu du Hauptidealsatz (**0**, 16.3.2) on a $\dim(A_{\mathfrak{p}_i})=1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, donc $(fA)_{\mathfrak{p}_i} \subset (gA)_{\mathfrak{p}_i}$ pour tout i d'après ce qui précède; comme fA est contenu dans l'intersection des images réciproques des $(fA)_{\mathfrak{p}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a $fA \subset gA$, c'est-à-dire $f/g \in A$. C.Q.F.D.

5.9. Modules Z-purs et Z-clos.

Une partie des notions et résultats de cette section et de la suivante sont des cas particuliers de notions et résultats développés au chapitre III dans la théorie de la cohomologie locale. Pour la commodité du lecteur, nous en donnons ici un exposé indépendant.

(5.9.1) Soient X un préschéma localement noethérien, Z une partie de X *stable par spécialisation* : cela signifie que pour toute partie finie M de Z, l'adhérence de M est contenue dans Z, et par suite Z est réunion d'une famille filtrante croissante (Z_α) de parties fermées de X; inversement, il est clair qu'une telle réunion est stable par spécialisation.

Posons $U_\alpha = X - Z_\alpha$, de sorte que $X - Z$ est intersection de la famille filtrante décroissante d'ouverts U_α; soit $i_\alpha : U_\alpha \to X$ l'injection canonique et pour $U_\alpha \supset U_\beta$, soit $i_{\alpha\beta} : U_\beta \to U_\alpha$ l'injection canonique, de sorte que l'on a $i_\beta = i_\alpha \circ i_{\alpha\beta}$. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-Module (non nécessairement quasi-cohérent); on a donc $(i_\beta)_*(\mathscr{F}|U_\beta) = (i_\alpha)_*((i_{\alpha\beta})_*(\mathscr{F}|U_\beta))$; de l'homomorphisme canonique $(\mathbf{0}_\mathrm{I}, 4.4.3.2)$

$$\mathscr{F}|U_\alpha \to (i_{\alpha\beta})_*(\mathscr{F}|U_\beta)$$

on déduit donc, par application du foncteur $(i_\alpha)_*$, un homomorphisme

$$\rho_{\beta\alpha} : (i_\alpha)_*(\mathscr{F}|U_\alpha) \to (i_\beta)_*(\mathscr{F}|U_\beta)$$

et l'on vérifie aussitôt que l'on a $\rho_{\gamma\alpha} = \rho_{\gamma\beta} \circ \rho_{\beta\alpha}$ pour $U_\alpha \supset U_\beta \supset U_\gamma$; autrement dit, les $\mathscr{O}_X$-Modules $(i_\alpha)_*(\mathscr{F}|U_\alpha)$ forment un *système inductif* pour les homomorphismes $\rho_{\beta\alpha}$. On pose

$$\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}) = \varinjlim_\alpha (i_\alpha)_*(\mathscr{F}|U_\alpha). \tag{5.9.1.1}$$

Ce $\mathscr{O}_X$-Module ne dépend pas de la famille croissante (Z_α) de fermés dont Z est la réunion : en effet, soit V un ouvert *noethérien* de X; on sait (G, II, 3.10.1) que dans la catégorie des $\mathscr{O}_V$-Modules, le foncteur $\mathscr{G} \rightsquigarrow \Gamma(V, \mathscr{G})$ commute aux limites inductives; on a donc en vertu de (5.9.1.1)

$$\Gamma(V, \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})) = \varinjlim_\alpha \Gamma(V \cap U_\alpha, \mathscr{F}). \tag{5.9.1.2}$$

Soit alors (Z'_λ) une seconde famille filtrante croissante de fermés de X, de réunion Z; $V \cap Z_\alpha$ est donc réunion des $V \cap Z_\alpha \cap Z'_\lambda$; mais $V \cap Z_\alpha$ est localement fermé dans X, donc toute partie fermée irréductible de $V \cap Z_\alpha$ admet un point générique; comme les $V \cap Z_\alpha \cap Z'_\lambda$ sont fermés dans $V \cap Z_\alpha$ et forment (pour α fixe) une famille filtrante croissante, il existe un indice λ tel que $V \cap Z_\alpha \cap Z'_\lambda = V \cap Z_\alpha$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{III}}, 9.2.4)$, autrement dit $V \cap Z_\alpha \subset V \cap Z'_\lambda$. Ceci prouve que les familles filtrantes décroissantes $V \cap U_\alpha$, $V \cap U'_\lambda$ (où $U'_\lambda = X - Z'_\lambda$) sont cofinales l'une de l'autre, d'où notre assertion, en vertu de (5.9.1.2).

On notera que l'ensemble Z n'est pas nécessairement constructible : on a un exemple de ce fait en prenant $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau intègre noethérien ayant une infinité d'idéaux maximaux, et Z le complémentaire du point générique de X.

Si Z est fermé et si $i : X - Z \to X$ est l'injection canonique, on a

$$\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}) = i_*(\mathscr{F} \mid X - Z) \tag{5.9.1.3}$$

et en particulier, pour $Z = \emptyset$, $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$.

Proposition (**5.9.2**). — (i) *Le foncteur* $\mathscr{F} \rightsquigarrow \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *est exact à gauche.*

(ii) *Si* $\mathscr{F}$ *est quasi-cohérent, il en est de même de* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$.

L'assertion (i) résulte de la définition (5.9.1.1), du fait que $(i_\alpha)_*$ est un foncteur exact à gauche et de ce que la limite inductive préserve l'exactitude dans la catégorie des $\mathscr{O}_X$-Modules. L'assertion (ii) résulte de (**I**, 9.2.2) et du fait qu'une limite inductive de $\mathscr{O}_X$-Modules quasi-cohérents est quasi-cohérente (**I**, 1.3.9).

Remarque (**5.9.3**). — Si $\mathscr{F}$ est une $\mathscr{O}_X$-*Algèbre*, il en est de même de $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.2.4); en particulier $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{O}_X)$ est une $\mathscr{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente, et pour tout $\mathscr{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{O}_X)$-Module, qui est quasi-cohérent si $\mathscr{F}$ est quasi-cohérent (**I**, 9.6.1). Plus particulièrement, supposons que $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est *intègre* et noethérien; alors $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{O}_X)$ est la $\mathscr{O}_X$-Algèbre $\widetilde{B}$, où

$$B = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X - Z} A_\mathfrak{p}. \tag{5.9.3.1}$$

Cela résulte en effet de (5.9.1.2) et de (**I**, 8.2.1.1).

Proposition (**5.9.4**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* X' *un préschéma localement noethérien,* $f : X' \to X$ *un morphisme plat. Alors* $Z' = f^{-1}(Z)$ *est stable par spécialisation et pour tout* $\mathscr{O}_X$-*Module quasi-cohérent* $\mathscr{F}$, *on a un isomorphisme canonique*

$$f^*(\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{X'/Z'}(f^*(\mathscr{F})) \tag{5.9.4.1}$$

En effet, avec les notations de (5.9.1), $Z'_\alpha = f^{-1}(Z_\alpha)$ est fermé dans X' et Z' est réunion des Z'_α; en outre, $(i_\alpha)_{(X')}$ est l'injection canonique $i'_\alpha : U'_\alpha \to X'$, si $U'_\alpha = X' - Z'_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$. Comme f est plat, on sait (2.3.1) que l'homomorphisme canonique $f^*((i_\alpha)_*(\mathscr{F} \mid U_\alpha)) \to (i'_\alpha)_*(f^*(\mathscr{F}) \mid U'_\alpha)$ est bijectif; comme, pour $\alpha \leqslant \beta$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f^*((i_\alpha)_*(\mathscr{F} \mid U_\alpha)) & \xrightarrow{\sim} & (i'_\alpha)_*(f^*(\mathscr{F}) \mid U'_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^*((i_\beta)_*(\mathscr{F} \mid U_\beta)) & \xrightarrow{\sim} & (i'_\beta)_*(f^*(\mathscr{F}) \mid U'_\beta) \end{array}$$

est commutatif, on a donc, en passant à la limite, un isomorphisme canonique $\varinjlim_{\alpha}(f^*((i_\alpha)_*(\mathscr{F}|\mathrm{U}_\alpha))) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{X}'/\mathrm{Z}'}(f^*(\mathscr{F}))$. Mais comme le foncteur f^* commute aux limites inductives ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.3.2), cela donne par définition l'isomorphisme (5.9.1.1) cherché.

Corollaire **(5.9.5)**. — *Sous les hypothèses de* (5.9.4), *si* $\mathscr{H}^0_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}(\mathscr{F})$ *est cohérent, il en est de même de* $\mathscr{H}^0_{\mathrm{X}'/\mathrm{Z}'}(f^*(\mathscr{F}))$. *La réciproque est vraie lorsque* f *est un morphisme fidèlement plat et quasi-compact.*

La première assertion résulte de (5.9.4.1) et de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.11); la seconde équivaut à dire que si $\mathscr{H}^0_{\mathrm{X}'/\mathrm{Z}'}(f^*(\mathscr{F}))$ est de type fini, il en est de même de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}(\mathscr{F})$; cela résulte de (5.9.4.1) et de (2.5.2).

Corollaire **(5.9.6)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module quasi-cohérent. Pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *posons* $\mathrm{X}_x = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x)$, $\mathrm{Z}_x = \mathrm{Z} \cap \mathrm{X}_x$; *on a un isomorphisme canonique fonctoriel*

(5.9.6.1)
$$(\mathscr{H}^0_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}(\mathscr{F}))_x \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{X}_x/\mathrm{Z}_x}(\widetilde{\mathscr{F}_x})$$

Il suffit d'appliquer (5.9.4) au morphisme canonique $\mathrm{X}_x \to \mathrm{X}$, qui est plat, et de tenir compte de (**I**, 1.6.5).

(5.9.7) Avec les notations de (5.9.1), on a pour tout α un homomorphisme canonique fonctoriel $\mathscr{F} \to (i_\alpha)^*(\mathscr{F}|\mathrm{U}_\alpha)$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3.2), et ces homomorphismes forment un système inductif; par passage à la limite inductive, on en déduit donc un homomorphisme canonique fonctoriel

(5.9.7.1)
$$\rho_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}} : \mathscr{F} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}(\mathscr{F})$$

Proposition **(5.9.8)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_\mathrm{X}$*-Module. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *L'homomorphisme* $\rho_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}$ (5.9.7.1) *est injectif* (resp. *bijectif*).

b) *Pour tout ouvert noethérien* V *de* X, *l'homomorphisme*

$$(\rho_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}})_\mathrm{V} : \Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{F}) \to \varinjlim_{\alpha} \Gamma(\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha, \mathscr{F})$$

est injectif (resp. *bijectif*).

a') *Pour toute partie fermée* $\mathrm{T} \subset \mathrm{Z}$ *de* X, *l'homomorphisme canonique* ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 4.4.3.2)

$$\mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}|\mathrm{X}-\mathrm{T})$$

(où $i : \mathrm{X}-\mathrm{T} \to \mathrm{X}$ *est l'injection canonique) est injectif* (resp. *bijectif*).

b') *Pour toute partie fermée* $\mathrm{T} \subset \mathrm{Z}$ *de* X *et tout ouvert noethérien* V *de* X, *l'homomorphisme de restriction*

$$\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{F}) \to \Gamma(\mathrm{V} \cap (\mathrm{X}-\mathrm{T}), \mathscr{F})$$

est injectif (resp. *bijectif*).

Compte tenu de (5.9.1.2), l'équivalence de *a)* et *b)* (resp. *a')* et *b')*) résulte de la définition du foncteur Γ et du fait qu'il est exact à gauche. Comme l'homomorphisme $(\rho_{X/Z})_V$ est le composé

$$(5.9.8.1) \qquad \Gamma(V, \mathscr{F}) \to \Gamma(V \cap (X-T), \mathscr{F}) \to \varinjlim_{\alpha} \Gamma(V \cap U_\alpha, \mathscr{F})$$

pour toute partie fermée $T \subset Z$, si $(\rho_{X/Z})_V$ est injectif, il en est de même de $\Gamma(V, \mathscr{F}) \to \Gamma(V \cap (X-T), \mathscr{F})$; d'autre part, le fait que *b')* implique *b)* résulte de la définition d'une limite inductive. Il reste à montrer que si $\rho_{X/Z}$ est bijectif, il en est de même de $\Gamma(V, \mathscr{F}) \to \Gamma(V \cap (X-T), \mathscr{F})$, et pour cela il suffit, en vertu de (5.9.8.1), de voir que si $U' \subset U$ sont deux ouverts contenus dans V et contenant $V \cap Z$, l'homomorphisme de restriction $\Gamma(U, \mathscr{F}) \to \Gamma(U', \mathscr{F})$ est injectif; mais cela résulte de ce que $\rho_{X/Z}$ est injectif, en remplaçant dans ce qui précède V par U et $V \cap (X-T)$ par U'.

Définition **(5.9.9)**. — *Sous les hypothèses de* (5.9.8), *on dit que* $\mathscr{F}$ *est* Z-*pur* (resp. Z-*clos*) *si l'homomorphisme* $\rho_{X/Z}$ *est injectif* (resp. *bijectif*).

Si $X = \operatorname{Spec}(A)$ est affine, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module, on dira que M est Z-pur (resp. Z-clos) lorsque $\mathscr{F}$ est Z-pur (resp. Z-clos).

On dit que $\mathscr{F}$ est Z-*pur* (resp. Z-*clos*) *en un point* $x \in X$ si (avec les notations de (5.9.6)) $\mathscr{F}_x$ est Z_x-pur (resp. Z_x-clos); il revient au même, en vertu de (5.9.6), de dire que l'homomorphisme canonique $\mathscr{F}_x \to (\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}))_x$ est *injectif* (resp. *bijectif*).

On notera que pour tout $x \in X - Z$, $\mathscr{F}$ est Z-*clos au point* x, en vertu de (5.9.8).

Corollaire **(5.9.10)**. — (i) *Soit* (V_λ) *un recouvrement ouvert de* X. *Pour que* $\mathscr{F}$ *soit* Z-*pur* (resp. Z-*clos*), *il faut et il suffit que pour tout* λ, $\mathscr{F}|V_\lambda$ *soit* $(Z \cap V_\lambda)$-*pur* (resp. $(Z \cap V_\lambda)$-*clos*).

(ii) *Soit* Z' *une partie de* Z *stable par spécialisation. Si* $\mathscr{F}$ *est* Z-*pur* (resp. Z-*clos*), *il est* Z'-*pur* (resp. Z'-*clos*).

Cela résulte aussitôt de (5.9.8, *b')*).

Proposition **(5.9.11)**. — *Sous les hypothèses de* (5.9.8), *les* $\mathscr{O}_X$-*Modules* $\operatorname{Ker}(\rho_{X/Z})$ *et* $\operatorname{Coker}(\rho_{X/Z})$ *ont leur support contenu dans* Z, *et le* $\mathscr{O}_X$-*Module* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *est* Z-*clos. En outre, si* $u : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ *est un homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$-*Modules tel que* $\mathscr{F}'$ *soit* Z-*clos*, *u se factorise d'une seule manière en* $\mathscr{F} \xrightarrow{\rho_{X/Z}} \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}) \xrightarrow{v} \mathscr{F}'$. *Si en outre les supports de* $\operatorname{Ker}(u)$ *et de* $\operatorname{Coker}(u)$ *sont contenus dans* Z, *v est un isomorphisme.*

La première assertion signifie que, pour tout $x \in X - Z$, on a

$$\operatorname{Ker}(\rho_{X/Z})_x = \operatorname{Coker}(\rho_{X/Z})_x = 0,$$

i.e. que $(\rho_{X/Z})_x$ est bijectif, ou encore que $\mathscr{F}$ est Z-pur en x, comme il a été signalé plus haut (5.9.9).

Pour montrer que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est Z-clos, il s'agit de voir que pour un ouvert noethérien V de X, $\varinjlim_{\beta} \Gamma(V \cap U_\beta, \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}))$ est égale à $\Gamma(V, \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}))$; mais par définition $\Gamma(V \cap U_\beta, \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})) = \varinjlim_{\alpha} \Gamma(V \cap U_\alpha \cap U_\beta, \mathscr{F})$. Or, la famille double $(U_\alpha \cap U_\beta)$ est filtrante décroissante, et notre assertion résulte de (5.9.1) et du théorème de la double limite inductive.

Passons à la seconde partie de la proposition. L'existence et l'unicité de v résultent de ce que pour tout α, $(i_\alpha)_*(u)$ est l'unique homomorphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathscr{F}' \arrow[d] \\ (i_\alpha)_*(\mathscr{F}|U_\alpha) \arrow[r, "(i_\alpha)_*(u)"'] & (i_\alpha)_*(\mathscr{F}'|U_\alpha) \end{tikzcd}$$

de ce qu'il y a un unique homomorphisme w rendant commutatifs tous les diagrammes

$$\begin{tikzcd} (i_\alpha)_*(\mathscr{F}|U_\alpha) \arrow[r, "(i_\alpha)_*(u)"] \arrow[d] & (i_\alpha)_*(\mathscr{F}'|U_\alpha) \arrow[d, dash] \\ \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}) \arrow[r, "w"'] & \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}') \end{tikzcd}$$

et enfin de ce que $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}')$ s'identifient canoniquement par hypothèse.

Reste à voir que si les supports de $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Coker}(u)$ sont contenus dans Z, v est un isomorphisme. Il suffit de voir que pour tout ouvert noethérien V, l'homomorphisme correspondant $\Gamma(V, \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})) \to \Gamma(V, \mathscr{F}')$ est alors un isomorphisme. Or, si une section $t \in \Gamma(V, \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}))$ a pour image o dans $\Gamma(V, \mathscr{F}')$, notons que pour un indice α, on a $t \in \Gamma(V \cap U_\alpha, \mathscr{F})$, et en vertu de l'hypothèse sur u, on a $t_y = 0$ pour tout $y \in V \cap (X-Z)$; il y a par suite un ouvert contenant $V \cap (X-Z)$ tel que la restriction de t à cet ouvert soit nulle, donc par définition t est l'élément o de $\Gamma(V, \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}))$. Prouvons maintenant que toute section $s' \in \Gamma(V, \mathscr{F}')$ est l'image d'une section de $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ au-dessus de V. Par hypothèse, pour tout $x \in V \cap (X-Z)$ il existe une section $s^{(x)}$ de $\mathscr{F}$ au-dessus d'un voisinage ouvert $W^{(x)}$ de x dans X, dont l'image par u est $s'|W^{(x)}$; $s'|W^{(x)}$ est donc aussi l'image par v de la section $t^{(x)}$ de $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$, image canonique de $s^{(x)}$. En outre, comme on a vu que v est injectif, les restrictions de $t^{(x)}$ et $t^{(x')}$ à $W^{(x)} \cap W^{(x')}$ sont identiques pour deux points quelconques x, x' de $V \cap (X-Z)$; les $t^{(x)}$ sont par suite restrictions d'une même section t de $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ au-dessus d'un voisinage ouvert U de $(X-Z) \cap V$. Mais comme $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est Z-clos, t se prolonge d'une seule manière en une section de $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ au-dessus de V, dont l'image par v a même restriction que s' à U, et coïncide donc avec s' pour la même raison.

On dit que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est la Z-*clôture* de $\mathscr{F}$.

Remarques (**5.9.12**). — (i) Soit $\mathbf{C}(\mathrm{X})$ la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules, et soit $\mathbf{C}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{X})$ la sous-catégorie de $\mathbf{C}(\mathrm{X})$ formée des $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modules de support contenu dans Z; cette sous-catégorie est localisante au sens de Gabriel, et le foncteur $\mathscr{H}^0_{\mathrm{X/Z}}$ n'est autre que le foncteur localisation de Gabriel (cf. [27]; cela fournirait une autre démonstration de (5.9.11)). Lorsque Z est fermé, le foncteur $i^* : \mathbf{C}(\mathrm{X}) \to \mathbf{C}(\mathrm{X}-\mathrm{Z})$ (où $i : \mathrm{X}-\mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ est l'injection canonique) définit une *équivalence* de catégories $\mathbf{C}(\mathrm{X})/\mathbf{C}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{X}) \approx \mathbf{C}(\mathrm{X}-\mathrm{Z})$.

(ii) Il résulte de (5.9.11) que la condition $\mathscr{H}^0_{\mathrm{X/Z}}(\mathscr{F}) = 0$ est *équivalente* à $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Z}$. Elle entraîne en effet cette dernière puisque le noyau de $\rho_{\mathrm{X/Z}}$ est alors égal à $\mathscr{F}$. Inversement, si $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Z}$, il suffit d'appliquer la seconde partie de (5.9.11) à l'unique homomorphisme $u : \mathscr{F} \to 0$ pour en conclure que l'homomorphisme correspondant $v : \mathscr{H}^0_{\mathrm{X/Z}}(\mathscr{F}) \to 0$ est un isomorphisme.

(iii) Les développements précédents gardent un sens pour tout espace annelé localement noethérien dont toute partie fermée irréductible admet exactement un point générique. En particulier ils s'appliquent, sur un préschéma localement noethérien, à des *faisceaux de groupes abéliens* quelconques (considérés comme Modules sur le faisceau simple associé au préfaisceau constant $\mathbf{Z}$). On a encore pour tout $x \in \mathrm{X}$ l'isomorphisme canonique (5.9.6.1), dans lequel $\widetilde{\mathscr{F}}_x$ désigne le faisceau *induit* sur le sous-espace X_x de X par le faisceau $\mathscr{F}$; la démonstration directe résulte aussitôt de la définition (5.9.1.2) et du théorème de la double limite inductive.

5.10. Propriété (S_2) et Z-clôture.

(**5.10.1**) Soient X un préschéma localement noethérien, $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Module cohérent; pour toute partie T de X, nous poserons

(**5.10.1.1**) $$\mathrm{prof}_{\mathrm{T}}(\mathscr{F}) = \inf_{x \in \mathrm{T}} \mathrm{prof}(\mathscr{F}_x)$$

Proposition (**5.10.2**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Module quasi-cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{F}$ *est* Z*-pur.*

b) $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ *ne rencontre pas* Z.

Si en outre $\mathscr{F}$ *est cohérent, ces conditions sont aussi équivalentes à la suivante :*

c) $\mathrm{prof}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{F}) \geqslant 1$.

Dire que $\mathscr{F}$ est Z-pur signifie que pour tout ouvert noethérien V de X, et tout ouvert $\mathrm{U} \supset \mathrm{X}-\mathrm{Z}$, l'homomorphisme de restriction $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{F}) \to \Gamma(\mathrm{V} \cap \mathrm{U}, \mathscr{F})$ est injectif (5.9.8); mais d'après (3.1.8) cela équivaut à $\mathrm{V} \cap \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{U}$, d'où l'équivalence de *a)* et *b)*. En outre, dire que $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ signifie qu'aucun élément de $\mathfrak{m}_x$ n'est $\mathscr{F}_x$-régulier (3.1.2), donc, lorsque $\mathscr{F}$ est cohérent, cela s'écrit encore $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) = 0$; on en déduit aussitôt dans ce cas l'équivalence de *b)* et *c)*.

Corollaire (**5.10.3**). — *Soit* $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$*-Modules quasi-cohérents. Si* $\mathscr{F}$ *est* Z*-pur, il en est de même de* $\mathscr{F}'$*; inversement, si* $\mathscr{F}'$ *et* $\mathscr{F}''$ *sont* Z*-purs, il en est de même de* $\mathscr{F}$.

Cela résulte de la forme (5.10.2, *b)*) de la condition pour qu'un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent soit Z-pur, et de (3.1.7).

Corollaire **(5.10.4)**. — *Supposons* $\mathcal{F}$ *cohérent. Pour que* $\mathcal{F}$ *soit Z-pur en un point* $x \in X$, *il faut et il suffit que* $\mathrm{prof}_{Z_x}(\widetilde{\mathcal{F}}_x) \geqslant 1$ *(avec les notations de* (5.9 6)).

Cela résulte aussitôt de (5.10.2) et (5.9.6).

Théorème **(5.10.5)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Pour que* $\mathcal{F}$ *soit Z-clos, il faut et il suffit que l'on ait* $\mathrm{prof}_Z(\mathcal{F}) \geqslant 2$.

En vertu de (5.10.2), on peut se borner au cas où $\mathcal{F}$ est Z-pur et $\mathrm{prof}_Z(\mathcal{F}) \geqslant 1$. De plus, dire que $\mathrm{prof}_Z(\mathcal{F}) \geqslant 2$ équivaut à dire que pour toute partie fermée Z_α de Z, $\mathrm{prof}_{Z_\alpha}(\mathcal{F}) \geqslant 2$; et de même, il résulte de (5.9.8) que dire que $\mathcal{F}$ est Z-clos équivaut à dire que $\mathcal{F}$ est Z_α-clos pour tout α. On peut donc déjà se borner au cas où Z est *fermé*. La question étant locale, il suffit, pour tout $x \in Z$, de prouver le théorème pour $\mathcal{F} | U$, U étant un voisinage ouvert affine de x, et l'on peut donc se borner au cas où $X = U$ est affine. On sait alors que $\mathrm{Ass}(\mathcal{F})$ est fini (3.1.6), et comme $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) \subset X - Z$, il y a une section f de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X telle que $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) \subset X_f \subset X - Z$ (**II**, 4.5.4); on en déduit que f est $\mathcal{F}$-régulière (3.1.9) et que pour tout $y \in Z$, on a $f_y \in \mathfrak{m}_y$, donc $\mathrm{prof}(\mathcal{F}_y) = 1 + \mathrm{prof}(\mathcal{F}_y / f_y \mathcal{F}_y)$ (**0**, 16.4.6). La condition $\mathrm{prof}_Z(\mathcal{F}) \geqslant 2$ équivaut donc à $\mathrm{prof}_Z(\mathcal{F}/f\mathcal{F}) \geqslant 1$, ou encore (5.10.2) au fait que $\mathcal{F}/f\mathcal{F}$ est Z-*pur*, et il suffit de voir que cette dernière propriété équivaut au fait que $\mathcal{F}$ est Z-*clos*.

Considérons la suite exacte $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \to \mathcal{F}/f\mathcal{F} \to 0$ (l'homothétie de rapport $f : \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ étant par hypothèse injective); si on pose $W = X - Z$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{f} & \Gamma(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{F}/f\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(W, \mathcal{F}) & \xrightarrow[f]{} & \Gamma(W, \mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(W, \mathcal{F}/f\mathcal{F}) & &
\end{array}$$

où les deux lignes sont exactes (X étant affine). Si l'homomorphisme de restriction $\Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(W, \mathcal{F})$ est bijectif, on déduit de ce diagramme que

$$\Gamma(X, \mathcal{F}/f\mathcal{F}) \to \Gamma(W, \mathcal{F}/f\mathcal{F})$$

est injectif, et cela montre (5.9.8) que si $\mathcal{F}$ est Z-clos, $\mathcal{F}/f\mathcal{F}$ est Z-pur. Inversement, supposons que $\mathcal{F}/f\mathcal{F}$ soit Z-pur, et soit s une section de $\mathcal{F}$ au-dessus de W; comme $X_f \subset W$, il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n(s | X_f)$ se prolonge en une section t de $\mathcal{F}$ au-dessus de X (**I**, 1.4.1); d'ailleurs, les restrictions de t et de $f^n s$ à X_f étant les mêmes, il en résulte que la restriction de t à W est égale à $f^n s$ en vertu de la relation $\mathrm{Ass}(\mathcal{F}) \subset X_f$ (5.10.2); comme f est $\mathcal{F}$-régulier, il suffira de voir que t est de la forme $f^n t'$, où $t' \in \Gamma(X, \mathcal{F})$

pour montrer que l'homomorphisme $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(W, \mathscr{F})$ est surjectif, donc bijectif. Or, dire que $t=f^n t'$ signifie que l'image de t dans $\Gamma(X, \mathscr{F}/f^n\mathscr{F})$ est nulle. Mais comme $f^k\mathscr{F}/f^{k+1}\mathscr{F}$ est isomorphe à $\mathscr{F}/f\mathscr{F}$, donc Z-pur par hypothèse, on déduit de (5.10.3), par récurrence sur n, que $\mathscr{F}/f^n\mathscr{F}$ est Z-pur. Mais par définition l'image de $t|W=f^n s$ dans $\Gamma(W, \mathscr{F}/f^n\mathscr{F})$ est nulle, d'où la conclusion.

Corollaire **(5.10.6)**. — *Soit $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent. Pour que $\mathscr{F}$ soit* Z*-clos en un point x, il faut et il suffit que* $\mathrm{prof}_{Z_x}(\widetilde{\mathscr{F}_x}) \geqslant 2$.

Cela résulte de (5.9.6) et (5.10.5).

Théorème **(5.10.7)** (Hartshorne). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *une partie fermée de* X. *Supposons que pour tout $y \in Y$, on ait* $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,y}) \geqslant 2$; *alors pour toute composante connexe* C *de* X, $C-(C \cap Y)$ *est connexe.*

On peut se borner au cas où X est connexe; il résulte alors de (5.10.5) que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \to i_*(\mathcal{O}_X|X-Y)$ (où $i : X-Y \to X$ est l'injection canonique) est bijectif. Par suite l'homomorphisme de restriction $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(X-Y, \mathcal{O}_X)$ est aussi bijectif. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme (**III**, 7.8.6.1).

Corollaire **(5.10.8)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien, d un entier tel que pour tout $x \in X$, la relation* $\dim(\mathcal{O}_x) \geqslant d$ *entraîne* $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_x) \geqslant 2$. *Supposons* X *connexe; alors, si* X', X'' *sont deux composantes irréductibles distinctes de* X, *il existe une suite* $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *de composantes irréductibles de* X *telle que* $X_0 = X'$, $X_n = X''$, *et que, pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, *on ait* $\mathrm{codim}(X_{i-1} \cap X_i, X) \leqslant d-1$ (on dit alors que X est *connexe en codimension* $\leqslant d-1$).

Si Y est une partie fermée de X telle que $\mathrm{codim}(Y, X) \geqslant d$, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,y}) \geqslant d$ pour tout $y \in Y$ (5.1.3), donc $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,y}) \geqslant 2$ pour tout $y \in Y$, et il résulte de (5.10.7) que $X-Y$ est connexe. D'autre part, pour que $\mathrm{codim}(Y, X) \geqslant d$, il faut et il suffit que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert V de y dans X tel que $\mathrm{codim}(Y \cap V, V) \geqslant d$ (**0**, 14.2.3). Notons enfin que si $\mathfrak{F}$ désigne l'ensemble des parties fermées Y de X de codimension $\geqslant d$, la réunion de deux ensembles de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$ (**0**, 14.2.5), et tout ensemble fermé contenu dans un ensemble de $\mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$, propriétés qu'on exprime encore en disant que $\mathfrak{F}$ est un *antifiltre* de parties fermées de X. Le corollaire résulte alors du lemme topologique suivant :

Lemme **(5.10.8.1)**. — *Soient* X *un espace topologique connexe localement noethérien, $\mathfrak{F}$ un antifiltre de parties fermées de* X. *On suppose que si* Y *est une partie fermée de* X *telle que pour tout $y \in Y$, il y ait un voisinage ouvert* V *de y dans* X *et un $Y_y \in \mathfrak{F}$ tels que* $V \cap Y = V \cap Y_y$, *alors* $Y \in \mathfrak{F}$. *Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

a) *Pour tout* $Y \in \mathfrak{F}$, $X-Y$ *est connexe.*

b) *Si* X' *et* X'' *sont deux composantes irréductibles distinctes de* X, *il existe une suite* $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ *de composantes irréductibles de* X *telle que* $X_0 = X'$, $X_n = X''$ *et que, pour* $1 \leqslant i \leqslant n$, *on ait* $X_{i-1} \cap X_i \notin \mathfrak{F}$.

Supposons *b)* vérifiée et prouvons que $U = X-Y$ est connexe pour tout $Y \in \mathfrak{F}$. Si U' et U'' sont deux composantes irréductibles distinctes de U, il existe deux composantes irréductibles X', X'' de X telles que $X' \cap U = U'$, $X'' \cap U = U''$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.1.6);

formons pour ces deux composantes une suite (X_i) ayant la propriété énoncée dans *b)* et posons $U_i = X_i \cap U$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; alors U_i est une composante irréductible de U $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 2.1.6)$ et de plus $U_i \cap U_{i-1} \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, sinon on aurait $X_i \cap X_{i-1} \subset Y$, donc $X_i \cap X_{i-1} \in \mathfrak{F}$, contrairement à la définition des X_i. Cela entraîne que U est connexe.

Montrons maintenant que *a)* entraîne *b)*. Désignons par Y la réunion de la famille $(X_\alpha \cap X_\beta)$, où (X_α, X_β) parcourt l'ensemble des couples de composantes irréductibles *distinctes* de X telles que $X_\alpha \cap X_\beta \in \mathfrak{F}$. Pour tout point $y \in Y$, il y a un voisinage ouvert V de y dans X ne rencontrant qu'un nombre fini de composantes irréductibles de X; cela montre d'une part que Y est fermé et d'autre part que $V \cap Y$ est intersection de V et d'un ensemble de $\mathfrak{F}$; en vertu de l'hypothèse faite sur $\mathfrak{F}$, on a $Y \in \mathfrak{F}$, donc $U = X - Y$ est connexe; en outre Y est rare dans X. Soient alors X', X'' deux composantes irréductibles distinctes de X, U', U'' leurs traces respectives sur U; ce sont des composantes irréductibles distinctes de U $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 2.1.6)$. Or la réunion des composantes irréductibles W de U telles qu'il existe une suite $(U_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de composantes irréductibles de U pour laquelle $U_0 = U'$, $U_{i-1} \neq U_i$ et $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $U_n = W$ est un ensemble *ouvert et fermé* dans U, puisque U est localement noethérien et par suite ses composantes irréductibles forment une famille localement finie d'ensembles fermés. Il y a donc une telle suite (U_i) pour laquelle $U_n = U''$; soit X_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ la composante irréductible de X telle que $X_i \cap U = U_i$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 2.1.6)$; comme $U_{i-1} \neq U_i$, on a $X_{i-1} \neq X_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$; si l'on avait $X_{i-1} \cap X_i \in \mathfrak{F}$ pour un i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on en déduirait $X_{i-1} \cap X_i \subset Y$ par définition de Y, d'où $U_{i-1} \cap U_i = \emptyset$, contrairement à l'hypothèse. Ceci achève la démonstration du lemme.

On notera que l'hypothèse faite sur X dans (5.10.8) est vérifiée lorsque X est un *préschéma de Cohen-Macaulay et* $d \geqslant 2$.

Corollaire **(5.10.9)**. — *Si un anneau local noethérien* A *vérifie* (S_2) *et est caténaire, il est équidimensionnel.*

L'hypothèse de (5.10.8) est alors vérifiée par $X = \operatorname{Spec}(A)$, avec $d = 2$. Pour montrer que toutes les composantes irréductibles de X ont même dimension, il suffit alors, en vertu de (5.10.8), de montrer que deux telles composantes X', X'' ont même dimension lorsque l'on suppose en outre que $\operatorname{codim}(X' \cap X'', X) = 1$. Il y a alors une composante irréductible Z de $X' \cap X''$ telle que $\operatorname{codim}(Z, X) = 1$, donc $\operatorname{codim}(Z, X') = 1$, puisque $\operatorname{codim}(Z, X) \geqslant \operatorname{codim}(Z, X') \geqslant 1$; de même $\operatorname{codim}(Z, X'') = 1$, et comme X est caténaire, cela entraîne $\dim(X') = \dim(X'')$.

Proposition **(5.10.10)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent et supposons que le* $\mathcal{O}_X$*-Module* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *soit cohérent. Alors :*

(i) *On a* $\operatorname{prof}_Z(\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})) \geqslant 2$.

(ii) *Pour tout point* $x \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F}) \cap (X - Z)$, *on a* $\operatorname{codim}(Z \cap \overline{\{x\}}, \overline{\{x\}}) \geqslant 2$.

(iii) *L'ensemble* U *des* $x \in X$ *tels que* $\operatorname{prof}_{Z_x}(\widetilde{\mathscr{F}_x}) \geqslant 2$ (notations de (5.9.6)) *est ouvert dans* X; *on a* $X - U \subset Z$, *et* U *est le plus grand ouvert de* X *tel que* $\mathscr{F}|U$ *soit* $(Z \cap U)$*-clos.*

Posons pour abréger $\mathscr{F}' = \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$. On sait (5.9.11) que $\mathscr{F}'$ est Z-clos et l'assertion (i) résulte donc de (5.10.5) appliqué à $\mathscr{F}'$. Soit $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \cap (X - Z)$; comme les restrictions de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ à $X - Z$ sont canoniquement isomorphes (5.9.11), on a $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F}')$. Considérons un point $y \in Z \cap \overline{\{x\}}$; l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_y$ correspondant à x est associé au $\mathcal{O}_y$-module $\mathscr{F}'_y$, donc on a, en vertu de (i) et de (**0**, 16.4.6.2), $2 \leqslant \mathrm{prof}(\mathscr{F}'_y) \leqslant \dim(\mathcal{O}_y/\mathfrak{p}) = \mathrm{codim}(\overline{\{y\}}, \overline{\{x\}})$, d'où (ii). Enfin, pour prouver (iii), notons que U est l'ensemble des $x \in X$ tels que $\widetilde{\mathscr{F}}_x$ soit Z_x-clos (5.10.5), ou encore, en vertu de (5.9.6), l'ensemble des points où l'homomorphisme canonique $\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}'_x$ est bijectif; c'est donc le complémentaire de la réunion des supports de $\mathrm{Ker}(\rho_{X/Z})$ et $\mathrm{Coker}(\rho_{X/Z})$, et ces derniers sont des $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents en vertu de l'hypothèse ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.4) donc ont un support fermé ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.2.2); cela montre que U est ouvert, et U est évidemment le plus grand ouvert tel que $\mathscr{F}|U$ soit $(Z \cap U)$-clos; enfin l'inclusion $X - U \subset Z$ résulte de (5.9.11).

Nous verrons plus loin (5.11.1) que dans les cas les plus importants l'assertion (ii) entraîne réciproquement que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est cohérent.

(5.10.11) Soient X un préschéma localement noethérien, Z une partie de X stable par spécialisation; on a vu que $\mathscr{A} = \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre quasi-cohérente (5.9.3); le X-schéma $X' = \mathrm{Spec}(\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathcal{O}_X))$ (**II**, 1.3.1) est appelé la *Z-clôture* de X. En outre pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{A}$-Module, qui est quasi-cohérent si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent; dans ce dernier cas, il y a donc un unique $\mathcal{O}_{X'}$-Module $\mathscr{F}'$ tel que l'on ait, en désignant par $g : X' \to X$ le morphisme structural (**II**, 1.4.3)

(5.10.11.1) $$\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}) = g_*(\mathscr{F}').$$

Proposition **(5.10.12)**. — *Les notations étant celles de* (5.10.11) :

(i) *Soit x un point de* X. *Pour que le morphisme*

$$X' \times_X X_x \to X_x \; (= \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}))$$

déduit de g par localisation soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_X$ *soit Z-clos au point x* (*ce qui a lieu pour tout* $x \in X - Z$).

(ii) *Posons* $Z' = g^{-1}(Z)$, *et supposons* X' *localement noethérien. Alors* $\mathscr{F}'$ *est* Z'*-clos; si de plus* $\mathscr{F}'$ *est un* $\mathcal{O}_{X'}$*-Module cohérent, on a* $\mathrm{prof}_{Z'}(\mathscr{F}') \geqslant 2$.

(iii) *Supposons que* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathcal{O}_X)$ *et* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *soient cohérents. Alors le morphisme* $g : X' \to X$ *est fini; l'ensemble* U *des* $x \in X$ *tels que l'on ait* $\mathrm{prof}_{Z_x}(\widetilde{\mathcal{O}_x}) \geqslant 2$ *et* $\mathrm{prof}_{Z_x}(\widetilde{\mathscr{F}}_x) \geqslant 2$ *est ouvert dans* X *et tel que* $X - U \subset Z$; *en outre* U *est le plus grand ensemble ouvert de* X *tel que la restriction* $g^{-1}(U) \to U$ *de g soit un isomorphisme et que la restriction* $\mathscr{F}|U \to \mathscr{F}'|g^{-1}(U)$ *du g-morphisme canonique* $\mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ *soit un isomorphisme.*

L'assertion (i) résulte des définitions, et (iii) est une conséquence immédiate de (5.10.10, (iii)). Pour prouver (ii), considérons un ouvert V de X contenant $Z - X$, et son image réciproque $V' = g^{-1}(V)$; si $i : V \to X$ et $i' : V' \to X'$ sont les injections canoniques, l'homomorphisme canonique $\rho_{X'/Z'} : \mathscr{F}' \to i'_*(\mathscr{F}'|V')$ est tel que $g_*(\rho_{X'/Z'})$ soit l'homomorphisme canonique $\rho_{X/Z} : \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}) \to i_*(\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})|V)$ (**II**, 1.4.2), compte tenu de (5.10.11.1). Comme $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est Z-clos (5.9.11), $\rho_{X/Z}$ est un isomorphisme, donc il en est de même de $\rho_{X'/Z'}$. Comme $X'-Z'$ est intersection de la famille filtrante des $V'_\alpha = g^{-1}(V_\alpha)$, où V_α parcourt la famille filtrante des ouverts contenant $X-Z$, on en déduit que $\mathscr{F}'$ est Z'-clos lorsque X' est localement noethérien, en vertu de (5.9.1).

(5.10.13) Nous allons maintenant appliquer les résultats qui précèdent au cas où Z est un des ensembles $Z^{(n)}(X)$ (ou simplement $Z^{(n)}$), défini comme l'ensemble des $x \in X$ tels que $\dim(\mathcal{O}_x) \geqslant n$; il est clair que $Z^{(n)}$ est stable par spécialisation; pour qu'une partie fermée T de X soit contenue dans $Z^{(n)}$, il faut et il suffit que $\operatorname{codim}(T, X) \geqslant n$. Nous nous intéresserons ici au cas $n = 2$.

Proposition **(5.10.14)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent de support égal à* X.

(i) *Pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_1), *il faut et il suffit qu'il soit* $Z^{(1)}$*-pur.*

(ii) *Pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_2), *il faut et il suffit qu'il soit* $Z^{(2)}$*-clos et* $Z^{(1)}$*-pur, ou encore qu'il soit* $Z^{(2)}$*-clos et n'ait pas de cycle premier associé de codimension* 1.

(i) Dire que $\mathscr{F}$ possède la propriété (S_1) signifie que $\mathscr{F}$ n'a pas de cycle premier associé immergé (5.7.5), ou encore que pour tout $x \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F})$, on a $\dim(\mathscr{F}_x) = 0$ (3.1.4) autrement dit (5.1.12.1) $\dim(\mathcal{O}_x) = 0$; mais cela équivaut à dire que $\operatorname{Ass}(\mathscr{F})$ ne rencontre pas $Z^{(1)}$, et la conclusion résulte de (5.10.2).

(ii) Dire que $\mathscr{F}$ est $Z^{(2)}$-clos signifie que $\operatorname{prof}_{Z^{(2)}}(\mathscr{F}) \geqslant 2$, ou encore que, pour tout $x \in X$, la relation $\dim(\mathscr{F}_x) \geqslant 2$ entraîne $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) \geqslant 2$; cela montre que la propriété (S_2) entraîne que $\mathscr{F}$ est $Z^{(2)}$-clos; elle entraîne en outre que $\mathscr{F}$ vérifie (S_1), donc n'a pas de cycle premier associé immergé (5.7.5), et comme $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) = X$, cela signifie encore que tous les cycles premiers associés à $\mathscr{F}$ sont de codimension 0. Inversement, supposons que $\mathscr{F}$ soit $Z^{(2)}$-clos et n'ait pas de cycle premier associé de codimension 1; pour voir que $\mathscr{F}$ vérifie (S_2), il reste à montrer que si $x \in X$ est tel que $\dim(\mathscr{F}_x) = 1$ (ou, ce qui revient au même, $\dim(\mathcal{O}_x) = 1$), alors on a $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) = 1$; mais par hypothèse la relation $\dim(\mathcal{O}_x) = 1$ entraîne $x \notin \operatorname{Ass}(\mathscr{F})$, et cette dernière relation équivaut à $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) \neq 0$, c'est-à-dire ici à $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x) = 1$. Si $\mathscr{F}$ est $Z^{(1)}$-pur, donc vérifie (S_1), on a remarqué plus haut qu'en vertu de la relation $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) = X$, tous les cycles premiers associés à $\mathscr{F}$ sont de codimension 0, donc ce qui précède s'applique.

On notera qu'il peut se faire que $\mathscr{F}$ soit $Z^{(2)}$-clos et ne vérifie pas (S_1) : c'est le cas par exemple lorsque X est de dimension 1 (car alors $Z^{(2)} = \emptyset$, et tout $\mathcal{O}_X$-Module est $Z^{(2)}$-clos) et a des cycles premiers associés immergés.

Rappelons qu'au chapitre III, dans l'étude de la cohomologie locale, on donne une caractérisation cohomologique de la propriété (S_n) pour tout $n \geqslant 1$, généralisant (5.10.14).

Corollaire **(5.10.15)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent de support* X. *On suppose que* $\mathscr{F}$ *n'a pas de cycles premiers associés de codimension* 1 *et que* $\mathscr{F}' = \mathscr{H}^0_{X/Z^{(2)}}(\mathscr{F})$ *soit cohérent. Alors :*

(i) $\mathscr{F}'$ *vérifie la propriété* (S_2).

(ii) *L'ensemble* U *des* $x \in X$ *tels que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_2) *au point* x (5.7.2) *est ouvert dans* X *et on a* $\operatorname{codim}(X-U, X) \geqslant 2$.

(i) On sait (5.9.11) que $\mathscr{F}'$ est $Z^{(2)}$-clos, et en outre $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}')=X$, car les points maximaux de X appartiennent à $X-Z^{(2)}$ et en ces points $\mathscr{F}'_x=\mathscr{F}_x \neq 0$, donc le support de $\mathscr{F}'$ est dense dans X, et comme $\mathscr{F}'$ est cohérent, $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}')$ est fermé, donc égal à X. Il reste à voir que $\mathscr{F}'$ n'a pas de cycles premiers associés de codimension 1. Mais si $x \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F}')$ et $\dim(\mathscr{F}'_x)=\dim(\mathcal{O}_x)=1$, on a $x \in X-Z^{(2)}$, donc, puisque $\mathscr{F}'_x=\mathscr{F}_x$ on aurait $x \in \operatorname{Ass}(\mathscr{F})$, contrairement à l'hypothèse, ce qui achève de prouver (i).

(ii) On a $Z^{(n)}(X_x)=Z^{(n)}(X) \cap X_x$, avec les notations de (5.9.6), compte tenu de (**I**, 2.4.2); d'autre part, l'hypothèse que $\mathscr{F}$ n'a pas de cycles premiers associés de codimension 1 entraîne la même hypothèse pour $\widetilde{\mathscr{F}}_x$; pour que $\widetilde{\mathscr{F}}_x$ vérifie (S_2), il faut et il suffit donc, en vertu de (5.10.14), que $\widetilde{\mathscr{F}}_x$ soit $Z^{(2)}(X_x)$-clos; l'assertion (ii) résulte donc de (5.10.6) et de (5.10.10, (iii)).

Proposition **(5.10.16)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,*

$$X'=\operatorname{Spec}(\mathscr{H}^0_{X/Z^{(2)}}(\mathcal{O}_X))$$

sa $Z^{(2)}$-*clôture,* $g: X' \to X$ *le morphisme structural. Supposons que* X *n'ait pas de cycle premier associé de codimension* 1.

(i) *Pour qu'en un point* $x \in X$, X *vérifie* (S_2), *il faut et il suffit que le morphisme* $X'_x \to X_x$ *déduit de* g (*notations de* (5.10.12)) *soit un isomorphisme. Cette condition est toujours vérifiée si* $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X) \leqslant 1$.

(ii) *Supposons de plus que* g *soit un morphisme fini* (voir dans (5.11.2) des conditions *suffisantes* pour qu'il en soit ainsi). *Alors l'ensemble* U *des points où* X *vérifie* (S_2) *est ouvert et* $\operatorname{codim}(X-U, X) \geqslant 2$; *en outre* U *est le plus grand ouvert de* X *tel que la restriction* $g^{-1}(U) \to U$ *de* g *soit un isomorphisme.*

(iii) *Sous les mêmes hypothèses que dans* (ii), X' *satisfait à* (S_2) *et pour tout* $x' \in X'$ *tel que* $\operatorname{codim}(\overline{\{x'\}}, X') \leqslant 1$, *le point* $x=g(x')$ *est tel que* $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X)=\operatorname{codim}(\overline{\{x'\}}, X')$.

(iv) *Les hypothèses étant celles de* (ii), *soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent de support* X, *tel que* $\mathscr{H}^0_{X/Z^{(2)}}(\mathscr{F})$ *soit cohérent; alors le* $\mathcal{O}_{X'}$-*Module* $\mathscr{F}'$ *tel que* $g_*(\mathscr{F}')=\mathscr{H}^0_{X/Z^{(2)}}(\mathscr{F})$ *est cohérent et vérifie* (S_2), *et son support est une réunion de composantes irréductibles de* X'.

Les assertions (i) et (ii) sont insérées pour mémoire, ayant déjà été démontrées en substance : (i) résulte en effet de (5.10.12, (i)) et de (5.10.14), et (ii) est un cas particulier de (5.10.15, (ii)).

Démontrons (iii); posons $x=g(x')$; comme g est fini, il en est de même du morphisme $X'_x \to X_x$, donc $\dim(\mathcal{O}_{X',x'}) \leqslant \dim(X'_x) \leqslant \dim(X_x)=\dim(\mathcal{O}_{X,x})$ en vertu de (5.4.1). Supposons d'abord que $\dim(\mathcal{O}_{X',x'}) \leqslant 1$ et montrons qu'alors $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \leqslant 1$. Sinon, on aurait $x \in Z^{(2)}$, donc en vertu de (5.10.12, (ii)) appliqué à $\mathcal{O}_X$, on aurait $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{X',x'}) \geqslant 2$, ce qui est absurde. On a donc $x \in X-Z^{(2)}$, et par suite $\mathcal{O}_{X',x'}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X,x}$ (5.10.12, (i)), d'où $\dim(\mathcal{O}_{X',x'})=\dim(\mathcal{O}_{X,x})$. En outre, comme X n'a pas de cycles premiers associés de codimension 1, l'hypothèse $\dim(\mathcal{O}_{X,x})=1$ entraîne $x\notin \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_X)$, donc $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X,x})=1$, et par suite aussi $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X',x'})=1$. Supposons maintenant $\dim(\mathcal{O}_{X',x'})\geqslant 2$, donc $\dim(\mathcal{O}_{X,x})\geqslant 2$, c'est-à-dire $x\in Z^{(2)}$; on en déduit que $\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{X',x'})\geqslant 2$ par (5.10.12, (ii)). Ceci établit les assertions de (iii).

Pour prouver (iv) il suffit de remplacer $\mathcal{O}_X$ par $\mathscr{F}$ dans le raisonnement précédent, qui établit que $\mathscr{F}'$ vérifie (S_2) et que si $\dim(\mathscr{F}'_{x'})\leqslant 1$, $\mathscr{F}_x$ et $\mathscr{F}'_{x'}$ sont di-isomorphes; en particulier si $\dim(\mathscr{F}'_{x'})=0$, on a $\dim(\mathscr{F}_x)=0$, donc $\dim(\mathcal{O}_{X,x})=0$ puisque $\mathscr{F}$ a pour support X, et enfin $\dim(\mathcal{O}_{X',x'})=0$; toute composante irréductible de $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ est donc une composante irréductible de X', puisque $\mathscr{F}'$ est cohérent, donc $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}')$ fermé.

Proposition **(5.10.17)**. — *Soient* A *un anneau intègre noethérien, et désignons par* $A^{(1)}$ *l'intersection des anneaux locaux* $A_\mathfrak{p}$, *où* $\mathfrak{p}$ *parcourt l'ensemble des idéaux premiers de* A *de hauteur* 1. *Supposons que* $A^{(1)}$ *soit une* A-*algèbre* finie. *Alors :*

(i) *L'anneau* $A^{(1)}$ *vérifie la condition* (S_2).

(ii) *L'ensemble* U *des* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$ *tels que l'homomorphisme canonique* $A_\mathfrak{p}\rightarrow(A^{(1)})_\mathfrak{p}$ *soit bijectif est égal à l'ensemble des* $\mathfrak{p}$ *tels que* $A_\mathfrak{p}$ *vérifie* (S_2); U *est ouvert dans* $X=\mathrm{Spec}(A)$ *et l'on a* $\mathrm{codim}(X-U, X)\geqslant 2$.

(iii) *Pour toute partie multiplicative* S *de* A, $(S^{-1}A)^{(1)}$ *est une* $(S^{-1}A)$-*algèbre finie.*

(iv) *Soit* B *une* A-*algèbre finie, intègre et contenant* A. *Alors* $B^{(1)}$ *est une* B-*algèbre finie. En outre, pour tout idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B, *de hauteur* 1, *l'idéal premier* $\mathfrak{q}\cap A$ *de* A *est de hauteur* 1.

Si l'on tient compte de la formule (5.9.3.1), on voit que $X'=\mathrm{Spec}(A^{(1)})$ est la $Z^{(2)}$-*clôture* de $X=\mathrm{Spec}(A)$; comme A n'a pas d'idéaux premiers associés immergés, les propriétés (i) et (ii) sont des cas particuliers de (5.10.16, (i), (ii) et (iii)). Pour prouver (iii), il suffit de remarquer que l'on a $(S^{-1}A)^{(1)}=S^{-1}A^{(1)}$, ce qui est un cas particulier de (5.9.4) : en effet $S^{-1}A$ est un A-module plat, les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont les idéaux $S^{-1}\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$ ne rencontre pas S, et l'on a $\mathrm{ht}(S^{-1}\mathfrak{p})=\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Comme $A^{(1)}$ est une A-algèbre finie, $S^{-1}A^{(1)}$ est une $S^{-1}A$-algèbre finie, d'où (iii).

Pour démontrer (iv), posons $Y=\mathrm{Spec}(B)$, et soit $f: Y\rightarrow X$ le morphisme structural; comme il est fini, il résulte de (5.4.1) que pour tout $y\in Y$, on a $\dim(\mathcal{O}_{Y,y})\leqslant\dim(\mathcal{O}_{X,f(y)})$; donc, si $T=f^{-1}(Z^{(2)}(X))$, on a $T\supset Z^{(2)}(Y)$. Montrons que $\mathscr{G}=\mathscr{H}^0_{X/Z^{(2)}(X)}(f_*(\mathcal{O}_Y))$ est cohérent; en effet $f_*(\mathcal{O}_Y)=\widetilde{B}$, B étant considéré comme A-module; mais comme B est une A-algèbre intègre finie, son corps des fractions est fini sur le corps des fractions de A, donc B est contenu dans un A-module libre de type fini, et par suite (5.9.2, (i)) $\mathscr{G}$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de $(\mathscr{H}^0_{X/Z^{(2)}(X)}(\mathcal{O}_X))^n$ pour un n convenable; ce dernier étant cohérent par hypothèse, il en est de même de $\mathscr{G}$. Or, il résulte de la définition (5.9.1.2) que $\mathscr{G}$ est isomorphe à $f_*(\mathscr{H}^0_{Y/T}(\mathcal{O}_Y))$; cela prouve *a fortiori* que $\mathscr{H}^0_{Y/T}(\mathcal{O}_Y)$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Il résulte alors de (5.10.10, (ii)), appliqué à $\mathcal{O}_Y$ et au point générique de Y, que l'on a $\mathrm{codim}(T, Y)\geqslant 2$, c'est-à-dire $T\subset Z^{(2)}(Y)$, et finalement $T=Z^{(2)}(Y)$. Cela prouve les deux assertions de (iv).

5.11. Critères de cohérence pour les Modules $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$.

Proposition (5.11.1). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Désignons par* (x_α) *la famille des points de* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})\cap(X-Z)$ *et, pour tout* α, *soient* Y_α *le sous-préschéma fermé réduit de* X *ayant* $\overline{\{x_\alpha\}}$ *pour espace sous-jacent,* $Z_\alpha=Z\cap\overline{\{x_\alpha\}}$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent.*

b) *Pour tout* α, $\mathscr{H}^0_{Y_\alpha/Z_\alpha}(\mathcal{O}_{Y_\alpha})$ *est un* $\mathcal{O}_{Y_\alpha}$*-Module cohérent.*

Ces deux conditions entraînent la suivante :

c) *Pour tout* α, *on a* $\mathrm{codim}(Z_\alpha, Y_\alpha)\geqslant 2$.

De plus, les trois conditions a), b), c) *sont équivalentes lorsqu'en outre* une *des propriétés suivantes est vérifiée :*

(i) *Tout point de* X *admet un voisinage ouvert isomorphe à un sous-schéma d'un schéma régulier* (auquel cas on dit aussi que X est *localement immersible dans un schéma régulier*).

(ii) *Pour tout* α, Y_α *est universellement caténaire* (5.6.2) *et son normalisé* (**II**, 6.3.8) Y'_α *est fini sur* Y_α.

Toutes les propriétés envisagées sont locales sur X, donc on peut se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, A étant un anneau noethérien, et $\mathscr{F}=\widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini. Alors, pour tout α, si h_α est l'injection canonique $Y_\alpha\rightarrow X$, $(h_\alpha)_*(\mathcal{O}_{Y_\alpha})=\mathscr{G}_\alpha$ est le $\mathcal{O}_X$-Module correspondant au A-module quotient $A/\mathfrak{j}_{x_\alpha}$, et, par définition de $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, ce A-module est isomorphe à un sous-A-module de M. Comme $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{G}_\alpha)$ est un sous-$\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent de $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ (5.9.2), l'hypothèse que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est cohérent entraîne qu'il en est de même de $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{G}_\alpha)$. D'autre part, il résulte de la définition (5.9.1.2) que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{G}_\alpha)$ est isomorphe à $\mathscr{H}^0_{Y_\alpha/Z_\alpha}(\mathcal{O}_{Y_\alpha})$; cela prouve que *a)* entraîne *b)*. Pour voir que *b)* entraîne *a)*, il suffit de montrer qu'il y a une filtration finie $(\mathscr{F}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathscr{F}$ formée de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents, avec $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_n=0$, et telle que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i+1})$ soit cohérent pour tout i : cela résulte, par récurrence descendante sur i, des suites exactes

$$0\rightarrow\mathscr{F}_{i+1}\rightarrow\mathscr{F}_i\rightarrow\mathscr{F}_i/\mathscr{F}_{i+1}.$$

du fait que $\mathscr{H}^0_{X/Z}$ est un foncteur exact à gauche (5.9.2), et enfin de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.3.3) et (**I**, 6.1.1). En vertu de (3.2.8), il suffit donc de prouver que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est cohérent lorsque $\mathscr{F}$ est *irredondant*; autrement dit, $\mathrm{Ass}(M)=\{\mathfrak{p}\}$ est réduit à un seul élément. Notons maintenant le

Lemme (5.11.1.1). — *Soient* A *un anneau noethérien,* M *un* A*-module de type fini, tel que* $\mathrm{Ass}(M)=\{\mathfrak{p}\}$. *Il existe une filtration finie* $(M_h)_{0\leqslant h\leqslant m}$ *de* M *telle que* $M_0=M$, $M_m=0$ *et que* M_h/M_{h+1} *soit isomorphe à un sous-module de* $A/\mathfrak{p}$.

Notons d'abord que l'homomorphisme canonique $M\rightarrow M_\mathfrak{p}=N$ est injectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, nº 2, prop. 6). Posons $B=A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, idéal maximal de B; on a $\mathrm{Ass}(N)=\{\mathfrak{m}\}$ (*loc. cit.*, prop. 5), et comme N est un B-module de type fini, il existe un entier r tel que $\mathfrak{m}^r N = 0$; si on pose $N'_j = \mathfrak{m}^j N$ pour $0 \leqslant j \leqslant r$, N'_j/N'_{j+1} est un $(B/\mathfrak{m})$-module de type fini, donc somme directe d'un nombre fini de sous-modules isomorphes à $B/\mathfrak{m}$, puisque $B/\mathfrak{m}$ est un corps; autrement dit, il y a une filtration finie $(N_h)_{0 \leqslant h \leqslant m}$ de N telle que $N_m = 0$ et que N_h/N_{h+1} soit isomorphe à $B/\mathfrak{m}$, i.e. au corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$; la filtration des $M_h = M \cap N_h$ répond à la question, car M_h/M_{h+1} est isomorphe à un sous-$(A/\mathfrak{p})$-module de type fini de $N_h/N_{h+1} = B/\mathfrak{m}$; mais on sait qu'un tel sous-module est isomorphe à un sous-module de $A/\mathfrak{p}$.

L'existence de la filtration (M_h) montre alors, par le même raisonnement que plus haut, que pour prouver (moyennant *b)*) que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ est cohérent, on peut se borner à montrer que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{P})$ est cohérent, où $\mathscr{P} = (A/\mathfrak{p})^{\sim}$, $\mathfrak{p}$ étant un idéal associé à M. Mais si $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_y$ avec $y \in Z$, le support de $\mathscr{P}$ est un ensemble fermé contenu dans Z, puisque Z est stable par spécialisation; la définition (5.9.1.2) montre alors que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{P}) = 0$. Si au contraire $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_{x_\alpha}$ pour un α, on a $\mathscr{P} = (h_\alpha)_*(\mathscr{O}_{Y_\alpha})$ par définition, et l'on a vu plus haut que $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{P})$ est isomorphe à $\mathscr{H}^0_{Y_\alpha/Z_\alpha}(\mathscr{O}_{Y_\alpha})$, donc est cohérent en vertu de l'hypothèse *b)*.

On a déjà vu (5.10.10, (ii)) que *a)* entraîne *c)*. Il reste à prouver que, sous l'une ou l'autre des hypothèses (i), (ii), *c)* entraîne *b)*. Notons que si X vérifie (i), il en est de même de chaque Y_α. Il suffit donc (5.9.3.1) de prouver le

Corollaire **(5.11.2)**. — *Soient* A *un anneau noethérien intègre, vérifiant l'une des deux hypothèses suivantes :*

(i) A *est quotient d'un anneau noethérien régulier.*

(ii) A *est universellement caténaire, et sa clôture intégrale* A′ *est une* A*-algèbre finie.*

Alors l'anneau $A^{(1)}$, *intersection des* $A_\mathfrak{p}$ *où* $\mathfrak{p}$ *parcourt l'ensemble des idéaux premiers de* A *de hauteur* 1, *est une* A*-algèbre finie.*

(i) Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$. L'ensemble U des points $x \in X$ où X vérifie (S_2) est *ouvert* dans X moyennant l'hypothèse (i) (6.11.2) [1]. En outre, si l'on pose $Z = X - U$, on a $\mathrm{codim}(Z, X) \geqslant 2$: en effet, pour tout $x \in X$ tel que $\dim(A_x) \leqslant 1$, on a $\dim(A_{x'}) \leqslant 1$ pour tout x' générisation de x, et comme $A_{x'}$ est intègre, $\mathrm{prof}(A_{x'}) \geqslant 1$, donc X vérifie (S_2) au point x. On a donc $Z \subset Z^{(2)}$, et $\mathscr{H}^0_{X/Z^{(2)}}(\mathscr{O}_X) = j_*(\mathscr{H}^0_{U/Z^{(2)}}(\mathscr{O}_U))$, où $j : U \to X$ est l'injection canonique (5.9.1.2). Mais comme le préschéma U vérifie (S_2), il résulte de (5.10.14) que $\mathscr{H}^0_{U/Z^{(2)}}(\mathscr{O}_U)$ est isomorphe à $\mathscr{O}_U$; d'autre part, comme $\mathrm{codim}(Z, X) \geqslant 2$, on sait, d'après le chapitre III, § 9, que $j_*(\mathscr{O}_U)$ est un $\mathscr{O}_X$-Module cohérent, ce qui démontre la proposition dans le cas (i).

(ii) L'anneau A′ est, en vertu de l'hypothèse (ii), un anneau *noethérien* intègre et intégralement clos, donc (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 6, th. 4) intersection de ses anneaux locaux $A'_{\mathfrak{p}'}$, où $\mathfrak{p}'$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A′. Or, pour un tel idéal premier $\mathfrak{p}'$, si l'on pose $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ et $S = A - \mathfrak{p}$, $A'_{\mathfrak{p}'}$ est un anneau local en l'idéal premier $S^{-1}\mathfrak{p}'$ de $S^{-1}A'$, et $S^{-1}A'$ est par hypothèse

[1] Le lecteur pourra vérifier que (5.11.2) n'est pas utilisé dans la démonstration de (6.11.2).

une $A_\mathfrak{p}$-algèbre finie; comme $S^{-1}\mathfrak{p}'$ est au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ de $A_\mathfrak{p}$, c'est un idéal maximal de $S^{-1}A'$; mais en vertu de l'hypothèse (ii) et de (5.6.3, (i)), $A_\mathfrak{p}$ est universellement caténaire. On déduit donc de (5.6.10) que $\dim(A_\mathfrak{p})=\dim(A'_{\mathfrak{p}'})=1$. Il résulte de là que l'on a $A^{(1)}\subset A'$, et comme A' est un A-module de type fini par hypothèse, il en est de même de $A^{(1)}$ puisque A est noethérien; la proposition est donc démontrée dans le cas (ii).

Remarque (**5.11.3**). — Le fait que $A^{(1)}$ est une A-algèbre finie n'est plus nécessairement exact si, dans l'hypothèse (ii) de (5.11.2), on suppose seulement que A est *caténaire*. Un exemple est donné par l'anneau local caténaire A construit dans (5.6.11), dont la clôture intégrale A′ (notée B dans (5.6.11)) est une A-algèbre finie; si $A^{(1)}$ était aussi une A-algèbre finie, comme il est contenu dans le corps des fractions de A, il serait contenu dans A′. Mais d'autre part, avec les notations de (5.6.11), tout idéal premier de hauteur 1 dans A est de la forme $\mathfrak{p}A$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 1 dans C, et l'on a $A_{\mathfrak{p}A}=C_\mathfrak{p}$; on sait (5.6.11) que $C_\mathfrak{p}=E_{\mathfrak{p}'}$, où $\mathfrak{p}'$ est l'unique idéal premier de E au-dessus de $\mathfrak{p}$, donc $A_{\mathfrak{p}A}$ est intégralement clos et contient par suite A′; par définition, on a donc $A'\subset A^{(1)}$, et l'hypothèse que $A^{(1)}$ est une A-algèbre finie entraînerait finalement $A^{(1)}=A'$. Mais cette conclusion est absurde, car un des deux idéaux premiers de A′ au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{n}A$ de A est de hauteur 1, alors que $\mathfrak{n}A$ est de hauteur 2, ce qui contredirait (5.10.17, (iv)).

Corollaire (**5.11.4**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie fermée de* X, $U=X-Z$, $i: U\rightarrow X$ *l'injection canonique,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_U$*-Module cohérent. Pour que* $i_*(\mathscr{F})$ *soit un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent, il est nécessaire que pour tout* $x\in \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, *on ait* $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}}\cap Z, \overline{\{x\}})\geqslant 2$. *Cette condition est suffisante dans chacun des deux cas suivants :*

(i) *Le préschéma* X *est localement immersible dans un schéma régulier.*

(ii) *Le préschéma* X *est universellement caténaire et universellement japonais* (ce qui signifie, par définition, que tout point $x\in X$ admet un voisinage ouvert affine dont l'anneau est *universellement japonais* (**0**, 23.1.1)).

On sait (**I**, 9.4.7) qu'il existe un sous-$\mathcal{O}_X$-Module *cohérent* $\mathscr{G}$ de $i_*(\mathscr{F})$ tel que $\mathscr{G}|U=\mathscr{F}$. On a évidemment $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})\subset\mathrm{Ass}(\mathscr{G})\subset\mathrm{Ass}(i_*(\mathscr{F}))$, et comme

$$\mathrm{Ass}(i_*(\mathscr{F}))=\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$$

(3.1.13), on a $\mathrm{Ass}(\mathscr{G})=\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$; il suffit alors d'appliquer (5.11.1) au $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{G}$, en notant que $i_*(\mathscr{F})=\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{G})$ et que, lorsque X est universellement caténaire et universellement japonais, l'hypothèse (ii) de (5.11.1) est vérifiée par définition.

Corollaire (**5.11.5**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Z *une partie de* X *stable par spécialisation,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent tel que l'on ait* $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})\subset X-Z$. *Alors la condition :*

a) $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *est un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent*

implique la suivante :

d) *Pour toute partie* T *de* Z *fermée dans* X (ou seulement pour une *famille filtrante* *croissante* de parties fermées T de Z, de réunion Z), $i_*(\mathscr{F}|X-T)$ *(où* $i: X-T \to X$ *est l'injection canonique) est cohérent.*

Lorsque X *vérifie l'une des hypothèses* (i), (ii) *de* (5.11.1), a) *et* d) *sont équivalentes.*

Notons que l'on a $\mathrm{Ass}(i_*(\mathscr{F}|X-T)) = \mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ en vertu de l'hypothèse et de (3.1.13); il résulte donc de (5.10.2) que les applications canoniques

$$i_*(\mathscr{F}|X-T) \to \mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$$

sont *injectives*; le fait que *a)* implique *d)* est donc conséquence de cette remarque. Inversement, la condition *d)* implique, en vertu de (5.11.1) que $\mathrm{codim}(T \cap Y_\alpha, Y_\alpha) \geqslant 2$ avec les notations de (5.11.1); par suite on a $\mathrm{codim}(Z \cap Y_\alpha, Y_\alpha) \geqslant 2$ puisque Z est réunion de ses parties qui sont fermées dans X, et la dernière assertion du corollaire découle de (5.11.1).

Corollaire **(5.11.6).** — *Soient* A *un anneau noethérien,* $X = \mathrm{Spec}(A)$. *Considérons les propriétés suivantes :*

a) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *l'anneau* $B^{(1)}$ (notation de (5.11.2)) *est une* B-*algèbre finie.*

b) *Pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathscr{F}$ *et toute partie* Z *de* X, *stable par spécialisation, et telle que pour tout* $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \cap (X-Z)$ *on ait* $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}} \cap Z, \overline{\{x\}}) \geqslant 2$, *le* $\mathcal{O}_X$-*Module* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *est cohérent.*

c) *Pour toute partie fermée* T *de* X *et tout* $\mathcal{O}_U$-*Module cohérent* $\mathscr{G}$ *(où* $U = X-T$) *tel que pour tout* $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{G})$ *on ait* $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}} \cap T, \overline{\{x\}}) \geqslant 2$, $i_*(\mathscr{G})$ *(où* $i: U \to X$ *est l'injection canonique) est un* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent.*

d) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A *et tout idéal* $\mathfrak{J}$ *de hauteur* $\geqslant 2$ *dans* B, *l'anneau* $\bigcap_{\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{J}} B_\mathfrak{p}$ *est une* B-*algèbre finie.*

On a alors les implications

$$a) \Leftrightarrow b) \Rightarrow c) \Leftrightarrow d)$$

En outre, les conditions a), b), c) *et* d) *sont vérifiées dans chacun des deux cas suivants :*

(i) A *est quotient d'un anneau régulier.*

(ii) A *est universellement caténaire et universellement japonais.*

Soit $B = A/\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de A, de sorte que $Y = \mathrm{Spec}(B)$ est la partie fermée $V(\mathfrak{q})$ de X; posons $Z = Z^{(2)}(Y)$, qui est une partie de X stable par spécialisation; comme B est intègre, $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{q})$ est réduit au point générique $\mathfrak{q}$ de Y. Si la condition *b)* est vérifiée, on peut l'appliquer au $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathscr{F} = (A/\mathfrak{q})^\sim$ et à Z, et en vertu de (5.9.3.1), cela montre que $B^{(1)}$ est un A-module de type fini, et *a fortiori* un B-module de type fini. Inversement, supposons *a)* vérifiée; alors, si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent tel que pour tout $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \cap (X-Z)$ on ait $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}} \cap Z, \overline{\{x\}}) \geqslant 2$, on peut appliquer (avec les notations de (5.11.1)) à chacun des schémas affines $Y_\alpha = \mathrm{Spec}(B_\alpha)$, où B_α est un anneau quotient intègre de A, le résultat de *a)*; comme par hypothèse Z_α est contenu dans $Z^{(2)}(Y_\alpha)$, la condition *a)* (compte tenu de (5.10.2) et du fait que $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{Y_\alpha})$ est réduit au point générique de Y_α) entraîne que $\mathscr{H}^0_{Y_\alpha/Z_\alpha}(\mathcal{O}_{Y_\alpha})$ est un $\mathcal{O}_{Y_\alpha}$-Module cohérent, et *b)* découle alors de (5.11.1).

Pour voir que *c)* entraîne *d)*, on raisonne comme ci-dessus en appliquant *c)* au cas où $\mathscr{F}=(A/\mathfrak{q})^{\sim}$ et $Z=V(\mathfrak{J})$; inversement, on prouve que *d)* entraîne *c)* en utilisant encore l'équivalence de *a)* et *b)* dans (5.11.1). Il est évident que *c)* est un cas particulier de *b)*. Enfin, le fait que *a)* (et par suite chacune des autres conditions) est vérifiée lorsque A vérifie l'une des hypothèses (i), (ii) résulte de (5.11.2), vu la définition des anneaux universellement caténaires et des anneaux universellement japonais.

Remarques **(5.11.7)**. — (i) On ignore si, dans (5.11.5) la condition *d)* implique *a)* sans hypothèse supplémentaire sur X; nous verrons plus loin (7.2.4) qu'il en est bien ainsi lorsque X est un schéma *local*. De même, nous prouverons que lorsque A est un anneau *local* noethérien les quatre propriétés *a)*, *b)*, *c)*, *d)* de (5.11.6) sont équivalentes (7.2.4). On ignore si ce résultat s'étend à tous les anneaux noethériens.

(ii) Si A vérifie la propriété *a)* de (5.11.6), il en est de même de tout *anneau de fractions* $S^{-1}A$ et de toute A-algèbre *finie* C. En effet tout anneau quotient intègre de $S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}(A/\mathfrak{q})$, où $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de A ne rencontrant pas S; et d'autre part, si $\mathfrak{r}$ est un idéal premier de C, $\mathfrak{p}$ son image réciproque dans A, $C/\mathfrak{r}$ est une $(A/\mathfrak{p})$-algèbre finie intègre contenant $A/\mathfrak{p}$; nos assertions sont donc des conséquences de (5.10.17, (iii) et (iv)).

5.12. Relations entre les propriétés d'un anneau local noethérien A et d'un anneau quotient A/tA.

On a déjà vu dans (3.4) des relations entre les propriétés de A et de A/tA concernant les idéaux premiers associés, ainsi que les propriétés d'être intègre ou réduit. On donne dans cette section d'autres relations entre les propriétés de ces anneaux, liées aux notions de dimension et de profondeur.

Proposition **(5.12.1)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $X=\mathrm{Spec}(A)$, t *un élément de* A *faisant partie d'un système de paramètres* (**0**, 16.3.6), X_0 *le sous-espace fermé* $V(t)$ *de* X, X_1 *l'ouvert complémentaire* $X-X_0$. *Soit* Z *une partie de* X *telle que toute spécialisation d'un point de* Z *appartienne à* Z. *On suppose que* X *est biéquidimensionnel* (ce qui sera le cas si A est équidimensionnel et quotient d'un anneau local régulier (**0**, 16.5.12)). *Alors si l'on pose* $Z_0=Z\cap X_0$, $Z_1=Z\cap X_1$, *on a*

$$\textbf{(5.12.1.1)}\qquad \mathrm{codim}(Z_0, X_0)\leqslant \mathrm{codim}(Z, X)\leqslant \mathrm{codim}(Z_1, X_1).$$

La seconde inégalité résulte de la définition (5.1.3); pour démontrer la première, on peut se borner à la démontrer lorsque Z est *fermé* : en effet, par hypothèse Z est réunion de parties fermées Z_α, et si l'on a $\mathrm{codim}(X_0\cap Z_\alpha, X_0)\leqslant \mathrm{codim}(Z_\alpha, X)$ pour tout α, on aura aussi $\mathrm{codim}(Z_0, X_0)=\inf_\alpha(\mathrm{codim}(X_0\cap Z_\alpha, X_0))\leqslant \inf_\alpha(\mathrm{codim}(Z_\alpha, X))=\mathrm{codim}(Z, X)$. Supposons donc Z fermé, de sorte que l'on a

$$\mathrm{codim}(Z, X)=\dim(X)-\dim(Z)$$

en vertu de (**0**, 14.3.5.1). D'autre part, X_0 est évidemment caténaire, équidimensionnel et de dimension $\dim(X)-1$ en vertu de (**0**, 16.3.4); on a donc aussi

$$\operatorname{codim}(Z_0, X_0) = \dim(X_0) - \dim(Z_0) = \dim(X) - 1 - \dim(Z_0)$$

Mais on a $\dim(Z_0) \geqslant \dim(Z) - 1$ (**0**, 16.3.4), ce qui achève de prouver la première inégalité (5.12.1.1).

Proposition (**5.12.2**). — *Soient* A *un anneau local noethérien,* M *un* A-*module de type fini, t un élément* M-*régulier appartenant à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, k *un entier* $\geqslant 1$. *On suppose que* A *soit un anneau caténaire. Alors, si* M/tM *est équidimensionnel et satisfait à* (S_k), *il en est de même de* M.

Compte tenu de ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 30) et de (5.7.3, (vi)), on peut se borner au cas où $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Spec}(A) = X$. Posons $X_0 = V(t) = \operatorname{Spec}(A/tA)$; comme M/tM vérifie (S_1) par hypothèse, il n'a pas d'idéaux premiers associés immergés (5.7.5). Appliquant (3.4.4) au point fermé de X (et de tout sous-préschéma fermé de X), on voit que les composantes irréductibles de $\operatorname{Supp}(M/tM)$ sont exactement celles de $Y_i \cap X_0$, où Y_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont les composantes irréductibles de X. Comme t est par hypothèse M-régulier, $V(t)$ ne contient aucun point maximal de X (3.1.8); chacune des composantes irréductibles de $Y_i \cap X_0$ est donc de codimension 1 dans Y_i (5.1.8); comme X est caténaire et que toutes les composantes irréductibles de $\operatorname{Supp}(M/tM)$ ont par hypothèse même dimension, on en conclut que les Y_i ont tous même dimension, autrement dit X est équidimensionnel, donc *biéquidimensionnel* puisque A est local et caténaire. Pour voir que M vérifie (S_k), appliquons le critère (5.7.4) : il faut vérifier (avec les notations de (5.7.4)) que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\operatorname{codim}(Z_n, X) > n + k$. Or, l'hypothèse sur M/tM et le critère (5.7.4) montrent que l'on a $\operatorname{codim}(Z_n \cap X_0, X_0) > n + k$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Mais toute spécialisation d'un point de Z_n appartient encore à Z_n, comme nous le verrons dans (6.11.5) [1]; comme X est biéquidimensionnel et que t appartient à un système de paramètres pour M (**0**, 16.4.1), donc aussi pour A (l'annulateur de M étant nilpotent en vertu de l'hypothèse $\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Spec}(A)$), la conclusion résulte de (5.12.1).

Remarque (**5.12.3**). — Si, dans l'énoncé de (5.12.2), on suppose seulement que M/tM est équidimensionnel, il n'en résulte pas nécessairement que M soit équidimensionnel. Par exemple, soient k un corps, B l'anneau de polynômes $k[T, U, V]$ à 3 indéterminées, C l'anneau local de B en l'idéal maximal $BT + BU + BV$ de B, et soient $\mathfrak{p} = CU$, $\mathfrak{q} = CV + C(T + U)$; considérons alors l'anneau local $A = C/\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (géométriquement, si X est le sous-préschéma fermé de l'espace affine à 3 dimensions sur k, formé d'un plan et d'une droite coupant ce plan en un point x, A est l'anneau local de X au point x). Soient t, u, v les images canoniques de T, U, V dans A; il est immédiat que t n'est pas diviseur de zéro dans A, et A/tA est isomorphe à $C_0/\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0$, où C_0 est l'anneau local de $B_0 = k[U, V]$ en l'idéal maximal $B_0U + B_0V$, et $\mathfrak{p}_0 = C_0U$, $\mathfrak{q}_0 = C_0U + C_0V$ ($\mathfrak{q}_0$ étant donc l'idéal maximal de C_0). Il est immédiat que $\operatorname{Spec}(A/tA)$

[1] Le lecteur vérifiera que (5.12.2) n'est pas utilisé pour la démonstration de (6.11.5).

est irréductible et de dimension 1, A/tA ne vérifie pas (S_1) et $\operatorname{Spec}(A)$ n'est pas équidimensionnel.

Corollaire **(5.12.4).** — *Soient* A *un anneau local noethérien caténaire, t un élément régulier appartenant à l'idéal maximal de* A, *k un entier* $\geqslant 1$. *Si* A/tA *vérifie* (S_k), *il en est de même de* A.

Si $k=1$, le corollaire résulte de (3.4.4), vu l'interprétation de la condition (S_1) (5.7.5). Si $k\geqslant 2$, il résulte du critère de Hartshorne (5.10.9) que A/tA est équidimensionnel, et on peut appliquer (5.12.2).

Proposition **(5.12.5).** — *Soient* A *un anneau local noethérien caténaire, t un élément régulier de* A *appartenant à l'idéal maximal de* A, *k un entier* $\geqslant 0$. *Si l'anneau* A/tA *est réduit, équidimensionnel et vérifie la propriété* (R_k), *l'anneau* A *possède aussi ces trois propriétés.*

On sait déjà (3.4.6) que A est réduit, et il résulte de (5.12.2), appliqué pour $k=1$, que A est équidimensionnel. Posons $X=\operatorname{Spec}(A)$, $X_0=V(t)=\operatorname{Spec}(A/tA)$, et soit Z l'ensemble des points $x\in X$ où X n'est pas régulier; en vertu de (**0**, 17.3.2) toute spécialisation d'un point de Z appartient à Z. Il résulte d'autre part de (**0**, 17.1.8) que pour tout point $x\in X_0$ où X_0 est régulier, X est aussi régulier, donc l'ensemble Z'_0 des points où X_0 n'est pas régulier contient $Z_0=Z\cap X_0$; l'hypothèse entraîne donc que

$$k\leqslant \operatorname{codim}(Z'_0, X_0)\leqslant \operatorname{codim}(Z_0, X_0).$$

Mais, puisque A est équidimensionnel et caténaire, on a, d'après (5.12.1)

$$\operatorname{codim}(Z_0, X_0)\leqslant \operatorname{codim}(Z, X)$$

ce qui prouve que X vérifie (R_k).

Remarque **(5.12.6).** — Si, dans l'énoncé de (5.12.5), on suppose seulement que A/tA soit réduit et possède la propriété (R_k), il n'en résulte pas nécessairement que A possède la propriété (R_k). Par exemple, soient k un corps, $P(U, V)$ un polynôme irréductible de $k[U, V]$ tel que la courbe Γ définie par l'idéal principal (P) dans le plan affine $\operatorname{Spec}(k[U, V])$ ait un point singulier correspondant à l'idéal maximal $(U)+(V)$ (par exemple $P(U, V)=U(U^2+V^2)+(U^2-V^2)$, qui donne une cubique à point double). Soient alors B l'anneau de polynômes à 4 indéterminées $k[T, U, V, W]$, C l'anneau local de B en l'idéal maximal $BT+BU+BV+BW$, et soient

$$\mathfrak{p}=CW+CP(U-T, V), \qquad \mathfrak{q}=CU.$$

Considérons alors l'anneau local $A=C/\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (géométriquement, si X est le sous-préschéma fermé de l'espace affine à 4 dimensions, formé d'un hyperplan H et d'un « cylindre » L à 2 dimensions ayant pour « base » la courbe Γ et dont la « droite singulière » Y n'est pas contenue dans l'hyperplan H, alors A est l'anneau local de X au point x où Y rencontre H). On voit alors aussitôt que $\operatorname{Spec}(A/tA)$ (où t est l'image canonique de T dans A) a pour seul point singulier x, dont l'anneau local est A/tA lui-même, qui est réduit et de dimension 2; au contraire, le point générique y de la « droite singulière » Y (définie par l'image dans A de l'idéal $C(U-T)+CV+CW$) est un point singulier de X, et $\mathcal{O}_{X,y}$ est de dimension 1; autrement dit, A/tA est réduit et vérifie (R_1), mais A ne vérifie pas (R_1).

Corollaire **(5.12.7)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien caténaire, t un élément régulier de* A *appartenant à l'idéal maximal de* A. *Si* A/tA *est intègre et intégralement clos, il en est de même de* A.

En vertu du critère de Serre (5.8.6) et du fait que l'anneau A est local, il suffit de montrer que Spec(A) vérifie (S_2) et (R_1). Mais l'hypothèse sur A/tA entraîne que A vérifie (R_1) par (5.12.5), et que A vérifie (S_2) par (5.12.4).

Proposition **(5.12.8)** (lemme de Hironaka). — *Soit* A *un anneau local noethérien réduit, équidimensionnel et caténaire. Supposons de plus que pour tout idéal premier minimal* $\mathfrak{q}_i$ *de* A, *l'anneau* $B_i = A/\mathfrak{q}_i$ *soit tel que* $B_i^{(1)}$ (notation de (5.10.17)) *soit une* B_i*-algèbre finie* (ce qui aura lieu par exemple lorsque A possède l'une des propriétés (i), (ii) de (5.11.6)). *Soit t un élément de* A, *non diviseur de zéro dans* A, *et tel que :*

(i) *Le* A*-module* A/tA *n'ait qu'un seul idéal premier associé non immergé* $\mathfrak{p}$ (nécessairement de hauteur 1 en vertu du Hauptidealsatz (**0**, 16.3.2), mais on ne suppose pas que ce soit le seul idéal premier associé à A/tA).

(ii) *L'idéal* $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ *de* $A_{\mathfrak{p}}$ *est engendré par* $t/1$.

(iii) *L'anneau* $A/\mathfrak{p}$ *est intégralement clos.*

Sous ces conditions, l'anneau A *est intègre et intégralement clos, et l'on a* $\mathfrak{p} = tA$.

Si $Z = V(tA)$, l'hypothèse (i) entraîne que Z est une partie fermée irréductible de $X = \mathrm{Spec}(A)$, dont le point générique z est tel que $\mathfrak{j}_z = \mathfrak{p}$. L'hypothèse (ii) montre que l'idéal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ de l'anneau local noethérien $A_{\mathfrak{p}}$ est engendré par un seul élément, donc $A_{\mathfrak{p}}$ est un *anneau de valuation discrète* dont $t/1$ est une uniformisante (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6, prop. 9) ; $A_{\mathfrak{p}}/tA_{\mathfrak{p}}$ est le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$, donc un $A_{\mathfrak{p}}$-module de longueur 1. En vertu de (3.4.2), cela entraîne que Z n'est contenu que dans *une seule* des composantes irréductibles X_i de X; pour toute autre composante irréductible X_j de X, on a par suite $\dim(X_j \cap Z) < \dim(Z)$. D'autre part, comme t n'est pas diviseur de zéro dans A, il n'est contenu dans aucun des $\mathfrak{q}_i$, et l'on a par suite (5.1.8) $\mathrm{codim}(X_i \cap Z, X_i) = \mathrm{codim}(X_j \cap Z, X_j) = 1$, quel que soit $j \neq i$. Comme A est supposé biéquidimensionnel, la relation $\dim(X_i \cap Z) \neq \dim(X_j \cap Z)$ entraînerait donc $\dim(X_i) \neq \dim(X_j)$ (**0**, 14.3.3.1), ce qui est absurde. On voit donc qu'il n'y a qu'*un seul idéal premier minimal* dans A; comme A est par hypothèse réduit, cela entraîne qu'il est *intègre*. Remarquons maintenant que puisque $A^{(1)}$ est une A-algèbre finie, c'est un anneau semi-local noethérien, et tout idéal premier non immergé associé à $A^{(1)}/tA^{(1)}$ est donc de hauteur 1 en vertu du Hauptidealsatz (**0**, 16.3.2); or, pour un tel idéal $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} \cap A$ est de hauteur 1 en vertu de (5.10.17, (iv)) et comme il contient tA, ce ne peut être que $\mathfrak{p}$ en vertu de l'hypothèse (i). D'autre part, $A^{(1)}$ est contenu dans la clôture intégrale A' de A; si l'on pose $S = A - \mathfrak{p}$, la clôture intégrale de $A_{\mathfrak{p}}$ est $S^{-1}A'$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 5, prop. 17), donc $S^{-1}A' = A_{\mathfrak{p}}$ puisque $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète; il en résulte (*loc. cit.*, § 2, n° 1, lemme 1) qu'il n'existe qu'*un seul* idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' au-dessus de $\mathfrak{p}$, et *a fortiori* un seul idéal premier $\mathfrak{p}^{(1)}$ de $A^{(1)}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, et l'on a $A_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}'} = A^{(1)}_{\mathfrak{p}^{(1)}}$. Notons maintenant que $A^{(1)}$ vérifie (S_2) (5.10.17, (i)) et comme t n'est pas diviseur de zéro dans $A^{(1)}$, $A^{(1)}/tA^{(1)}$ n'a pas d'idéaux premiers associés immergés (5.7.7). L'idéal $\mathfrak{p}^{(1)}$ est donc le seul idéal premier associé à $A^{(1)}/tA^{(1)}$, autrement dit, $tA^{(1)}$ est un idéal $\mathfrak{p}^{(1)}$-primaire de $A^{(1)}$; cela veut dire encore que $tA^{(1)}$ est l'image réciproque dans $A^{(1)}$ de $tA^{(1)}_{\mathfrak{p}^{(1)}} = tA_{\mathfrak{p}}$, et ce dernier est l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ d'après (ii); donc $tA^{(1)} = \mathfrak{p}^{(1)}$ est premier dans $A^{(1)}$. D'autre part, $A^{(1)}/\mathfrak{p}^{(1)}$ est fini sur $A/\mathfrak{p}$ et a même corps des fractions (savoir le corps résiduel de $A^{(1)}_{\mathfrak{p}^{(1)}} = A_{\mathfrak{p}}$), donc il est identique à $A/\mathfrak{p}$ en vertu de l'hypothèse (iii). On peut donc écrire $A^{(1)} = A + \mathfrak{p}^{(1)} = A + tA^{(1)}$, et comme t est contenu dans le radical de l'anneau semi-local noethérien $A^{(1)}$, le lemme de Nakayama entraîne $A^{(1)} = A$, d'où $\mathfrak{p}^{(1)} = \mathfrak{p} = tA$. Mais comme A est caténaire et A/tA intègre et intégralement clos en vertu de l'hypothèse (iii), on conclut de (5.12.7) que A est intégralement clos. C.Q.F.D.

Remarque **(5.12.9)**. — La conclusion de (5.12.8) tombe en défaut si l'on ne suppose plus A équidimensionnel. Par exemple, soient k un corps, B l'anneau de polynômes $k[X, Y, Z]$ à trois indéterminées, C l'anneau $B/\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$, où $\mathfrak{r}_1 = BZ$ et $\mathfrak{r}_2 = BX + BY$; soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal $BX + BY + BZ$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ son image dans C, A l'anneau local $C_{\mathfrak{n}}$. Enfin, soit t_0 l'image dans C de l'élément $Y + Z$ de B, t son image dans A (Spec(C) est donc formé d'un plan P et d'une droite D non contenue dans ce plan, $\mathrm{Spec}(C/t_0C)$ d'une droite D' contenue dans P et passant par le point $D \cap P$). L'anneau A est réduit et caténaire (étant quotient d'un anneau régulier) et ses idéaux premiers minimaux $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ sont les images de $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$. Le A-module A/tA n'a qu'un seul idéal premier associé non immergé $\mathfrak{p}$, image de $BY + BZ$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est engendré par $t/1$ et $A/\mathfrak{p}$ isomorphe à $k[X]$; mais A n'est pas intègre.

Corollaire **(5.12.10)**. — *Soit* A *un anneau local intègre noethérien, vérifiant l'une des hypothèses suivantes :*

a) A *est quotient d'un anneau régulier.*

b) A *est universellement caténaire et universellement japonais.*

Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *une suite de n éléments de* A; *posons* $\mathfrak{J} = x_1A + \ldots + x_nA$, *et supposons vérifiées les conditions suivantes :*

(i) *Il n'existe qu'un seul idéal premier non immergé* $\mathfrak{p}$ *associé à* $A/\mathfrak{J}$ *et* $\mathfrak{p}$ *est de hauteur n.*

(ii) *L'idéal maximal* $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ *de* $A_{\mathfrak{p}}$ *est engendré par les* $x_i/1$ (donc $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local *régulier* de dimension n).

(iii) *L'anneau* $A/\mathfrak{p}$ *est intégralement clos.*

Sous ces conditions, pour tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, *l'anneau quotient* $A/(x_1A + \ldots + x_iA)$ *est intégralement clos et de dimension* $\dim(A) - i$. *En particulier,* $\mathfrak{J}$ *est premier, égal à* $\mathfrak{p}$, A *est intégralement clos et* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est une suite* A-*régulière.*

Procédons par récurrence sur n, la proposition étant triviale pour $n = 0$ et se réduisant au lemme de Hironaka (5.12.8) pour $n = 1$. On peut donc supposer $n \geqslant 2$. Soit $\mathfrak{J}' = x_1A + \ldots + x_{n-1}A$, et soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier minimal parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{J}'$; on a $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leqslant n - 1$ (**0**, 16.3.1); montrons que l'on a $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. En effet, si $\mathfrak{p}'$ est minimal parmi les idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{q} + x_nA$, $\mathfrak{p}'/\mathfrak{q}$ est de hauteur 1 dans $A/\mathfrak{q}$ par le Hauptidealsatz (**0**, 16.3.2), donc $\mathfrak{p}'$ est de hauteur $\leqslant n$ puisque A est caténaire (**0**, 16.1.4); mais comme il contient $\mathfrak{J}$, il est nécessairement égal à $\mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, et $\mathfrak{q}$ est induit sur A par un idéal premier de $A_\mathfrak{p}$, minimal parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{J}'A_\mathfrak{p}$. Mais en vertu de l'hypothèse (ii) et de (**0**, 17.1.7), $\mathfrak{J}'A_\mathfrak{p}$ est premier dans $A_\mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{J}'A_\mathfrak{p}$ est l'*unique* idéal premier non immergé associé à $A/\mathfrak{J}'$ et il est de hauteur $n-1$, puisque $\mathfrak{J}'A_\mathfrak{p}$ est de hauteur $n-1$ et $\mathfrak{q}$ de hauteur $\leqslant n-1$. En outre $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}'A_\mathfrak{p}$ et comme $A_\mathfrak{q} = (A_\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}}$, l'idéal maximal $\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}$ est engendré par $\mathfrak{J}'$. On voit donc que la suite $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ vérifie déjà les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. Montrons qu'elle vérifie aussi (iii). Considérons pour cela l'anneau intègre $B = A/\mathfrak{q}$, et soit t l'image canonique de x_n dans B. Il est immédiat (cf. (5.6.3, (iv))) que si A vérifie l'hypothèse *a)* (resp. *b)*), il en est de même de B; comme $x_n \notin \mathfrak{q}$, on a $t \neq 0$; montrons que B et t vérifient les hypothèses du lemme de Hironaka. En effet, un idéal premier $\mathfrak{n}$ de B minimal parmi ceux contenant t est l'image d'un idéal premier de A minimal parmi ceux contenant $\mathfrak{q} + x_n A$, et l'on a vu que $\mathfrak{p}$ est cet unique idéal; comme $B_\mathfrak{n} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{n}B_\mathfrak{n} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$, le fait que $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{J}'A_\mathfrak{p}$ et que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ soit engendré par $\mathfrak{J}$ entraîne que $\mathfrak{n}B_\mathfrak{n}$ est engendré par t. Enfin, $B/\mathfrak{n} = A/\mathfrak{p}$ est intégralement clos. L'application de (5.12.8) prouve donc que $B = A/\mathfrak{q}$ est intégralement clos et que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} + x_n A$. Utilisons maintenant l'hypothèse de récurrence, qui montre que $A/(x_1 A + \ldots + x_i A)$ est intégralement clos et de dimension $\dim(A) - i$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et que $\mathfrak{q} = \mathfrak{J}'$, d'où $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}' + x_n A = \mathfrak{J}$. On en conclut que $A/\mathfrak{J} = A/\mathfrak{p}$ est intégralement clos; comme $\dim(A_\mathfrak{p}) = n$ et que $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A) - \dim(A_\mathfrak{p})$ puisque A est biéquidimensionnel, cela achève la démonstration.

5.13. Propriétés de permanence par passage à la limite inductive.

Dans tout ce numéro, $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ désigne un *système inductif d'anneaux* dont l'ensemble d'indices est préordonné *filtrant*; on pose $A = \varinjlim A_\alpha$ et on désigne par φ_α l'homomorphisme canonique $A_\alpha \to A$.

Proposition (**5.13.1**). — (i) *Pour tout indice* α, *soit* $\mathfrak{a}_\alpha$ *un idéal de* A_α *tel que, pour* $\alpha \leqslant \beta$, *on ait* $\varphi_{\beta\alpha}(\mathfrak{a}_\alpha) \subset \mathfrak{a}_\beta$. *Alors les* $\mathfrak{a}_\alpha$ *forment un système inductif pour les restrictions des* $\varphi_{\beta\alpha}$, $\mathfrak{a} = \varinjlim \mathfrak{a}_\alpha$ *s'identifie canoniquement à un idéal de* A, $A/\mathfrak{a}$ *à* $\varinjlim(A_\alpha/\mathfrak{a}_\alpha)$. *Si de plus on a* $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{a}_\beta)$ *pour* $\alpha \leqslant \beta$, *alors* $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{a})$ *pour tout* α.

(ii) *Inversement, pour tout idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A, *si l'on pose* $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{a})$ *pour tout* α, *les* $\mathfrak{a}_\alpha$ *forment un système inductif tel que* $\mathfrak{a} = \varinjlim \mathfrak{a}_\alpha$.

Il est clair que (ii) est un cas particulier de (i). Dans (i), le fait que $\mathfrak{a}$ s'identifie canoniquement à un idéal de A et $A/\mathfrak{a}$ à $\varinjlim(A_\alpha/\mathfrak{a}_\alpha)$ provient de l'exactitute du foncteur $\varinjlim$ dans la catégorie des groupes abéliens. En outre, $\mathfrak{a}$ est réunion de la famille croissante des $\varphi_\alpha(\mathfrak{a}_\alpha)$, donc, si $x_\alpha \in A_\alpha$ est tel que $\varphi_\alpha(x_\alpha) \in \mathfrak{a}$, il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(y_\beta)$ pour un $y_\beta \in \mathfrak{a}_\beta$, donc $\varphi_\beta(\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = \varphi_\beta(y_\beta)$; mais cela entraîne l'existence d'un $\gamma \geqslant \beta$ tel que $\varphi_{\gamma\beta}(\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = \varphi_{\gamma\beta}(y_\beta)$, et par suite $\varphi_{\gamma\alpha}(x_\alpha) \in \mathfrak{a}_\gamma$, d'où $x_\alpha \in \mathfrak{a}_\alpha$ si l'on a $\mathfrak{a}_\alpha = \varphi_{\gamma\alpha}^{-1}(\mathfrak{a}_\gamma)$.

Corollaire (**5.13.2**). — *Si* $\mathfrak{N}_\alpha$ *est le nilradical de* A_α, *le nilradical de* A *s'identifie à* $\varinjlim \mathfrak{N}_\alpha$, *et* A_{red} *à* $\varinjlim (A_\alpha)_{\mathrm{red}}$. *En particulier, si les* A_α *sont réduits, il en est de même de* A.

Il est clair en effet que $\varphi_{\beta\alpha}(\mathfrak{N}_\alpha) \subset \mathfrak{N}_\beta$ pour $\alpha \leqslant \beta$, et que $\varinjlim \mathfrak{N}_\alpha$ est un idéal nilpotent de A, donc contenu dans le nilradical $\mathfrak{N}$ de A. Inversement, si $x \in \mathfrak{N}$, on a $x^h = 0$ pour un entier h; on peut écrire $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$ pour un indice α et un $x_\alpha \in A_\alpha$; la relation $\varphi_\alpha(x_\alpha^h) = 0$ entraîne l'existence d'un $\beta \geqslant \alpha$ tel que $\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha^h) = 0$, ou encore $x_\beta^h = 0$ en posant $x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$; par suite $x_\beta \in \mathfrak{N}_\beta$ et comme $x = \varphi_\beta(x_\beta)$ cela achève de prouver le corollaire, compte tenu de (5.13.1).

Proposition **(5.13.3)**. — (i) *Pour tout indice* α, *soit* $\mathfrak{p}_\alpha$ *un idéal premier de* A_α *tel que, pour* $\alpha \leqslant \beta$, *on ait* $\varphi_{\beta\alpha}(\mathfrak{p}_\alpha) \subset \mathfrak{p}_\beta$. *Alors* $\mathfrak{p} = \varinjlim \mathfrak{p}_\alpha$ *est un idéal premier de* A. *En particulier, si les* A_α *sont intègres il en est de même de* A.

(ii) *Si de plus on a* $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{p}_\beta)$ *pour* $\alpha \leqslant \beta$, *alors* $A_\mathfrak{p}$ *s'identifie canoniquement à* $\varinjlim (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$.

(iii) *Si* A *est un anneau local,* $\mathfrak{p}$ *son idéal maximal, et si les homomorphismes* φ_α *sont injectifs, alors, en posant* $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$, *on a* $A = \varinjlim (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$ *et les homomorphismes* $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha} \to A$ *sont injectifs.*

Les deux assertions de (i) sont en fait équivalentes, puisque $A/\mathfrak{p} = \varinjlim (A_\alpha/\mathfrak{p}_\alpha)$. Supposons donc tous les A_α intègres, et soient x, y deux éléments de A tels que $xy = 0$. Il existe donc un indice α tel que $x = \varphi_\alpha(x_\alpha)$, $y = \varphi_\alpha(y_\alpha)$ avec x_α, y_α dans A_α, et $\varphi_\alpha(x_\alpha y_\alpha) = 0$; mais cela entraîne l'existence d'un indice $\beta \geqslant \alpha$ tel que, si l'on pose $x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$, $y_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(y_\alpha)$, on ait $x_\beta y_\beta = 0$; comme A_β est intègre, on a $x_\beta = 0$ ou $y_\beta = 0$ et comme $x = \varphi_\beta(x_\beta)$ et $y = \varphi_\beta(y_\beta)$, cela achève de montrer que A est intègre.

Prouvons maintenant (ii). L'hypothèse entraîne que les $A_\alpha - \mathfrak{p}_\alpha$ forment un système inductif de parties multiplicatives des A_α, dont $A - \mathfrak{p}$ est la limite inductive; par suite les anneaux locaux $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$ forment un système inductif (où les homomorphismes de transition sont *locaux*), et les homomorphismes canoniques $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha} \to A_\mathfrak{p}$ un système inductif d'homomorphismes, dont la limite inductive $\psi : \varinjlim ((A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}) \to A_\mathfrak{p}$ est un homomorphisme surjectif. Reste à voir que ψ est injectif. Or, si $x_\alpha \in A_\alpha$ et $s_\alpha \in A_\alpha - \mathfrak{p}_\alpha$ sont tels que $\varphi_\alpha(x_\alpha)/\varphi_\alpha(s_\alpha) = 0$ dans $A_\mathfrak{p}$, il existe $s' \in A - \mathfrak{p}$ tel que $s'\varphi_\alpha(x_\alpha) = 0$, et, en remplaçant au besoin α par un indice plus grand, on peut supposer que $s' = \varphi_\alpha(s'_\alpha)$ avec $s'_\alpha \in A_\alpha - \mathfrak{p}_\alpha$, d'où $\varphi_\alpha(s'_\alpha x_\alpha) = 0$; il y a donc un $\beta \geqslant \alpha$ tel que $\varphi_{\beta\alpha}(s'_\alpha x_\alpha) = 0$ dans A_β, ce qui entraîne $\varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)/\varphi_{\beta\alpha}(s_\alpha) = 0$ dans $(A_\beta)_{\mathfrak{p}_\beta}$, et prouve donc que l'image canonique de x_α/s_α dans $\varinjlim ((A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha})$ est nulle.

Enfin, la première assertion de (iii) résulte de (ii) et de ce que $A_\mathfrak{p} = A$. En outre, les éléments de $A_\alpha - \mathfrak{p}_\alpha$ sont inversibles dans A, donc on a aussi $A_{\mathfrak{p}_\alpha} = A$, et le fait que $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha} \to A$ soit injectif se déduit par platitude de l'hypothèse que φ_α est injectif.

Corollaire **(5.13.4)**. — *Supposons que les* A_α *soient tous intègres, et que les* $\varphi_{\beta\alpha}$ *soient injectives. Alors, si* A'_α *est la clôture intégrale de* A_α, $A' = \varinjlim A'_\alpha$ *est la clôture intégrale de* A. *En particulier, si* A_α *est intégralement clos pour tout* α, *il en est de même de* A. *Si les* A_α *sont des anneaux locaux unibranches* (resp. *géométriquement unibranches*) (**0**, 23.2.1) *et les* $\varphi_{\beta\alpha}$ *des homomorphismes locaux injectifs,* A *est unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*).

Si K_α est le corps des fractions de A_α, il résulte de (5.13.3, (ii)) appliqué aux $\mathfrak{p}_\alpha = 0$, que $K = \varinjlim K_\alpha$ est le corps des fractions de A, et $A' = \varinjlim A'_\alpha$ s'identifie à un sous-anneau de K, évidemment entier sur A. Inversement, soit $z \in K$ un élément vérifiant une équation de dépendance intégrale $z^n + \sum_{i=1}^{n} c_i z^{n-i} = 0$, où les $c_i \in A$. Il existe un indice α, un $z_\alpha \in K_\alpha$ et des $c_{i\alpha} \in A_\alpha$ tels que z (resp. les c_i) soient les images de z_α (resp. des $c_{i\alpha}$), donc on a $z_\alpha \in A'_\alpha$, ce qui prouve que $z \in A'$. Il en résulte aussitôt que si les A_α sont intégralement clos, il en est de même de A. Si les A_α sont locaux et les $\varphi_{\beta\alpha}$ des homomorphismes locaux, on sait ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 10.3.1.3) que A est un anneau local et que si k_α est le corps résiduel de A_α, $k = \varinjlim k_\alpha$ est celui de A; si les A'_α sont locaux, A′ est donc local et A est unibranche; si de plus le corps résiduel k'_α de A'_α est une extension radicielle de k_α pour tout α, $k' = \varinjlim k'_\alpha$, qui est le corps résiduel de A′, est une extension radicielle de k, et A est donc géométriquement unibranche.

(5.13.5) Nous dirons qu'un anneau A est *normal* si Spec(A) est un schéma *normal*, autrement dit si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $A_\mathfrak{p}$ est *intègre et intégralement clos.* On notera que cela entraîne que A est *réduit* et que $\mathfrak{p}$ ne peut contenir qu'*un seul* idéal premier minimal $\mathfrak{q}$ de A, autrement dit $\mathfrak{p}$ n'appartient qu'à *une seule* composante irréductible de Spec(A); en outre $\mathfrak{q}$ est l'image réciproque de (0) par l'homomorphisme canonique $A \to A_\mathfrak{p}$, et $A_\mathfrak{p}$ est donc isomorphe à $(A/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$, ce qui prouve que l'anneau intègre $A/\mathfrak{q}$ est *intégralement clos* comme intersection d'anneaux intégralement clos (**I**, 8.2.1.1). Si A est *noethérien* et *normal*, A est composé direct d'un nombre fini d'anneaux intègres et intégralement clos (**I**, 5.1.4).

Corollaire **(5.13.6)**. — *Supposons que les* A_β *soient normaux et que pour* $\alpha \leqslant \beta$, *toute composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(A_\beta)$ *domine une composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(A_\alpha)$. *Alors* $A = \varinjlim A_\alpha$ *est normal.*

En effet, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et posons, pour tout α, $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$. Par hypothèse, pour tout α, $\mathfrak{p}_\alpha$ contient un seul idéal minimal $\mathfrak{q}_\alpha$ de A_α, et pour $\alpha \leqslant \beta$, $\varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{q}_\beta)$ est un idéal minimal de A_α contenu dans $\mathfrak{p}_\alpha$, donc égal à $\mathfrak{q}_\alpha$. Si l'on pose $B_\alpha = A_\alpha/\mathfrak{q}_\alpha$, les anneaux intègres B_α forment donc un système inductif pour les homomorphismes $\varphi'_{\beta\alpha} : B_\alpha \to B_\beta$ déduits des $\varphi_{\beta\alpha}$ par passage aux quotients, et qui sont injectifs par définition; en outre les anneaux B_α sont intégralement clos, donc il en est de même de $B = \varinjlim B_\alpha$ (5.13.4). Si l'on pose $\mathfrak{p}'_\alpha = \mathfrak{p}_\alpha/\mathfrak{q}_\alpha$, on a de plus $(B_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha} = (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$; comme $\varinjlim (B_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha} = \varinjlim (A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha} = A_\mathfrak{p}$ est un anneau local en un idéal premier de B (5.13.3), c'est un anneau intègre et intégralement clos, ce qui démontre le corollaire.

Proposition **(5.13.7)**. — *Supposons que les* A_α *soient réguliers et que, pour* $\alpha \leqslant \beta$, $\varphi_{\beta\alpha}$ *fasse de* A_β *un* A_α*-module plat; supposons en outre que* $A = \varinjlim A_\alpha$ *soit noethérien. Alors* A *est régulier.*

Par définition, il suffit de prouver que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'anneau local noethérien $A_\mathfrak{p}$ est régulier; or, si $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$, on a $\mathfrak{p} = \varinjlim \mathfrak{p}_\alpha$ et $A_\mathfrak{p} = \lim((A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha})$ par (5.13.3); comme par hypothèse les $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$ sont réguliers et que $(A_\beta)_{\mathfrak{p}_\beta}$ est un $(A_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$-module plat pour $\alpha \leqslant \beta$ ($\mathbf{0}_\text{I}$, 6.3.2), on voit qu'on est ramené au cas où les A_α et A sont en outre des anneaux *locaux*. Pour prouver que A est régulier, il suffit alors de montrer que si M, N sont deux A-modules de type fini, il existe i_0 tel que, pour $i \geqslant i_0$, on ait $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})=0$ (**0**, 17.3.1 et 17.2.6). Mais on a le lemme suivant (où les A_α sont de nouveau quelconques) :

Lemme (**5.13.7.1**). — *Pour tout* A*-module* M *de présentation finie, il existe un indice* α *et un* A_α*-module de présentation finie* M_α *tel que* M *soit isomorphe à* $\mathrm{M}_\alpha \otimes_{\mathrm{A}_\alpha} \mathrm{A}$.

En effet, on peut supposer que $\mathrm{M}=\mathrm{A}^r/\mathrm{P}$, où P est un sous-A-module de type fini de A^r. Comme $\mathrm{A}^r=\varinjlim(\mathrm{A}_\alpha^r)$ et que P est de type fini, il existe un α et un sous-A_α-module de type fini P_α de A_α^r tel que P soit l'image canonique de $\mathrm{P}_\alpha \otimes_{\mathrm{A}_\alpha} \mathrm{A}$; l'exactitude à droite du produit tensoriel montre donc que M est isomorphe à $(\mathrm{A}_\alpha^r/\mathrm{P}_\alpha)\otimes_{\mathrm{A}_\alpha}\mathrm{A}$.

Ce lemme étant établi, M et N sont de présentation finie, puisque A est noethérien; écrivons donc $\mathrm{M}=\mathrm{M}_\alpha\otimes_{\mathrm{A}_\alpha}\mathrm{A}$, $\mathrm{N}=\mathrm{N}_\alpha\otimes_{\mathrm{A}_\alpha}\mathrm{A}$; en vertu de l'hypothèse, A est un A_α-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.2), donc on a $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N})=\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}_\alpha}(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{N}_\alpha)\otimes_{\mathrm{A}_\alpha}\mathrm{A}$ à un isomorphisme près (**III**, 6.3.9); comme par hypothèse A_α est régulier, il existe i_0 tel que $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}_\alpha}(\mathrm{M}_\alpha, \mathrm{N}_\alpha)=0$ pour $i \geqslant i_0$. C.Q.F.D.

Corollaire (**5.13.8**). — *Supposons que les* A_α *soient noethériens et vérifient la propriété* (R_k) *pour un entier* $k \geqslant 0$. *Supposons en outre que pour* $\alpha \leqslant \beta$, $\varphi_{\beta\alpha}$ *fasse de* A_β *un* A_α*-module plat, que* $\mathrm{A}=\varinjlim \mathrm{A}_\alpha$ *soit noethérien et que, pour tout* α, ${}^a\varphi_\alpha$ *soit un homéomorphisme de* Spec(A) *sur* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_\alpha)$. *Alors* A *vérifie* (R_k).

Soit en effet $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et, pour tout α, posons $\mathfrak{p}_\alpha=\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$, de sorte que $\mathfrak{p}=\varinjlim \mathfrak{p}_\alpha$ et $\mathrm{A}_\mathfrak{p}=\varinjlim(\mathrm{A}_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$ (5.13.3). Il résulte de (**I**, 2.4.2) et de l'hypothèse que le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Spec}((\mathrm{A}_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha})$ est un homéomorphisme surjectif pour tout α; on a donc $\dim(\mathrm{A}_\mathfrak{p})=\dim((\mathrm{A}_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha})$ pour tout α. Supposons alors que $\dim(\mathrm{A}_\mathfrak{p})\leqslant k$; on a donc $\dim((\mathrm{A}_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha})\leqslant k$, et l'hypothèse entraîne que $(\mathrm{A}_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$ est un anneau régulier; comme en outre, pour $\alpha\leqslant\beta$, $(\mathrm{A}_\beta)_{\mathfrak{p}_\beta}$ est un $(\mathrm{A}_\alpha)_{\mathfrak{p}_\alpha}$-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.2), on conclut de (5.13.7) que $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ est régulier, ce qui démontre le corollaire.

§ 6. MORPHISMES PLATS DE PRÉSCHÉMAS LOCALEMENT NOETHÉRIENS

Soient X, Y deux préschémas localement noethériens, $f: \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ un morphisme. Pour tout $y\in\mathrm{Y}$, la fibre $f^{-1}(y)=\mathrm{X}\times_{\mathrm{Y}}\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ est aussi un préschéma localement noethérien, car il suffit de le voir lorsque $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ sont des spectres d'anneaux noethériens, et alors $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\boldsymbol{k}(y)$ est anneau de fractions de l'anneau quotient $\mathrm{B}/\mathfrak{j}_y\mathrm{B}$, donc est noethérien. Nous nous proposons en premier lieu dans ce paragraphe de mettre en relation les propriétés de X, de Y et des fibres $f^{-1}(y)$ (où y parcourt Y), sous l'hypothèse que le morphisme f est *plat*. Les questions traitées se ramèneront à l'étude des relations entre les anneaux locaux noethériens $\mathcal{O}_y$, $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_x\otimes_{\mathcal{O}_y}\boldsymbol{k}(y)$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_y\to\mathcal{O}_x$ étant local et faisant de $\mathcal{O}_x$ un $\mathcal{O}_y$-module plat. Dans les n^os 6.11 à 6.13 (assez séparés du reste du paragraphe, de par leur nature « absolue » plutôt que « relative »), nous appliquons certains des résultats précédents pour trouver des critères permettant d'affirmer que le *lieu singulier* (ou certains ensembles analogues) de certains préschémas sont des ensembles fermés; ces critères joueront un rôle important au § 7.

6.1. Platitude et dimension.

Proposition (**6.1.1**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, $k = A/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel,* $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local. On suppose que pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *distinct de* $\mathfrak{m}$, *et pour tout élément minimal* $\mathfrak{q}$ *de l'ensemble des idéaux premiers de* B *contenant* $\mathfrak{p}B$, $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ *soit distinct de* $\mathfrak{m}$ (autrement dit, qu'aucune composante irréductible de $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{p}B)$ ne soit contenue dans l'image réciproque du point fermé $\mathfrak{m}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ dans $\mathrm{Spec}(B)$). *Alors on a*

(6.1.1.1) $$\dim(B) = \dim(A) + \dim(B \otimes_A k).$$

Raisonnons par récurrence sur $n = \dim(A)$; l'assertion est triviale pour $n = 0$, $\mathfrak{m}B$ étant alors contenu dans le nilradical de B puisque $\mathfrak{m}$ est le nilradical de A. On peut donc supposer $n > 0$. Soient $\mathfrak{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ les idéaux premiers minimaux de B, et soit $\mathfrak{p}_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_i)$; pour tout i, on a $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{m}$; sinon il existerait (puisque $n > 0$) un idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ contenu dans $\mathfrak{p}_i$ et comme $\mathfrak{q}_i$ est minimal parmi les idéaux premiers de B contenant $\mathfrak{p}B$, on aboutirait à une contradiction avec l'hypothèse. Par suite $\mathfrak{m}$ est distinct de la réunion des $\mathfrak{p}_i$ et des idéaux minimaux $\mathfrak{p}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ de A (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 1, n° 1, prop. 2) et il existe un $a \in \mathfrak{m}$ n'appartenant à aucun des $\mathfrak{p}_i$ ni des $\mathfrak{p}'_j$. Posons $A' = A/aA$, $B' = B/aB$; on a (**0**, 16.3.4)

$$\dim(A') = \dim(A) - 1, \quad \dim(B') = \dim(B) - 1$$

par construction de a, et d'autre part $B' \otimes_{A'} k = B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}B$, donc

$$\dim(B' \otimes_{A'} k) = \dim(B \otimes_A k)$$

et il suffit par suite de démontrer (6.1.1.1) pour A' et B'; or, en vertu de la correspondance biunivoque entre idéaux de A (resp. B) contenant a et idéaux de A' (resp. B'), les hypothèses de l'énoncé sont aussi valables pour A' et B'; on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**6.1.2**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de* A, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local,* $M \neq 0$ *un* A-*module de type fini,* $N \neq 0$ *un* B-*module de type fini. Si* N *est un* A-*module plat* (resp. *si* B *est un* A-*module plat*), *on a*

(6.1.2.1) $$\dim_B(M \otimes_A N) = \dim_A(M) + \dim_{B \otimes_A k}(N \otimes_A k)$$

(resp. (6.1.1.1)).

Il suffit de prouver l'assertion concernant N; d'autre part, si $\mathfrak{b}$ est l'annulateur de N, on peut remplacer B par $B/\mathfrak{b}$, et par suite supposer que $\mathrm{Supp}(N) = \mathrm{Spec}(B)$; l'hypothèse signifie alors que le morphisme $f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ correspondant à φ est *quasi-plat* (2.3.3); on en conclut (2.3.4) que pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ de A, toute composante irréductible de $f^{-1}(V(\mathfrak{p}))$ *domine* $V(\mathfrak{p})$, et par suite la condition de (6.1.1) est satisfaite, d'où la conclusion.

Corollaire **(6.1.3)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, *k son corps résiduel,* $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local. Supposons que* $\dim(B \otimes_A k) = 0$ (c'est-à-dire (**0**, 16.2.1) que $\mathfrak{m}B$ soit un *idéal de définition* de B). *Alors on a* $\dim(B) \leqslant \dim(A)$. *Si en outre il existe un* B*-module de type fini* N *qui soit un* A*-module plat et ait un support égal à* Spec(B) (ce qui a lieu en particulier si B est un A-module *plat*), *on a* $\dim(B) = \dim(A)$.

La première assertion résulte de (5.5.1) et la seconde de (6.1.2).

Corollaire **(6.1.4)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f : X \to Y$ *un morphisme surjectif. Pour toute partie fermée* Z *de* Y, *on a alors*

$$\text{(6.1.4.1)} \qquad \operatorname{codim}(f^{-1}(Z), X) \leqslant \operatorname{codim}(Z, Y)$$

En outre, si f est quasi-plat (2.3.3) *les deux membres de* (6.1.4.1) *sont égaux.*

En effet, si y est un point maximal de Z et x un point maximal de la fibre $f^{-1}(y)$, on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) \leqslant \dim(\mathcal{O}_{Y,y})$ en vertu de (5.5.2); l'inégalité (6.1.4.1) résulte alors de (5.1.2.1) et de (5.1.3.1) et du fait que f est surjectif. Si en outre f est quasi-plat, on sait (2.3.4) que toute composante irréductible de $f^{-1}(Z)$ domine une composante irréductible de Z; les points maximaux de $f^{-1}(Z)$ sont donc les points maximaux des fibres $f^{-1}(y)$, où y parcourt l'ensemble des points maximaux de Z ($\mathbf{0}_{\text{I}}$, 2.1.8), et en chacun de ces points maximaux x on a $\dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(x)) = 0$; comme en outre $\mathcal{O}_x$ est un $\mathcal{O}_y$-module plat, on a $\dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y)$ en vertu de (6.1.1), d'où l'égalité dans (6.1.4.1), compte tenu de ce que f est surjectif.

La proposition (6.1.1) admet la réciproque partielle suivante :

Proposition **(6.1.5)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de* A, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local,* M *un* B*-module de type fini. On suppose que :*

1° A *est un anneau régulier.*

2° M *est un* B*-module de Cohen-Macaulay.*

3° *On a* $\dim_B(M) = \dim(A) + \dim_{B \otimes_A k}(M \otimes_A k)$.

Alors M *est un* A*-module plat.*

Procédons par récurrence sur $n = \dim(A)$. Si $n = 0$, A est un corps puisqu'il est régulier (**0**, 17.1.4) et l'assertion est triviale. Supposons $n > 0$; soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, et soit $x \in \mathfrak{m}$ un élément n'appartenant pas à $\mathfrak{m}^2$; on sait alors (**0**, 17.1.8) que $A' = A/xA$ est régulier et $\dim(A') = \dim(A) - 1$. Posons

$$B' = B/xB, \qquad M' = M/xM = M \otimes_A A';$$

on a donc

$$B' \otimes_{A'} k = B \otimes_A k, \qquad M' \otimes_{A'} k = M \otimes_A k$$

et en vertu de (5.5.1.2) on a

$$\dim_{B'}(M') \leqslant \dim(A') + \dim_{B' \otimes_{A'} k}(M' \otimes_A k);$$

on conclut donc de (**0**, 16.3.4) que l'on a

$$\dim_B(M) \leqslant \dim_{B'}(M') + 1 \leqslant (\dim(A') + \dim_{B\otimes_A k}(M\otimes_A k)) + 1 = \dim(A) + \dim_{B\otimes_A k}(M\otimes_A k).$$

Comme par hypothèse les membres extrêmes de ces inégalités sont égaux, on a nécessairement : (i) $\dim_{B'}(M') = \dim_B(M) - 1$, et comme M est par hypothèse un B-module de Cohen-Macaulay, cela signifie que x est M-*régulier* (**0**, 16.1.9 et 16.5.5); (ii) $\dim_{B'}(M') = \dim(A') + \dim_{B'\otimes_{A'}k}(M'\otimes_{A'}k)$; comme M' est un B'-module de Cohen-Macaulay en vertu de (i) et de (**0**, 16.1.9 et 16.5.5) et que A' est régulier, l'hypothèse de récurrence prouve que M' est un A'-module plat; on déduit alors de ($\mathbf{0}_{\rm III}$, 10.2.7) que M est un A-module plat, puisque x est M-régulier par (i).

6.2. Platitude et dimension projective.

Proposition (**6.2.1**). — (i) *Soient* A, B *deux anneaux*, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme tel que* B *soit un* A-*module plat. Alors, pour tout* A-*module* M, *on a*

(**6.2.1.1**) $$\dim.\mathrm{proj}_B(M\otimes_A B) \leqslant \dim.\mathrm{proj}_A(M).$$

(ii) *Supposons en outre que* A *soit un anneau noethérien*, B *un* A-*module fidèlement plat et* M *un* A-*module de type fini; alors*

(**6.2.1.2**) $$\dim.\mathrm{proj}_B(M\otimes_A B) = \dim.\mathrm{proj}_A(M).$$

(i) On peut se borner au cas où $n = \dim.\mathrm{proj}_A(M)$ est finie; il existe donc une résolution gauche

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

de M par des A-modules projectifs; comme B est un A-module plat, la suite

$$0 \to P_n\otimes_A B \to P_{n-1}\otimes_A B \to \ldots \to P_0\otimes_A B \to M\otimes_A B \to 0$$

est exacte; d'autre part les $P_i\otimes_A B$ sont des B-modules projectifs; d'où la conclusion.

(ii) Supposons que $\dim.\mathrm{proj}_B(M\otimes_A B) = m$, et considérons une suite exacte

$$0 \to R \to P_{m-1} \to P_{m-2} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

où les P_i $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ sont des A-modules projectifs de type fini; comme A est noethérien, R est aussi un A-module de type fini. Comme B est un A-module plat, on a aussi une suite exacte

$$0 \to R\otimes_A B \to P_{m-1}\otimes_A B \to \ldots \to P_0\otimes_A B \to M\otimes_A B \to 0$$

et l'hypothèse sur $M\otimes_A B$ entraîne que $R\otimes_A B$ est un B-module projectif (**0**, 17.2.1). Comme B est un A-module fidèlement plat, on en conclut que R est un A-module projectif (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. I^er^, § 3, n^o^ 6, prop. 12); donc $\dim.\mathrm{proj}_A(M) \leqslant m$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire (**6.2.2**). — *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme plat de préschémas*, $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_Y$-*Module quasi-cohérent. Si* $\dim.\mathrm{proj}(\mathscr{E}) \leqslant n$ (**0**, 17.2.14), *on a* $\dim.\mathrm{proj}(f^*(\mathscr{E})) \leqslant n$.

Proposition (**6.2.3**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de* A, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local,* N *un* B-*module de type fini. On suppose que* B *et* N *sont des* A-*modules plats. Alors on a*

(**6.2.3.1**) $$\dim.\mathrm{proj}_B(N) = \dim.\mathrm{proj}_{B\otimes_A k}(N\otimes_A k).$$

Considérons en effet une résolution gauche de N par des B-modules libres de type fini

$$\ldots \to L_i \to L_{i-1} \to \ldots \to L_0 \to N \to 0$$

Comme les L_i et N sont des A-modules *plats* (B étant un A-module plat) il résulte de (2.1.10) que les $Z_i(L_\bullet)$ sont des A-modules *plats*, que $L_\bullet \otimes_A k$ est une résolution gauche du $(B\otimes_A k)$-module $N\otimes_A k$ et que l'on a $Z_i(L_\bullet \otimes_A k) = Z_i(L_\bullet)\otimes_A k$ pour tout i. Notons que puisque B est noethérien, les $Z_i(L_\bullet)$ sont des B-modules de type fini, donc les $Z_i(L_\bullet\otimes_A k)$ sont des $(B\otimes_A k)$-modules de type fini. Or, dire qu'un B-module (resp. un $(B\otimes_A k)$-module) de type fini est plat équivaut à dire qu'il est *libre* ou encore *projectif* ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.1.3). Comme les $Z_i(L_\bullet)$ sont des A-modules plats, il résulte d'autre part de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 10.2.5) (où l'on fait $C = B$) que, pour que $Z_i(L_\bullet)$ soit un B-module plat, il faut et il suffit que $Z_i(L_\bullet\otimes_A k) = Z_i(L)\otimes_A k$ soit un $(B\otimes_A k)$-module plat. Le plus petit entier n tel que $Z_{n-1}(L_\bullet)$ soit un B-module libre est donc aussi le plus petit entier tel que $Z_{n-1}(L_\bullet\otimes_A k)$ soit un $(B\otimes_A k)$-module libre, ce qui démontre la proposition (**0**, 17.2.1).

6.3. Platitude et profondeur.

Proposition (**6.3.1**). — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de* A, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local,* M *un* A-*module de type fini,* N *un* B-*module de type fini. Si* N *est un* A-*module plat* $\neq 0$, *on a*

(**6.3.1.1**) $$\mathrm{prof}_B(M\otimes_A N) = \mathrm{prof}_A(M) + \mathrm{prof}_{B\otimes_A k}(N\otimes_A k).$$

On peut se borner au cas où $M \neq 0$, sans quoi les deux membres de (6.3.1.1) sont tous deux égaux à $+\infty$. Nous procéderons par récurrence sur l'entier n égal au second membre de (6.3.1.1) (qui est fini en vertu des hypothèses, de (**0**, 16.4.6.2) et du lemme de Nakayama appliqué à N). Supposons d'abord $n = 0$; alors, si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ désignent les idéaux maximaux de A et B respectivement, $\mathfrak{m}$ est un idéal premier associé à M et $\mathfrak{n}/\mathfrak{m}B$ un idéal premier de $B/\mathfrak{m}B = B\otimes_A k$ associé à $N\otimes_A k$ (**0**, 16.4.6, (i)). On conclut alors de (3.3.1) que $\mathfrak{n}$ est un idéal premier de B associé à $M\otimes_A N$, donc (**0**, 16.4.6, (i)) que $\mathrm{prof}_B(M\otimes_A N) = 0$. Supposons donc $n > 0$, et distinguons deux cas :

a) Supposons $\mathrm{prof}_A(M) > 0$. Soit $x \in \mathfrak{m}$ un élément M-régulier, et posons

$$A' = A/xA, \qquad B' = B/xB, \qquad M' = M/xM, \qquad N' = N/xN;$$

on a

$$B'\otimes_{A'} k = B\otimes_A k, \qquad N'\otimes_{A'} k = N\otimes_A k$$

puisque $x \in \mathfrak{m}$, et

$$M'\otimes_{A'} N' = (M\otimes_A N)/x(M\otimes_A N);$$

en outre, comme N est un A-module plat, l'hypothèse que x est M-régulier entraîne que x est aussi $(M\otimes_A N)$-régulier ($\mathbf{0}_I$, 6.1.1). On a par suite ($\mathbf{0}$, 16.4.6, (ii) et 16.4.8)

$$\mathrm{prof}_{A'}(M')=\mathrm{prof}_A(M)-1, \qquad \mathrm{prof}_{B'}(M'\otimes_{A'}N')=\mathrm{prof}_B(M\otimes_A N)-1$$

et

$$\mathrm{prof}_{B'\otimes_{A'}k}(N'\otimes_{A'}k)=\mathrm{prof}_{B\otimes_A k}(N\otimes_A k).$$

L'égalité (6.3.1.1) est donc conséquence de la même relation pour A', B', M' et N'; mais comme N est un A-module plat, $N'=N\otimes_A A'$ est un A'-module plat ($\mathbf{0}_I$, 6.2.1); on peut par suite appliquer l'hypothèse de récurrence, ce qui démontre (6.3.1.1) dans ce cas.

b) Supposons $\mathrm{prof}_{B\otimes_A k}(N\otimes_A k)>0$. Considérons un élément $y\in\mathfrak{m}$ qui soit $(N\otimes_A k)$-régulier; il résulte de ($\mathbf{0}_{III}$, 10.2.4) que y est alors N-régulier et que

$$N'=N/yN$$

est un A-module *plat*, puisque N est supposé être un A-module plat. Appliquant ($\mathbf{0}_I$, 6.1.2) à la suite exacte de A-modules

$$0\to N\xrightarrow{y}N\to N'\to 0$$

on en conclut des isomorphismes

$$(M\otimes_A N)/y(M\otimes_A N)\xrightarrow{\sim}M\otimes_A N' \qquad \text{et} \qquad N'\otimes_A k\xrightarrow{\sim}(N\otimes_A k)/y(N\otimes_A k)$$

et en outre que y est $(M\otimes_A N)$-régulier. On a par suite

$$\mathrm{prof}_{B\otimes_A k}(N'\otimes_A k)=\mathrm{prof}_{B\otimes_A k}(N\otimes_A k)-1$$

et

$$\mathrm{prof}_B(M\otimes_A N')=\mathrm{prof}_B(M\otimes_A N)-1;$$

l'hypothèse de récurrence montre que la relation (6.3.1.1) est valable pour A, B, M et N', et d'après ce qui précède, on en déduit (6.3.1.1) pour A, B, M et N.

Corollaire **(6.3.2)**. — *Sous les hypothèses de* (6.3.1), *supposons en outre* $M\neq 0$ *et* $N\neq 0$; *alors on a*

(6.3.2.1) $$\mathrm{coprof}_B(M\otimes_A N)=\mathrm{coprof}_A(M)+\mathrm{coprof}_{B\otimes_A k}(N\otimes_A k).$$

Cela résulte aussitôt de (6.3.1.1) et (6.1.2) et de la définition de la coprofondeur ($\mathbf{0}$, 16.4.9).

Corollaire **(6.3.3)**. — *Sous les hypothèses de* (6.3.1), *supposons en outre* $M\neq 0$ *et* $N\neq 0$; *pour que* $M\otimes_A N$ *soit un* B-*module de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que* M *soit un* A-*module de Cohen-Macaulay et que* $N\otimes_A k$ *soit un* $(B\otimes_A k)$-*module de Cohen-Macaulay.*

Cela résulte du corollaire (6.3.2) et de la définition des modules de Cohen-Macaulay par le fait que leur coprofondeur est nulle ($\mathbf{0}$, 16.5.1), tenant compte de ce que la condition $N\neq 0$ est équivalente à $N\otimes_A k\neq 0$ en vertu du lemme de Nakayama.

Corollaire **(6.3.4)**. — *Sous les hypothèses de* (6.3.1), *supposons en outre que* $N\otimes_A k$ *soit un* B-*module de longueur finie; alors on a*

(6.3.4.1) $$\mathrm{prof}_B(M\otimes_A N)=\mathrm{prof}_A(M).$$

Si de plus $M \neq 0$ *et* $N \neq 0$, *on a*

(**6**.**3**.**4**.**2**) $$\mathrm{coprof}_B(M \otimes_A N) = \mathrm{coprof}_A(M).$$

Il revient en effet au même de dire que $N \otimes_A k$ est un B-module de longueur finie ou un $(B \otimes_A k)$-module de longueur finie, et l'on sait (**0**, 16.2.3) que les modules de longueur finie $\neq 0$ sont de dimension 0 et de profondeur 0.

Le corollaire (6.3.4) sera applicable en particulier lorsque $B \otimes_A k$ est un anneau de longueur finie, c'est-à-dire lorsque $\mathfrak{m}B$ est un *idéal de définition* de l'anneau B.

Corollaire (**6**.**3**.**5**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens*, $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme plat.*

(i) *Si, en un point* $x \in X$, *on a* $\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_x) \leqslant n$, *alors, en posant* $y = f(x)$, *on a* $\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_y) \leqslant n$ *et* $\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)) \leqslant n$*; en particulier, si* $\mathcal{O}_x$ *est un anneau de Cohen-Macaulay, il en est de même de* $\mathcal{O}_y$ *et de* $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)$.

(ii) *Supposons inversement que* $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)$ *soit un anneau de Cohen-Macaulay. Alors, si* $\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_y) \leqslant n$ (resp. *si* $\mathcal{O}_y$ *est un anneau de Cohen-Macaulay*), *on a* $\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_x) \leqslant n$ (resp. $\mathcal{O}_x$ *est un anneau de Cohen-Macaulay*).

Il suffit d'appliquer (6.3.2) pour $M = A = \mathcal{O}_y$ et $N = B = \mathcal{O}_x$

Corollaire (**6**.**3**.**6**). — *Soit* A *un anneau de Cohen-Macaulay. Alors* $A' = A[T_1, \ldots, T_n]$ (T_i *indéterminées*) *est un anneau de Cohen-Macaulay.*

En effet, si l'on pose $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A')$ et si $f : X \rightarrow Y$ est le morphisme canonique, f est *plat* (puisque A′ est un A-module libre (2.1.2)) et pour tout $y \in Y$, $\boldsymbol{k}(y)[T_1, \ldots, T_n]$ est un anneau régulier (**0**, 17.3.7), donc *a fortiori* de Cohen-Macaulay ; il suffit donc d'appliquer (6.3.5).

Corollaire (**6**.**3**.**7**). — *Tout quotient d'un anneau de Cohen-Macaulay est universellement caténaire.*

Cela résulte de (6.3.6), de (5.6.1) et de (**0**, 16.5.12).

Proposition (**6**.**3**.**8**). — *Soit* A *un anneau local noethérien; supposons qu'il existe un* A-*module* M *de type fini qui soit un* A-*module de Cohen-Macaulay et dont le support soit égal à* Spec(A). *Soit* B *un anneau quotient de* A, *et soit* $f : \mathrm{Spec}(\hat{B}) \rightarrow \mathrm{Spec}(B)$ *le morphisme canonique ; alors, pour tout* $x \in \mathrm{Spec}(B)$, $f^{-1}(x)$ *est un schéma de Cohen-Macaulay.*

Comme B est un A-module de type fini, on a $\hat{B} = B \otimes_A \hat{A}$ ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.3), donc f est la restriction à $\mathrm{Spec}(\hat{B})$ du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$, et les fibres de ces deux morphismes en un point de Spec(B) sont donc les mêmes. On est par suite ramené à démontrer la proposition lorsque $B = A$. Soit donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_x$ un idéal premier de A; comme par hypothèse $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$, on sait (**0**, 16.5.6 et 16.5.9) qu'il existe une suite M-régulière $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ d'éléments de $\mathfrak{p}$ telle que $N = M/(\sum_{i=1}^{r} t_i M)$ soit un A-module de Cohen-Macaulay, $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé *minimal* de N et $\dim(N) = \dim(M/\mathfrak{p}M) = \dim(A/\mathfrak{p})$. Le même raisonnement qu'au début montre que l'on peut remplacer M par N et A par $A/(\sum_{i=1}^{r} t_i A)$, et par suite supposer que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier *minimal* de A. Posons pour simplifier $A' = \hat{A}$, $M' = \hat{M} = M \otimes_A A'$ ($\mathbf{0}_I$, 7.3.3); on sait ($\mathbf{0}$, 16.5.2) que M′ est un A′-module de Cohen-Macaulay, ce qui entraîne que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A′, $M'_{\mathfrak{p}'}$ est un $A'_{\mathfrak{p}'}$-module de Cohen-Macaulay ($\mathbf{0}$, 16.5.10). Compte tenu de (**I**, 3.6.5), on voit que si l'on pose $A'' = A' \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ et $M'' = M' \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$, M″ est un A″-module de Cohen-Macaulay. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}''$ de A″ au-dessus de $\mathfrak{p}$, $M''_{\mathfrak{p}''} = M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A''_{\mathfrak{p}''}$ est donc un $A''_{\mathfrak{p}''}$-module de Cohen-Macaulay ($\mathbf{0}$, 16.5.10); d'autre part, $M_{\mathfrak{p}}$ est par hypothèse un $A_{\mathfrak{p}}$-module de Cohen-Macaulay et $A''_{\mathfrak{p}''}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module *plat* puisque A′ est un A-module plat ($\mathbf{0}_I$, 7.3.3 et 6.3.2). On conclut de (6.3.3) que, si k est le corps résiduel de $A_{\mathfrak{p}}$, $k \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A''_{\mathfrak{p}''}$ est un anneau de Cohen-Macaulay. Mais puisque $A_{\mathfrak{p}}$ est de dimension 0, les idéaux premiers de A″ correspondent biunivoquement à ceux de $k \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A''$ (**I**, 3.5.7), et si $\mathfrak{q}''$ est l'idéal premier de $k \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A''$ correspondant à $\mathfrak{p}''$, les anneaux locaux $(k \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A'')_{\mathfrak{q}''}$ et $k \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A''_{\mathfrak{p}''}$ sont isomorphes. Par suite ($\mathbf{0}$, 16.5.13), l'anneau $k \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} A''$ est un anneau de Cohen-Macaulay. C.Q.F.D.

6.4. Platitude et propriété (S_k).

Proposition **(6.4.1)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens*, $f : X \to Y$ *un morphisme*, $\mathscr{E}$ *un* $\mathscr{O}_Y$*-Module cohérent*, $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent et f-plat.*

(i) *Soit* $x \in \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *tel que* $\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F}$ *ait la propriété* (S_k) *au point* x*; alors* $\mathscr{E}$ *a la propriété* (S_k) *au point* $y = f(x)$.

(ii) *Supposons que pour tout* $y \in f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$, $\mathscr{F}_y = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \boldsymbol{k}(y)$ *ait la propriété* (S_k)*; alors, si pour un point* $y \in f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F}))$, $\mathscr{E}$ *a la propriété* (S_k) *au point* y, $\mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F}$ *a la propriété* (S_k) *en tout point de* $f^{-1}(y)$.

(i) On sait ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 30) qu'il existe un sous-préschéma fermé X′ de X ayant pour espace sous-jacent $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ et un $\mathscr{O}_{X'}$-Module cohérent $\mathscr{F}'$ tels que $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{F}')$, où j est l'injection canonique $X' \to X$; on peut remplacer X par X′ et $\mathscr{F}$ par $\mathscr{F}'$, autrement dit supposer que $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) = X$. Soit alors y' une générisation de y dans Y; on sait (2.3.4) qu'il y a une générisation x' de x dans X telle que $y' = f(x')$; on peut en outre supposer que x' est point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(y')$; on a par suite $\dim(\mathscr{F}_{x'} \otimes_{\mathscr{O}_{y'}} \boldsymbol{k}(y')) = 0$. En vertu de (6.1.2), on a donc, en posant $\mathscr{G} = \mathscr{E} \otimes_Y \mathscr{F}$,

$$\dim(\mathscr{G}_{x'}) = \dim(\mathscr{E}_{y'})$$

et en vertu de (6.3.1)

$$\mathrm{prof}(\mathscr{G}_{x'}) = \mathrm{prof}(\mathscr{E}_{y'})$$

compte tenu de ce que la profondeur est toujours au plus égale à la dimension. Par hypothèse, on a

$$\mathrm{prof}(\mathscr{G}_{x'}) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{G}_{x'}))$$

donc

$$\mathrm{prof}(\mathscr{E}_{y'}) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{E}_{y'}))$$

ce qui démontre la première assertion.

(ii) Comme pour toute générisation x' de $x \in f^{-1}(y)$, $y' = f(x')$ est une générisation de y, on peut se borner à vérifier que si $x \in \mathrm{Supp}(\mathscr{G})$ et $f(x) = y$, on a $\mathrm{prof}(\mathscr{G}_x) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{G}_x))$; il résulte de (6.1.2) et (6.3.1) que l'on a

$$\dim(\mathscr{G}_x) = \dim(\mathscr{E}_y) + \dim(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y))$$

$$\mathrm{prof}(\mathscr{G}_x) = \mathrm{prof}(\mathscr{E}_y) + \mathrm{prof}(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)).$$

Par hypothèse, on a

$$\mathrm{prof}(\mathscr{E}_y) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{E}_y))$$

$$\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)))$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$\mathrm{prof}(\mathscr{G}_x) \geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{E}_y)) + \inf(k, \dim(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y))) \geqslant$$
$$\geqslant \inf(k, \dim(\mathscr{E}_y) + \dim(\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y))) = \inf(k, \dim(\mathscr{G}_x))$$

ce qui prouve (ii).

Corollaire **(6.4.2)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f : X \rightarrow Y$ *un morphisme plat,* $\mathscr{E}$ *un* $\mathcal{O}_Y$*-Module cohérent. Supposons que pour tout* $y \in Y$, *le préschéma* $f^{-1}(y)$ *possède la propriété* (S_k). *Alors, pour que* $f^*(\mathscr{E})$ *vérifie* (S_k) *en un point* x, *il faut et il suffit que* $\mathscr{E}$ *possède la propriété* (S_k) *au point* $f(x)$.

Remarque **(6.4.3)**. — Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local, M un B-module de type fini qui soit un A-module plat, et supposons en outre que le A-module A et le $(B \otimes_A k)$-module $M \otimes_A k$ possèdent la propriété (S_n) ; peut-on alors conclure que le B-module M possède la propriété (S_n) ? Nous l'ignorons même lorsque $n = 1$, $M = B$ et $B = \hat{A}$, autrement dit nous ignorons si en général le *complété* d'un anneau local noethérien vérifiant (S_n) vérifie lui aussi (S_n), même pour $n = 1$. Posant $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, il suffirait, en vertu de (6.4.1, (ii)), de montrer que pour *tout* $y \in Y$, $\mathscr{F}_y$ possède la propriété (S_n) (et non seulement lorsque y est le point fermé de Y) ; il suffirait aussi de montrer que l'ensemble U des $x \in X$ tels que $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{f(x)}} \boldsymbol{k}(f(x))$ vérifie (S_k) est *ouvert* dans X (puisqu'il contient le point fermé de X par hypothèse). Nous démontrerons plus loin (12.1.4) que U est ouvert quand B est un anneau local d'une A-algèbre de type fini et $M = B$. D'autre part, pour $B = \hat{A}$ et $M = B$, nous avons vu dans (6.3.8) que les préschémas $f^{-1}(y)$ sont des préschémas de Cohen-Macaulay (autrement dit vérifient (S_n) pour *tout* n) lorsque l'on suppose que A est quotient d'un anneau local de Cohen-Macaulay. On en conclut que lorsque A est un quotient d'un anneau local de Cohen-Macaulay (ou plus généralement d'un anneau local vérifiant les hypothèses de (6.3.8)), *pour que* A *vérifie* (S_n), *il faut et il suffit que son complété* $\hat{A}$ *vérifie* (S_n). Il resterait à voir si cette propriété subsiste sans restriction sur A.

6.5. Platitude et propriété (R_k).

Proposition **(6.5.1)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de* A, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local, pour lequel* B *est un* A*-module plat. Alors :*

(i) *Si* B *est régulier,* A *est régulier.*

(ii) *Si* A *et* $B \otimes_A k$ *sont réguliers,* B *est régulier.*

Cette proposition est donnée pour mémoire, ayant déjà été démontrée dans (**0**, 17.3.3).

Corollaire **(6.5.2)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens* $f : X \to Y$ *un morphisme plat.*

(i) *Si* X *est régulier en un point x,* Y *est régulier au point $f(x)$.*

(ii) *Si pour un $y \in f(X)$,* Y *est régulier au point y et si $f^{-1}(y)$ est un préschéma régulier en un point x, alors* X *est régulier au point x.*

Proposition **(6.5.3)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f : X \to Y$ *un morphisme plat.*

(i) *Si* X *possède la propriété* (R_k) *en un point x* (resp. *si* X *possède la propriété* (R_k)), Y *possède la propriété* (R_k) *au point $f(x)$* (resp. Y *possède la propriété* (R_k) *en tous les points de* $f(X)$).

(ii) *Supposons que pour tout $y \in f(X)$, le préschéma $f^{-1}(y)$ possède la propriété* (R_k); *alors, si pour un point $y \in f(X)$,* Y *possède la propriété* (R_k) *au point y,* X *possède la propriété* (R_k) *en tout point de $f^{-1}(y)$.*

(i) Posons $y = f(x)$ et soit y' une générisation de y; comme dans la démonstration de (6.4.1), il y a un point générique x' d'une composante irréductible de $f^{-1}(y')$ qui est une générisation de x; donc on a $\dim(\mathcal{O}_{x'} \otimes_{\mathcal{O}_{y'}} \boldsymbol{k}(y')) = 0$ et en vertu de l'hypothèse et de (6.1.2), $\dim(\mathcal{O}_{x'}) = \dim(\mathcal{O}_{y'})$. L'hypothèse entraîne, soit que $\dim(\mathcal{O}_{x'}) > k$, auquel cas $\dim(\mathcal{O}_{y'}) > k$, soit que $\mathcal{O}_{x'}$ est un anneau régulier, et alors $\mathcal{O}_{y'}$ est un anneau régulier en vertu de (6.5.1).

(ii) Comme, pour toute générisation x' de $x \in f^{-1}(y)$, $y' = f(x')$ est une générisation de y, on peut se borner à vérifier que si $\dim(\mathcal{O}_x) \leqslant k$, alors $\mathcal{O}_x$ est un anneau régulier. Or, on a, en vertu de (6.1.2)

$$\dim(\mathcal{O}_x) = \dim(\mathcal{O}_y) + \dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y))$$

donc si $\dim(\mathcal{O}_x) \leqslant k$, on a *a fortiori* $\dim(\mathcal{O}_y) \leqslant k$ et $\dim(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)) \leqslant k$ et l'hypothèse entraîne que $\mathcal{O}_y$ et $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)$ sont des anneaux réguliers. On conclut alors de (6.5.1) que $\mathcal{O}_x$ est un anneau régulier.

Corollaire **(6.5.4)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f : X \to Y$ *un morphisme plat.*

(i) *Si* X *est normal en un point x,* Y *est normal au point $f(x)$.*

(ii) *Si, pour tout $y \in f(X)$, $f^{-1}(y)$ est un préschéma normal et si* Y *est normal en un point $y \in f(X)$, alors* X *est un préschéma normal en tout point de $f^{-1}(y)$.*

Cela résulte aussitôt du critère de normalité de Serre (5.8.6) et de (6.4.1) appliqué pour $k = 2$ et (6.5.3) appliqué pour $k = 1$.

Remarques **(6.5.5).** — (i) Soient A, B deux anneaux locaux noethériens, $\varphi : A \to B$ un homomorphisme local tel que B soit un A-module *plat*. Soit k le corps résiduel de A, et supposons que les deux anneaux A et $B \otimes_A k$ vérifient la propriété (R_i) (5.8.2); alors *il ne s'ensuit pas nécessairement* que B vérifie (R_i), même dans le cas particulier où $i=0$ ou $i=1$ et où B est le *complété* $\hat{A}$ de A. Nagata a en effet donné un exemple où A est *normal* (donc vérifie (R_1)) mais où $\hat{A}$ n'est même pas réduit (donc ne vérifie pas (R_0)) [30]. On ne peut appliquer à ce cas la proposition (6.5.3) parce que les fibres $f^{-1}(y)$ ne vérifient pas nécessairement la propriété (R_i) aux points distincts du point fermé de $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Nous montrerons toutefois plus loin (7.8.3, (v)) que de tels phénomènes ne se présentent pas pour les anneaux locaux noethériens que l'on rencontre le plus souvent dans les applications.

(ii) La propriété pour un préschéma d'être *intègre* ne se comporte pas du tout comme les propriétés que nous venons d'examiner dans ce numéro et les précédents : il peut se faire que $f : X \to Y$ soit un morphisme plat de type fini, que toutes les fibres $f^{-1}(y)$ soient régulières (et même géométriquement régulières (6.7.6)) et que Y soit intègre sans que X soit même localement intègre. Par exemple, soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, et soit A l'anneau intègre $k[U, V]/(UV - (U+V)^3)$ (dont le spectre est donc une « cubique à point double »); A n'est pas intégralement clos, et si u, v sont les images canoniques de U, V dans A, la clôture intégrale de A est l'anneau $C = A[t]$, avec $t = (u-v)/(u+v)$, qui vérifie l'équation $t^2 = 1 + u + v$, d'où l'on tire $u = \frac{1}{2}(t^3 + t^2 - t)$, $v = \frac{1}{2}(-t^3 + t^2 + t)$ et par suite $C = k[t]$, isomorphe à l'anneau de polynômes à une indéterminée sur k. Si $\mathfrak{m} = Au + Av$, idéal maximal de A (correspondant au « point double » de la cubique), il y a deux idéaux maximaux $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ de C, engendrés respectivement par $t-1$ et $t+1$. Soit alors B le sous-anneau du produit $C \times C$ formé des couples de polynômes (f, g) tels que $f(1) = g(-1)$ et $f(-1) = g(1)$ (Spec(B) est le schéma obtenu en « recollant » deux exemplaires de Spec(C), le point $\mathfrak{n}_1$ (resp. $\mathfrak{n}_2$) de l'un des deux exemplaires étant « recollé » au point $\mathfrak{n}_2$ (resp. $\mathfrak{n}_1$) de l'autre; cf. chap. V, où cette opération sera discutée de façon générale). Il y a donc deux idéaux maximaux $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ de B au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. En outre, comme le processus de « recollement » permute à la localisation et à la complétion, on vérifie aisément que les homomorphismes canoniques $\hat{A}_{\mathfrak{m}} \to \hat{B}_{\mathfrak{r}_1}$ et $\hat{A}_{\mathfrak{m}} \to \hat{B}_{\mathfrak{r}_2}$ sont bijectifs, et par suite (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 5, prop. 10) $B_{\mathfrak{r}_1}$ et $B_{\mathfrak{r}_2}$ sont des $A_{\mathfrak{m}}$-modules plats, ayant d'ailleurs même corps résiduel que $A_{\mathfrak{m}}$. Pour tout autre idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A, il est immédiat qu'il y a deux idéaux maximaux $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ de B au-dessus de $\mathfrak{p}$, et que les homomorphismes $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}_1}$ et $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}_2}$ sont bijectifs. On voit ainsi que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est plat et fini, et que toutes ses fibres sont géométriquement régulières (il est même *étale*, comme nous le verrons plus tard (17.6.3)); cependant il est immédiat que B n'est pas intègre.

6.6. Propriétés de transitivité.

Proposition (**6.6.1**). — *Pour un préschéma localement noethérien* Z, *désignons par* $\mathbf{P}(Z)$ *l'une quelconque des propriétés suivantes :*

a) Z *est un préschéma de Cohen-Macaulay.*

b) Z *vérifie* (S_n).

c) Z *est régulier.*

d) Z *vérifie* (R_n).

e) Z *est normal.*

f) Z *est réduit.*

Soient alors X, Y, Z *trois préschémas localement noethériens,* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes.*

(i) *Supposons que f et g soient plats et que pour tout* $y \in f(X)$ (resp. *tout* $z \in g(Y)$), *le préschéma* $f^{-1}(y)$ (resp. $g^{-1}(z)$) *vérifie* $\mathbf{P}$. *Alors* $h = g \circ f$ *est plat et pour tout* $z \in h(X)$, $h^{-1}(z)$ *vérifie* $\mathbf{P}$.

(ii) *Supposons vérifiées les conditions suivantes : f est fidèlement plat,* $h = g \circ f$ *est plat, pour tout* $y \in Y$, *le préschéma* $f^{-1}(y)$ *vérifie* $\mathbf{P}$, *et pour tout* $z \in h(X)$ *le préschéma* $h^{-1}(z)$ *vérifie* $\mathbf{P}$. *Alors g est plat, et pour tout* $z \in g(Y)$, $g^{-1}(z)$ *vérifie* $\mathbf{P}$.

(i) On sait déjà (2.1.6) que h est plat; d'autre part, pour tout $z \in Z$, $f_z = f \otimes 1_{\mathbf{k}(z)} : h^{-1}(z) \to g^{-1}(z)$ est plat (2.1.4), et pour tout $y \in g^{-1}(z)$, $f_z^{-1}(y)$ est isomorphe à $f^{-1}(y)$ par transitivité des fibres (**I**, 3.6.4). La conclusion résulte alors respectivement de (6.3.5, (ii)), (6.4.2), (6.5.2, (ii)), (6.5.3, (ii)), (6.5.4, (ii)) et (3.3.5, (ii)).

(ii) On sait déjà que g est plat (2.2.13); en outre, pour tout $z \in Z$, f_z est fidèlement plat (2.2.13). La conclusion résulte alors respectivement de (6.3.5, (i)), (6.4.2), (6.5.2, (i)), (6.5.3, (i)), (6.5.4, (ii)) et (2.1.13).

Remarque (**6.6.2**). — Supposons h plat, f fidèlement plat, et supposons que pour tout $z \in Z$, $h^{-1}(z)$ soit *de coprofondeur* $\leqslant n$ (5.7.1); alors il résulte du raisonnement de (6.6.1, (ii)) et de (6.3.2) que $g^{-1}(z)$ est *de coprofondeur* $\leqslant n$ pour tout $z \in g(Y)$ et que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est *de coprofondeur* $\leqslant n$.

6.7. Application aux changements de base dans les préschémas algébriques.

Proposition (**6.7.1**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Soit k' une extension de k; posons* $X' = X \otimes_k k'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_k k'$ *et soit* $p : X' \to X$ *la projection canonique. On suppose, soit que* X *est localement de type fini sur k, soit que k' est une extension de type fini de k, de sorte que dans les deux cas* X' *est localement noethérien. Soient x' un point de* X', $x = p(x')$. *Alors :*

(i) *On a* $\operatorname{coprof}(\mathscr{F}_x) = \operatorname{coprof}(\mathscr{F}'_{x'})$; *en particulier, pour que* $\mathscr{F}_x$ *soit un* $\mathcal{O}_x$*-module de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que* $\mathscr{F}'_{x'}$ *soit un* $\mathcal{O}_{x'}$*-module de Cohen-Macaulay.*

(ii) *Pour que* $\mathscr{F}$ *vérifie la propriété* (S_n) *au point x, il faut et il suffit que* $\mathscr{F}'$ *vérifie* (S_n) *au point x'.*

On sait que p est fidèlement plat (2.2.13); les deux assertions sont donc conséquences respectives de (6.3.2) et (6.4.2), pourvu que l'on prouve que $p^{-1}(x)=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(x)\otimes_k k')$ est un *préschéma de Cohen-Macaulay*; comme l'un des deux corps $\boldsymbol{k}(x)$, k' est une extension de type fini de k par hypothèse on est ramené à prouver le

Lemme **(6.7.1.1).** — *Soient* K, L *deux extensions d'un corps* k, *dont l'une est de type fini (de sorte que l'anneau* $\mathrm{K}\otimes_k\mathrm{L}$ *est noethérien). Alors* $\mathrm{K}\otimes_k\mathrm{L}$ *est un anneau de Cohen-Macaulay.*

Supposons par exemple que L soit une extension de type fini de k, de sorte que L est extension finie d'une extension pure $k(\mathbf{t})$ de k ($\mathbf{t}$ étant un système $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ d'indéterminées). Si on pose $\mathrm{A}=\mathrm{K}\otimes_k k(\mathbf{t})$, $\mathrm{B}=\mathrm{K}\otimes_k\mathrm{L}$, B est un A-module plat ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.2.1) et de type fini; le morphisme $h:\mathrm{Spec}(\mathrm{B})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ est donc fini, et comme tout préschéma artinien est de Cohen-Macaulay, pour prouver que B est un anneau de Cohen-Macaulay, il suffit de prouver que A est un anneau de Cohen-Macaulay (6.3.5). Or, si S est l'ensemble des éléments $\neq 0$ de $k[\mathbf{t}]$, on a $\mathrm{A}=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}'$, où $\mathrm{A}'=\mathrm{K}\otimes_k k[\mathbf{t}]=\mathrm{K}[\mathbf{t}]$; en vertu de (**0**, 16.5.13), il suffit de prouver que A′ est un anneau de Cohen-Macaulay; mais cela résulte de ce que A′ est *régulier* (**0**, 17.3.7).

Corollaire **(6.7.2).** — *Pour que* $\mathscr{O}_x$ *soit un anneau de Cohen-Macaulay* (resp. *pour que* X *vérifie* (S_n) *au point* x), *il faut et il suffit que* $\mathscr{O}'_{x'}$ *soit un anneau de Cohen-Macaulay* (resp. *que* X′ *vérifie* (S_n) *au point* x').

Corollaire **(6.7.3).** — *Soient* X, Y *deux* k-*préschémas localement noethériens, l'un au moins étant localement de type fini sur* k. *Soit* $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-*Module cohérent* (resp. *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$-*Module cohérent*). *Si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *vérifient la propriété* (S_n), *il en est de même de* $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}$.

L'hypothèse entraîne que $\mathrm{X}\times_k\mathrm{Y}$ est localement noethérien; notons $p:\mathrm{X}\times_k\mathrm{Y}\rightarrow\mathrm{X}$ et $q:\mathrm{X}\times_k\mathrm{Y}\rightarrow\mathrm{Y}$ les projections canoniques, qui sont des morphismes plats. Supposons par exemple que X soit localement de type fini sur k; on peut écrire $\mathscr{F}\otimes_k\mathscr{G}=p^*(\mathscr{F})\otimes_k\mathscr{G}$ et puisque $\mathscr{F}$ est plat relativement au morphisme structural $\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Spec}(k)$, $p^*(\mathscr{F})$ est q-plat (2.1.4). Appliquons le critère (6.4.1, (ii)) au morphisme q; il suffit de voir que pour tout $y\in\mathrm{Y}$, $p^*(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}\boldsymbol{k}(y)$ a la propriété (S_n); mais $p^*(\mathscr{F})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}}\boldsymbol{k}(y)=\mathscr{F}\otimes_k\boldsymbol{k}(y)$, et comme X est localement de type fini sur k, la conclusion résulte de (6.7.1, (ii)).

Proposition **(6.7.4).** — *Pour un préschéma localement noethérien* Z, *et un point* $z\in\mathrm{Z}$, *soit* $\boldsymbol{P}(\mathrm{Z}, z)$ *l'une des propriétés suivantes :*

a) Z *est régulier au point* z.

b) Z *vérifie* (R_n) *au point* z.

c) Z *est normal au point* z.

d) Z *est réduit au point* z.

Cela étant, sous les hypothèses et avec les notations de (6.7.1), *si* $\boldsymbol{P}(\mathrm{X}', x')$ *est vraie, il en est de même de* $\boldsymbol{P}(\mathrm{X}, x)$. *La réciproque est vraie si* k' *est une extension séparable de* k.

Le cas où $\boldsymbol{P}$ est la propriété *d)* n'a été mis que pour mémoire, ayant déjà été traité (2.1.13 et 4.6.1). Le même raisonnement qu'au début de (6.7.1) montre que la première assertion résulte respectivement de (6.5.2, (i)), (6.5.3, (i)) et (6.5.4, (i)); de même, la seconde assertion résultera de (6.5.2, (ii)), (6.5.3, (ii)) et (6.5.4, (ii)) pourvu que l'on prouve que $p^{-1}(x)$ est un *préschéma régulier*; autrement dit, on est ramené à prouver le

Lemme **(6.7.4.1)**. — *Soient* K, L *deux extensions d'un corps k, dont l'une est de type fini. Si* L *est une extension séparable de k, l'anneau* $K \otimes_k L$ *est régulier.*

Distinguons deux cas :

A) L est une extension *de type fini* de k. Alors, avec les notations de (6.7.1.1), on peut supposer que L est une extension *finie séparable* de $k(\mathbf{t})$. Pour tout $s \in \operatorname{Spec}(A)$, $\boldsymbol{k}(s) \otimes_{k(\mathbf{t})} L$ est alors composé direct d'un nombre fini de corps, extensions finies séparables de $\boldsymbol{k}(s)$, donc un anneau *régulier*; il résulte alors de (6.5.2, (ii)) qu'il suffit de prouver que l'anneau A est régulier; comme $A = S^{-1}A'$, il suffit de prouver que A' est régulier (**0**, 17.3.6), mais on a vu qu'il en était bien ainsi dans la démonstration de (6.7.1.1).

B) Soit (L_λ) la famille filtrante des sous-extensions de L qui sont de type fini sur k; en vertu de A), chacun des anneaux $C_\lambda = K \otimes_k L_\lambda$ est régulier; d'autre part, pour $L_\lambda \subset L_\mu$, L_μ est un L_λ-module plat, donc C_μ est un C_λ-module plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.2.1). Comme $C = K \otimes_k L = \varinjlim (K \otimes_k L_\lambda)$ est noethérien, on peut appliquer (5.13.7), et C est donc régulier.

Remarques **(6.7.5)**. — (i) Dans la démonstration du fait que $\boldsymbol{P}(X, x)$ entraîne $\boldsymbol{P}(X', x')$, on ne peut se dispenser de l'hypothèse que k' est une extension *séparable* de k. On l'a déjà vu (4.6.1) lorsque $\boldsymbol{P}$ est la propriété *d)*; mais même lorsque X est *géométriquement intègre* (4.6.2), il peut se faire que X soit *régulier* sans que X' soit *normal*.

Prenons par exemple pour X une courbe algébrique normale sur k (**II**, 7.4.2); les anneaux locaux de X étant intégralement clos et de dimension 1 sont des anneaux de valuation discrète, donc réguliers (**II**, 7.1.6), et X est donc un k-schéma régulier (et *a fortiori* vérifie (R_n) pour tout $n \geqslant 0$). Dire que X est géométriquement intègre signifie alors que le corps K des fonctions rationnelles sur X est une extension séparable et primaire de k (4.6.3). Or, prenons pour k un corps non parfait de caractéristique $p > 2$, et soit $a \in k$ un élément n'appartenant pas à k^p. Soit B l'anneau de polynômes $k[S, T]$ en deux indéterminées S, T; le polynôme $P(S, T) = T^2 - S^p + a$ est irréductible dans B, car on vérifie aussitôt que $S^p - a$ n'est pas un carré dans l'anneau $k[S]$; donc $X = \operatorname{Spec}(A)$, où $A = B/PB$, est une courbe affine irréductible sur k. Pour voir que le schéma X est régulier, il suffit de montrer qu'il est *normal* (**II**, 7.4.5); or $A = k[S][t]$, où t est une racine du polynôme P considéré comme polynôme en T sur $k[S]$, de sorte que le corps $K = R(X)$ des fonctions rationnelles sur X est le corps des fractions $k(S)[T]/(P)$ de A, extension quadratique de $k(S)$, donc *séparable* sur $k(S)$, et *a fortiori* sur k. Comme 2 est inversible dans k, on vérifie aussitôt que A est la fermeture intégrale de $k[S]$ dans K, donc est intégralement clos, ce qui montre que X est *régulier*. Par ailleurs, si un élément $f + tg$ de K (avec f, g dans $k(S)$) est algébrique sur k, il en est de même de sa norme et de sa trace sur $k(S)$, et comme $k(S)$ est une extension pure de k, on en conclut aisément que l'on doit avoir $f \in k$ et $g = 0$, autrement dit k est *algébriquement fermé* dans K, et *a fortiori* K est une extension *primaire* de k (4.3.1). Cependant, si $k'=k(a^{1/p})$, $X'=X\otimes_k k'$ n'est pas normal, car dans $k'[S]$ on peut écrire $S^p-a=(S-a^{1/p})^p$, et X' est donc isomorphe à $\mathrm{Spec}(A')$, où $A'=k'[S][t']$, t' étant racine du polynôme T^2-S^p. Or, A' n'est pas intégralement clos, car l'élément $t''=t'/S$ du corps des fractions $K'=k'(S)[t']$ de A' vérifie l'équation de dépendance intégrale $t''^2-S^{p-2}=0$ sur A' et n'appartient pas à A'. Dans la théorie classique, cela s'exprime en disant que le « *genre* » sur k' du corps des fonctions rationnelles K' de X' est *strictement inférieur* à celui de K sur k.

(ii) Comme on l'a rappelé dans (i), il résulte de (4.6.1) que lorsque X est un préschéma algébrique sur k qui n'est pas géométriquement réduit, il y a des extensions radicielles finies k' de k telles que $X'=X\otimes_k k'$ soit non réduit. Il est intéressant de donner un exemple de ce fait où X est un schéma *régulier* sur k, tel que k soit *algébriquement fermé* dans le corps K des fonctions rationnelles de X. Soient k un corps de caractéristique $p>0$, dans lequel il existe deux éléments a, b formant une famille p-libre sur k^p. Désignant encore par B l'anneau $k[S, T]$, considérons cette fois le polynôme $P(S, T)=T^p-aS^p-b$; comme aS^p+b n'est pas une puissance p-ème dans $k(S)$, P est irréductible comme polynôme de $k(S)[T]$, et le schéma $X_0=\mathrm{Spec}(B/PB)$ est donc une courbe affine *intègre* sur k, dont le corps des fonctions rationnelles est $K=k(S)[t]$, où t est une racine de P; montrons que k est *algébriquement fermé* dans K. Supposons en effet que K contienne un élément z algébrique sur k et non dans k; on aurait alors aussi $z\notin k(S)$, donc $[k(S)[z] : k(S)]>1$; comme $[K : k(S)]=p$, on aurait $K=k(S)[z]$, et comme K est radiciel sur $k(S)$, on aurait $z^p\in k(S)$, donc $c=z^p\in k$ puisque z est algébrique sur k; mais on aurait $t^p=aS^p+b\in k^p(S^p)(c)$ donc a et b appartiendraient à $k^p(c)$, ce qui est absurde. Soit alors X la *normalisée* de la courbe X_0 dans K, qui est donc une courbe normale (et par suite *régulière*) sur k. Si $k'=k(a^{1/p}, b^{1/p})$, il est clair que aS^p+b est une puissance p-ème dans $k'(S)$, donc $K\otimes_k k'$ *n'est pas réduit*, ni *a fortiori* le schéma $X\otimes_k k'$.

Définition **(6.7.6)**. — *Soient k un corps, X un k-préschéma localement noethérien. On dit que X est* géométriquement régulier en un point x (resp. possède la propriété (R_n) géométrique en un point x, resp. est géométriquement normal en un point x) *si, pour toute extension finie k' de k, $X'=X_{(k')}=X\otimes_k k'$ est régulier* (resp. *possède la propriété* (R_n), resp. *est normal*) *en tout point x' dont la projection dans X est x. On dit que X est géométriquement régulier* (resp. *possède la propriété* (R_n) *géométrique* (ou encore *est géométriquement régulier en codimension* $\leqslant n$), resp. *est géométriquement normal*) *si X est géométriquement régulier* (resp. *possède la propriété* (R_n) *géométrique*, resp. *est géométriquement normal*) *en tout point.*

On dit qu'une algèbre A sur k est un *anneau géométriquement régulier* (resp. *géométriquement normal*, resp. *géométriquement réduit*, resp. *possédant la propriété* (R_n) *géométrique*) si $\mathrm{Spec}(A)$ a la même propriété.

Si $X=\mathrm{Spec}(K)$, où K est une extension de k, il revient au même de dire que X est *géométriquement régulier*, ou *géométriquement normal*, ou *géométriquement réduit*, ou que K est une extension *séparable* de k : cela résulte de (4.6.1) et du fait que si K est une extension séparable de k et k' une extension finie de k, $K\otimes_k k'$ est composé direct d'un nombre fini de corps (Bourbaki, *Alg.*, chap. VIII, § 7, nº 3, cor. 1 du th. 1).

Proposition **(6.7.7).** — *Soient k un corps, X un k-préschéma localement noethérien, x un point de X; désignons par $\boldsymbol{Q}(k')$ la relation « k' est une extension de k, et $\boldsymbol{P}(X_{(k')}, x')$ est vraie pour tout point x' de $X_{(k')}$ dont x est la projection dans X », où $\boldsymbol{P}(Z, z)$ est une des propriétés* a), b), c) *de l'énoncé* (6.7.4). *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *$\boldsymbol{Q}(k')$ est vraie pour toute extension finie k' de k.*

b) *$\boldsymbol{Q}(k')$ est vraie pour toute extension finie radicielle k' de k.*

c) *$\boldsymbol{Q}(k')$ est vraie pour toute extension de type fini k' de k.*

Supposons en outre que X soit localement de type fini sur k; alors les trois propriétés précédentes sont aussi équivalentes aux suivantes :

d) *$\boldsymbol{Q}(k')$ est vraie pour toute extension k' de k.*

e) *$\boldsymbol{Q}(k')$ est vraie pour* une *extension parfaite k' de k.*

f) *$\boldsymbol{Q}(k')$ est vraie pour toute extension $k'=k^{p^{-s}}$, où p est l'exposant caractéristique de k, et $s>0$.*

Pour prouver l'équivalence de *a)*, *b)* et *c)*, il suffit évidemment d'établir que *b)* entraîne *c)*. Soit donc K une extension de type fini de k, qui est par suite le corps des fractions d'une k-algèbre de type fini A; posons $Y=\mathrm{Spec}(A)$. On sait (4.6.6) qu'il existe une extension finie et radicielle k' de k telle que $Y'=(Y\otimes_k k')_{\mathrm{red}}$ soit séparable sur k'; si η' est le point générique de Y', $K'=\boldsymbol{k}(\eta')$ est une extension séparable de k' par (4.6.1). Cela étant, $\boldsymbol{P}(X_{(k')}, x')$ est vraie par hypothèse pour tout point x' de $X_{(k')}$ au-dessus de x, donc il résulte de (6.7.4) que $\boldsymbol{P}(X_{(K')}, x'')$ est vraie pour tout point x'' de $X_{(K')}$ au-dessus de x, puisque $X_{(K')}=(X_{(k')})_{(K')}$, que x'' est au-dessus d'un point x' de $X_{(k')}$, lui-même au-dessus de x, et que K' est séparable sur k'. Mais on a aussi $X_{(K')}=(X_{(K)})_{(K')}$ et pour tout $x_0\in X_{(K)}$ au-dessus de x, il existe $x''\in X_{(K')}$ au-dessus de x_0; il résulte donc de (6.7.4) que $\boldsymbol{P}(X_{(K)}, x_0)$ est vraie.

Supposons maintenant X localement de type fini sur k, de sorte que pour *toute* extension K de k, $X_{(K)}$ est localement noethérien. Comme une extension radicielle de k est isomorphe à une sous-extension d'une extension parfaite quelconque de k, il résulte aussitôt de (6.7.4) que *e)* implique *f)*; de même, toute extension finie radicielle de k est contenue dans une extension $k^{p^{-s}}\subset k^{p^{-\infty}}$, donc *f)* entraîne *b)*; *d)* entraîne trivialement *e)*, et enfin *e)* entraîne *d)*. En effet, si K est une extension *quelconque* de k, il existe une extension K' de k contenant (à des k-isomorphismes près) k' et K; comme K' est extension *séparable* de k', on déduit de (6.7.4) que $\boldsymbol{Q}(k')$ est vraie, puis que $\boldsymbol{Q}(K)$ est vraie, en raisonnant comme dans la première partie de la démonstration. Il suffit donc de prouver que *b) entraîne e)*. Nous prendrons $k'=k^{p^{-\infty}}$ dans *e)*.

La question étant locale sur X, on peut en outre se borner au cas où X est affine et de type fini sur k, en remplaçant X par un voisinage de x; soit donc $X=\mathrm{Spec}(B)$, où B est une k-algèbre de type fini; en outre, par définition de la propriété $\boldsymbol{P}$ dans les cas considérés, on peut aussi remplacer X par le schéma local de X au point x, donc supposer que B est un anneau *local* noethérien. Posons $B'=B\otimes_k k'$; k' est limite inductive de ses sous-extensions *finies* k'_λ et si l'on pose $B'_\lambda=B\otimes_k k'_\lambda$, le morphisme $f_\lambda:\mathrm{Spec}(B')\rightarrow\mathrm{Spec}(B'_\lambda)$ est un *homéomorphisme* de $\mathrm{Spec}(B')$ *sur* $\mathrm{Spec}(B'_\lambda)$ pour tout λ;

en effet f_λ est bijectif en vertu de (**I**, 3.5.2, 3.5.7 et 3.5.8) ; d'autre part, il est fermé par (**II**, 6.1.10). On peut maintenant appliquer (5.13.6) qui prouve (en vertu de l'hypothèse *b)*) que *b)* entraîne *e)* lorsque $\mathbf{P}(Z, z)$ est la propriété (R_n) au point z. Le cas où $\mathbf{P}(Z, z)$ est la propriété d'être régulier (i.e. de posséder la propriété (R_n) pour tout n) en résulte trivialement. Enfin, compte tenu du critère de normalité de Serre (5.8.6), *b)* entraîne encore *e)* lorsque $\mathbf{P}(Z, z)$ est la propriété d'être normal au point z, car cela équivaut à dire que Z possède au point z les propriétés (S_2) et (R_1) : on applique alors ce qui précède pour $n=1$, et (6.7.2, (ii)) pour $n=2$.

Corollaire (**6.7.8**). — *Soit k un corps ; pour un k-préschéma localement noethérien* X *et un point* $x \in X$, *on désigne par* $\mathbf{P}(X, x)$ *une des propriétés suivantes :*

(i) $\operatorname{coprof}(\mathcal{O}_x) \leqslant n$.

(ii) $\mathcal{O}_x$ *est un anneau de Cohen-Macaulay.*

(iii) X *vérifie la propriété* (S_n) *au point x.*

(iv) X *est géométriquement régulier au point x.*

(v) X *possède la propriété* (R_n) *géométrique au point x.*

(vi) X *est géométriquement normal au point x.*

(vii) X *est géométriquement réduit* (i.e. *séparable*) *au point x.*

Soit k' une extension de k ; on suppose, soit que k' est de type fini, soit que X *est localement de type fini sur k, de sorte que* $X' = X \otimes_k k'$ *est localement noethérien. Soit x' un point de* X' *dont x est la projection dans* X. *Alors, pour que* $\mathbf{P}(X, x)$ *soit vraie, il faut et il suffit que* $\mathbf{P}(X', x')$ *le soit.*

Cela a déjà été vu pour la propriété (vii) (4.6.11), et pour les propriétés (i), (ii) et (iii) (6.7.1). Pour (iv), (v) et (vi), cela résulte de (6.7.7) : en effet, le fait que la condition est nécessaire résulte de l'équivalence des critères *a)* et *c)*, et de l'équivalence de *c)* et *d)* lorsque X est localement de type fini sur k. Pour voir que la condition est suffisante, soit k'' une extension finie radicielle de k; on peut toujours considérer k' et k'' comme sous-extensions d'une extension K de k; posons $X'' = X \otimes_k k''$, $X_0 = X \otimes_k K$, et notons que puisque k'' est une extension radicielle de k, il n'y a qu'*un seul* point x'' de X'' au-dessus de x (**I**, 3.5.7 et 3.5.8). Soit alors x_0 un point quelconque de X_0 au-dessus de x'; si $\mathbf{P}(X', x')$ est vraie, il en est de même de $\mathbf{P}(X_0, x_0)$ en vertu de (6.7.7, *c)* et *d)*) (car si k' est une extension de k de type fini, on peut supposer qu'il en est de même de K, et si X est localement de type fini sur k, X' est localement de type fini sur k'). On déduit alors de (6.7.4) que la propriété $\mathbf{Q}(k'')$ est vraie (avec les notations de (6.7.7)), donc $\mathbf{P}(X, x)$ est vraie par (6.7.7, *b)*).

6.8. Morphismes réguliers, normaux, réduits, lisses.

Définition (**6.8.1**). — *Soient* X, Y *deux préschémas,* $f: X \to Y$ *un morphisme tel que la fibre* $f^{-1}(y)$ *soit un préschéma localement noethérien pour tout* $y \in Y$, *x un point de* X. *On dit respectivement que f est un morphisme :*

(i) *de coprofondeur* $\leqslant n$ *au point x ;*

(ii) *de Cohen-Macaulay au point x ;*

(iii) (S_n) *au point* x;

(iv) *régulier au point* x;

(v) (R_n) *au point* x;

(vi) *normal au point* x;

(vii) *réduit au point* x;

si f *est plat au point* x, *et si en outre la propriété correspondante* $\boldsymbol{P}(f^{-1}(f(x)), x)$ (*notation de* (6.7.8)) *est vraie.*

On dit que f *est lisse au point* x *s'il est localement de présentation finie dans un voisinage de* x *dans* X, *et s'il est régulier au point* x. *On dit respectivement que* f *est un morphisme : de coprofondeur* $\leqslant n$, *de Cohen-Macaulay*, (S_n), *régulier*, (R_n), *normal, réduit, lisse, s'il a la propriété correspondante en tout point de* X.

Proposition **(6.8.2)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens* $f: X \to Y$ *un morphisme,* x *un point de* X. *Désignons par* $\boldsymbol{M}(f, x)$ *une des propriétés* (i) *à* (vii) *de la définition* (6.8.1), *ou la propriété pour* f *d'être lisse au point* x. *Soient* Y' *un préschéma localement noethérien,* $g: Y' \to Y$ *un morphisme,* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$. *On suppose que* f *ou* g *est localement de type fini. Alors, pour tout* $x' \in X'$ *au-dessus de* x, *la propriété* $\boldsymbol{M}(f, x)$ *entraîne* $\boldsymbol{M}(f', x')$.

Posons $y = f(x)$, $y' = f'(x')$; par transitivité des fibres (**I**, 3.6.4), on a $f'^{-1}(y') = f^{-1}(y) \otimes_{\boldsymbol{k}(y)} \boldsymbol{k}(y')$; comme ou bien $f^{-1}(y)$ est localement de type fini sur $\boldsymbol{k}(y)$, ou bien $\boldsymbol{k}(y')$ est de type fini sur $\boldsymbol{k}(y)$ (**I**, 6.4.11), il résulte de (6.7.8) que les propriétés $\boldsymbol{P}(f^{-1}(y), x)$ et $\boldsymbol{P}(f'^{-1}(y'), x')$ sont équivalentes; en outre, si f est plat au point x, f' est plat au point x' (2.1.4), ce qui prouve la proposition, compte tenu de (1.4.3, (iii)).

Proposition **(6.8.3)**. — *Pour un morphisme* f *de préschémas localement noethériens, soit* $\boldsymbol{M}(f)$ *l'une des propriétés suivantes : être de Cohen-Macaulay,* (S_n), *régulier,* (R_n), *normal, réduit.*

(i) *Soient* X, Y, Z *trois préschémas localement noethériens,* $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ *deux morphismes. Si* $\boldsymbol{M}(f)$ *et* $\boldsymbol{M}(g)$ *sont vraies,* $\boldsymbol{M}(g \circ f)$ *est vraie.*

(ii) *Inversement, si* f *est surjectif et si* $\boldsymbol{M}(f)$ *et* $\boldsymbol{M}(g \circ f)$ *sont vraies, alors* $\boldsymbol{M}(g)$ *est vraie.*

(iii) *Soient* X, Y, Y' *trois préschémas localement noethériens,* $f: X \to Y$, $h: Y' \to Y$ *deux morphismes ; on pose* $X' = X \times_Y Y'$, $f' = f_{(Y')}: X' \to Y'$. *On suppose que* f *ou* h *est localement de type fini. Alors, si* $\boldsymbol{M}(f)$ *est vraie, il en est de même de* $\boldsymbol{M}(f')$; *la réciproque est vraie lorsque* h *est fidèlement plat.*

Les conclusions de (i) *et* (iii) *sont encore vraies lorsque* $\boldsymbol{M}$ *est la propriété d'être lisse et que* (*dans* (iii)) h *est quasi-compact.*

(i) On sait déjà que si f et g sont plats, il en est de même de $u = g \circ f$, et que si f et $g \circ f$ sont plats et f surjectif, g est plat (2.1.6 et 2.2.13). D'autre part, pour tout $z \in Z$, le morphisme $f_z = f \otimes 1_{\boldsymbol{k}(z)}: u^{-1}(z) \to g^{-1}(z)$ est plat (resp. fidèlement plat si f l'est) et pour tout $y \in g^{-1}(z)$, $f_z^{-1}(y)$ est isomorphe à $f^{-1}(y)$ (**I**, 3.6.4). Si $\boldsymbol{M}(f)$ et $\boldsymbol{M}(g)$ sont vraies, $\boldsymbol{M}(g \circ f)$ est donc vraie pour les cas où $\boldsymbol{M}$ est la propriété d'être de Cohen-Macaulay ou (S_n), en vertu de (6.6.1). D'autre part soit k' une extension finie de $\boldsymbol{k}(z)$; posons $Y'_z = g^{-1}(z) \otimes_{\boldsymbol{k}(z)} k'$, $X'_z = u^{-1}(z) \otimes_{\boldsymbol{k}(z)} k'$, et $f'_z = f_z \otimes 1_{k'}: X'_z \to Y'_z$; le morphisme f'_z

est plat (resp. fidèlement plat) et pour tout $y' \in Y'_z$, la fibre $f'^{-1}_z(y')$ est isomorphe à $f^{-1}(y) \otimes_{\mathbf{k}(y)} \boldsymbol{k}(y')$, en désignant par y l'image de y' dans $g^{-1}(z)$ (**I**, 3.6.4). Lorsque $\boldsymbol{M}$ est la propriété d'être régulier, (R_n), normal ou réduit, l'hypothèse que $\boldsymbol{M}(f)$ et $\boldsymbol{M}(g)$ sont vraies entraîne que Y'_z et chacune des fibres $f'^{-1}_z(y')$ possèdent pour $y' \in Y'_z$ la propriété correspondante parmi les propriétés *c)*, *d)*, *e)*, *f)* de (6.6.1); on déduit donc de (6.6.1, (i)) que X'_z possède la même propriété, donc $\boldsymbol{M}(g \circ f)$ est vraie.

(ii) Inversement, l'hypothèse que $\boldsymbol{M}(g \circ f)$ et $\boldsymbol{M}(f)$ sont vraies et que f est surjectif entraîne que Y'_z a la propriété correspondante en vertu de (6.6.1, (ii)), f'_z étant surjectif pour tout z; donc $\boldsymbol{M}(g)$ est vraie.

(iii) La première assertion découle aussitôt de (6.8.2). D'autre part, si h est fidèlement plat et f' plat, f est plat (2.4.1); comme, avec les notations de (6.8.2), les propriétés $\boldsymbol{P}(f^{-1}(y), x)$ et $\boldsymbol{P}(f'^{-1}(y'), x')$ sont équivalentes (6.7.8), on voit que $\boldsymbol{M}(f)$ et $\boldsymbol{M}(f')$ sont alors équivalentes.

Enfin, la dernière assertion de la proposition résulte de (1.4.3, (iii)) et de (2.7.1, (iv)).

Remarques (**6.8.4**). — (i) Si f est fidèlement plat, g plat et si $g \circ f$ est de coprofondeur $\leqslant n$, alors g est de coprofondeur $\leqslant n$, comme il résulte de (6.6.2).

(ii) Lorsque, dans (6.8.1), on prend pour Y le spectre d'un corps k, les notions (iv), (v) et (vi) se réduisent à celles définies dans (6.7.5). Il est clair que ces dernières sont relatives au corps de base k. La définition (6.8.1) conduit alors à dire qu'un préschéma X est « *régulier* (resp. (R_n), resp. *normal*) *sur* k » au lieu de dire qu'il est « géométriquement régulier (resp. (R_n), resp. normal) relativement à k »; on évitera de confondre cette notion avec la propriété d'être régulier (resp. (R_n), resp. normal) qui est indépendante de k. On peut faire à ce propos les mêmes remarques que dans (4.5.12).

Proposition (**6.8.5**). — *Soient k un corps,* X, Y *deux k-préschémas localement noethériens, dont l'un est localement de type fini sur k. Pour un k-préschéma* Z, *désignons par* $\boldsymbol{P}(Z)$ *l'une des propriétés* c) *à* f) *de* (6.6.1); *la propriété* « $\boldsymbol{P}(Z)$ *géométrique* » *est alors définie dans* (6.7.6) (resp. (4.6.1)) *lorsque* $\boldsymbol{P}(Z)$ *est l'une des propriétés* c), d), e) (resp. f)) *de* (6.6.1). *Alors :*

(i) *Si* X *possède la propriété* $\boldsymbol{P}$, *et* Y *la propriété* $\boldsymbol{P}$ *géométrique,* $X \times_k Y$ *possède la propriété* $\boldsymbol{P}$.

(ii) *Si* X *et* Y *possèdent la propriété* $\boldsymbol{P}$ *géométrique, il en est de même de* $X \times_k Y$.

Soient en effet $f : X \times_k Y \to X$, $g : X \to \mathrm{Spec}(k)$ les morphismes structuraux, qui sont fidèlement plats (2.2.13). L'hypothèse que Y possède la propriété $\boldsymbol{P}$ géométrique entraîne en vertu de (6.8.2) que $\boldsymbol{M}(f)$ est vraie, $\boldsymbol{M}$ étant la propriété de (6.8.3) qui correspond à $\boldsymbol{P}$; sous l'hypothèse (ii), $\boldsymbol{M}(g)$ est aussi vraie, donc l'assertion (ii) résulte de (6.8.3, (i)). Quant à l'assertion (i), elle résulte directement de (6.6.1, (i)).

Théorème (**6.8.6**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f : X \to Y$ *un morphisme localement de type fini,* x *un point de* X, $y = f(x)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *f est lisse au point x.*

b) *f est régulier au point x.*

c) $\mathcal{O}_x$ *est une* $\mathcal{O}_y$*-algèbre formellement lisse* (**0**, 19.3.1) *pour les topologies préadiques sur* $\mathcal{O}_x$ *et* $\mathcal{O}_y$.

c') $\mathcal{O}_x$ *est une* $\mathcal{O}_y$*-algèbre formellement lisse* (**0**, 19.3.1) *pour les topologies discrètes sur* $\mathcal{O}_x$ *et* $\mathcal{O}_y$.

L'équivalence de *a)* et *b)* résulte des définitions (6.8.1) et du fait que pour les préschémas localement noethériens, les morphismes localement de type fini sont localement de présentation finie (1.4.2).

En second lieu, pour que $\mathcal{O}_x$ soit une $\mathcal{O}_y$-algèbre formellement lisse pour les topologies préadiques, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_x$ soit un $\mathcal{O}_y$-module plat et que $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)$ soit une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre formellement lisse pour sa topologie préadique (**0**, 19.7.1); mais pour que $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y)$ soit une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre formellement lisse pour sa topologie préadique, il faut et il suffit qu'elle soit une $\boldsymbol{k}(y)$-algèbre géométriquement régulière (**0**, 19.6.6); ceci démontre donc l'équivalence de *b)* et *c)*. Enfin, pour prouver l'équivalence de *c)* et *c')*, on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(C)$ sont affines, A étant noethérien et C une A-algèbre de type fini, que l'on peut donc écrire sous la forme $A[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{J}$. Comme ici $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un C-module de présentation finie, l'équivalence de *c)* et *c')* résulte de (**0**, 22.6.4) appliqué à A, $B = A[T_1, \ldots, T_n]$ et $C = B/\mathfrak{J}$.

Corollaire (**6.8.7**). — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens,* $f: X \to Y$ *un morphisme localement de type fini. Alors l'ensemble des points* $x \in X$ *où f est lisse* (ou *régulier*) *est ouvert dans* X.

Il résulte en effet de (**0**, 22.6.5) que l'ensemble des $x \in X$ vérifiant la condition *c')* de (6.8.6) est ouvert dans X, et on conclut par (6.8.6).

Remarque (**6.8.8**). — Dans (17.5.1), nous montrerons que l'équivalence de *b)* et *c')* dans (6.8.6), ainsi que le corollaire (6.8.7), restent valables sans hypothèse noethérienne sur X et Y, pourvu que l'on se borne aux morphismes *localement de présentation finie*.

6.9. Le théorème de platitude générique.

Théorème (**6.9.1**). — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien et intègre,* $u: X \to Y$ *un morphisme de type fini,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Il existe alors un ouvert non vide* U *de* Y *tel que* $\mathcal{F}|u^{-1}(U)$ *soit plat sur* U.

On peut évidemment se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine; alors X est réunion finie d'ouverts affines X_i de type fini sur Y; si, pour chaque i, il y a un ouvert non vide U_i dans Y tel que $\mathcal{F}|(X_i \cap u^{-1}(U_i))$ soit plat sur U_i, il est clair qu'en prenant pour U l'intersection des U_i, on répondra à la question; on peut donc supposer que $X = \mathrm{Spec}(B)$, où B est une A-algèbre de type fini. On a alors $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de type fini; le théorème résultera par suite du

Lemme (**6.9.2**). — *Soient* A *un anneau intègre noethérien,* B *une* A*-algèbre de type fini,* M *un* B*-module de type fini. Alors il existe* $f \neq 0$ *dans* A *tel que* M_f *soit un* A_f*-module libre.*

Désignons par K le corps des fractions de A; alors $B \otimes_A K$ est une algèbre de type fini sur K et $M \otimes_A K$ un $(B \otimes_A K)$-module de type fini. Nous raisonnerons par récurrence sur la *dimension* n du support de $M\otimes_A K$, qui est $-\infty$ ou finie et $\geqslant 0$. Supposons d'abord $n=-\infty$, c'est-à-dire $M\otimes_A K=0$; si $(m_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ est un système de générateurs du B-module M, il existe donc un $f\neq 0$ dans A tel que $fm_i=0$ pour $1\leqslant i\leqslant r$; donc $M_f=0$ et le lemme est vrai dans ce cas. Supposons maintenant $n\geqslant 0$. On sait qu'il existe une suite de composition $M=M_1\supset M_2\supset\ldots\supset M_q=0$ du B-module M telle que chacun des quotients $N_i=M_i/M_{i+1}$ soit isomorphe à un B-module de la forme $B/\mathfrak{p}_i$, où $\mathfrak{p}_i$ est un idéal premier de B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 1, n° 4, th. 1). Si le théorème est vrai pour chacun des N_i, il y a pour chaque i un $f_i\neq 0$ dans A tel que $(N_i)_{f_i}$ soit libre sur A_{f_i}; posant $f=f_1f_2\ldots f_{q-1}$, il en résulte que $(N_i)_f$ est un A_f-module libre pour $1\leqslant i\leqslant q-1$. Mais $(N_i)_f=(M_i)_f/(M_{i+1})_f$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.3.2) et comme une extension de modules libres est libre, on en déduit alors que M_f est un A_f-module libre. Remplaçant B par $B/\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ idéal premier de B), qui est encore de type fini sur A, on voit qu'on peut se borner au cas où $M=B$ *et* B *est intègre*. On sait alors (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 1, cor. 1 du th. 1) qu'il existe un élément $g\neq 0$ dans A et des éléments t_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ de B, algébriquement indépendants sur A et tels que B_g soit *entier* sur $A_g[t_1, \ldots, t_m]$. On peut remplacer A par A_g, B par B_g et supposer par suite que B est entier sur $C=A[t_1, \ldots, t_m]$, donc un C-module de type fini et *sans torsion*. On sait en outre (4.1.2) que la dimension de $\mathrm{Spec}(B\otimes_A K)$ est égale à m, donc on a $m=n$.

Cela étant, si h est le rang du C-module sans torsion B, il existe une suite exacte de C-modules

$$0\rightarrow C^h\rightarrow B\rightarrow M'\rightarrow 0$$

où M′ est un C-module *de torsion* de type fini; le support de M′ ne contient donc pas le point générique de Spec(C) (**I**, 7.4.6) et par suite le support de $M'\otimes_A K$ ne contient pas le point générique de $\mathrm{Spec}(C\otimes_A K)$ (**I**, 9.1.13.1); on en conclut (4.1.2.1) que sa dimension est $<n$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe un $f\neq 0$ dans A tel que M'_f soit un A_f-module libre; par ailleurs C^h_f est un A_f-module libre; donc il en est de même de B_f, qui en vertu de ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 1.3.2) est une extension de modules libres. C.Q.F.D.

Corollaire **(6.9.3)**. — *Soient* S *un préschéma noethérien,* $u: X\rightarrow S$ *un morphisme de type fini,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Il y a alors une partition* $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *de* S *en un nombre fini d'ensembles localement fermés dans* S, *telle que, si on désigne encore par* S_i *le sous-préschéma réduit de* S *ayant pour espace sous-jacent* S_i, *et si on pose* $X_i=X\times_S S_i$, *le* $\mathcal{O}_{X_i}$*-Module* $\mathscr{F}_i=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_{S_i}$ *soit plat sur* S_i.

Procédons par récurrence noethérienne ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 2.2.2) sur l'ensemble des parties fermées T de S telles que le sous-préschéma réduit de S ayant T pour espace sous-jacent vérifie la conclusion de (6.9.3). On peut donc se borner à démontrer le corollaire pour S en supposant qu'il soit vrai pour tout sous-préschéma fermé réduit de S ayant pour espace sous-jacent une partie fermée $\neq S$. Comme le morphisme $S_{\mathrm{red}}\rightarrow S$ est de type fini et surjectif, on peut remplacer S par S_{red}, donc supposer S réduit et non vide. Comme S est noethérien, l'intérieur T d'une composante irréductible de S est non vide, et le préschéma induit sur T est intègre; il y a donc en vertu de (6.9.1) un ouvert non vide $U\subset T$

tel que $\mathscr{F}|u^{-1}(\mathrm{U})$ soit plat sur U. Si Y est alors le sous-préschéma réduit de S ayant pour espace sous-jacent $\mathrm{S}-\mathrm{U}$, il y a par hypothèse une partition (Y_i) de Y en ensembles localement fermés dans Y (donc dans S) tels que $\mathscr{F}_i=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{S}}\mathcal{O}_{\mathrm{Y}_i}$ soit plat sur Y_i pour tout i; il est clair que les Y_i et U forment une partition répondant à la question.

6.10. Dimension et profondeur d'un Module normalement plat le long d'un sous-préschéma fermé.

(6.10.1) Soient X un préschéma localement noethérien, $\mathscr{J}$ un Idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_\mathrm{X}$, Y le sous-préschéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, $j:\mathrm{Y}\rightarrow\mathrm{X}$ l'injection canonique. Pour tout entier $k\geqslant 0$, le $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module $\mathscr{J}^k\mathscr{F}/\mathscr{J}^{k+1}\mathscr{F}$ est annulé par $\mathscr{J}$, donc de la forme $j_*(\mathscr{G}_k)$, où $\mathscr{G}_k=j^*(\mathscr{J}^k\mathscr{F}/\mathscr{J}^{k+1}\mathscr{F})=j^*(\mathscr{J}^k\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Module cohérent. Par abus de langage, nous noterons $\mathrm{gr}^\bullet_\mathfrak{J}(\mathscr{F})$ le $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-*Module gradué* égal à la somme directe

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{G}_k=j^*(\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{J}^k\mathscr{F}/\mathscr{J}^{k+1}\mathscr{F});$$

en particulier, on a $\mathrm{gr}^0_\mathfrak{J}(\mathscr{F})=\mathscr{G}_0=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{Y}}\mathcal{O}_\mathrm{Y}=j^*(\mathscr{F})$. Nous dirons (avec Hironaka) que $\mathscr{F}$ est *normalement plat le long de* Y si $\mathrm{gr}^\bullet_\mathfrak{J}(\mathscr{F})$ est un $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-*Module plat*. Il revient au même ((2.1.12) et $(\mathbf{0}_\mathrm{I}, 6.1.2)$) de dire que chacun des $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Modules $\mathscr{G}_k=j^*(\mathscr{J}^k\mathscr{F})$ est *localement libre*.

Proposition **(6.10.2)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* Y *un sous-préschéma fermé* intègre *de* X. *Pour tout $\mathcal{O}_\mathrm{X}$-Module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un ouvert* U *de* X *tel que* $\mathrm{Y}\cap\mathrm{U}\neq\emptyset$ *et que* $\mathscr{F}|\mathrm{U}$ *soit normalement plat le long de* $\mathrm{Y}\cap\mathrm{U}$.

Soit en effet $\mathscr{J}$ l'Idéal cohérent de $\mathcal{O}_\mathrm{X}$ définissant Y; la $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Algèbre $\mathscr{B}=\mathrm{gr}^\bullet_\mathfrak{J}(\mathcal{O}_\mathrm{X})$ est quasi-cohérente et *de type fini* car elle est engendrée par $\mathrm{gr}^1_\mathfrak{J}(\mathcal{O}_\mathrm{X})$, image réciproque de $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$; comme $\mathrm{gr}^\bullet_\mathfrak{J}(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{B}$-module quasi-cohérent engendré par $\mathrm{gr}^1_\mathfrak{J}(\mathscr{F})$, c'est un $\mathscr{B}$-Module *de type fini*. Si l'on pose $\mathrm{Z}=\mathrm{Spec}(\mathscr{B})$, le morphisme structural $u:\mathrm{Z}\rightarrow\mathrm{Y}$ est alors de type fini, et si $\mathscr{H}$ est le $\mathcal{O}_\mathrm{Z}$-Module cohérent tel que $u_*(\mathscr{H})=\mathrm{gr}^\bullet_\mathfrak{J}(\mathscr{F})$, il suffit d'appliquer à u et à $\mathscr{H}$ le théorème de platitude générique (6.9.1) pour prouver la proposition.

Proposition **(6.10.3)**. — *Les notations étant celles de* (6.10.1), *supposons que $\mathscr{F}$ soit normalement plat le long de* Y. *Alors :*

(i) $\mathrm{Y}\cap\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *est une partie à la fois ouverte et fermée de* Y (autrement dit, une *réunion de composantes connexes de* Y).

(ii) *Si $\mathscr{J}$ est localement nilpotent,* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ *est une partie ouverte et fermée de* X, *et pour tout* $x\in\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, *on a*

(6.10.3.1) $$\dim(\mathscr{F}_x)=\dim(\mathcal{O}_{\mathrm{Y},x})$$

(6.10.3.2) $$\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x)=\mathrm{prof}(\mathcal{O}_{\mathrm{Y},x})$$

(6.10.3.3) $$\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x)=\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_{\mathrm{Y},x}).$$

(i) Avec les notations de (6.10.1), on a $\mathrm{Y}\cap\mathrm{Supp}(\mathscr{F})=\mathrm{Supp}(\mathscr{G}_0)$ (**I**, 9.1.13), et comme par hypothèse $\mathscr{G}_0$ est un $\mathcal{O}_\mathrm{Y}$-Module localement libre de type fini, son support est à la fois ouvert et fermé dans Y.

(ii) L'hypothèse que $\mathscr{J}$ est localement nilpotent entraîne que les espaces sous-jacents à X et à Y sont les mêmes, d'où les deux premières assertions de (ii), compte tenu de (5.1.12.1); il reste à prouver (6.10.3.2), car on en déduira aussitôt (6.10.3.3) par différence. Soit $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une suite finie d'éléments de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ dont les images dans $\mathcal{O}_{Y,x}=\mathcal{O}_{X,x}/\mathscr{J}_x$ forment une suite $\mathcal{O}_{Y,x}$-régulière *maximale*; l'hypothèse sur $\mathscr{F}$ et $\mathscr{J}$ entraîne que le $\mathcal{O}_{Y,x}$-module $\operatorname{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}_x}(\mathscr{F}_x)$ est libre de type fini, donc la suite (f_i) est $\operatorname{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}_x}(\mathscr{F}_x)$-régulière; on en déduit que cette suite est aussi $\mathscr{F}_x$*-régulière* (**0**, 15.1.19). Soit d'autre part n le plus grand entier tel que $\mathscr{F}_x^{(n)}=\mathscr{J}_x^n\mathscr{F}_x\neq 0$. L'hypothèse entraîne aussi que $\operatorname{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{J}_x}(\mathscr{F}_x/\mathscr{F}_x^{(n)})$ est libre de type fini, donc la suite (f_i) est aussi $(\mathscr{F}_x/\mathscr{F}_x^{(n)})$-*régulière (loc. cit.)*. Appliquant le lemme (3.4.1.4), on en conclut par récurrence sur i, une suite exacte

$$0\to\mathscr{F}_x^{(n)}/(\sum_{i=1}^{p}f_i\mathscr{F}_x^{(n)})\to\mathscr{F}_x/(\sum_{i=1}^{p}f_i\mathscr{F}_x).$$

Mais l'hypothèse entraîne que $\mathscr{F}_x^{(n)}$ est un $\mathcal{O}_{Y,x}$-module libre de type fini et $\neq 0$, donc $\mathscr{F}_x^{(n)}/(\sum_{i=1}^{p}f_i\mathscr{F}_x^{(n)})$ est isomorphe à un module de la forme $(\mathcal{O}_{Y,x}/(\sum_{i=1}^{p}f_i\mathcal{O}_{Y,x}))^m$ avec $m>0$; comme $\operatorname{prof}(\mathcal{O}_{Y,x}/(\sum_{i=1}^{p}f_i\mathcal{O}_{Y,x}))=0$ (**0**, 16.4.6) on a aussi, par la caractérisation (**0**, 16.4.6, (i)) des modules de profondeur nulle, $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x^{(n)}/(\sum_{i=1}^{p}f_i\mathscr{F}_x^{(n)}))=0$, puis $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x/(\sum_{i=1}^{p}f_i\mathscr{F}_x))=0$; les $(f_i)_x$ appartenant à l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,x}$ et formant une suite $\mathscr{F}_x$*-régulière*, cela montre que l'on a $\operatorname{prof}(\mathscr{F}_x)=p$ (**0**, 16.4.6, (ii)).

Corollaire **(6.10.4)**. — *Soit* $U_{S_n}(\mathscr{F})$ (resp. $U_{C_n}(\mathscr{F})$) *l'ensemble des* $x\in X$ *tels que* $\mathscr{F}$ *vérifie* (S_n) *au point* x (resp. *tels que* $\operatorname{coprof}(\mathscr{F}_x)\leqslant n$). *Si* $\mathscr{F}$ *est normalement plat le long de* Y, *si* $\operatorname{Supp}(\mathscr{F})=X$ *et si* $\mathscr{J}$ *est localement nilpotent, on a* $U_{S_n}(\mathscr{F})=U_{S_n}(\mathcal{O}_Y)$ *et* $U_{C_n}(\mathscr{F})=U_{C_n}(\mathcal{O}_Y)$.

Proposition **(6.10.5)**. — *Les notations étant celles de* (6.10.1), *supposons que* Y *soit connexe et non vide, et que* $\mathscr{F}$ *soit normalement plat le long de* Y. *Pour tout entier* $n\geqslant 0$, *on pose*

(6.10.5.1) $$r(n)=\operatorname{rg}_{\mathcal{O}_Y}(\operatorname{gr}^n_{\mathfrak{J}}(\mathscr{F}))$$

(le $\mathcal{O}_Y$*-Module localement libre* $\operatorname{gr}^n_{\mathfrak{J}}(\mathscr{F})$ *étant nécessairement de rang constant). Alors :*

(i) *Il existe un polynôme* $P\in\mathbf{Q}[T]$ *tel que* $P(n)=r(n)$ *pour tout n assez grand.*

(ii) *On a* $Y\cap\operatorname{Supp}(\mathscr{F})=\varnothing$ *(autrement dit* $\mathscr{F}/\mathfrak{J}\mathscr{F}=0$*), ou* $Y\cap\operatorname{Supp}(\mathscr{F})=Y$ *(autrement dit* $Y\subset\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$*). Dans le second cas, notons* $d-1$ *le degré de* P; *pour tout point maximal* y *de* Y, *on a*

(6.10.5.2) $$\dim(\mathscr{F}_y)=d$$

et en particulier

(6.10.5.3) $$\operatorname{codim}(Y,\operatorname{Supp}(\mathscr{F}))=d.$$

(iii) *Supposons* $Y\subset\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$. *Pour tout* $x\in Y$, *on a*

(6.10.5.4) $$\dim(\mathscr{F}_x)=\dim(\mathcal{O}_{Y,x})+d.$$

De façon plus précise, il existe dans $\mathfrak{J}_x$ *des éléments* f_i $(1\leqslant i\leqslant d)$ *faisant partie d'un système de paramètres pour* $\mathscr{F}_x$ (**0**, 16.3.6) *et tels que, dans* $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$, *on ait* $V(\mathfrak{J}_x)=V(\sum_{i=1}^{d}f_i\mathcal{O}_{X,x})\cap\operatorname{Supp}(\mathscr{F})$.

Comme Y est supposé connexe, la première assertion de (ii) découle de (6.10.3, (i)). Si l'on a $Y \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{F}) = \emptyset$, l'assertion (i) est triviale avec $P = 0$. Supposons que $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \supset Y$, et soit y un point maximal de Y; comme on a alors $Y = \mathrm{Supp}(\mathscr{F}/\mathscr{J}\mathscr{F})$, $\mathscr{F}_y/\mathscr{J}_y\mathscr{F}_y$ est un $\mathscr{O}_{X,y}$-module de longueur finie (3.1.4); posant $s(n) = \mathrm{long}(\mathrm{gr}^n_{\mathscr{J}_y}(\mathscr{F}_y))$, on sait qu'il y a un polynôme $R \in \mathbf{Q}[T]$ tel que $s(n) = R(n)$ pour n assez grand, savoir le polynôme $H(n+1) - H(n)$, où H est le polynôme de Hilbert-Samuel de $\mathscr{F}_y$ pour la filtration $\mathscr{J}_y$-préadique (**0**, 16.2.1). Comme les $\mathscr{O}_{Y,y}$-modules $\mathrm{gr}^n_{\mathscr{J}_y}(\mathscr{F}_y)$ sont libres par hypothèse, on a $r(n) = s(n)/m$, en désignant par m la longueur du $\mathscr{O}_{X,y}$-module $\mathscr{O}_{Y,y} = \mathscr{O}_{X,y}/\mathscr{J}_y$; on satisfait donc à (i) en prenant $P = \frac{1}{m}R$. On sait en outre (**0**, 16.2.3) que $\deg(H) = \dim(\mathscr{F}_y)$, d'où la relation (6.10.5.2); la relation (6.10.5.3) s'en déduit à l'aide de (5.1.12.2).

Reste à prouver (iii) pour un point quelconque $x \in Y$. Posons $A = \mathscr{O}_{X,x}$, $\mathfrak{I} = \mathscr{J}_x$, de sorte que $\mathscr{O}_{Y,x} = A/\mathfrak{I}$, et $M = \mathscr{F}_x$; soit $S = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{I}}(A)$, qui est une $(A/\mathfrak{I})$-algèbre graduée de type fini, à degrés positifs, telle que $S_0 = A/\mathfrak{I}$, et engendrée par ses éléments homogènes de degré 1; soit enfin $N = \mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathfrak{I}}(M)$, qui est un S-module gradué de type fini, chaque composante homogène N_n étant par hypothèse un $(A/\mathfrak{I})$-module libre de longueur $r(n)$. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $k = A/\mathfrak{m}$ son corps résiduel; $B = S \otimes_A k$ est une k-algèbre graduée de type fini, à degrés positifs, engendrée par ses éléments homogènes de degré 1 et telle que $B_0 = k$, de sorte que $\mathfrak{q} = B^+ = \bigoplus_{n \geqslant 1} B_n$ est un idéal maximal dans B; $E = N \otimes_A k$ est un B-module gradué de type fini tel que $\mathrm{rg}_k(E_n) = r(n)$. Appliquons (**0**, 16.2.7) à l'anneau gradué $B = S \otimes_A k$ et au B-module gradué $E = N \otimes_A k$, et soit $f_i \in \mathfrak{I}^{n_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$ un élément dont t_i est l'image dans B_{n_i}. Pour $n \geqslant \sup_i (n_i)$, considérons le sous-A-module $\sum_{i=1}^{d} f_i \mathfrak{I}^{n-n_i} M$ de M; comme le composant homogène de degré n du sous-module $\sum_{i=1}^{d} t_i E$ de E est égal à E_n dès que n est assez grand, on voit que, pour n assez grand, on a

$$\mathfrak{I}^n M = \sum_{i=1}^{d} f_i \mathfrak{I}^{n-n_i} M + \mathfrak{m}\mathfrak{I}^n M$$

et comme $\mathfrak{I}^n M$ est un A-module de type fini, cela entraîne, par le lemme de Nakayama,

$$\mathfrak{I}^n M = \sum_{i=1}^{d} f_i \mathfrak{I}^{n-n_i} M \subset \sum_{i=1}^{d} f_i M.$$

Si $\mathfrak{a}$ est l'annulateur de M, on a donc (**0**$_{\mathrm{I}}$, 1.7.5) dans Spec(A)

$$V\Big(\sum_{i=1}^{d} f_i A\Big) \cap V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{I}^n) \cap V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{I}) \cap V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{I})$$

puisque par hypothèse $Y \cap \mathrm{Spec}(A) = V(\mathfrak{I}) \cap \mathrm{Supp}(M) = V(\mathfrak{I})$. Comme d'autre part les f_i appartiennent à S, on a $V(\mathfrak{I}) \subset V(\sum_{i=1}^{d} f_i A)$, ce qui prouve la dernière relation de (iii). Il reste à montrer que les f_i font partie d'un système de paramètres pour M. Remplaçant A par $A/\mathfrak{a}$ et les f_i par leurs images dans $A/\mathfrak{a}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{a} = 0$; on vient de voir que l'on a $\dim(A/\mathfrak{I}) = \dim(A/(\sum_{i=1}^{d} f_i A))$ et il reste donc à prouver (**0**, 16.3.7) que l'on a

$$\dim(A) \geqslant \dim(A/\mathfrak{I}) + d.$$

Or, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A contenant $\mathfrak{I}$ et tel que $\dim(A/\mathfrak{I}) = \dim(A/\mathfrak{p})$, de sorte que $\mathfrak{p}$ est minimal parmi les idéaux premiers contenant $\mathfrak{I}$. On a donc $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_y$ où $y \in \mathrm{Spec}(A)$ est un point maximal de Y. Mais en vertu de (6.10.5.2) et de l'hypothèse $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Supp}(M)$, on a $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = d$; l'inégalité $\dim(A/\mathfrak{p}) + \dim(A_{\mathfrak{p}}) \leqslant \dim(A)$ (**0**, 16.1.4) achève la démonstration.

Proposition **(6.10.6)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent,* Y *un sous-préschéma fermé irréductible de* X, *de point générique* $y \in \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$. *Il existe alors un voisinage ouvert non vide* U *de* y *dans* X *tel que, our tout* $x \in U \cap Y$, *on ait*

(6.10.6.1) $$\dim(\mathscr{F}_x) = \dim(\mathscr{F}_y) + \dim(\mathscr{O}_{Y,x})$$

(6.10.6.2) $$\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) = \mathrm{prof}(\mathscr{F}_y) + \mathrm{prof}(\mathscr{O}_{Y,x})$$

(6.10.6.3) $$\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x) = \mathrm{coprof}(\mathscr{F}_y) + \mathrm{coprof}(\mathscr{O}_{Y,x}).$$

Soit $Y' = Y_{\mathrm{red}}$, qui est un sous-préschéma fermé *intègre* de Y ayant même espace sous-jacent, et défini par un Idéal localement nilpotent $\mathscr{K}$ de $\mathcal{O}_Y$ (**I**, 6.1.6). Il en résulte que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{K}}(\mathcal{O}_Y)$ est un $\mathcal{O}_{Y'}$-Module *cohérent*, et comme Y′ est intègre, il y a un voisinage ouvert V de y dans Y′ tel que $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{K}}(\mathcal{O}_Y)\,|\,V$ soit localement libre ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7); autrement dit, quitte à remplacer X par un voisinage de y, on peut supposer que $\mathcal{O}_Y$ est *normalement plat* le long de Y′; on déduit donc de (6.10.3) que l'on a

$$\dim(\mathcal{O}_{Y,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y',x}), \qquad \mathrm{prof}(\mathcal{O}_{Y,x}) = \mathrm{prof}(\mathcal{O}_{Y',x})$$

pour tout $x \in Y$; cela permet de se borner au cas où le sous-préschéma fermé Y est *intègre*.

Cela étant, en vertu de (6.10.2), on peut, en remplaçant X par un voisinage ouvert de y, supposer que $\mathscr{F}$ est *normalement plat* le long de Y. Comme $y \in \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, la relation (6.10.6.1) résulte de (6.10.5.2) et (6.10.5.4). Posons maintenant $p = \mathrm{prof}(\mathscr{F}_y)$; remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de y, on peut supposer qu'il existe p sections f_i ($1 \leqslant i \leqslant p$) de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X, formant une suite $\mathscr{F}$-régulière, tels que les $(f_i)_y$ appartiennent à l'idéal maximal $\mathfrak{m}_y$ de $\mathcal{O}_{X,y}$ et que $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_y/(\sum_{i=1}^{p}(f_i)_y\mathscr{F}_y)) = 0$ (**0**, 16.4.6). Si $\mathscr{J}$ est l'Idéal de $\mathcal{O}_X$ qui définit Y, on a $\mathscr{J}_y = \mathfrak{m}_y$ et, en remplaçant encore au besoin X par un voisinage de y, on peut supposer que $f_i \in \Gamma(X, \mathscr{J})$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. En outre, si l'on pose $\mathscr{G} = \mathscr{F}/(\sum_{i=1}^{p} f_i\mathscr{F})$, l'hypothèse $\mathrm{prof}(\mathscr{G}_y) = 0$ entraîne que $\mathscr{G}_y$ contient un sous-module isomorphe à $\mathcal{O}_{X,y}/\mathfrak{m}_y$ (**0**, 16.4.6); le même raisonnement (compte tenu de ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.3.8 et 5.2.7)) montre qu'on peut supposer qu'il existe un *sous-$\mathcal{O}_X$-Module* $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{G}$ *isomorphe à* $\mathcal{O}_X/\mathscr{J}$ de sorte que $\mathscr{G}'_x = \mathcal{O}_{Y,x}$ pour tout $x \in Y$. Posons $\mathscr{G}'' = \mathscr{G}/\mathscr{G}'$; remplaçant X par un voisinage ouvert de y, on peut, en vertu de (6.10.2), supposer que $\mathscr{G}'$ et $\mathscr{G}''$ sont *normalement plats* le long de Y. Soit alors x un point quelconque de Y, et posons $q = \mathrm{prof}(\mathcal{O}_{Y,x}) = \mathrm{prof}(\mathscr{G}'_x)$; soit $(g_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ une suite maximale $\mathscr{G}'_x$-régulière d'éléments de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de $\mathcal{O}_{X,x}$. Chacun des composants homogènes de $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}_x}(\mathscr{G}''_x)$ est un $\mathcal{O}_{Y,x}$-module plat de type fini par hypothèse, donc est un $\mathcal{O}_{Y,x}$-module *libre*, et il en est par suite de même de $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}_x}(\mathscr{G}''_x)$; comme la suite (g_j) est $\mathcal{O}_{Y,x}$-régulière, elle est par suite $\mathrm{gr}^{\bullet}_{\mathscr{J}_x}(\mathscr{G}''_x)$-régulière, d'où l'on conclut qu'elle est *$\mathscr{G}''_x$-régulière* (**0**, 15.1.19). Appliquant le lemme (**0**, 15.1.18) à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{G}'_x \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{G}''_x \to 0$$

par récurrence sur j, on en conclut une suite exacte

$$0 \to \mathscr{G}'_x/(\sum_{j=1}^{q} g_j\mathscr{G}'_x) \to \mathscr{G}_x/(\sum_{j=1}^{q} g_j\mathscr{G}_x).$$

Mais par hypothèse $\mathrm{prof}(\mathscr{G}'_x/(\sum_{j=1}^{q} g_j\mathscr{G}'_x)) = 0$ (**0**, 16.4.6); par la caractérisation (**0**, 16.4.6) des modules de profondeur nulle, on en conclut que $\mathrm{prof}(\mathscr{G}_x/(\sum_{j=1}^{q} g_j\mathscr{G}_x)) = 0 = \mathrm{prof}(\mathscr{F}_x/(\sum_{i=1}^{p} f_i\mathscr{F}_x + \sum_{j=1}^{q} g_j\mathscr{F}_x))$; la suite (g_j) étant $\mathscr{G}'_x$-régulière et $\mathscr{G}''_x$-régulière, est aussi *$\mathscr{G}_x$-régulière*; enfin, la suite $((f_i)_x)$ est $\mathscr{F}_x$-régulière par hypothèse et est formée d'éléments de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$; on en déduit (**0**, 16.4.6) que $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) = p + q$, ce qui achève la démonstration.

6.11. Critères pour que les ensembles $U_{S_n}(\mathscr{F})$ ou $U_{C_n}(\mathscr{F})$ soient ouverts.

Lemme (**6.11.1**). — *Soient* X *un préschéma localement noethérien,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent; alors la fonction* $x \rightsquigarrow \mathrm{dim.proj}(\mathscr{F}_x)$ *est semi-continue supérieurement dans* X.

On peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est le spectre d'un anneau noethérien et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini. Supposons que pour un $x \in X$, on ait $\mathrm{dim.proj}(M_x) = n < +\infty$ (si $n = +\infty$ il n'y a rien à démontrer); il existe une résolution de M

$$L_{n-1} \to L_{n-2} \to \dots \to L_0 \to M \to 0$$

où les L_i sont des A-modules libres *de type fini* (A étant noethérien), d'où une suite exacte

$$0 \to R \to L_{n-1} \to L_{n-2} \to \dots \to L_0 \to M \to 0$$

où R est un A-module de type fini; on en déduit une suite exacte

$$0 \to R_x \to (L_{n-1})_x \to \dots \to (L_0)_x \to M_x \to 0$$

où les $(L_i)_x$ sont des A_x-modules libres de type fini; comme par hypothèse $\dim.\mathrm{proj}(M_x) = n$, cela entraîne que R_x est un A_x-module projectif de type fini (M, VI, 2.1) et par suite un A_x-module *libre* de type fini ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 10.1.3). On en conclut qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que, pour tout $x' \in U$, $R_{x'}$ soit un $A_{x'}$-module libre ($\mathbf{0}_\text{I}$, 5.2.7), donc $M_{x'}$ admet une résolution projective de longueur n, autrement dit $\dim.\mathrm{proj}(M_{x'}) \leqslant n$, ce qui prouve le lemme.

Proposition **(6.11.2)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien et localement immersible dans un schéma régulier* (5.11.1); *soit* $\mathscr{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent. Alors :*

(i) (M. Auslander) *La fonction* $x \rightsquigarrow \mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x)$ *est semi-continue supérieurement dans* X (autrement dit, pour tout entier n, l'ensemble $U_{C_n}(\mathscr{F})$ des $x \in X$ tels que $\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x) \leqslant n$ est *ouvert*).

(ii) *Pour tout entier n, l'ensemble* $U_{S_n}(\mathscr{F})$ *des* $x \in X$ *tels que* $\mathscr{F}$ *possède la propriété* (S_n) *au point x est ouvert.*

(i) La question étant locale sur X, on peut, en vertu de l'hypothèse, se borner au cas où X est un sous-schéma fermé d'un schéma affine régulier Y. Si $j : X \to Y$ est l'injection canonique, et $\mathscr{G} = j_*(\mathscr{F})$, on sait qu'on a alors, pour tout $x \in X$, $\dim(\mathscr{F}_x) = \dim(\mathscr{G}_x)$ et $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) = \mathrm{prof}(\mathscr{G}_x)$, donc $\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x) = \mathrm{coprof}(\mathscr{G}_x)$, et comme $\mathrm{coprof}(\mathscr{G}_x) = 0$ pour $y \in Y - X$, on est ramené à prouver la propriété pour $\mathscr{G}$; autrement dit, on peut se borner au cas où X est un schéma affine *régulier*. On sait alors (**0**, 17.3.4) que l'on a

$$\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \dim.\mathrm{proj}(\mathscr{F}_x).$$

D'autre part, si S est l'unique sous-préschéma fermé de X ayant pour espace sous-jacent $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, on a $\dim(\mathscr{F}_x) = \mathrm{codim}(\overline{\{x\}}, S)$ (5.1.12.1), et, en vertu de (5.1.9)

$$\dim(\mathscr{F}_x) = \dim(\mathcal{O}_{X,x}) - \mathrm{codim}_x(S, X)$$

puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau régulier, et *a fortiori* biéquidimensionnel (**0**, 16.5.12). On peut donc écrire

(6.11.2.1) $$\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x) = \dim.\mathrm{proj}(\mathscr{F}_x) - \mathrm{codim}_x(S, X)$$

et la proposition résulte alors de (6.11.1) et de (**0**, 14.2.6).

(ii) Comme les $U_{C_n}(\mathscr{F})$ sont ouverts pour tout n par (i), les $Z_n = X - U_{C_n}(\mathscr{F})$ sont fermés dans X; en outre il est clair que $Z_{n+1} \subset Z_n$, et comme $\dim(\mathscr{F}_x)$ est finie pour tout $x \in X$ et $\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x) \leqslant \dim(\mathscr{F}_x)$, l'intersection des Z_n est *vide*; comme on peut se borner au cas où X est affine, donc quasi-compact, on peut supposer qu'il existe un m

tel que $Z_m=\emptyset$. Or, il résulte de (5.7.4) que la relation $x\in U_{S_k}(\mathscr{F})$ équivaut à l'ensemble des relations

$$\text{(6.11.2.2)} \qquad \operatorname{codim}_x(Z_n, S)>n+k$$

pour tout $n\geqslant 0$; mais pour $n\geqslant m$ cette relation est automatiquement vérifiée, donc on n'a en fait à considérer les relations (6.11.2.2) que pour $0\leqslant n<m$. Or (**0**, 14.2.6) l'ensemble $V_{n,k}$ des x vérifiant (6.11.2.2) est ouvert, et $U_{S_k}(\mathscr{F})$, intersection des $V_{n,k}$ pour $0\leqslant n<m$, est aussi ouvert. C.Q.F.D.

Rappelons que l'hypothèse que X est localement immersible dans un schéma régulier est toujours remplie lorsque X est un préschéma *localement de type fini sur un corps* k (5.8.3).

Corollaire **(6.11.3)**. — *Sous les hypothèses de* (6.11.2), *l'ensemble* $\mathrm{CM}(\mathscr{F})$ *des points* $x\in X$ *tels que* $\mathscr{F}_x$ *soit un module de Cohen-Macaulay est ouvert dans* X.

En effet, c'est l'ensemble $U_{C_0}(\mathscr{F})$.

Remarques **(6.11.4)**. — (i) Le raisonnement de (6.11.2, (ii)) prouve que (sans hypothèse sur X) lorsque $U_{C_n}(\mathscr{F})$ est ouvert pour *tout* entier n, alors $U_{S_n}(\mathscr{F})$ est ouvert pour tout entier n.

(ii) On a $\mathrm{CM}(\mathscr{F})=\bigcap_n U_{S_n}(\mathscr{F})$. Si tout point $x\in X$ admet un voisinage ouvert V qui soit de dimension *finie*, la suite des intersections $V\cap U_{S_n}(\mathscr{F})$ est *stationnaire* puisqu'il existe un m tel que $\dim(\mathscr{F}_x)\leqslant m$ pour tout $x\in V$; par suite, si les $U_{S_n}(\mathscr{F})$ sont ouverts pour *tout* entier n, $\mathrm{CM}(\mathscr{F})$ est alors ouvert dans X.

(iii) On écrira $U_{S_n}(X)$, $U_{C_n}(X)$, $\mathrm{CM}(X)$ au lieu de $U_{S_n}(\mathscr{O}_X)$, $U_{C_n}(\mathscr{O}_X)$, $\mathrm{CM}(\mathscr{O}_X)$.

Proposition **(6.11.5)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien*, M *un* A-*module de type fini. Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *on a*

$$\text{(6.11.5.1)} \qquad \operatorname{coprof}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\leqslant \operatorname{coprof}_A(M).$$

On peut se borner au cas où $M_\mathfrak{p}\neq 0$. Comme $\hat{A}$ est un A-module fidèlement plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.5), il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\hat{A}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.5.1); comme $\hat{M}_\mathfrak{q}=(M\otimes_A\hat{A})\otimes_{\hat{A}}\hat{A}_\mathfrak{q}=M\otimes_A\hat{A}_\mathfrak{q}$ et que $\hat{A}_\mathfrak{q}$ est un $\hat{A}$-module plat, donc un A-module plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.2.1), il résulte de (6.3.2), appliqué à l'homomorphisme local $A_\mathfrak{p}\rightarrow\hat{A}_\mathfrak{q}$, à $M_\mathfrak{p}$ et $\hat{M}_\mathfrak{q}=M_\mathfrak{p}\otimes_{A_\mathfrak{p}}\hat{A}_\mathfrak{q}$, que l'on a $\operatorname{coprof}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})\leqslant\operatorname{coprof}_{\hat{A}_\mathfrak{q}}(\hat{M}_\mathfrak{q})$. D'autre part, $X=\operatorname{Spec}(\hat{A})$ est isomorphe à un sous-schéma d'un schéma régulier en vertu du théorème de Cohen (**0**,19.8.8, (i)). On déduit donc de (6.11.2) que l'on a $\operatorname{coprof}_{\hat{A}_\mathfrak{q}}(\hat{M}_\mathfrak{q})\leqslant\operatorname{coprof}_{\hat{A}}(\hat{M})$; enfin, on sait que $\operatorname{coprof}_{\hat{A}}(\hat{M})=\operatorname{coprof}_A(M)$ (**0**, 16.4.10), ce qui achève de démontrer (6.11.5).

Cette proposition justifie la définition de la coprofondeur d'un A-module lorsque A n'est pas un anneau local, donnée dans (5.7.12).

Proposition **(6.11.6)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien*, $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$-*Module cohérent*, n *un entier* >0. *Supposons que pour tout sous-préschéma fermé intègre* Y *de* X, *il existe une partie ouverte non vide* W *de* Y *telle que le sous-préschéma de* Y *induit sur l'ouvert* W *vérifie* (S_n). *Alors l'ensemble* $U_{S_n}(\mathscr{F})$ *est ouvert dans* X.

La question étant locale sur X, on peut se borner au cas où X est noethérien. Nous allons raisonner par récurrence sur n : pour $n=1$, l'ensemble $U_{S_1}(\mathscr{F})$ est ouvert dans X, car l'ensemble des $x \in X$ où $\mathscr{F}$ ne vérifie pas (S_1) est l'ensemble des x tels que $\mathscr{F}_x$ admette des idéaux premiers associés immergés (5.7.5); si (Z_j) est la famille finie des cycles premiers associés à $\mathscr{F}$ qui sont immergés, on a par suite $U_{S_1}(\mathscr{F}) = X - \bigcup_j Z_j$, d'où notre assertion puisque les Z_j sont fermés. Nous supposerons donc désormais que $n>1$. En second lieu, on peut se borner au cas où $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) = X$, car il y a un sous-préschéma fermé T de X ayant $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})$ pour espace sous-jacent, et un $\mathcal{O}_T$-Module cohérent $\mathscr{G}$ tels que $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{G})$, $j : T \to X$ étant l'injection canonique ($\mathbf{Err}_{\mathrm{III}}$, 30); comme il revient au même de prouver que $\mathscr{F}$ ou $\mathscr{G}$ vérifie (S_n) en un point $x \in \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$, on peut se borner à considérer le cas où $T = X$. Notons enfin que par définition (5.7.2), $U_{S_n}(\mathscr{F})$ est stable par générisation. Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme **(6.11.6.1)**. — *Soient* X *un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique,* E *une partie de* X. *Pour que* E *soit ouverte dans* X, *il faut et il suffit que* E *soit stable par générisation, et que, pour toute partie ouverte* V *de* X *et toute partie irréductible* Y *fermée dans* V, *telles que* $V - Y \subset E$ *et que le point générique de* Y *appartienne à* E, $E \cap Y$ *contienne une partie ouverte non vide de* Y.

On observera que ce critère entraîne celui de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.2.6) lorsque toute partie fermée irréductible de X admet un point générique. Il n'y a évidemment à démontrer que la suffisance des conditions énoncées.

Considérons l'intérieur U de E; l'ensemble fermé $X - U$ est réunion de ses composantes irréductibles, qui sont en nombre fini et fermées dans X. Si on avait $E \neq U$, l'hypothèse que E est stable par générisation entraînerait que le point générique z d'une des composantes irréductibles de $X - U$ appartiendrait à E. Or, z n'appartient qu'à une seule des composantes irréductibles de $X - U$; si T est la réunion des autres composantes irréductibles de $X - U$, $V = X - T$ est ouvert dans X, réunion de U et de l'ensemble $Y = \overline{\{z\}} \cap V$ fermé dans V et irréductible. Par hypothèse $E \cap Y$ contient une partie W ouverte *dans* Y; on en conclut que $U \cup W$ est ouvert *dans* V, donc dans X, ce qui est absurde puisque U est supposé être l'intérieur de E.

En vertu de ce lemme, on peut supposer qu'il existe dans X un sous-préschéma intègre Y de point générique y tel que $\mathscr{F}$ vérifie (S_n) au point y et en tous les points de $X - Y$, et tout se borne à vérifier qu'il existe dans X un voisinage ouvert de y tel que $\mathscr{F}$ vérifie (S_n) dans ce voisinage. Distinguons alors deux cas :

1° y est point maximal de X; comme il existe un voisinage ouvert de y ne rencontrant aucune composante irréductible de X autre que $\overline{\{y\}}$, on peut supposer que X est irréductible, donc a même espace sous-jacent que Y, de sorte que Y est défini par le Nilradical de $\mathcal{O}_X$, qui est *nilpotent*. D'autre part, on peut, en remplaçant X par un voisinage ouvert de y, supposer que $\mathscr{F}$ est *normalement plat* le long de Y (6.9.1); il résulte alors de (6.10.4) que $U_{S_n}(\mathscr{F}) = U_{S_n}(\mathcal{O}_Y)$, et comme ce dernier est par hypothèse un voisinage de y dans X, cela prouve la proposition dans ce cas.

2° y n'est pas un point maximal de X, autrement dit (puisque $\mathrm{Supp}(\mathscr{F})=X$), $\dim(\mathscr{F}_y)\geqslant 1$, donc aussi $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_y)\geqslant 1$ puisque $\mathscr{F}$ vérifie par hypothèse (S_n) (et *a fortiori* (S_1)) au point y. Remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de y, on peut donc supposer qu'il existe une section f de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de X, $\mathscr{F}$-régulière et telle que $f_y\in\mathfrak{m}_y$, ou encore $f(y)=0$ ($\mathbf{0}$, 15.2.4); on a donc encore $f(x)=0$ pour tout $x\in Y$ ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 5.5.2). On sait que $\mathscr{F}/f\mathscr{F}$ vérifie (S_{n-1}) au point y (5.7.6). Appliquant l'hypothèse de récurrence, et remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de y, on peut donc supposer que $\mathscr{F}/f\mathscr{F}$ vérifie (S_{n-1}) en tout point de X. Mais pour tout $x\in Y$, la relation $f(x)=0$ entraîne que l'on a $\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x/f_x\mathscr{F}_x)=\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x)-1$ et $\dim(\mathscr{F}_x/f_x\mathscr{F}_x)=\dim(\mathscr{F}_x)-1$ ($\mathbf{0}$, 16.3.4 et 16.4.6); la relation

$$\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x/f_x\mathscr{F}_x)\geqslant\inf(n-1,\ \dim(\mathscr{F}_x/f_x\mathscr{F}_x)$$

est donc équivalente à

$$\mathrm{prof}(\mathscr{F}_x)\geqslant\inf(n,\ \dim(\mathscr{F}_x)).$$

Comme on a supposé que $\mathscr{F}$ vérifie (S_n) en tout point de $X-Y$, cela termine la démonstration.

Corollaire **(6.11.7)**. — *Les notations étant celles de* (6.11.6) :

(i) *L'ensemble* $U_{S_1}(\mathscr{F})$ *est ouvert dans* X.

(ii) *Pour que l'ensemble* $U_{S_2}(\mathscr{F})$ *soit ouvert, il suffit que tout point maximal x de* Supp $(\mathscr{F})$, *appartenant à* $U_{S_2}(\mathscr{F})$, *soit intérieur à* $U_{S_2}(\mathscr{F})$.

L'assertion (i) a été prouvée dans le cours de la démonstration de (6.11.6); d'autre part, pour $n=2$ le cas 2° de la démonstration de (6.11.6) est valable sans aucune hypothèse sur X, puisque (avec les mêmes notations) $U_{S_1}(\mathscr{F})$ et $U_{S_1}(\mathscr{F}/f\mathscr{F})$ sont ouverts dans X. Quant au cas 1° de cette démonstration, l'hypothèse assure précisément qu'il est inutile de le considérer.

Proposition **(6.11.8)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien vérifiant la propriété suivante :*

(CMU) *Tout sous-préschéma fermé intègre* Y *de* X *contient un ouvert non vide* W *tel que le préschéma induit par* Y *sur* W *soit un préschéma de Cohen-Macaulay.*

Alors, pour tout $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$, *la fonction* $x\rightsquigarrow\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x)$ *est localement constructible et semi-continue supérieurement ; les ensembles* $U_{C_n}(\mathscr{F})$ *et* $U_{S_n}(\mathscr{F})$ *sont ouverts dans* X.

En effet, soit Y un sous-préschéma fermé intègre de X, de point générique y; en vertu de (6.10.6), il y a dans Y un voisinage ouvert V de y tel que, pour tout $x\in V\cap Y$, on ait

$$\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x)=\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_y)+\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_{Y,x}). \tag{6.11.8.1}$$

Mais par hypothèse il existe un ouvert non vide W de Y tel que, pour $x\in V\cap W$ on ait $\mathrm{coprof}(\mathcal{O}_{Y,x})=0$, donc $\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x)$ est constante dans un voisinage de y dans Y, ce qui prouve que la fonction $x\rightsquigarrow\mathrm{coprof}(\mathscr{F}_x)$ est localement constructible ($\mathbf{0}_\mathrm{III}$, 9.3.2); en outre il résulte alors de (6.11.5) et de ($\mathbf{0}_\mathrm{III}$, 9.3.4) que cette fonction est semi-continue supérieurement. La dernière assertion résulte de (6.11.4, (i)), ou encore de (6.11.6).

Remarques **(6.11.9)**. — (i) Si X vérifie l'hypothèse (CMU) de (6.11.8), alors, pour tout morphisme $u: X'\rightarrow X$ *localement de type fini*, X′ vérifie aussi (CMU). Soient en effet Y′ un sous-préschéma fermé intègre de X′, y' son point générique, $y=u(y')$, et soit Y le sous-préschéma intègre de X ayant pour espace sous-jacent $\overline{\{y\}}$; alors $u|Y'$ se factorise en $Y'\xrightarrow{v}Y\xrightarrow{j}X$, où j est l'injection canonique (**I**, 5.2.2), et v est localement de type fini (**I**, 6.6.6). En se restreignant à des voisinages ouverts affines de y et y' respectivement, on peut donc se borner au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau intègre de Cohen-Macaulay, et $X'=\mathrm{Spec}(A')$, où A′ est un anneau intègre contenant A et qui est une A-algèbre de type fini. Remplaçant au besoin A par un anneau de fractions A_f (avec $f \neq 0$), on peut en outre supposer que A′ contient un anneau de polynômes $A[T_1, \ldots, T_n] = A''$, et est une A″-algèbre *finie* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, nº 1, cor. 1 du th. 1). Mais A″ est un anneau de Cohen-Macaulay (6.3.6); donc on peut se borner au cas où de plus A′ est une A-algèbre *finie*. Il y a alors $g \neq 0$ dans A tel que A'_g soit un A_g-module *libre* de type fini (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, nº 1, cor. de la prop. 2), donc on peut encore supposer de plus que A′ soit un A-module *libre*. Mais alors A′ est un A-module de Cohen-Macaulay (**0**, 16.5.1), et comme A′ est un A-module de type fini, A′ est aussi un A′-module de Cohen-Macaulay (**0**, 16.5.3), donc un anneau de Cohen-Macaulay.

(ii) Supposons qu'il existe un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ tel que $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = X$ et que $\mathcal{F}$ soit un $\mathcal{O}_X$-Module *de Cohen-Macaulay*. Alors X vérifie la condition (CMU) : en effet, avec les notations de la démonstration de (6.11.8), la relation (6.11.8.1) montre que l'on a $\operatorname{coprof}(\mathcal{O}_{Y,x}) = 0$ dans un voisinage (par rapport à Y) du point générique y de Y.

On ignore s'il existe des préschémas localement noethériens de dimension $\geqslant 2$ qui ne vérifient pas (CMU) (si $\dim(X) = 1$, il est immédiat que tout point maximal de X_{red} admet un voisinage ouvert intègre de dimension 1, donc de Cohen-Macaulay).

6.12. Critères de Nagata pour que Reg(X) soit ouvert.

(6.12.1) Étant donné un préschéma localement noethérien X, on appelle *lieu singulier* de X et on note Sing(X) l'ensemble des points $x \in X$ tels que X ne soit pas régulier au point x (autrement dit, tels que l'anneau local $\mathcal{O}_x$ ne soit pas régulier); le complémentaire $X - \operatorname{Sing}(X)$, ensemble des $x \in X$ où X est régulier, se note Reg(X). Nous nous proposons dans ce numéro de donner des conditions moyennant lesquelles Sing(X) est *fermé* (i.e. Reg(X) *ouvert*).

Proposition **(6.12.2)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Reg(X) *est ouvert dans* X.

b) *Pour tout* $x \in \operatorname{Reg}(X)$, *il existe une partie ouverte non vide dans* $\overline{\{x\}}$ *contenue dans* Reg(X).

En outre, ces conditions sont entraînées par la suivante :

c) *Pour tout* $x \in \operatorname{Reg}(X)$, *si on désigne par* Y *le sous-préschéma fermé réduit de* X *ayant* $\overline{\{x\}}$ *pour espace sous-jacent*, Reg(Y) *est un voisinage de* x *dans* Y.

L'équivalence de *a)* et *b)* résulte de ce que Reg(X) est stable par générisation (**0**, 17.3.2) et de ($\mathbf{0}_{\mathrm{III}}$, 9.2.6). Pour prouver que *c)* entraîne *b)*, on peut se borner au cas où $X = \operatorname{Spec}(A)$ est un voisinage ouvert affine de x; si $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système régulier de paramètres (**0**, 17.1.6) de l'anneau local régulier A_x, on peut supposer (en remplaçant au besoin X par un voisinage ouvert de x) que $t_i = (s_i)_x$ pour tout i, où $s_i \in A$ et où la famille $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est A-régulière (**0**, 15.2.4). On a alors $Y = \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p} = \mathfrak{j}_x$; comme les t_i engendrent l'idéal maximal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_x$ de A_x, on peut encore supposer (en remplaçant X par un voisinage plus petit de x) que les s_i engendrent $\mathfrak{p}$. Pour tout $y \in Y$, les $(s_i)_y$ engendrent donc $\mathfrak{p}_y$; comme ils forment une suite A_y-régulière, ils font partie d'un système de paramètres de A_y (**0**, 16.4.1); donc on déduit de (**0**, 17.1.7) que si $(A/\mathfrak{p})_y = A_y/\mathfrak{p}_y$ est régulier, il en est de même de A_y, d'où la conclusion.

Corollaire **(6.12.3)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout sous-préschéma* Y *de* X, Reg(Y) *est ouvert dans* Y.

b) *Pour tout sous-préschéma fermé intègre* Y *de* X, Reg(Y) *contient une partie ouverte non vide de* Y.

Il est clair que *a)* entraîne *b)*, car si Y est intègre et y est son point générique, $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un corps, donc $y \in \operatorname{Reg}(Y)$. Inversement, pour voir que *b)* entraîne *a)*, considérons un sous-préschéma fermé intègre Z de Y de point générique z; si Y′ est le sous-préschéma intègre de X ayant pour espace sous-jacent l'adhérence $Y' = \overline{\{z\}}$ de z dans X, Z est ouvert dans Y′ et le sous-préschéma Z de Y′, étant réduit, est induit par Y′ sur l'ouvert Z de l'espace sous-jacent à Y′. Or l'hypothèse entraîne que Reg(Y′) est un voisinage de z dans Y′, donc Reg(Z) est un voisinage de z dans Z; il suffit alors d'appliquer (6.12.2) en y remplaçant X par Y et Y par Z.

Théorème **(6.12.4)** (Nagata). — *Soient* A *un anneau noethérien*, $X = \operatorname{Spec}(A)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout préschéma* X′ *localement de type fini sur* X, Reg(X′) *est ouvert dans* X′.

b) *Pour toute* A-*algèbre* A′ *finie et intègre, il existe une partie ouverte non vide de* $X' = \operatorname{Spec}(A')$ *contenue dans* Reg(X′).

c) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *et toute extension finie radicielle* K′ *du corps des fractions* K *de* $A/\mathfrak{p}$, *il existe une sous-*A-*algèbre* A′ *de* K′, *finie sur* A, *ayant* K′ *pour corps des fractions, et telle qu'il existe dans* $X' = \operatorname{Spec}(A')$ *un ensemble ouvert non vide contenu dans* Reg(X′).

Il est clair que *a)* implique *b)*. Pour voir que *b)* entraîne *c)*, il suffit de remarquer qu'on peut prendre pour générateurs de l'extension K′ de K des éléments entiers sur $A/\mathfrak{p}$ (et *a fortiori* sur A), et comme ces éléments sont en nombre fini, ils engendrent une A-algèbre finie A′ dont K′ est le corps des fractions; on peut alors appliquer *b)* à A′. Reste donc à prouver que *c)* entraîne *a)*. La question étant locale sur X′, on peut d'abord supposer que $X' = \operatorname{Spec}(A')$, où A′ est une A-algèbre de type fini; compte tenu de (6.12.2), il suffit de prouver que pour tout sous-préschéma fermé intègre Y′ de X′, Reg(Y′) contient une partie ouverte non vide de Y′. Autrement dit, on peut se borner à prouver que si A′ est une A-algèbre *intègre de type fini* et $X' = \operatorname{Spec}(A')$, Reg(X′) contient une partie ouverte non vide de X′. Soit K′ le corps des fractions de A′; si $\mathfrak{p}$ est l'image canonique dans X du point générique de X′, K′ est une extension du corps des fractions K de $A/\mathfrak{p}$, et $A/\mathfrak{p}$ s'identifie à un sous-anneau de A′, A′ étant une $(A/\mathfrak{p})$-algèbre de type fini. On peut évidemment se borner dans la suite de la démonstration au cas $\mathfrak{p} = 0$. Distinguons maintenant deux cas :

I) K′ *est une extension séparable de* K. — On est alors ramené à prouver le

Lemme **(6.12.4.1)**. — *Soient* A *un anneau intègre noethérien*, A′ *une* A-*algèbre intègre de type fini*, *contenant* A *et telle que le corps des fractions* K′ *de* A′ *soit une extension séparable du corps des fractions* K *de* A. *Si* Spec(A) *contient un ouvert non vide formé de points réguliers*, *il en est de même de* Spec(A′).

Remplaçant A par un anneau de fractions A_f de sorte que $D(f) \subset \operatorname{Reg}(\operatorname{Spec}(A))$, on peut déjà supposer l'anneau A *régulier*. Par hypothèse il existe dans K′ un système $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments algébriquement indépendants sur K et tels que K′ soit une extension algébrique séparable finie de $K(t_1, \ldots, t_n)$; en considérant un système fini de générateurs t'_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ de K′ sur $K(t_1, \ldots, t_n)$, que l'on peut supposer entiers sur $A_1 = A[t_1, \ldots, t_n]$, on voit que $A'_1 = A_1[t'_1, \ldots, t'_m]$ est *fini* sur A_1 et a pour corps de fractions K′. Si on pose $X' = \operatorname{Spec}(A')$, $X'_1 = \operatorname{Spec}(A'_1)$, il résulte de ce que les corps de fonctions rationnelles $R(X')$ et $R(X'_1)$ sont tous deux isomorphes à K′ et de ce que X′ et X'_1 sont des A-préschémas de type fini, qu'il existe un ouvert $U' \subset X'$ et un ouvert $U'_1 \subset X'_1$ qui sont A-*isomorphes* (**I**, 6.5.5). On est donc ramené à prouver que $\operatorname{Reg}(X'_1)$ contient un ouvert non vide, autrement dit on peut supposer que A′ est une A_1-*algèbre finie*. Or on sait (**0**, 17.3.7) que A_1 est un anneau *régulier*, et l'on peut donc se borner au cas où A′ est une A-algèbre *finie* et K′ une extension *séparable et finie* de K. Si ξ est le point générique de X, $A'_\xi = K'$ est alors un module libre sur $A_\xi = K$, donc (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 5, n° 1, cor. de la prop. 2) on peut, en remplaçant au besoin A par un A_f, supposer que A′ est un A-module *libre* de type fini. Soit alors $(x_h)_{1 \leqslant h \leqslant r}$ une base de ce A-module, et posons

$$d = \det(\operatorname{Tr}_{A'/A}(x_h x_k)) = \det(\operatorname{Tr}_{K'/K}(x_h x_k)) \in A.$$

Comme K′ est séparable sur K, on sait (Bourbaki, *Alg.*, chap. IX, § 2, prop. 5) que $d \neq 0$; remplaçant au besoin A par l'anneau de fractions A_d, on peut supposer d *inversible* dans A. Mais alors, pour tout $z \in \operatorname{Spec}(A)$, si l'on désigne par $\overline{x}_h$ $(1 \leqslant h \leqslant r)$ l'image canonique de x_h dans $A'(z) = A' \otimes_A \boldsymbol{k}(z)$, on a $\det(\operatorname{Tr}_{A'(z)/\boldsymbol{k}(z)}(\overline{x}_h \overline{x}_k)) = \overline{d}$, image canonique de d dans $\boldsymbol{k}(z) = A_z/\mathfrak{m}_z$, et comme $\overline{d}$ est inversible (donc $\neq 0$) dans $\boldsymbol{k}(z)$, on sait *(loc. cit.)* que $A'(z)$ est une $\boldsymbol{k}(z)$-algèbre *séparable*, donc composée directe de corps extensions finies et séparables de $\boldsymbol{k}(z)$. Une telle algèbre étant un anneau *régulier*, on voit que le morphisme $g : X' \to X$ est *plat* et que ses fibres $g^{-1}(z)$ sont *régulières* pour tout $z \in X$; on conclut alors de (6.5.2, (ii)) que X′ est *régulier*, ce qui termine dans ce cas la démonstration.

II) *Cas général*. — Comme A′ est un A-module sans torsion, $A' \otimes_A K$ s'identifie à un sous-anneau de K′, donc $X'' = \operatorname{Spec}(A' \otimes_A K)$ est un K-préschéma intègre, dont K′ est le corps des fonctions rationnelles. On sait (4.6.6) qu'il existe une extension radicielle finie K_1 de K telle que si $X''_1 = \operatorname{Spec}(A' \otimes_A K_1) = X'' \otimes_K K_1$, $(X''_1)_{\mathrm{red}}$ soit un K_1-préschéma *géométriquement réduit* de type fini; en outre, le morphisme $\operatorname{Spec}(K_1) \to \operatorname{Spec}(K)$ étant radiciel, fini et surjectif, est un homéomorphisme universel (2.4.5), donc X''_1 est homéomorphe à X″, et par suite $(X''_1)_{\mathrm{red}}$ est intègre; en outre, son corps de fonctions rationnelles K'_1 est une extension radicielle finie de K′ et une extension *séparable* de type fini de K_1 (4.6.1). En vertu de l'hypothèse *c)* de l'énoncé, il y a une sous-A-algèbre *finie* A_1 de K_1, ayant K_1 pour corps des fractions et telle que si l'on pose $X_1 = \operatorname{Spec}(A_1)$, $\operatorname{Reg}(X_1)$ contienne un ouvert non vide de X_1. Soit A'_1 l'image de l'homomorphisme canonique $A' \otimes_A A_1 \to K'_1$ et soit $X'_1 = \operatorname{Spec}(A'_1)$; A'_1 est un anneau intègre qui est une A′-algèbre *finie* et dont le corps des fractions est K'_1 par construction; en outre, comme l'homomorphisme composé $A' \to A' \otimes_A A_1 \to A'_1 \to K'_1$ est identique à $A' \to K' \to K'_1$, donc injectif, l'homomorphisme $A' \to A'_1$ est injectif; le morphisme $g : X'_1 \to X'$ est donc fini et surjectif (**II**, 6.1.10). Cela étant, l'hypothèse sur A_1 et la partie I) de la démonstration entraînent que $\operatorname{Reg}(X'_1)$

contient un ouvert non vide V'_1; comme g est fermé (**II**, 6.1.10), on peut supposer que $V'_1=g^{-1}(V')$, où V' est un ouvert affine de X'; remplaçant A' par l'anneau de V' et A'_1 par celui de V'_1, on peut donc supposer que X'_1 est *régulier*. En outre, le même raisonnement que dans I) appliqué au point générique ξ' de X' permet (en remplaçant au besoin X' par un voisinage de ξ') de supposer que A'_1 est un A'-module *libre*, et par suite que le morphisme g est *plat*. Mais il résulte alors de (6.5.2, (i)) que X' est *régulier*. C.Q.F.D.

Corollaire **(6.12.5)** (Zariski). — *Soit k un corps; pour tout k-préschéma X localement de type fini sur k, l'ensemble des $x\in X$ où X est régulier* (resp. *géométriquement régulier sur k*) *est ouvert dans* X.

L'assertion du corollaire relative à la propriété d'être régulier résulte de (6.12.4) en prenant $A=k$. L'assertion relative à la propriété d'être géométriquement régulier résulte déjà de (6.8.7); on peut aussi la déduire de (6.12.4) de la façon suivante : posons $k'=k^{p^{-\infty}}$ (p exposant caractéristique de k); comme le morphisme $\operatorname{Spec}(k')\rightarrow\operatorname{Spec}(k)$ est radiciel, entier et surjectif, c'est un homéomorphisme universel (2.4.5), donc le morphisme projection $X\otimes_k k'\rightarrow X$ est un homéomorphisme. La projection dans X de $\operatorname{Reg}(X\otimes_k k')$ est l'ensemble des points de X où X est géométriquement régulier sur k, en vertu de (6.7.7, *e)*); donc cet ensemble est ouvert d'après ce qui précède.

Corollaire **(6.12.6)**. — *Soit* A *un anneau ayant l'une des propriétés suivantes :*

(i) A *est un anneau de Dedekind et son corps des fractions* K *est de caractéristique* 0.

(ii) A *est un anneau semi-local noethérien de dimension* $\leqslant 1$.

Alors, pour tout préschéma X *localement de type fini sur* A, $\operatorname{Reg}(X)$ *est ouvert dans* X.

Vérifions dans les deux cas la condition *c)* de (6.12.4). Dans les deux cas, un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est maximal ou minimal; si $\mathfrak{p}$ est maximal, une $(A/\mathfrak{p})$-algèbre finie et intègre est un corps et la condition *c)* de (6.12.4) est trivialement vérifiée. Supposons donc $\mathfrak{p}$ non maximal, et distinguons les deux cas de l'énoncé.

(i) Si K est de caractéristique 0, il n'y a pas d'autre extension radicielle de K que K lui-même; comme un anneau de Dedekind est régulier (**0**, 17.1.4), la condition *c)* de (6.12.4) est trivialement vérifiée.

(ii) On peut alors supposer A intègre (6.12.2), soit K son corps des fractions; si K' est une extension radicielle finie de K, A' une sous-A-algèbre de K' engendrée par un système fini de générateurs de K' sur K, entiers sur A, A' est un anneau semi-local intègre de dimension 1 (**0**, 16.1.5), et par suite, dans $X'=\operatorname{Spec}(A')$, l'ensemble réduit au point générique est ouvert et évidemment contenu dans $\operatorname{Reg}(X')$, ce qui prouve la condition *c)* de (6.12.4) dans ce cas.

Ce corollaire s'applique notamment lorsque $A=\mathbf{Z}$.

Théorème **(6.12.7)** (Nagata). — *Soient* A *un anneau local noethérien complet*, $X=\operatorname{Spec}(A)$. *Alors* $\operatorname{Reg}(X)$ *est ouvert dans* X.

Compte tenu de (6.12.2), on est ramené au cas où de plus A est *intègre*, et à prouver que dans ce cas $\operatorname{Reg}(X)$ contient une partie ouverte non vide de X. Distinguons deux cas :

I) *Le corps des fractions* K *de* A *est de caractéristique* o. — On sait alors (**0**, 19.8.8) qu'il existe un anneau de valuation discrète complet C et un sous-anneau B de A tel que A soit une B-algèbre *finie* et que B soit isomorphe à un anneau de séries formelles $C[[T_1, \ldots, T_r]]$. Comme C est régulier (**II**, 7.1.6), il en est de même de B (**0**, 17.3.8); en outre, le corps des fractions L de B étant de caractéristique o, K est une extension *séparable* finie de L, donc on peut appliquer (6.12.4.1) à B, et cela prouve alors la proposition.

II) *Le corps des fractions* K *de* A *est de caractéristique* $p>0$. — Alors A contient le corps premier $\mathbf{F}_p$, et le théorème a été prouvé dans ce cas (**0**, 22.7.6).

Corollaire (**6.12.8**). — *Soit* A *un anneau local noethérien complet. Alors, pour tout préschéma* X *localement de type fini sur* A, Reg(X) *est ouvert dans* X.

Vérifions la condition *c)* de (6.12.4). Si $\mathfrak{p}$ est premier dans A, $A/\mathfrak{p}$ est encore un anneau local noethérien complet; si K′ est une extension finie du corps des fractions K de $A/\mathfrak{p}$, K′ est corps des fractions d'une sous-A-algèbre finie A′ de K′, engendrée par un système de générateurs de K′ sur K, entiers sur A. On sait alors que A′ est un anneau semi-local complet (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9), donc produit d'anneaux locaux complets, et comme A′ est intègre, c'est un anneau local complet; en vertu de (6.12.7), si $X'=\mathrm{Spec}(A')$, $\mathrm{Reg}(X')$ est ouvert et non vide, d'où la conclusion.

Proposition (**6.12.9**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien tel que* Reg(X) *soit ouvert; alors, pour tout* $n\geqslant 0$, *l'ensemble* $U_{R_n}(X)$ *des points* $x\in X$ *où* X *vérifie* (R_n) *est ouvert.*

En effet (5.8.2), $U_{R_n}(X)$ est réunion de Reg(X) et de l'ensemble des $x\in\mathrm{Sing}(X)$ tels que les points génériques z_i des composantes irréductibles de Sing(X) contenant x vérifient la relation $\dim(\mathcal{O}_{X,z_i})\geqslant n+1$ (puisque l'on a $z_i\notin\mathrm{Reg}(X)$); autrement dit, ces points $x\in\mathrm{Sing}(X)$ sont ceux pour lesquels on a $\mathrm{codim}_x(\mathrm{Sing}(X), X)\geqslant n+1$ (5.1.2); comme la fonction $x\rightsquigarrow\mathrm{codim}_x(\mathrm{Sing}(X), X)$ est semi-continue inférieurement (**0**, 14.2.6), l'ensemble de ces points est ouvert dans Sing(X), ce qui achève la démonstration.

Notons aussi le résultat élémentaire suivant :

Proposition (**6.12.10**). — *Soit* X *un préschéma localement noethérien. L'ensemble* $U_{R_0}(X)$ *est ouvert dans* X. *Pour que* $U_{R_1}(X)$ *soit ouvert dans* X, *il faut et il suffit que tout point maximal* $x\in X$ *tel que* $x\in U_{R_1}(X)$ (ce qui signifie que X est *réduit* en x) *soit intérieur à* $U_{R_1}(X)$.

Par définition (5.8.2), $U_{R_0}(X)$ est l'ensemble $X-\bigcup_\alpha X'_\alpha$, où X'_α parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de X telles que X ne soit pas réduit en leur point générique; comme l'ensemble des composantes irréductibles de X est localement fini, $U_{R_0}(X)$ est ouvert. En ce qui concerne $U_{R_1}(X)$, la condition de l'énoncé étant trivialement nécessaire, prouvons qu'elle est suffisante. Soient X''_β les composantes irréductibles de X telles qu'en leur point générique x''_β le préschéma X soit réduit; par hypothèse il existe un ouvert $U\subset U_{R_1}(X)$ contenant tous les x''_β. Désignons alors par Z_λ les composantes irréductibles de l'ensemble fermé $Z=X-U$ dont le point générique z_λ est tel que $\dim(\mathcal{O}_{X,z_\lambda})\leqslant 1$ et que $\mathcal{O}_{X,z_\lambda}$ soit non régulier. Aucun point appartenant à l'un des Z_λ ne peut appartenir à $U_{R_1}(X)$; mais inversement, si $x \in Z$ n'appartient à aucun des Z_λ, alors, pour toute générisation x' de x, ou bien x' appartient à U, ou bien on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x'}) \geqslant 2$, ou bien on a $\dim(\mathcal{O}_{X,x'}) = 1$, et comme x' n'appartient à aucun des Z_λ, $\overline{\{x'\}}$ est nécessairement une composante irréductible de Z, de codimension 1 dans X, distincte des Z_λ, donc $\mathcal{O}_{X,x'}$ est régulier par définition. On en conclut que $U_{R_1}(X) = X - \bigcup_\lambda Z_\lambda$; comme l'ensemble des Z_λ est localement fini dans Z, $\bigcup_\lambda Z_\lambda$ est fermé, ce qui achève de prouver que $U_{R_1}(X)$ est ouvert dans X.

6.13. Critères pour que Nor(X) soit ouvert.

(6.13.1) Étant donné un préschéma localement noethérien X, nous noterons Nor(X) l'ensemble des $x \in X$ où X est *normal*; cet ensemble contient Reg(X) et est contenu dans l'ensemble (ouvert) des points x tels que $\mathcal{O}_{X,x}$ soit intègre (i.e. l'ensemble des points x où X est réduit, et qui n'appartiennent qu'à une seule composante irréductible de X).

Proposition **(6.13.2)**. — *Soient* X *un préschéma localement noethérien réduit,* X' *son normalisé* (**II**, 6.3.8). *Si le morphisme canonique* $f: X' \to X$ *est fini,* Nor(X) *est ouvert dans* X.

En effet, on a $X' = \mathrm{Spec}(f_*(\mathcal{O}_{X'}))$ et $f_*(\mathcal{O}_{X'})$ est une $\mathcal{O}_X$-Algèbre *cohérente* par hypothèse (**II**, 6.1.3). Dire que X est normal en un point x signifie que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_x \to (f_*(\mathcal{O}_{X'}))_x$ est bijectif (**II**, 6.3.4); mais l'ensemble de ces points est *ouvert* puisque $\mathcal{O}_X$ et $f_*(\mathcal{O}_{X'})$ sont cohérents ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 5.2.7).

Corollaire **(6.13.3)**. — *Si* A *est un anneau intègre noethérien japonais,* Nor(Spec(A)) *est ouvert dans* Spec(A).

Proposition **(6.13.4)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien. Pour que* Nor(X) *soit ouvert, il faut et il suffit que tout point maximal* x *de* X *tel que* $x \in \mathrm{Nor}(X)$ (ce qui signifie que X est *réduit* au point x) *soit intérieur à* Nor(X).

Il n'y a à prouver que la suffisance de la condition. En vertu de la remarque faite dans (6.13.1), on peut se borner (en remplaçant X par un ouvert de X dans lequel X est réduit) au cas où X est *réduit*, i.e. supposer que les points maximaux de X appartiennent à $U_{S_2}(X)$ et à $U_{R_1}(X)$; comme $\mathrm{Nor}(X) = U_{S_2}(X) \cap U_{R_1}(X)$ en vertu du critère de Serre (5.8.6), on déduit donc de (6.11.7) et (6.12.10) que ces deux ensembles sont ouverts; par suite Nor(X) est ouvert dans X.

Corollaire **(6.13.5)**. — *Si* X *est tel que* Reg(X) *soit ouvert dans* X, *alors* Nor(X) *est ouvert dans* X.

En effet, tout point maximal x où X est réduit (donc $\mathcal{O}_{X,x}$ un corps) appartient à Reg(X), donc est intérieur à Reg(X) par hypothèse, et *a fortiori* est intérieur à Nor(X).

Proposition **(6.13.6)** (Nagata). — *Soient* A *un anneau intègre noethérien,* K *son corps des fractions,* K' *une extension finie de* K, A' *la fermeture intégrale de* A *dans* K'. *Pour que* A' *soit une* A*-algèbre finie, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) *Il existe* $f \neq 0$ *dans* A *tel que la fermeture intégrale* A'_f *de l'anneau de fractions* A_f *dans* K' *soit une* A_f*-algèbre finie.*

(ii) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, *la fermeture intégrale* $A'_{\mathfrak{p}}$ *de l'anneau local* $A_{\mathfrak{p}}$ *dans* K' *est une* $A_{\mathfrak{p}}$*-algèbre finie.*

Les conditions sont nécessaires, car pour toute partie multiplicative S de A, $S^{-1}A'$ est la fermeture intégrale de $S^{-1}A$ dans K' et est par hypothèse un $S^{-1}A$-module de type fini. Pour voir que les conditions sont suffisantes, considérons la famille filtrante croissante (B_λ) des sous-A-algèbres de K' qui sont des A-algèbres finies et ont K' pour corps des fractions. Posons $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X_\lambda = \mathrm{Spec}(B_\lambda)$, désignons par u_λ le morphisme $X_\lambda \rightarrow Y$ et soient $S_\lambda = X_\lambda - \mathrm{Nor}(X_\lambda)$, $T_\lambda = u_\lambda(S_\lambda)$. On peut se borner aux B_λ qui contiennent un ensemble fini dont l'image dans A'_f est un système de générateurs du A_f-module A'_f; cela entraîne, en vertu de l'hypothèse (i), que $(B_\lambda)_f = A'_f$ pour tout λ, ou encore que $u_\lambda^{-1}(D(f))$ est contenu dans $\mathrm{Nor}(X_\lambda)$. En vertu de (6.13.2), S_λ est donc *fermé* dans X_λ, et comme u_λ est un morphisme fini, T_λ est *fermé* dans Y. Mais pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, il existe en vertu de (ii) un λ tel que $(B_\lambda)_{\mathfrak{p}} = A'_{\mathfrak{p}}$, et par suite tous les points de X_λ au-dessus de $\mathfrak{p}$ appartiennent à $\mathrm{Nor}(X_\lambda)$; en d'autres termes on a $\bigcap_\lambda T_\lambda = \emptyset$; comme Y est noethérien et les T_λ fermés, il existe un λ_0 tel que $T_{\lambda_0} = \emptyset$; donc B_{λ_0} est intégralement clos, et comme son corps des fractions est K', on a $B_{\lambda_0} = A'$. C.Q.F.D.

Proposition **(6.13.7)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* $X = \mathrm{Spec}(A)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout préschéma* X' *localement de type fini sur* X, Nor(X') *est ouvert dans* X'.

b) *Pour toute* A*-algèbre finie et intègre* A', Nor(Spec(A')) *est ouvert dans* Spec(A').

c) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A *et toute extension finie radicielle* K' *du corps des fractions* K *de* $A/\mathfrak{p}$, *il existe une sous-*A*-algèbre* A' *de* K', *finie sur* A, *ayant* K' *pour corps des fractions et telle que* Nor(Spec(A')) *soit ouvert dans* Spec(A').

Le fait que *a)* implique *b)* et que *b)* implique *c)* se prouve comme dans (6.12.4). Pour montrer que *c)* entraîne *a)*, compte tenu de (6.13.2), on se ramène comme dans (6.12.4) à prouver que si A' est une A-algèbre intègre et de type fini, le point générique de Spec(A') est intérieur à Nor(Spec(A')). On distingue alors deux cas comme dans (6.12.4) en prouvant d'abord le

Lemme **(6.13.7.1)**. — *Soient* A *un anneau intègre noethérien,* A' *une* A*-algèbre intègre de type fini, contenant* A *et telle que le corps des fractions* K' *de* A' *soit une extension séparable du corps des fractions* K *de* A. *Si* Nor(Spec(A)) *est ouvert dans* Spec(A), Nor(Spec(A')) *est ouvert dans* Spec(A').

Il s'agit de prouver (compte tenu de (6.13.2)) que le point générique de Spec(A') est intérieur à Nor(Spec(A')). La démonstration suit la même marche que celle de (6.12.4.1), dont nous conservons les notations. On remarque d'abord que l'on peut supposer que A est intégralement clos, et alors on sait que $A_1 = A[t_1, \ldots, t_n]$ est intégralement clos (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 3, cor. 2 de la prop. 13); on se ramène ensuite au cas où A' est un A-module *libre de type fini*; le raisonnement de (6.12.4.1) prouve alors (en remplaçant au besoin A par un anneau A_f avec $f \neq 0$) que les fibres $g^{-1}(z)$ du morphisme $g : X' \rightarrow X$ sont régulières et *a fortiori* normales. En outre g est plat et X est normal, donc (6.5.4, (ii)) X' est normal.

Ce lemme étant démontré, on passe au cas général comme dans (6.12.4; II)), dont nous conservons encore les notations; appliquant l'hypothèse *c)*, on voit cette fois que $\mathrm{Nor}(X'_1)$ est ouvert et on se ramène ainsi au cas où X'_1 est normal et $g : X' \rightarrow X'$ plat et surjectif; on conclut cette fois que X' est normal à l'aide de (6.5.4, (i)).

6.14. Changement de base et clôture intégrale.

Proposition **(6.14.1)**. — *Soient* Y, Y' *deux préschémas localement noethériens,* $g : Y' \rightarrow Y$ *un morphisme normal* (6.8.1). *Alors, pour tout* Y*-préschéma normal* X, *le préschéma* $X' = X \times_Y Y'$ *est normal.*

On notera que dans cet énoncé *on ne suppose pas* X *localement noethérien.*

Lemme **(6.14.1.1)**. — *Soit* R *un anneau composé direct d'un nombre fini de corps.*

(i) *Pour qu'un sous-anneau* A *de* R *ayant* R *pour anneau total des fractions soit normal, il faut et il suffit qu'il soit intégralement fermé dans* R.

(ii) *Soit* (A_λ) *une famille de sous-anneaux normaux de* R; *si* $A=\bigcap_\lambda A_\lambda$ *admet* R *pour anneau total des fractions*, A *est normal.*

(i) Comme A est un sous-anneau de R, $A_\mathfrak{p}$ est un sous-anneau de $R_\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, et $R_\mathfrak{p}$ est un anneau de fractions de $A_\mathfrak{p}$; en outre $R_\mathfrak{p}$ est nécessairement composé direct d'un nombre fini de corps, donc tout élément non diviseur de 0 dans $R_\mathfrak{p}$ est inversible; cela prouve que $R_\mathfrak{p}$ est l'anneau total des fractions de $A_\mathfrak{p}$. Si A est intégralement fermé dans R, $A_\mathfrak{p}$ est donc intégralement fermé dans $R_\mathfrak{p}$; mais si $R_\mathfrak{p}$ est composé direct de 2 corps au moins, la fermeture intégrale de $A_\mathfrak{p}$ dans $R_\mathfrak{p}$ est composée directe de 2 anneaux au moins non réduits à 0, ce qui est absurde puisque $A_\mathfrak{p}$ est un anneau local; donc $R_\mathfrak{p}$ est nécessairement un corps et $A_\mathfrak{p}$ est intègre et intégralement clos, ce qui par définition signifie que A est normal. Inversement, si A est normal, $R_\mathfrak{p}$, anneau total des fractions d'un anneau intègre $A_\mathfrak{p}$, est un corps et $A_\mathfrak{p}$ est intégralement fermé dans $R_\mathfrak{p}$; si $x \in R$ est un élément entier sur A, son image dans chaque $R_\mathfrak{p}$ est entière sur $A_\mathfrak{p}$, donc appartient à $A_\mathfrak{p}$; on en conclut que $x \in A$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 3, n° 3, cor. 1 du th. 1), et par suite A est intégralement fermé dans R.

(ii) Comme $A \subset A_\lambda \subset R$ pour tout λ, R est aussi l'anneau total des fractions de chaque A_λ. Vu la caractérisation des anneaux normaux ayant R pour anneau total des fractions, donnée dans (i), l'assertion (ii) résulte de Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 3, prop. 12.

Ce lemme étant démontré, la démonstration de (6.14.1) procède en plusieurs étapes.

I) *Réduction au cas où* $Y=\operatorname{Spec}(A)$, $Y'=\operatorname{Spec}(A')$, $X=\operatorname{Spec}(B)$, A, A′ *étant des anneaux locaux noethériens*, A *intègre*, B *la clôture intégrale de* A. — Il s'agit de prouver que pour tout $x' \in X'$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X',x'}$ est intègre et intégralement clos; soient x, y, y' les images canoniques de x' dans X, Y, Y′ respectivement; si l'on pose $A=\mathcal{O}_{Y,y}$, $A'=\mathcal{O}_{Y',y'}$, $B=\mathcal{O}_{X,x}$, les anneaux $\mathcal{O}_{X',x'}$ pour x, y, y' fixés, sont les anneaux locaux aux idéaux premiers de l'anneau $B'=B\otimes_A A'$ (**I**, 3.6.5), et il s'agit donc de prouver que B′ est un anneau *normal*. Notons d'autre part que $\operatorname{Spec}(A') \rightarrow \operatorname{Spec}(A)$ est un morphisme normal par définition (6.8.1 et **I**, 3.6.5); on est donc ramené au cas où Y et Y′ sont des schémas locaux, X le spectre d'un anneau local *intègre et intégralement clos* B. Désignons par (B_α) la famille des *clôtures intégrales* des sous-A-algèbres *de type fini* de B; il est clair que B est réunion de la famille filtrante croissante des B_α. Comme le foncteur $\varinjlim$ commute au produit tensoriel, B′ est donc isomorphe à $\varinjlim B'_\alpha$, où l'on a posé $B'_\alpha=B_\alpha\otimes_A A'$. Pour prouver que B′ est normal, il suffira, en vertu de (5.13.6), de montrer que les anneaux B'_α sont *normaux* et que, pour $\alpha \leqslant \beta$, toute composante irréductible de $\operatorname{Spec}(B'_\beta)$ *domine* une composante irréductible de $\operatorname{Spec}(B'_\alpha)$. Mais cette dernière propriété résulte de l'hypothèse que A′ est un A-module plat et de (2.3.7, (ii)), puisque B_α et B_β sont intègres et que $B_\alpha \subset B_\beta$.

On peut donc se borner à démontrer que $B'=B\otimes_A A'$ est normal lorsque B est la clôture intégrale d'une A-algèbre intègre de type fini C; dans ce cas, si l'on pose $C'=C\otimes_A A'$, le morphisme $\mathrm{Spec}(C') \to \mathrm{Spec}(C)$ est normal (6.8.2); comme $B'=B\otimes_C C'$, on voit qu'on peut remplacer A et A' par C et C' respectivement, donc supposer que A est intègre et que B est la *clôture intégrale de* A. Enfin, le procédé du début permet de se borner au cas où A est *local* (tenant compte de ce que, si B est la clôture intégrale de A, $B_{\mathfrak{p}}$ est la clôture intégrale de $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A).

II) *Réduction au cas où* A *est un anneau local intègre de dimension* 1, B *un anneau de valuation discrète, clôture intégrale de* A *et le morphisme* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *radiciel.* — Soit K le corps des fractions de A. On sait (**0**, 23.2.7) que B est intersection d'une famille (V_λ) d'anneaux de valuation discrète telle que, pour tout $x\in K$, on ait $x\in V_\lambda$ sauf pour un nombre fini d'indices λ. On a donc une suite exacte de A-modules

$$0\to B\to K\to \bigoplus_\lambda (K/V_\lambda).$$

Posons $K'=K\otimes_A A'$, $V'_\lambda=V_\lambda\otimes_A A'$; par platitude, on déduit de la suite exacte précédente une nouvelle suite exacte

$$0\to B'\to K'\to \bigoplus (K'_\lambda/V'_\lambda)$$

et par suite $B'=\bigcap_\lambda V'_\lambda$. En outre $\mathrm{Spec}(K')$ est la fibre du morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ au point générique de Spec(A), donc K' est un anneau noethérien *normal*, et par suite composé direct d'un nombre fini d'anneaux intègres et intégralement clos; le composé direct L' des corps des fractions de ces derniers est l'anneau total des fractions de A', donc aussi celui de B'. On peut donc appliquer le lemme (6.14.1.1), et si l'on prouve que chacun des V'_λ est un anneau *normal*, il en sera de même de B'.

On sait d'autre part (**0**, 23.2.7) qu'on peut prendre les V_λ tels qu'il y ait une sous-A-algèbre finie C de K telle que V_λ soit la clôture intégrale de $C_{\mathfrak{p}_\lambda}$, où $\mathfrak{p}_\lambda$ est un idéal premier de hauteur 1 dans C. Si l'on pose $C'_{\mathfrak{p}_\lambda}=C_{\mathfrak{p}_\lambda}\otimes_A A'$, le morphisme $\mathrm{Spec}(C'_{\mathfrak{p}_\lambda}) \to \mathrm{Spec}(C_{\mathfrak{p}_\lambda})$ est normal (6.8.2) et l'on a $V'_\lambda=V_\lambda\otimes_{C_{\mathfrak{p}_\lambda}} C'_{\mathfrak{p}_\lambda}$; on peut donc remplacer B par V_λ et A par $C_{\mathfrak{p}_\lambda}$, donc supposer que A est local, intègre et *de dimension* 1, B sa clôture intégrale et un anneau de valuation discrète. Il y a une sous-A-algèbre *finie* A_1 de B telle que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A_1)$ soit radiciel (**0**, 23.2.5), ce qui entraîne en particulier que A_1 est aussi un anneau local (évidemment de dimension 1); en outre on peut supposer que B et A_1 ont même corps résiduel *(loc. cit.)*. On peut donc par la même méthode remplacer A par A_1. Appliquant si nécessaire le procédé du début de I), on peut enfin supposer que A' est lui aussi un anneau *local* et que l'homomorphisme $A\to A'$ est *local*.

III) *Fin de la démonstration.* — Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Lemme (**6.14.1.2**). — *Soient* A *un anneau local noethérien intègre de dimension* 1, A' *un anneau local noethérien,* $A\to A'$ *un homomorphisme local tel que le morphisme correspondant* $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ *soit normal. Soient* K *le corps des fractions de* A, $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, $k=A/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel.*

(i) *Si* $\mathfrak{q}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ *sont les idéaux minimaux de* A', $K' = K \otimes_A A'$ *est composé direct d'anneaux intègres et intégralement clos* $K'_j \supset A'/\mathfrak{q}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, K'_j *ayant pour corps des fractions le corps des fractions* L'_j *de* $A'/\mathfrak{q}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, *de sorte que l'anneau total des fractions* L' *de* A' *s'identifie au composé direct des* L'_j *et* A' *à un sous-anneau de* K'.

(ii) *L'idéal* $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}A'$ *de* A' *est premier; l'anneau* $A'_{\mathfrak{p}'}$ *est de dimension* 1 *et s'identifie à un sous-anneau du produit des corps* L'_j *pour les indices j tels que* $\mathfrak{q}'_j \subset \mathfrak{p}'$.

(iii) *Si* $\overline{A}'_{\mathfrak{p}'}$ *désigne le sous-anneau de* L', *produit de* $A'_{\mathfrak{p}'}$ *et des* L'_j *tels que* $\mathfrak{q}'_j \not\subset \mathfrak{p}'$, *on a*

(6.14.1.3) $$A' = K' \cap \overline{A}'_{\mathfrak{p}'}.$$

L'assertion (i) a déjà été vue au cours de la démonstration de II) et est indépendante de l'hypothèse dimensionnelle sur A. L'hypothèse que le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ est normal entraîne que $A' \otimes_A k = A'/\mathfrak{m}A'$ est un anneau normal *local* et noethérien, donc *intègre*, ce qui montre déjà que $\mathfrak{p}' = \mathfrak{m}A'$ est premier. On a, d'après (6.1.2), $\dim(A'_{\mathfrak{p}'}) = \dim(A) + \dim(A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{m}A'_{\mathfrak{p}'})$. Mais $A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{m}A'_{\mathfrak{p}'} = A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}'A'_{\mathfrak{p}'}$ est le corps résiduel de $A'_{\mathfrak{p}'}$, donc $\dim(A'_{\mathfrak{p}'}) = 1$. Le fait que $A'_{\mathfrak{p}'}$ est contenu dans le composé direct des L'_j tels que $\mathfrak{q}'_j \subset \mathfrak{p}'$ résulte de ce que les idéaux $\mathfrak{q}'_j A'_{\mathfrak{p}'}$ pour ces indices j sont les idéaux premiers minimaux de $A'_{\mathfrak{p}'}$.

Reste à prouver (6.14.1.3). On a évidemment $A' \subset K' \cap \overline{A}'_{\mathfrak{p}'}$. Inversement, soit y' un élément de cette intersection; soit a un « paramètre » pour A, donc tel que Aa soit $\mathfrak{m}$-primaire, et soit a' l'image de a dans A'; tout élément de K peut s'écrire x/a^n pour $x \in A$ et un $n > 0$ puisque Aa contient une puissance de $\mathfrak{m}$; donc on peut écrire $y' = x'/a'^n$ avec $x' \in A'$. Notons maintenant que $\mathfrak{p}'$ est le *seul* idéal premier associé à $A'/a'^n A' = (A/a^n A) \otimes_A A'$: comme A' est un A-module plat, cela résulte de (3.3.1), $\mathfrak{m}$ étant le seul idéal premier associé à $A/a^n A$ et $k \otimes_A A'$ étant intègre. Par suite, $a'^n A'$ est l'image réciproque dans A' de $a'^n A'_{\mathfrak{p}'}$; comme par hypothèse $y' \in \overline{A}'_{\mathfrak{p}'}$, l'image de x' dans $A'_{\mathfrak{p}'}$ appartient à $a'^n A'_{\mathfrak{p}'}$; d'où $x' \in a'^n A'$ et $y' \in A'$, ce qui achève la démonstration.

Ce lemme étant établi, dans le cas où nous sommes ramenés à la fin de II), B' est *radiciel* sur A' (**I**, 3.5.7) et par suite est aussi un anneau *local*; en outre B' est entier sur A', donc, si $\mathfrak{q}'$ est l'unique idéal premier de B' au-dessus de $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'B'_{\mathfrak{p}'}$ est le seul idéal maximal de $B'_{\mathfrak{p}'}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, n° 1, prop. 1), donc $B'_{\mathfrak{q}'} = B'_{\mathfrak{p}'} = B \otimes_A A'_{\mathfrak{p}'}$. Nous allons d'abord démontrer que $B'_{\mathfrak{p}'}$ est un anneau *noethérien* et *normal*. Or, comme B contient A et est contenu dans K et que $A'_{\mathfrak{p}'}$ est un A-module plat, $B'_{\mathfrak{p}'}$ contient $A'_{\mathfrak{p}'}$ et est contenu dans $K'_{\mathfrak{p}'}$, donc dans le produit L_1 des L'_j tels que $\mathfrak{q}'_j \subset \mathfrak{p}'$. Pour tout indice j tel que $\mathfrak{q}'_j \subset \mathfrak{p}'$, soit $\mathfrak{a}'_j$ le produit des L'_h tels que $h \neq j$, de sorte que $\mathfrak{a}'_j \cap A' = \mathfrak{q}'_j$; comme tout élément de $A' - \mathfrak{p}'$ est régulier dans L_1, on a aussi

$$\mathfrak{a}'_j \cap A'_{\mathfrak{p}'} = \mathfrak{q}'_j A'_{\mathfrak{p}'}.$$

Soit $\mathfrak{r}'_j = B'_{\mathfrak{p}'} \cap \mathfrak{a}'_j$, de sorte que $B'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{r}'_j$ est isomorphe à la projection de $B'_{\mathfrak{p}'}$ dans L'_j; donc $B'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{r}'_j$ contient l'anneau local *intègre de dimension* 1, $A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{q}'_j A'_{\mathfrak{p}'}$, et est contenu dans son corps des fractions L'_j; il est par suite noethérien en vertu du théorème de Krull-Akizuki (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 2, n° 5, prop. 5).

Comme l'intersection des $\mathfrak{r}'_j$ est réduite à 0, on en déduit que $B'_{\mathfrak{p}'}$ lui-même est noethérien, en raison du lemme classique suivant :

Lemme **(6.14.1.4)**. — *Soient* R *un anneau,* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux idéaux de* R; *si* $R/\mathfrak{a}$ *et* $R/\mathfrak{b}$ *sont noethériens, il en est de même de* $R/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$.

En effet, soit $\mathfrak{c}$ un idéal de R tel que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subset\mathfrak{c}$; on a donc $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}\subset\mathfrak{c}$; or $\mathfrak{c}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})$ est un R-module isomorphe à $(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})/\mathfrak{a}$, donc à un idéal de $R/\mathfrak{a}$, et par suite est de type fini; d'autre part $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ est un sous-R-module de $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$, et ce dernier est isomorphe à $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$, donc est de type fini comme idéal de $R/\mathfrak{b}$; donc $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$ est aussi un R-module de type fini, et il en est finalement de même de $\mathfrak{c}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$.

Notons d'autre part que Spec(A) se compose du point fermé $\mathfrak{m}$ et du point générique (0), de corps résiduels k et K respectivement; comme dans le cas où nous nous sommes placés, le corps des fractions de B et son corps résiduel sont respectivement isomorphes à K et k, les fibres du morphisme $u : \operatorname{Spec}(B'_{\mathfrak{p}'}) \to \operatorname{Spec}(B)$ au point fermé et au point générique de Spec(B) sont respectivement *isomorphes* aux fibres du morphisme $\operatorname{Spec}(A'_{\mathfrak{p}'}) \to \operatorname{Spec}(A)$ au point fermé et au point générique de Spec(A) (**I**, 3.6.4), donc sont *géométriquement normales* par hypothèse; comme d'autre part le morphisme u est plat, on en conclut qu'il est *normal* (6.8.1). Mais comme B et $B'_{\mathfrak{p}'}$ sont noethériens et que B est normal, on déduit de (6.5.4) que $B'_{\mathfrak{p}'}$ est *normal.*

Cela étant, B est réunion de la famille filtrante croissante de ses sous-A-algèbres finies A_α; par platitude, B' est réunion de la famille filtrante croissante des $A'_\alpha = A_\alpha \otimes_A A'$; si l'on pose $\mathfrak{p}'_\alpha = \mathfrak{q}' \cap A'_\alpha$, $B'_{\mathfrak{q}'}$ est aussi réunion de la famille filtrante croissante des $(A'_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha}$ (5.13.3). Désignons par L'' le composé direct des corps L'_j tels que $\mathfrak{q}'_j \not\subset \mathfrak{p}'$; alors pour tout α, $(A'_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha}$ est contenu dans $K'_{\mathfrak{p}'}$, et l'anneau $\overline{B}'_{\mathfrak{q}'} = L''\times B'_{\mathfrak{q}'}$ est donc réunion des anneaux $L''\times(A'_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha} = (\overline{A}'_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha}$. Mais chacun des A_α est local, noethérien, intègre et de dimension 1, et le morphisme $\operatorname{Spec}(A'_\alpha) \to \operatorname{Spec}(A_\alpha)$ est normal (6.8.2), donc on peut lui appliquer le lemme (6.14.1.2) et l'on a

$$A'_\alpha = K' \cap (\overline{A}'_\alpha)_{\mathfrak{p}'_\alpha}$$

pour tout α; prenant la limite inductive de chacun des deux membres, il vient

$$B' = K' \cap \overline{B}'_{\mathfrak{q}'}.$$

Mais $\overline{B}'_{\mathfrak{q}'}$, composé direct des anneaux normaux L'' et $B'_{\mathfrak{q}'}$, est normal, et comme il en est de même de K', le lemme (6.14.1.1) montre que B' est normal. C.Q.F.D.

Corollaire **(6.14.2)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma normal* (non nécessairement localement noethérien). *Alors, pour toute extension séparable k' de k,* $X_{(k')} = X\otimes_k k'$ *est normal.*

On sait en effet (6.7.6) que le morphisme $\operatorname{Spec}(k') \to \operatorname{Spec}(k)$ est alors normal.

Corollaire **(6.14.3)**. — *Soient k un corps,* X, Y *deux k-préschémas intègres et normaux, dont les corps de fonctions rationnelles* $K = R(X)$, $L = R(Y)$ *sont des extensions séparables de k. Alors le préschéma* $X\times_k Y$ *est normal.*

La question étant locale sur X et Y, on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, où A et B sont deux anneaux intègres et intégralement clos, de corps des fractions K et L respectivement; supposons d'abord que A soit une k-algèbre de type fini, donc K une extension de type fini de k. Par platitude, $A\otimes_k B$ est une sous-k-algèbre de $K\otimes_k L$; or $K\otimes_k L$ est un anneau noethérien normal (en vertu de (6.7.4.1) ou (6.14.2)), donc composé direct d'anneaux intègres C_i en nombre fini, de sorte que si E_i est le corps des fractions de C_i, le composé direct E des E_i est l'anneau total des fractions de $K\otimes_k L$; c'est d'ailleurs aussi l'anneau total des fractions de $A\otimes_k B$, puisque $K\otimes_k L$ est un anneau de fractions de $A\otimes_k B$. Cela étant, on peut écrire $A\otimes_k B = (A\otimes_k L)\cap(K\otimes_k B)$, et il résulte de (6.14.2) que $A\otimes_k L$ et $K\otimes_k B$ sont normaux, donc $A\otimes_k B$ est normal en vertu de (6.14.1.1).

Considérons maintenant le cas général; A est alors réunion de la famille filtrante croissante de ses sous-k-algèbres de type fini A_α, donc $A\otimes_k B$ est limite inductive des anneaux normaux $A_\alpha\otimes_k B$. Pour prouver que $A\otimes_k B$ est normal, il suffit donc (5.13.6) de prouver que toute composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A_\beta\otimes_k B)$ domine une composante irréductible de $\mathrm{Spec}(A_\alpha\otimes_k B)$ pour $A_\alpha\subset A_\beta$, ce qui résulte aussitôt de ce que B est un k-module plat, de (2.3.7, (ii)) et du fait que A_α et A_β sont des anneaux intègres.

Proposition **(6.14.4)**. — *Soient* A *un anneau noethérien,* A′ *une* A*-algèbre noethérienne telle que le morphisme* $\mathrm{Spec}(A')\to\mathrm{Spec}(A)$ *soit normal. Soient* B *une* A*-algèbre,* C *la fermeture intégrale de* A *dans* B*; on pose* $B' = B\otimes_A A'$, $C' = C\otimes_A A'$, C′ *s'identifiant à un sous-anneau de* B′*; alors* C′ *est la fermeture intégrale de* A′ *dans* B′.

Nous procéderons en plusieurs étapes.

I) *Réduction au cas où l'anneau* B *est réduit.* — Posons $B_0 = B_{\mathrm{red}} = B/\mathfrak{N}$, où $\mathfrak{N}$ est le nilradical de B, et soit C_0 la fermeture intégrale de A dans B_0. On a le lemme suivant :

Lemme **(6.14.4.1)**. — *Soient* A *un anneau,* B *une* A*-algèbre,* $B_0 = B/\mathfrak{n}$ *le quotient de* B *par un nilidéal. Si* C_0 *est la fermeture intégrale de* A *dans* B_0*, l'image réciproque* C *de* C_0 *par l'homomorphisme canonique* $\varphi : B\to B_0$ *est la fermeture intégrale de* A *dans* B.

En effet, si $x\in B$ est tel que $\varphi(x)$ vérifie une équation de dépendance intégrale à coefficients dans A, on en déduit que x vérifie une relation de la forme $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n\in\mathfrak{n}$ avec $a_i\in A$, d'où, en élevant à une puissance assez grande, une équation de dépendance intégrale pour x, à coefficients dans A.

On a donc la suite exacte de A-modules

$$0\to C\to B\to B_0/C_0$$

d'où, par platitude, la suite exacte

$$0\to C'\to B'\to B'_0/C'_0$$

où l'on a posé $B'_0 = B_0\otimes_A A'$, $C'_0 = C_0\otimes_A A'$. Si l'on prouve que C'_0 est la fermeture intégrale de A′ dans B'_0, le lemme (6.14.4.1) prouvera que C′ est la fermeture intégrale de A′ dans B′.

II) *Réduction au cas où* B *est une* A*-algèbre intègre de type fini contenant* A. — Soit (B_α) la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres de type fini de B, et soit C_α la fermeture intégrale de A dans B_α. Il résulte aussitôt de la définition de la fermeture intégrale que C est réunion des C_α; si l'on pose $B'_\alpha = B_\alpha \otimes_A A'$, $C'_\alpha = C_\alpha \otimes_A A'$, C'_α est contenu dans B'_α par platitude, et pour la même raison B′ est réunion de la famille filtrante croissante des B'_α et C′ réunion de la famille filtrante croissante des C'_α. Si l'on prouve que C'_α est la fermeture intégrale de A′ dans B'_α il en résultera aussitôt que C′ est la fermeture intégrale de A′ dans B′. On peut donc se borner au cas où B est une A-algèbre de type fini, donc noethérienne; soient $\mathfrak{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ses idéaux premiers minimaux; comme B est supposé *réduit*, il s'identifie à un *sous-anneau* du produit B_0 des $B/\mathfrak{q}_i$; si C_0 est la fermeture intégrale de A dans B_0, on a $C = B \cap C_0$; si l'on pose $B'_0 = B_0 \otimes_A A'$, $C'_0 = C_0 \otimes_A A'$, on a, par platitude, $C' = B' \cap C'_0$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.1.3)$; il suffit donc de prouver que C'_0 est la fermeture intégrale de A′ dans B'_0. Mais C_0 est composé direct des C_i, fermetures intégrales de A dans les $B_i = B/\mathfrak{q}_i$; par suite C'_0 est composé direct des $C'_i = C_i \otimes_A A'$ et il suffit de montrer que C'_i est la fermeture intégrale de A′ dans $B'_i = B_i \otimes_A A'$. On est ainsi ramené au cas où B est intègre et une A-algèbre de type fini; si $\mathfrak{p}$ est le noyau de l'homomorphisme $A \to B$, on a aussi $B' = B \otimes_{A/\mathfrak{p}} (A'/\mathfrak{p}A')$; comme le morphisme $\mathrm{Spec}(A'/\mathfrak{p}A') \to \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$ est normal, on peut remplacer A par $A/\mathfrak{p}$ et A′ par $A'/\mathfrak{p}A'$, et supposer par suite que $A \subset B$.

III) *Cas où* A *est un corps*, B *un corps*, *extension de type fini de* A *et tel que* A *soit algébriquement fermé dans* B. — On a alors $C = A$, et A′ est une A-algèbre noethérienne géométriquement normale, donc composée directe d'anneaux intègres et intégralement clos A'_i, les corps des fractions K'_i des A'_i étant des extensions *séparables* de A (4.6.1). La A′-algèbre B′ est donc composée directe des $B \otimes_A A'_i = B'_i$ et l'on peut donc se borner au cas où A′ est intègre, son corps des fractions K′ étant une extension séparable de A. Or, comme B est un A-module plat, $B \otimes_A A' = B'$ s'identifie à un sous-anneau de $B \otimes_A K'$; comme K′ est extension séparable de A, $B \otimes_A K'$ est réduit (4.3.7), et comme de plus B est une extension primaire de A, $B \otimes_A K'$ est intègre (4.3.2); il en est par suite de même de B′. Soit L′ le corps des fractions de $B \otimes_A K'$ (qui est aussi celui de B′); c'est évidemment un corps composé B(K′) de ses sous-corps B et K′; comme A est algébriquement fermé dans B, que K′ est une extension séparable de A, et que B et K′ sont linéairement disjoints sur A, K′ est algébriquement fermé dans $B(K') = L'$ (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 9, exerc. 2); *a fortiori* A′, étant intégralement clos, est intégralement fermé dans L′, donc dans B′, ce qui prouve la proposition dans ce cas.

IV) *Cas où* A *est intègre*, B *un corps*, *extension finie du corps des fractions* K *de* A. — Alors $B' = (A' \otimes_A K) \otimes_K B$ est une B-algèbre noethérienne géométriquement normale, et par suite B′ est composé direct d'anneaux intègres; l'anneau total des fractions L′ de B′ est alors composé direct d'un nombre fini de corps. Cela étant, comme B est le corps des fractions de C, B′ est un anneau de fractions de C′ et L′ est donc aussi l'anneau total des fractions de C′. Or (6.14.1) comme C est un anneau normal et $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ un morphisme normal d'anneaux noethériens, C′ est un anneau normal; mais il résulte de (6.14.1.1) que C′ est alors intégralement fermé dans L′, et *a fortiori* dans B′, et par suite est la fermeture intégrale de A′ dans B′.

V) *Fin de la démonstration.* — D'après II), on peut supposer que B est une A-algèbre intègre de type fini contenant A. Soient K le corps des fractions de A, L celui de B, qui est une extension de type fini de K. Soit M la fermeture algébrique de K dans L, qui est une extension algébrique *finie* de K; soit C_0 la fermeture intégrale de A dans M, qui est aussi la fermeture intégrale de A dans L; on a donc $C = B \cap C_0$; si l'on pose $C'_0 = C \otimes_A A'$, on a par suite $C' = B' \cap C'_0$ par platitude ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.1.3). Or, il résulte de IV) que C'_0 est la fermeture intégrale de A' dans $M' = M \otimes_A A'$; en outre, M' est un anneau noethérien et le morphisme $\mathrm{Spec}(M') \to \mathrm{Spec}(M)$ est normal (comme on l'a vu dans IV)); appliquant III) à M et M' au lieu de A et A' et à L au lieu de B, on en déduit que M' est intégralement fermé dans $L' = L \otimes_A A'$; donc C'_0 est la fermeture intégrale de A' dans L', et $C' = C'_0 \cap B'$ est la fermeture intégrale de A' dans B'. C.Q.F.D.

Corollaire **(6.14.5)**. — *Soient* A *un anneau noethérien*, A' *une* A-*algèbre noethérienne telle que le morphisme* $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ *soit normal. Soient* B, C *deux* A-*algèbres*, $\varphi : B \to C$ *un* A-*homomorphisme faisant de* C *une* B-*algèbre*, D *la fermeture intégrale de* B *dans* C. *Si l'on pose* $B' = B \otimes_A A'$, $C' = C \otimes_A A'$, $D' = D \otimes_A A'$, D' *est la fermeture intégrale de* B' *dans* C'.

Soit (B_λ) la famille filtrante croissante des sous-A-algèbres de type fini de B, et posons $B'_\lambda = B'_\lambda \otimes_A A'$, de sorte que B' est réunion de la famille filtrante croissante des sous-A'-algèbres de type fini B'_λ. Soit D_λ la fermeture intégrale de B_λ dans C, et posons $D'_\lambda = D_\lambda \otimes_A A'$, de sorte que D est réunion des D_λ et D' réunion des D'_λ; si nous prouvons que D'_λ est la fermeture intégrale de B'_λ dans C', il en résultera que D' est la fermeture intégrale de B' dans C'. Or B_λ et B'_λ sont noethériens et le morphisme $\mathrm{Spec}(B'_\lambda) \to \mathrm{Spec}(B_\lambda)$ est normal (6.8.2); on peut donc appliquer (6.14.4) en remplaçant A, A' et B par B_λ, B'_λ et C respectivement, d'où le corollaire.

On peut par exemple appliquer (6.14.5) lorsque A est un anneau *local excellent* et A' son complété $\hat{A}$, puisque dans ce cas $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme régulier (7.8.2).

6.15. Préschémas géométriquement unibranches.

(6.15.1) Nous dirons qu'un préschéma X est *unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*) en un point x, ou que le point x est *unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*) dans X si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est *unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*) (**0**, 23.2.1); nous dirons que X est *unibranche* (resp. *géométriquement unibranche*) s'il l'est en tout point. Il suit de cette définition que, pour que X soit unibranche (resp. géométriquement unibranche) en un point, il faut et il suffit que X_{red} le soit en ce point.

(6.15.2) Il faut prendre garde qu'avec les définitions de (6.15.1), un *anneau local* A peut être unibranche (resp. géométriquement unibranche) *sans que* Spec(A) *le soit*; en d'autres termes, il peut se faire qu'il y ait des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A tels que $A_\mathfrak{p}$ ne soit pas unibranche; il revient aussi au même de dire que sur un préschéma la notion de point géométriquement unibranche *n'est pas stable par générisation.* Nous allons le voir sur l'exemple suivant.

Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique 0, B l'anneau intègre $K[U, V, W]/(U^2(U-W)-V^2(U+W))$ (U, V, W indéterminées) de sorte que $Y=\mathrm{Spec}(B)$ est un « cône de sommet l'origine, ayant une génératrice double ». Nous désignerons par u, v, w les images de U, V, W dans B. Soit R le corps des fractions de B, et considérons dans R l'élément $t=v(u+w)/u$, qui n'appartient pas à B; montrons que $C=B[t]$ est la *clôture intégrale* de B. On a en effet $t^2=u^2-w^2$, donc t est entier sur B, et $v=tu/(u+w)$; l'anneau $C_1=K[t, u, w]$ est intégralement clos, car il est isomorphe à $K[T, U, W]/(T^2-U^2+W^2)$ et est donc la fermeture intégrale de l'anneau intégralement clos $K[U, W]$ dans l'extension quadratique $K(U, W)(\sqrt{U^2+W^2})$ de son corps des fractions (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 1, n° 6, prop. 18). L'anneau de fractions $K[t, u, w, 1/(u+w)]$ de C_1 est donc aussi intégralement clos. De la même manière, on voit que l'anneau $C_2=K[t, v, w]$ est intégralement clos, car t est racine de l'équation $t(t-v)-w^2(2v-t)=0$, et par suite $K[t, v, w, 1/(t-v)]=K[t, \frac{tu}{u+w}, w, \frac{u+w}{tw}]$ est intégralement clos. Finalement, compte tenu de ce que u et w sont algébriquement indépendants sur K, on prouve aisément que $C=K[t, u, v, w]=K[t, u, w, 1/(u+w)]\cap K[t, v, w, 1/(t-v)]$, ce qui achève de montrer que C est la clôture intégrale de B. Il est immédiat que si $\mathfrak{m}_0$ est l'idéal maximal de B engendré par u, v, w (« sommet du cône ») il existe un seul idéal maximal $\mathfrak{n}_0$ de C au-dessus de $\mathfrak{m}_0$, savoir l'idéal engendré par t, u, v, w. Si l'on pose $A=B_{\mathfrak{m}_0}$, on en déduit aisément que $A'=C_{\mathfrak{n}_0}$ est la clôture intégrale de A, qui est donc unibranche, et par suite aussi géométriquement unibranche puisque son corps résiduel K est algébriquement clos. Mais dans A l'idéal premier $\mathfrak{p}$ engendré par u et v est tel que la clôture intégrale $A_{\mathfrak{p}}[t]$ de $A_{\mathfrak{p}}$ ne soit pas un anneau local.

Nous verrons toutefois plus loin (9.7.10) que lorsque X est un préschéma localement noethérien tel que, si X' est le normalisé de X_{red}, le morphisme canonique $X'\to X$ soit *fini* (ce qui sera le cas si X est tel que les anneaux de ses ouverts affines soient *universellement japonais* (**0**, 23.1.1)), alors l'ensemble des points $x\in X$ où X est géométriquement unibranche est *localement constructible*.

(6.15.3) Nous dirons pour abréger qu'un morphisme $f: X\to Y$ est *radiciel en un point* $y\in Y$, si $f^{-1}(y)$ est vide ou réduit à un seul point x et si $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension radicielle de $\boldsymbol{k}(y)$. Il revient donc au même de dire que f est radiciel en tous les points de Y ou que f est radiciel (**I**, 3.5.8). Si $g: f^{-1}(y)\to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$ est le morphisme image réciproque de f par le changement de base $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}(y))\to Y$, il revient au même de dire que f est radiciel au point $y\in Y$, ou que g est *radiciel*.

Lemme **(6.15.3.1)**. — (i) *Soient* $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ *deux morphismes. Si f est radiciel en un point y et g radiciel au point* $z=g(y)$, *alors* $g\circ f$ *est radiciel au point* $g(y)$. *La réciproque est vraie si f est surjectif.*

(ii) *Soient* $f: X\to Y$, $h: Y'\to Y$ *deux morphismes, et soit* $f'=f_{(Y')}: X\times_Y Y'\to Y'$. *Soient* $y'\in Y'$ *et* $y=h(y')$; *alors pour que f soit radiciel au point y, il faut et il suffit que f' soit radiciel au point* y'.

(i) Si f est radiciel au point y et g radiciel au point z, $g^{-1}(z)$ est réduit à y et $f^{-1}(g^{-1}(z))=f^{-1}(y)$ vide ou réduit à un seul point x; en outre $\boldsymbol{k}(x)$ est extension radicielle de $\boldsymbol{k}(y)$ et $\boldsymbol{k}(y)$ extension radicielle de $\boldsymbol{k}(z)$, donc $\boldsymbol{k}(x)$ est extension radicielle de $\boldsymbol{k}(z)$. Inversement, supposons f surjectif; si $g\circ f$ est radiciel au point $z=g(y)$, $g^{-1}(z)$ se réduit au seul point y, sans quoi $f^{-1}(g^{-1}(z))$ aurait au moins deux points distincts; en outre, $f^{-1}(y)=f^{-1}(g^{-1}(z))$ se réduit à un seul point x, et par hypothèse on a $\boldsymbol{k}(z)\subset\boldsymbol{k}(y)\subset\boldsymbol{k}(x)$, et $\boldsymbol{k}(x)$ est radiciel sur $\boldsymbol{k}(z)$, donc $\boldsymbol{k}(y)$ est radiciel sur $\boldsymbol{k}(z)$ et $\boldsymbol{k}(x)$ radiciel sur $\boldsymbol{k}(y)$.

(ii) Soient $g: f^{-1}(y)\rightarrow\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y))$, $g': f'^{-1}(y')\rightarrow\operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(y'))$ les morphismes images réciproques de f et f' respectivement; comme $f'^{-1}(y')=f^{-1}(y)\otimes_{\mathbf{k}(y)}\boldsymbol{k}(y')$ (**I**, 3.6.4), g' est image réciproque de g et l'assertion se réduit à (2.6.1, (v)).

Soit alors X un préschéma *réduit* n'ayant qu'un nombre *fini* de composantes irréductibles, et soit X′ son *normalisé* (**II**, 6.3.8); on sait *(loc. cit.)* que le morphisme canonique $f: X'\rightarrow X$ est surjectif. La définition (6.15.1) montre alors que pour que X soit géométriquement unibranche en un point x, il faut et il suffit que f soit *radiciel en ce point*; pour que X soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit donc que f soit *radiciel*.

(6.15.4) Généralisant la définition donnée dans (**I**, 2.2.9), nous dirons que, pour deux préschémas *réduits* X, Y, un morphisme $f: X\rightarrow Y$ est *birationnel* si la restriction de f à l'ensemble des points maximaux de X est une *bijection* de cet ensemble sur l'ensemble des points maximaux de Y, et si, pour tout point maximal y de Y, le morphisme $X\times_Y\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y)\rightarrow\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_y)$ déduit de f est un isomorphisme (autrement dit, si la fibre $f^{-1}(y)$ est réduite à un seul point x (maximal dans X) et si l'homomorphisme $\boldsymbol{k}(y)\rightarrow\boldsymbol{k}(x)$ déduit de f est bijectif); cette notion se réduit à celle de (**I**, 2.2.9) lorsque X et Y n'ont qu'un nombre *fini* de composantes irréductibles.

Lemme **(6.15.4.1)**. — *Soit* $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme,* $g: Y'\rightarrow Y$ *un morphisme plat,* $X'=X\times_Y Y'$, $f'=f_{(Y')}: X'\rightarrow Y'$. *Si* f_{red} *est birationnel, il en est de même de* f'_{red}.

En effet, si y' est un point maximal de Y′, on sait (2.3.4, (ii)) que $y=g(y')$ est un point maximal de Y; il existe un seul point x de X dans $f^{-1}(y)$ par hypothèse; de plus x est maximal dans X et tel que $\boldsymbol{k}(x)=\boldsymbol{k}(y)$. Il résulte donc de (**I**, 3.4.9) que $f'^{-1}(y')$ est réduit à un seul point x' et que $\boldsymbol{k}(x')=\boldsymbol{k}(y')$. On conclut le raisonnement en remarquant que d'après (2.3.7, (ii)), toute composante irréductible de X′ domine une composante irréductible de Y′.

Proposition **(6.15.5)**. — *Soit* $f: X\rightarrow Y$ *un morphisme tel que* f_{red} *soit entier et birationnel* (6.15.4), *donc surjectif.*

(i) *Pour que* Y *soit géométriquement unibranche en un point* y, *il faut et il suffit que* f *soit radiciel au point* y *et que* X *soit géométriquement unibranche en l'unique point* x *de* $f^{-1}(y)$.

(ii) *Pour que* Y *soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit que* X *soit géométriquement unibranche et que* f *soit radiciel.*

On peut évidemment se borner au cas où X et Y sont *réduits*; le fait que f soit *surjectif* résulte de ce que f est un morphisme fermé (**II**, 6.1.10) et que $f(X)$ contient par hypothèse tous les points maximaux de Y. Cela montre aussitôt que (i) entraîne (ii). Utilisant (**I**, 3.6.5) et (**II**, 6.1.5), on peut supposer, pour prouver (i), que $Y=\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$, autrement dit $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est *local*. Comme f est affine, on a aussi $X = \mathrm{Spec}(B)$. Si A est géométriquement unibranche, il est *intègre*, donc il en est de même de B puisque f est birationnel; inversement, si f est radiciel au point y et X géométriquement unibranche au point x, B n'a qu'un seul idéal maximal (puisqu'il est entier sur A et que tout idéal maximal de B est donc au-dessus de celui de A), autrement dit B est un anneau *local*, et dire que X est géométriquement unibranche au point x signifie que B est géométriquement unibranche, donc *intègre*. Comme f est dominant par hypothèse et que A est réduit, on en conclut que $A \subset B$ (**I**, 1.2.7), donc A est aussi *intègre*. Ainsi, pour prouver (i), on peut se borner au cas où A et B sont locaux, intègres, A étant contenu dans B et ayant même corps des fractions, et par suite (puisque B est entier sur A) même *clôture intégrale* C. Mais alors l'assertion résulte de (6.15.3.1, (i)) appliqué aux morphismes $\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(B)$ et $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, vu l'interprétation donnée dans (6.15.3) de la propriété d'être géométriquement unibranche en un point.

Proposition (**6.15.6**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma. Si* X *est normal, alors, pour toute extension k' de k, $X' = X \otimes_k k'$ est géométriquement unibranche.*

On sait que k' est extension algébrique d'une extension pure k_0 de k, et si k'' est la plus grande extension séparable de k_0 contenue dans k', k' est une extension radicielle de k'' et k'' extension séparable de k. On sait (6.14.2) que $X'' = X \otimes_k k''$ est normal; comme $X \otimes_k k' = X'' \otimes_{k''} k'$, on voit qu'on peut se borner au cas où l'extension k' de k est *radicielle*. En outre (**I**, 3.6.5), on peut supposer que $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau *local intègre et intégralement clos* (puisque X est normal). Le morphisme projection $f : X' \to X$ est un homéomorphisme, puisque $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$ est un homéomorphisme universel (2.4.5); comme $X' = \mathrm{Spec}(A')$ où $A' = A \otimes_k k'$, on voit donc que A′ est un anneau local dont le nilradical $\mathfrak{N}'$ est l'unique idéal premier minimal, d'où $X'_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(A'_0)$, où $A'_0 = A'/\mathfrak{N}'$ est un anneau local intègre; en outre, si K est le corps des fractions de A, le corps des fractions K'_0 de A'_0 est radiciel sur K, puisque le morphisme f est radiciel. Comme A'_0 est entier sur A, sa clôture intégrale B est aussi la fermeture intégrale de A dans K'_0. Mais comme A est intégralement clos, on sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 2, nº 3, lemme 3) que B est l'ensemble des $x \in K'_0$ dont une puissance p^m-ème (pour un m assez grand) appartient à A (p étant l'exposant caractéristique de K); en outre il n'existe qu'un seul idéal premier de B au-dessus de tout idéal premier de A; en particulier B est un anneau local et son corps résiduel est une extension radicielle de celui de A, et *a fortiori* de celui de A'_0, ce qui prouve que A'_0 est géométriquement unibranche, et par suite il en est de même de X′.

Proposition (**6.15.7**). — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma, k' une extension de k,* $X' = X \otimes_A k'$. *Soient x' un point de* X′, *x sa projection dans* X. *Pour que* X *soit géométriquement unibranche au point x, il faut et il suffit que* X′ *soit géométriquement unibranche au point x'. Pour que* X *soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit que* X′ *le soit.*

La seconde assertion résulte de la première et du fait que la projection $f : X' \to X$ est un morphisme surjectif. Pour démontrer la première assertion, on peut, en vertu de (**I**, 5.1.8), se borner au cas où X est réduit, et en vertu de (**I**, 3.6.5), au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ (avec $A=\mathcal{O}_{X,x}$) est un schéma *local*. Notons que $A'=\mathcal{O}_{X',x'}$ est par hypothèse un A-module fidèlement plat, donc contenant A, et par suite l'hypothèse que X est géométriquement unibranche au point x, ou l'hypothèse que X' est géométriquement unibranche au point x', entraînent toutes deux que A est un anneau local *intègre* (puisque A, étant réduit, est aussi isomorphe à un sous-anneau de A'_{red}). Soient K le corps des fractions de A, B la clôture intégrale de A, et posons $Y=\mathrm{Spec}(B)$; il revient au même de dire que X est géométriquement unibranche au point x ou que le morphisme $g: Y\rightarrow X$ est radiciel au point x (6.15.3). Soit $Y'=Y\otimes_k k'=Y\times_X X'$ de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{h} & Y' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ X & \xleftarrow[f]{} & X' \end{array}$$

Notons que f est un morphisme plat; donc (6.15.4.1) le morphisme entier g'_{red} est birationnel. D'autre part, comme Y est normal, Y' est géométriquement unibranche (6.15.6). Pour que X' soit géométriquement unibranche en x', il faut et il suffit donc que g' soit radiciel au point x' (6.15.5). Or, x est la projection de x' dans X et il est équivalent de dire que g est radiciel au point x ou que g' est radiciel au point x' (6.15.3.1); enfin, pour que X soit géométriquement unibranche au point x, il faut et il suffit que g soit radiciel en ce point, d'où la proposition.

Lemme **(6.15.8)**. — *Soient k un corps séparablement clos* (autrement dit, tel que la clôture algébrique de k soit *radicielle* sur k), X *un k-préschéma localement de type fini sur k, x un point* fermé *de* X. *Si* X *est unibranche au point x, il est géométriquement unibranche en ce point.*

En effet, on sait (**I**, 6.4.2) que $\boldsymbol{k}(x)$ est une extension *algébrique* de k; comme le corps résiduel de la clôture intégrale de $(\mathcal{O}_x)_{\mathrm{red}}$ (clôture intégrale qui est par hypothèse un anneau local) est une extension algébrique de $\boldsymbol{k}(x)$, c'est une extension *radicielle* de k par hypothèse, donc aussi de $\boldsymbol{k}(x)$.

Corollaire **(6.15.9)**. — *Soient k un corps,* X *un k-préschéma localement de type fini sur k, k' une extension séparablement close de k* (autrement dit, telle que la clôture algébrique de k' soit radicielle sur k'); *alors, pour que* X *soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit que* $X'=X\otimes_k k'$ *soit unibranche.*

Compte tenu de (6.15.7), on est ramené à prouver que si X est unibranche et k séparablement clos, alors X est géométriquement unibranche. Or, X est géométriquement unibranche en ses points fermés (6.15.8); nous en conclurons dans (10.4.9) que X est géométriquement unibranche en tous ses points, en nous appuyant sur le fait (signalé à la fin de (6.15.2)) que l'ensemble des points où X est géométriquement unibranche est constructible (bien entendu, le cor. (6.15.9) ne sera pas utilisé jusque-là).

Ce résultat justifie, en une certaine mesure, la terminologie de « géométriquement unibranche ».

Proposition **(6.15.10).** — *Soient* Y, Y' *deux préschémas localement noethériens,* $g : Y' \to Y$ *un morphisme normal* (6.8.1), $f : X \to Y$ *un morphisme; posons* $X' = X \times_Y Y'$ *et soient* $p : X' \to X$ *la projection canonique,* x' *un point de* X'. *Alors, si* X *est réduit* (resp. *géométriquement unibranche,* resp. *intègre et géométriquement unibranche*) *au point* $x = p(x')$, X' *est réduit* (resp. *géométriquement unibranche,* resp. *intègre et géométriquement unibranche*) *au point* x'.

En vertu de (**I**, 3.6.5), on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $Y' = \mathrm{Spec}(A')$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, où A, A' et B sont des anneaux locaux, les homomorphismes $A \to A'$ et $A \to B$ étant locaux, A, A' des anneaux noethériens, et x étant le point fermé de X; il s'agit de prouver que si B est réduit (resp. géométriquement unibranche, resp. intègre et géométriquement unibranche) alors $B' = B \otimes_A A'$ est réduit (resp. $\mathrm{Spec}(B')$ est géométriquement unibranche aux points de $p^{-1}(x)$, resp. $\mathrm{Spec}(B')$ est intègre et géométriquement unibranche en ces points). Supposons d'abord seulement B réduit; B est réunion de la famille croissante de ses sous-A-algèbres de type fini B_λ, et par platitude, B' est réunion de la famille filtrante croissante de ses sous-A'-algèbres $B'_\lambda = B_\lambda \otimes_A A'$. Or, le morphisme $\mathrm{Spec}(B'_\lambda) \to \mathrm{Spec}(B_\lambda)$ est normal (6.8.2), et *a fortiori* réduit; le fait que B'_λ soit réduit est donc conséquence de (3.3.5); on conclut que B' lui-même est réduit par (5.13.2).

Supposons maintenant B géométriquement unibranche; compte tenu de (**I**, 5.1.8), on peut en outre supposer B réduit, donc *intègre*. Soit C sa clôture intégrale, qui est par hypothèse un anneau *local*; posons $Z = \mathrm{Spec}(C)$, $C' = C \otimes_A A'$, $Z' = \mathrm{Spec}(C') = Z \times_X X'$, de sorte que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[d, "f"'] & Z' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ X & X' \arrow[l, "p"] \end{tikzcd}$$

En vertu de la première partie du raisonnement, X' est *réduit*; d'autre part, comme $Z' = Z \times_Y Y'$, il résulte de (6.14.1) que Z' est *normal* (et *a fortiori* géométriquement unibranche). Comme f est entier et birationnel, il en est de même de f' par (6.15.4.1), puisque p est plat. Enfin, l'hypothèse que X est géométriquement unibranche au point x entraîne que f est radiciel en ce point (6.15.5); on conclut donc de (6.15.3.1) que f' est radiciel en tout point $x' \in p^{-1}(x)$, et il résulte alors de (6.15.5) que X' est géométriquement unibranche (donc intègre puisqu'il est réduit) en chacun de ces points.

Remarques **(6.15.11).** — (i) Dans la démonstration de (6.15.10), on ne peut se dispenser de faire appel à (6.14.1), même lorsque $X = Y$, car on fait intervenir la clôture intégrale de l'anneau B, qui n'est pas nécessairement un anneau noethérien même si B l'est.

(ii) L'exemple (6.5.5, (ii)) montre que dans (6.15.10), on ne peut remplacer « géométriquement unibranche » par « intègre » dans l'énoncé, même si le corps résiduel $\boldsymbol{k}(x)$ est algébriquement clos et le morphisme g étale.

On ne peut pas non plus dans cet énoncé remplacer « géométriquement unibranche » par « unibranche ». Soit en effet A l'anneau local intègre complet $\mathbf{R}[[U, V]]/(U^2+V^2)$; si u, v sont les images de U, V dans A, l'idéal maximal de A est $Au+Av$. On vérifie aisément que la clôture intégrale de A est l'anneau $A[t]$, où $t=u/v$ vérifie la relation $t^2=-1$, si bien que $A[t]$ est isomorphe à l'anneau local $\mathbf{C}[[U]]$; comme le corps résiduel de $\mathbf{C}[[U]]$ est $\mathbf{C}$, on voit que A est unibranche mais non géométriquement unibranche. Mais $A\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ n'est pas un anneau intègre, étant isomorphe à $\mathbf{C}[[U, V]]/(U-iV)(U+iV)$.

§ 7. RELATIONS ENTRE UN ANNEAU LOCAL NOETHÉRIEN ET SON COMPLÉTÉ. ANNEAUX EXCELLENTS

Le présent paragraphe est surtout consacré à l'exposé de certaines propriétés d'anneaux noethériens, généralement stables par passage à une algèbre de type fini ou par localisation, qui sont vraies pour les anneaux que l'on rencontre le plus souvent (algèbres de type fini sur **Z**, ou sur un corps, ou sur un anneau local noethérien complet), sans l'être pour tous les anneaux noethériens. Une première série de propriétés, liées à la théorie de la dimension, et notamment à la condition des chaînes, fait l'objet des n^{os} 1 et 2; toutes les propriétés envisagées sont vraies pour les quotients d'anneaux noethériens réguliers et leurs démonstrations dans ce cas sont pour la plupart faciles et bien connues [30]; aussi pour ces anneaux les développements des §§ 1 et 2 sont sans intérêt.

Il n'en est plus de même des propriétés étudiées dans les n^{os} 3, 4 et 5 (qui ne dépendent pas des n^{os} 1 et 2); leurs démonstrations, même dans le cas des localisées d'algèbres de type fini sur un corps ou sur **Z** (où elles sont dues pour la plupart à Zariski et à Nagata) sont le plus souvent délicates; des exemples classiques sont par exemple les équivalences A normal $\Leftrightarrow \hat{A}$ normal, et A réduit $\Leftrightarrow \hat{A}$ réduit. Nous développons une méthode systématique pour formuler et prouver de telles propriétés, à l'aide des propriétés des *fibres* du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \to \mathrm{Spec}(A)$, et en utilisant les notions et résultats exposés au § 6; le succès de cette méthode repose en dernière analyse sur les excellentes propriétés des *anneaux locaux complets* et de ceux qui s'en déduisent par localisation ou passage à une algèbre de type fini. A cet égard, le théorème de Nagata (6.12.7) disant que, pour un tel anneau, le lieu singulier dans Spec(A) est fermé, joue un rôle crucial; il en est de même (en ce qui concerne les propriétés de permanence) du critère de régularité (**0**, 22.3.4), de nature plus technique.

Enfin, dans les n^{os} 6 et 7, nous appliquons les résultats obtenus à l'étude de la finitude de la clôture intégrale des anneaux intègres noethériens.

Le lecteur notera que les résultats les plus délicats du § 7 ne serviront qu'assez peu dans la suite du chapitre IV, et même dans les chapitres ultérieurs.

7.1. Équidimensionalité formelle et anneaux formellement caténaires.

Définition **(7.1.1).** — *On dit qu'un anneau local noethérien* A *est formellement équidimensionnel si son complété* $\hat{A}$ *est équidimensionnel* (**0**, 16.1.4).

Proposition **(7.1.2).** — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *ses idéaux premiers minimaux. Pour que* A *soit formellement équidimensionnel, il faut et il suffit que les* $A/\mathfrak{p}_i$ *le soient et que* A *soit équidimensionnel* (autrement dit que les $A/\mathfrak{p}_i$ aient même dimension).

En effet, cela résulte du fait que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de $\hat{A}$, $\mathfrak{p}' \cap A$ contient l'un des $\mathfrak{p}_i$, donc $\mathfrak{p}'$ contient l'un des $\mathfrak{p}_i\hat{A}$, et $\hat{A}/\mathfrak{p}_i\hat{A} = (A/\mathfrak{p}_i) \otimes_A \hat{A}$ est le complété de l'anneau local $A/\mathfrak{p}_i$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 7.3.3)$, donc a même dimension. Toute chaîne maximale d'idéaux premiers de $\hat{A}$ s'identifie donc canoniquement à une chaîne maximale d'idéaux premiers de l'un des $\hat{A}/\mathfrak{p}_i\hat{A}$, et réciproquement, d'où aussitôt la conclusion.

Proposition **(7.1.3).** — *Soient* A, A' *deux anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, $\varphi : A \to A'$ *un homomorphisme local; on suppose que* A' *est un* A*-module plat, et que* A' *soit équidimensionnel et caténaire. Alors :*

(i) A *est équidimensionnel et caténaire.*

(ii) *Supposons en outre que* $\mathfrak{m}A'$ *soit un idéal de définition de* A'. *Alors, si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de* A, *pour que* $A'/\mathfrak{a}A'$ *soit équidimensionnel, il faut et il suffit que* $A/\mathfrak{a}A$ *le soit. En particulier, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, $A'/\mathfrak{p}A'$ *est équidimensionnel.*

Prouvons d'abord la seconde assertion de (ii). Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $Y = V(\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$, $Y' = V(\mathfrak{p}A') = \mathrm{Spec}(A'/\mathfrak{p}A')$; si $f : X' \to X$ est le morphisme correspondant à φ, Y' est aussi le sous-préschéma fermé $f^{-1}(Y)$ de X'. Comme $\mathfrak{m}A'$ est un idéal de définition de A', on a

$$\dim(X) = \dim(X') \tag{7.1.3.1}$$

en vertu de (6.1.3); de même $\mathfrak{m}A'/\mathfrak{p}A'$ est un idéal de définition de $A'/\mathfrak{p}A'$ et Y' est plat sur Y (2.1.4), donc (6.1.3)

$$\dim(Y) = \dim(Y'). \tag{7.1.3.2}$$

Soient y le point générique de Y, Y'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ les composantes irréductibles de Y', y'_i le point générique de Y'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$; on a $f(y'_i) = y$ pour tout i (2.3.4). D'autre part y'_i est point maximal de la fibre $f^{-1}(y)$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 2.1.8)$, donc $\mathcal{O}_{X',y'_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X,y}} \boldsymbol{k}(y) = \mathcal{O}_{X',y'_i}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X',y'_i}$ est de dimension 0, autrement dit $\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X',y'_i}$ est un idéal de définition de $\mathcal{O}_{X',y'_i}$; on peut de nouveau appliquer (6.1.3), qui donne

$$\dim(\mathcal{O}_{X',y'_i}) = \dim(\mathcal{O}_{X,y}) \tag{7.1.3.3}$$

c'est-à-dire (5.1.2)

$$\mathrm{codim}(Y'_i, X') = \mathrm{codim}(Y, X) \tag{7.1.3.4}$$

pour tout i. Comme A' est équidimensionnel et caténaire, on a, en vertu de (**0**, 14.3.5)

$$\dim(X') = \dim(Y'_i) + \mathrm{codim}(Y'_i, X') \tag{7.1.3.5}$$

pour tout i; en vertu de (7.1.3.1), (7.1.3.2) et (7.1.3.4) et de l'inégalité $\dim(Y'_i)\leqslant\dim(Y')$, on en déduit

(7.1.3.6) $$\dim(X)\leqslant\dim(Y)+\operatorname{codim}(Y, X)$$

donc les deux membres de cette inégalité sont égaux d'après (**0**, 14.2.2.2); en outre cette égalité entraîne

(7.1.3.7) $$\dim(Y'_i)=\dim(Y')=\dim(Y)$$

pour tout i, ce qui prouve la seconde assertion de (ii).

Démontrons maintenant la première assertion de (ii). Soient $\mathfrak{p}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ les idéaux premiers de A minimaux parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{a}$, et soient $\mathfrak{p}'_{jh}$ les idéaux premiers de A′ minimaux parmi ceux contenant $\mathfrak{p}_j A'$ $(1\leqslant h\leqslant m_j)$; on sait alors (2.3.4) que les $\mathfrak{p}'_{jh}$ $(1\leqslant j\leqslant n,\ 1\leqslant h\leqslant m_j$ pour tout $j)$ sont aussi les idéaux premiers de A′ minimaux parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{a}A'$. D'après ce qu'on a vu plus haut, pour tout j, les dimensions des anneaux $A'/\mathfrak{p}'_{jh}$ $(1\leqslant h\leqslant m_j)$ sont toutes égales et sont donc égales à $\dim(A'/\mathfrak{p}_jA')$, elle-même égale à $\dim(A/\mathfrak{p}_j)$ par (7.1.3.2). Dire que $A'/\mathfrak{a}A'$ est équidimensionnel signifie donc que les dimensions des $A/\mathfrak{p}_j$ sont toutes égales, c'est-à-dire que $A/\mathfrak{a}$ est équidimensionnel.

Prouvons enfin (i). Soit $\mathfrak{r}'$ un idéal premier de A′ minimal parmi ceux contenant $\mathfrak{m}A'$, et soit $A''=A'_{\mathfrak{r}'}$; comme A″ est un A′-module plat, c'est aussi un A-module plat; en outre A″ est équidimensionnel et caténaire (**0**, 16.1.4), et $\mathfrak{m}A''$ est un idéal de définition de A″. On peut donc se borner au cas où $\mathfrak{m}A'$ est un idéal de définition de A′. Si alors $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$ sont deux idéaux premiers de A, on peut appliquer (ii) à $A/\mathfrak{q}$ et à $A'/\mathfrak{q}A'$, qui est équidimensionnel et plat sur $A/\mathfrak{q}$; si $Z=\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{q})$ et $Y=\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{p})$, on a donc $\dim(Z)=\dim(Y)+\operatorname{codim}(Y, Z)$; en outre on peut appliquer (7.1.3.6), qui montre que $\operatorname{codim}(Y, X)=\dim X-\dim Y$; comme X est équicodimensionnel, ces relations montrent qu'il est biéquidimensionnel en vertu de (**0**, 14.3.3).

Corollaire **(7.1.4)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien formellement équidimensionnel. Alors :*

(i) A *est équidimensionnel et caténaire* (autrement dit, *biéquidimensionnel*).

(ii) *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A; *pour que* $A/\mathfrak{a}$ *soit équidimensionnel, il faut et il suffit que* $A/\mathfrak{a}$ *soit formellement équidimensionnel. En particulier, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, $A/\mathfrak{p}$ *est formellement équidimensionnel.*

Si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A, $\mathfrak{m}\hat{A}$ est idéal de définition de $\hat{A}$. Par hypothèse $\hat{A}$ est équidimensionnel, et on sait d'autre part qu'il est caténaire (5.6.4); il suffit alors d'appliquer (7.1.3) à $A'=\hat{A}$.

Corollaire **(7.1.5)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien tel qu'il existe un* A*-module de type fini* M *qui soit un* A*-module de Cohen-Macaulay et pour lequel* $\operatorname{Supp}(M)=\operatorname{Spec}(A)$ (ce qui aura lieu par exemple si A est un anneau de Cohen-Macaulay). *Alors* A *est formellement équidimensionnel, donc* (7.1.4) *pour qu'un anneau quotient* B *de* A *soit formellement équidimensionnel, il faut et il suffit qu'il soit équidimensionnel.*

En effet, $\hat{M}=M\otimes_A\hat{A}$ est un $\hat{A}$-module de Cohen-Macaulay (**0**, 16.5.2), de support égal à $\mathrm{Spec}(\hat{A})$; par suite (**0**, 16.5.4), $\hat{A}$ est équidimensionnel.

Remarque **(7.1.6)**. — On a vu (6.3.8) que sous les hypothèses de (7.1.5), pour tout anneau quotient B de A, les fibres du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\hat{B}) \to \mathrm{Spec}(B)$ sont des schémas de Cohen-Macaulay; par suite ((6.4.3) et (5.7.5)), *pour que* B *n'ait pas d'idéaux premiers associés immergés, il faut et il suffit qu'il en soit de même de* $\hat{B}$.

Lemme **(7.1.7)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{p}_i$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ *ses idéaux premiers minimaux. Supposons que chacun des anneaux* $A/\mathfrak{p}_i$ *soit formellement équidimensionnel. Alors, pour tout idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* A *et tout* i *tel que* $\mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{q}$, *l'anneau* $A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}_iA_\mathfrak{q}$ *est formellement équidimensionnel.*

Comme $A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}_iA_\mathfrak{q}$ est l'anneau local de $A/\mathfrak{p}_i$ en l'idéal premier $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}_i$, on peut se borner au cas où A est intègre et formellement équidimensionnel. Posons $A'=\hat{A}$, et soit $\mathfrak{q}'$ un des idéaux premiers de A' minimaux parmi ceux contenant $\mathfrak{q}A'$; si l'on pose $B=A_\mathfrak{q}$, $B'=A'_{\mathfrak{q}'}$ est un B-module plat ($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 6.3.2). Posons $C=\hat{B}$, $C'=\hat{B}'$; comme B' est un B-module plat, on sait que C' est un C-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 4). Comme A' est caténaire (5.6.4) et équidimensionnel par hypothèse, il en est de même de $B'=A'_{\mathfrak{q}'}$ (**0**, 16.1.4); en outre, comme A' est isomorphe à un quotient d'anneau régulier en vertu du théorème de Cohen (**0**, 19.8.8), il en est de même de B' (**0**, 17.3.9); on conclut donc de (7.1.5) que C' est équidimensionnel. D'autre part C' est caténaire (5.6.4), donc C est équidimensionnel en vertu de (7.1.3, (i)).

Théorème **(7.1.8)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Tout anneau quotient intègre de* A *est formellement équidimensionnel.*

b) *Les anneaux quotients de* A *par ses idéaux premiers minimaux sont formellement équidimensionnels.*

c) *Tout anneau local* B *qui est une* A-*algèbre essentiellement de type fini* (1.3.8) *et qui est équidimensionnel, est formellement équidimensionnel.*

Il est trivial que *c)* entraîne *a)* et que *a)* entraîne *b)*. D'autre part, comme tout idéal premier de A contient un idéal premier minimal de A, *b)* entraîne *a)* en vertu de (7.1.4, (ii)). Il reste à voir que *a)* implique *c)*.

Il suffit de prouver que les quotients de B par ses idéaux premiers minimaux sont formellement équidimensionnels (7.1.2); comme tout anneau quotient de B est encore une A-algèbre essentiellement de type fini (1.3.9), on peut en premier lieu supposer B *intègre*. Si $\mathfrak{q}$ est l'image réciproque dans A de l'idéal maximal de B, on sait que B est aussi une $A_\mathfrak{q}$-algèbre essentiellement de type fini (1.3.10), et il résulte de *a)* et de (7.1.7) que tout anneau quotient intègre de $A_\mathfrak{q}$ est formellement équidimensionnel; on peut donc supposer que l'homomorphisme $A\to B$ est un homomorphisme *local*. Le noyau $\mathfrak{r}$ de cet homomorphisme est alors un idéal premier de A, et en vertu de *a)*, tout anneau quotient intègre de $A/\mathfrak{r}$ est formellement équidimensionnel; comme B est une $(A/\mathfrak{r})$-algèbre essentiellement de type fini, on voit qu'on peut aussi supposer que A est *intègre* et est un sous-anneau de B. On sait (1.3.11) que B est quotient d'un anneau local de la forme $C_{\mathfrak{p}}$, où $C=A[T_1, \ldots, T_n]$ est une algèbre de polynômes et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de C au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. En vertu de (7.1.7), il suffit de prouver que $C_{\mathfrak{p}}$ est formellement équidimensionnel, autrement dit on peut se borner au cas où $B=C_{\mathfrak{p}}$.

Posons $A'=\hat{A}$, et $C'=A'[T_1, \ldots, T_n]=C\otimes_A A'$; il y a un idéal premier unique $\mathfrak{p}'$ de C' au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}A'$ de A', donc au-dessus de $\mathfrak{p}$; posons $B'=C'_{\mathfrak{p}'}$; l'homomorphisme $B\rightarrow B'$ est local et fait de B' un B-module plat. On sait alors que $\hat{B}'$ est un $\hat{B}$-module plat (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, n° 4, prop. 4); comme $\hat{B}'$ est caténaire (5.6.4), il suffira de prouver que $\hat{B}'$ est *équidimensionnel* pour en déduire que $\hat{B}$ l'est aussi (7.1.3, (i)), ce qui achèvera la démonstration.

Or, A' est quotient d'un anneau régulier par le théorème de Cohen (**0**, 19.8.8), donc il en est de même de B' (**0**, 17.3.9); en vertu de (7.1.5), pour montrer que B' est formellement équidimensionnel, il suffit de prouver que B' est *équidimensionnel*; et pour cela, il suffit de montrer que C' est équidimensionnel, puisque C' est quotient d'anneau régulier, donc caténaire (5.6.4). Or les idéaux premiers minimaux de C' sont les idéaux $\mathfrak{q}'C'$, où $\mathfrak{q}'$ parcourt les idéaux premiers minimaux de A' (5.5.3), et on a $C'/\mathfrak{q}'C'=(A'/\mathfrak{q}')[T_1, \ldots, T_n]$. Comme A' est équidimensionnel par hypothèse (puisque A est intègre), il en est donc de même de C' par (5.5.4). C.Q.F.D.

Définition **(7.1.9)**. — *Lorsque les conditions équivalentes de* (7.1.8) *sont vérifiées, on dit que* A *est un anneau formellement caténaire.*

Pour un anneau local noethérien, il revient donc au même de dire qu'il est formellement équidimensionnel ou formellement caténaire et équidimensionnel, en vertu de (7.1.2).

Proposition **(7.1.10)**. — *Tout anneau local* A *quotient d'un anneau local de Cohen-Macaulay est formellement caténaire.*

Cela résulte aussitôt de (7.1.8) et de (7.1.5) appliqué aux anneaux quotients intègres de A.

Proposition **(7.1.11)**. — (i) *Un anneau local noethérien formellement caténaire est universellement caténaire.*

(ii) *Si* A *est un anneau local noethérien formellement caténaire, tout anneau local* B *qui est une* A-*algèbre essentiellement de type fini est formellement caténaire.*

L'assertion (ii) résulte aussitôt de la condition *c)* de (7.1.8) et du fait que si un anneau local C est une B-algèbre essentiellement de type fini, C est aussi une A-algèbre essentiellement de type fini (1.3.9). Pour prouver (i), notons d'abord qu'en vertu de la condition *b)* de (7.1.8), un anneau local noethérien formellement caténaire A est caténaire, puisque les quotients de A par ses idéaux premiers minimaux le sont (7.1.4). Si maintenant E est une A-algèbre de type fini, il résulte de ce qui précède et de (ii) que tout anneau local de E en un idéal premier est caténaire, donc que E est caténaire. Donc A est universellement caténaire.

Remarques **(7.1.12).** — (i) On ignore si, réciproquement, un anneau local noethérien universellement caténaire est toujours formellement caténaire.

(ii) Un anneau local noethérien A *de dimension* 1 est nécessairement équidimensionnel, son idéal maximal ne pouvant être minimal (car dans ce cas A serait de dimension 0). Comme $\dim(\hat{A})=1$, cela montre que A est même *formellement équidimensionnel*, et *a fortiori* formellement caténaire (donc *universellement caténaire*). Par contre, l'anneau local de dimension 2 défini dans (5.6.11), qui est caténaire mais non universellement caténaire, est *a fortiori* non formellement caténaire.

Corollaire **(7.1.13).** — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien irréductible de dimension* 1, X *un préschéma irréductible,* $f: X \to Y$ *un morphisme dominant de type fini,* ξ, η *les points génériques de* X *et* Y *respectivement. Alors, pour tout* $y \in f(X)$, *les dimensions des composantes irréductibles de* $f^{-1}(y)$ *sont toutes égales à* $\deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(\eta)}\boldsymbol{k}(\xi)$.

Par hypothèse, $f^{-1}(\eta)$ est irréductible de point générique ξ et de dimension $\deg.\mathrm{tr}_{\boldsymbol{k}(\eta)}\boldsymbol{k}(\xi)$ (5.2.1). Comme Y est irréductible et de dimension 1, on a $\dim(\mathcal{O}_y)=1$ pour tout $y \neq \eta$, et $\mathcal{O}_y$ est universellement caténaire en vertu de (7.1.12, (ii)). Si $y \in f(X)$ et si z est un point générique d'une composante irréductible Z de $f^{-1}(y)$, on a donc, par (5.6.5)

$$\dim(Z) = 1 + \dim(f^{-1}(\eta)) - \dim(\mathcal{O}_{X,z}).$$

Mais on a $\dim(\mathcal{O}_{X,z}) \leqslant \dim(\mathcal{O}_y)$ (**0**, 16.3.9), et d'autre part, comme z n'est pas le point générique de X, $\dim(\mathcal{O}_{X,z})>0$; donc $\dim(\mathcal{O}_{X,z})=1$ et $\dim(Z)=\dim(f^{-1}(\eta))$.

7.2. Anneaux strictement formellement caténaires.

Notations **(7.2.1).** — Pour un anneau *intègre noethérien* A, nous noterons $A^{(1)}$ l'intersection des anneaux locaux $A_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A *de hauteur* 1 (5.10.17). Si A est un anneau *local* noethérien intègre, nous noterons $A^{(\omega)}$ l'intersection des $A_{\mathfrak{p}}$ où cette fois $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble de tous les idéaux premiers de A *distincts de l'idéal maximal.*

Nous dirons qu'un anneau local noethérien A est *strictement équidimensionnel* si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$, on a $\dim(A/\mathfrak{p})=\dim(A)$; il revient au même de dire que A est *équidimensionnel* et *sans idéaux premiers associés immergés.*

Exemple **(7.2.1.1).** — Soit A un anneau local noethérien *de dimension* 1. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est sans idéaux premiers associés immergés.

a') $\hat{A}$ est sans idéaux premiers associés immergés.

b) A est strictement équidimensionnel.

b') $\hat{A}$ est strictement équidimensionnel.

c) A est un anneau de Cohen-Macaulay.

En effet *a)* signifie que l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A n'est pas associé à A, donc les idéaux premiers associés à A sont les idéaux minimaux de A, tous distincts de $\mathfrak{m}$, et pour un tel idéal $\mathfrak{p}$, on a nécessairement $\dim(A/\mathfrak{p})=1$; donc *a)* implique *b)*. Inversement, *b)* implique que tout idéal premier $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(A)$ est distinct de $\mathfrak{m}$, donc minimal, et par suite *b)* implique *a)*. On sait déjà que *a)* et *c)* sont équivalentes pour un anneau local de dimension 1 (5.7.8). Comme il revient au même de dire que A est un anneau de Cohen-Macaulay ou que $\hat{A}$ est un anneau de Cohen-Macaulay (**0**, 16.5.2), et que l'on a $\dim(\hat{A})=1$, on voit enfin que *a')* et *b')* sont équivalentes à *c)*.

Proposition **(7.2.2)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien intègre; posons* $A'=\hat{A}$, $X=\mathrm{Spec}(A)$, $X'=\mathrm{Spec}(A')$ *et désignons par* $f: X'\to X$ *le morphisme canonique. Soient a le point fermé de* X, $j: X-\{a\}\to X$ *l'injection canonique. Soient* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent,* $\mathscr{F}'=f^*(\mathscr{F})=\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{O}_{X'}$; *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le* $\mathscr{O}_X$*-Module* $j_*(\mathscr{F}|X-\{a\})$ *est cohérent.*

b) *Pour tout* $x'\in\mathrm{Ass}(\mathscr{F}')$, *on a* $\dim(\overline{\{x'\}})\geqslant 2$.

Soit en effet a' le point fermé de X', qui est l'unique point de la fibre $f^{-1}(a)$, et soit $j': X'-\{a'\}\to X'$ l'injection canonique. Comme le morphisme f est fidèlement plat et quasi-compact, il est équivalent de dire que $j_*(\mathscr{F}|X-\{a\})$ est cohérent ou que $j'_*(\mathscr{F}'|X'-\{a'\})$ est cohérent (5.9.5). D'autre part, comme A' est isomorphe au quotient d'un anneau local régulier par le théorème de Cohen (**0**, 19.8.8), il résulte de (5.11.4) que la condition *b)* de l'énoncé équivaut au fait que $j'_*(\mathscr{F}'|X'-\{a'\})$ est cohérent. D'où la proposition.

Au lieu d'appliquer (5.11.4) en utilisant le th. de Cohen, ce qui (par (5.11.2)) fait implicitement appel aux résultats cohomologiques du chap. III, on peut aussi utiliser le fait que A' est universellement caténaire (5.6.4) et universellement japonais en vertu de (7.6.5) (la démonstration de ce dernier résultat n'utilisant pas (7.2.2)).

Proposition **(7.2.3)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien intègre. Les notations étant celles de* (7.2.2), *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $A^{(1)}$ *est une* A*-algèbre finie.*

b) *Pour toute partie fermée* T *de* X *de codimension* $\geqslant 2$, *si l'on désigne par* $i: X-T\to X$ *l'injection canonique,* $i_*(\mathscr{O}_{X-T})$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-Module cohérent.*

c) *Pour tout* $x'\in\mathrm{Ass}(\mathscr{O}_{X'})$ *et toute partie fermée* T *de* X *de codimension* $\geqslant 2$, *on a* $\mathrm{codim}(f^{-1}(T)\cap\overline{\{x'\}},\overline{\{x'\}})\geqslant 2$.

Posons $Z=Z^{(2)}(X)$ (5.10.13) et $Z'=f^{-1}(Z)$, qui sont des parties stables par spécialisation; les conditions *a)* et *b)* équivalent respectivement aux propriétés suivantes : *a_1)* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{O}_X)$ est cohérent; *b_1)* $\mathscr{H}^0_{X/T}(\mathscr{O}_X)$ est cohérent pour toute partie fermée T de X de codimension $\geqslant 2$. Compte tenu de (5.9.5), ces deux dernières propriétés équivalent respectivement à : *a'_1)* $\mathscr{H}^0_{X'/Z'}(\mathscr{O}_{X'})$ est cohérent; *b'_1)* posant $T'=f^{-1}(T)$, $\mathscr{H}^0_{X'/T'}(\mathscr{O}_{X'})$ est cohérent pour toute partie fermée T de X de codimension $\geqslant 2$. Or, tout point de $\mathrm{Ass}(\mathscr{O}_{X'})$ se projette dans X sur le point générique de X puisque f est un morphisme plat (3.3.2); comme par définition ce point n'appartient pas à Z, on voit que $\mathrm{Ass}(\mathscr{O}_{X'})$ ne rencontre pas Z'; l'équivalence de *a'_1)* et *b'_1)* résulte donc de (5.11.5), puisque A' est isomorphe à un quotient d'anneau régulier en vertu du théorème de Cohen (**0**, 19.8.8) (ou encore parce que A′ est universellement japonais (7.6.5)). Pour cette raison, les conditions *b′*₁) et *c)* sont aussi équivalentes en vertu de (5.11.4).

Proposition **(7.2.4).** — *Soit* A *un anneau local noethérien et posons* $X = \mathrm{Spec}(A)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *l'anneau* $B^{(1)}$ *est une* B-*algèbre finie.*

b) *Pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathscr{F}$ *et toute partie* Z, *stable par spécialisation, et telle que pour tout* $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \cap (X - Z)$, *on ait* $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}} \cap Z, \overline{\{x\}}) \geqslant 2$, *le* $\mathcal{O}_X$-*Module* $\mathscr{H}^0_{X/Z}(\mathscr{F})$ *est cohérent.*

c) *Pour toute partie fermée* T *de* X *et tout* $\mathcal{O}_U$-*Module cohérent* $\mathscr{G}$ (*où* $U = X - T$) *tel que, pour tout* $x \in \mathrm{Ass}(\mathscr{G})$, *on ait* $\mathrm{codim}(\overline{\{x\}} \cap T, \overline{\{x\}}) \geqslant 2$, $i_*(\mathscr{G})$ (*où* $i : U \to X$ *est l'injection canonique) est un* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent.*

d) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *et tout idéal* $\mathfrak{J}$ *de hauteur* $\geqslant 2$ *dans* B, *l'anneau* $\bigcap_{\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{J}} B_{\mathfrak{p}}$ *est une* B-*algèbre finie.*

e) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A *et tout anneau local* $C = B_{\mathfrak{q}}$ *en un idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B, *tel que* $\dim(C) \geqslant 2$, *l'anneau* $C^{(\omega)}$ *est une* C-*algèbre finie* (ou, ce qui revient au même, *si* $Y = \mathrm{Spec}(C)$ *et si* U *est le complémentaire dans* Y *du point fermé de* C *et* $j : U \to Y$ *l'injection canonique,* $j_*(\mathcal{O}_U)$ *est un* $\mathcal{O}_Y$-*Module cohérent*).

f) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *tout anneau local* $C = B_{\mathfrak{q}}$ *en un idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B, *tel que* $\dim(C) \geqslant 2$, *et pour tout idéal* $\mathfrak{r} \in \mathrm{Ass}(\hat{C})$, *on a* $\dim(\hat{C}/\mathfrak{r}) \geqslant 2$.

On sait déjà (5.11.6) que *a)* et *b)* sont équivalentes, ainsi que *c)* et *d)*, et que *a)* entraîne *d)*. L'équivalence de *a)* et *d)* dans le cas actuel résulte de (7.2.3) appliqué à un anneau quotient intègre B de A, la condition *d)* étant une formulation équivalente de la condition (7.2.3, *b)*) en vertu de (5.9.3.1). L'équivalence de *e)* et *f)* est une conséquence de (7.2.2) appliqué au $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent $\mathcal{O}_Y$ lui-même. On a déjà remarqué (5.11.7, (ii)) que si A vérifie *a)*, il en est de même de toute A-algèbre finie et de tout anneau de fractions de A. La condition *a)* pour A entraîne donc (avec les notations de *e)*) que l'anneau C vérifie *a)*, donc aussi *c)*; mais comme C est intègre et $\dim(C) \geqslant 2$, on peut appliquer à C la condition *c)* en prenant pour T le point fermé de $Y = \mathrm{Spec}(C)$; cela prouve que *a)* entraîne *e)*. Reste à prouver que *e)* entraîne *a)*; on peut évidemment se borner au cas où A est intègre et $B = A$, et il s'agit alors de montrer que la condition *e)* entraîne la condition (7.2.3, *c)*). Avec les notations de (7.2.3, *c)*), considérons donc un point $y' \in f^{-1}(T) \cap \overline{\{x'\}}$, et posons $y = f(y')$ et $C = \mathcal{O}_{X,y}$; comme $y \in T$, on a par hypothèse $\dim(C) \geqslant 2$, et par suite (avec les notations de *e)*), $j_*(\mathcal{O}_U)$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent. Or, posons $Y' = X' \times_X Y$; le morphisme $f : X' \to X$ étant plat, il en est de même de $g = f_{(Y)} : Y' \to Y$. D'ailleurs l'espace sous-jacent à Y′ s'identifie à $f^{-1}(Y)$ (**I**, 3.6.5), et comme A est intègre et *f* plat, $\mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{X'})$ est contenu dans la fibre du point générique de X (3.3.2); ce dernier étant contenu dans Y, on a $x' \in Y'$. Soit $U' = g^{-1}(U)$, et soit j' l'injection canonique $U' \to Y'$; comme $j_*(\mathcal{O}_U)$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent et que *g* est plat, il résulte de (5.9.4) que $j'_*(\mathcal{O}_{U'})$ est un $\mathcal{O}_{Y'}$-Module cohérent. Or on a $x' \in \mathrm{Ass}(\mathcal{O}_{U'})$, donc on conclut de (5.10.10) que l'on a, dans Y′,

$\operatorname{codim}(\overline{\{y'\}}\cap\overline{\{x'\}}, \overline{\{x'\}})\geqslant 2$. Comme y' est arbitraire dans $f^{-1}(T)\cap\overline{\{x'\}}$, on a bien $\operatorname{codim}(f^{-1}(T)\cap\overline{\{x'\}}, \overline{\{x'\}})\geqslant 2$ dans X'. C.Q.F.D.

Théorème **(7.2.5)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *le complété* $\hat{B}$ *est strictement équidimensionnel* (7.2.1).

b) A *est formellement caténaire* (7.1.9) *et les fibres du morphisme canonique* $\operatorname{Spec}(\hat{A}) \to \operatorname{Spec}(A)$ *vérifient* (S_1) (autrement dit, *n'ont pas de cycle premier associé immergé*).

c) A *est universellement caténaire* (5.6.2) *et pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *l'anneau* $B^{(1)}$ *est une* B-*algèbre finie* (cf. (7.2.4)).

d) A *est universellement caténaire et pour tout anneau quotient intègre* B *de* A *et tout anneau local* $C = B_{\mathfrak{q}}$ *en un idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B, *tel que* $\dim(C)\geqslant 2$, *l'anneau* $C^{(\omega)}$ *est une* C-*algèbre finie.*

e) A *est universellement caténaire et pour tout anneau quotient intègre* B *de* A *et tout anneau local* $C = B_{\mathfrak{q}}$ *en un idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B, *tel que* $\dim(C)\geqslant 2$, *l'anneau complété* $\hat{C}$ *est tel que* $\operatorname{Spec}(\hat{C})$ *n'ait pas de cycle premier associé de dimension* 1.

De plus, lorsque ces conditions sont remplies, alors, pour tout anneau quotient B *de* A *qui est strictement équidimensionnel, le complété* $\hat{B}$ *est strictement équidimensionnel.*

L'équivalence de *c)*, *d)* et *e)* a été démontrée dans (7.2.4). Pour montrer que *a)* et *b)* sont équivalentes, rappelons (7.1.9) que dire que A est formellement caténaire signifie que pour tout anneau quotient intègre B de A, $\hat{B}$ est équidimensionnel. D'autre part, toute fibre du morphisme $\operatorname{Spec}(\hat{A}) \to \operatorname{Spec}(A)$ en un point $x\in\operatorname{Spec}(A)$ est la fibre du morphisme $\operatorname{Spec}(\hat{B}) \to \operatorname{Spec}(B)$ au point générique x de Spec(B), où $B = A/\mathfrak{j}_x$; dire que cette fibre est sans cycle premier associé immergé équivaut à dire que $\hat{B}$ n'a pas d'idéaux premiers associés immergés, en vertu de (3.3.3); ceci prouve l'équivalence de *a)* et *b)*. Le même raisonnement montre que si *a)* est vérifiée, alors, pour tout anneau quotient B de A qui est sans idéaux premiers associés immergés, le complété $\hat{B}$ est aussi sans idéaux premiers associés immergés; d'autre part, l'hypothèse que A est formellement caténaire entraîne que si B est équidimensionnel, il en est de même de $\hat{B}$ (7.1.8); ceci établit la dernière assertion du théorème.

Montrons maintenant que *a)* implique *c)*. La condition *a)* implique que A est universellement caténaire (7.1.11); montrons d'autre part que pour tout anneau quotient intègre B de A, $B^{(1)}$ est alors une B-algèbre finie. Compte tenu de (7.2.3) appliqué à B, il s'agit de montrer que si $X = \operatorname{Spec}(B)$, si T est une partie fermée de X, de codimension $\geqslant 2$, $X' = \operatorname{Spec}(\hat{B})$, et $g : X' \to X$ le morphisme canonique, alors on a, pour tout $x'\in\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X'})$, $\operatorname{codim}(g^{-1}(T)\cap\overline{\{x'\}}, \overline{\{x'\}})\geqslant 2$. Mais par hypothèse X' n'a pas de cycle premier associé immergé, donc $\inf(\operatorname{codim}(g^{-1}(T)\cap\overline{\{x'\}}, \overline{\{x'\}}))$ lorsque x' parcourt $\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X'})$, n'est autre que $\operatorname{codim}(g^{-1}(T), X')$. Or, comme g est un morphisme fidèlement plat, on a (6.1.4)

$$\operatorname{codim}(g^{-1}(T), X') = \operatorname{codim}(T, X) \geqslant 2.$$

Reste à prouver que *c)* entraîne *a)*. Raisonnons par récurrence sur $n=\dim(A)$, le théorème étant trivial pour $n=0$; on peut en outre se borner au cas où $A=B$ est *intègre*. Procédons en deux étapes, n étant $\geqslant 1$.

I) *Supposons d'abord que* A *vérifie* (S_2). — Posons $X=\operatorname{Spec}(A)$, $A'=\hat{A}$, $X'=\operatorname{Spec}(A')$ et soit $u: X' \rightarrow X$ le morphisme canonique; il s'agit de montrer que pour tout élément $x' \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X'})$, on a $\dim(\overline{\{x'\}})=n$. Soit $f \neq 0$ un élément de l'idéal maximal de A, et posons $C=A/fA$; on sait (5.7.6) que A/fA vérifie (S_1); en outre, comme les idéaux premiers minimaux de A parmi ceux qui contiennent f sont de hauteur 1 en vertu du Hauptidealsatz, et que C est caténaire, $C=A/fA$ est *strictement équidimensionnel* et $\dim(C)=n-1$. On a $\hat{C}=C \otimes_A A'=A'/fA'$, et f est A'-régulier par platitude $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 6.3.4)$; si l'on pose $Y'=V(fA')=\operatorname{Spec}(\hat{C})$, alors, pour tout point maximal y' de $Y' \cap \overline{\{x'\}}$, on a $y' \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{Y'})$ en vertu de (3.4.3); d'autre part, on a $y' \neq x'$ car $u(x')$ est le point générique de X (3.3.2) et l'on a $u(y') \in V(fA)$. On en conclut (5.1.8) que

$$\dim(\overline{\{y'\}})=\dim(\overline{\{x'\}})-1. \tag{7.2.5.1}$$

Mais l'anneau quotient $C=A/fA$ vérifie aussi l'hypothèse *c)* de l'énoncé (5.6.1 et 5.11.7, (ii)); en vertu de l'hypothèse de récurrence, on a $\dim(\overline{\{y'\}})=\dim(C)=n-1$; la conclusion $\dim(\overline{\{x'\}})=n$ résulte donc dans ce cas de (7.2.5.1).

II) *Cas général.* — Comme par hypothèse l'anneau $A^{(1)}$ est une A-algèbre *finie*, il vérifie (S_2) en vertu de (5.10.17, (i)); il en est de même de chacun de ses anneaux locaux $(A^{(1)})_{\mathfrak{n}}$ en un idéal maximal $\mathfrak{n}$ et de plus, comme A est universellement caténaire, les anneaux $(A^{(1)})_{\mathfrak{n}}$ (en nombre fini) sont tous *de dimension n* (5.6.10); en outre, ces anneaux vérifient l'hypothèse *c)* de l'énoncé (5.6.1 et 5.11.7, (ii)). On sait que le complété de $A^{(1)}$, égal à $\hat{A} \otimes_A A^{(1)}$, est composé direct des complétés des anneaux locaux $(A^{(1)})_{\mathfrak{n}}$. Posons $X_1=\operatorname{Spec}(A^{(1)})$, $X_1'=\operatorname{Spec}((A^{(1)})^{\wedge})=X' \times_X X_1$; pour tout $x_1' \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X_1'})$, il résulte de ce qui précède et du cas I) que l'on a $\dim(\overline{\{x_1'\}})=n$. Soit $u_1=u_{(X_1)}: X_1' \rightarrow X_1$ le morphisme canonique; comme A et $A^{(1)}$ ont même corps des fractions, l'image réciproque du point générique x de X par la projection $X_1 \rightarrow X$ se réduit au point générique x_1 de X_1, l'image réciproque par la projection $X_1' \rightarrow X'$ de la fibre $u^{-1}(x)$ est la fibre $u_1^{-1}(x_1)$ et cette projection induit un isomorphisme du préschéma $u_1^{-1}(x_1)$ sur $u^{-1}(x)$. Cela étant, les points de $\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X'})$ (resp. $\operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X_1'})$) sont les points génériques des cycles premiers associés à $u^{-1}(x)$ (resp. $u_1^{-1}(x_1)$) (3.3.1). Pour tout $x' \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X'})$, il y a donc un $x_1' \in \operatorname{Ass}(\mathcal{O}_{X_1'})$ au-dessus de x', et si Z' (resp. Z_1') est le sous-préschéma fermé réduit de X' (resp. X_1') ayant $\overline{\{x'\}}$ (resp. $\overline{\{x_1'\}}$) pour espace sous-jacent, la projection $Z_1' \rightarrow Z'$ est un morphisme fini et surjectif; on en conclut (5.4.2) que $\dim(\overline{\{x'\}})=\dim(\overline{\{x_1'\}})=n$. C.Q.F.D.

Définition **(7.2.6).** — *Lorsqu'un anneau local noethérien* A *vérifie les conditions équivalentes de* (7.2.5), *on dit qu'il est strictement formellement caténaire.*

Corollaire **(7.2.7)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien tel qu'il existe un* A-*module* M *de type fini qui soit un* A-*module de Cohen-Macaulay et pour lequel* $\mathrm{Supp}(\mathrm{M})=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$; *alors* A *est strictement formellement caténaire.*

En effet, A est formellement caténaire (7.1.5 et 7.1.9), et d'autre part les fibres du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\hat{\mathrm{A}}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ sont des préschémas de Cohen-Macaulay (6.3.8), donc *a fortiori* vérifient (S_1).

Corollaire **(7.2.8)**. — *Si* A *est un anneau local noethérien strictement formellement caténaire, tout anneau local* B *qui est une* A-*algèbre essentiellement de type fini est strictement formellement caténaire.*

En effet, B est formellement caténaire (7.1.11) et il résulte de (7.4.4) [1] que les fibres de $\mathrm{Spec}(\hat{\mathrm{B}}) \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ vérifient (S_1), d'où la conclusion.

Corollaire **(7.2.9)**. — *Tout anneau local noethérien de dimension* 1 *est strictement formellement caténaire.*

En effet, tout anneau quotient *intègre* B d'un tel anneau A est de dimension 0 ou 1, donc son complété est strictement équidimensionnel (7.2.1.1).

Remarques **(7.2.10)**. — (i) Il résulte de (7.2.7) et (7.2.8) que tout anneau quotient d'un anneau local de Cohen-Macaulay est strictement formellement caténaire.

Un anneau local noethérien de dimension 2 vérifiant (S_2) est strictement formellement caténaire, puisque c'est un anneau de Cohen-Macaulay. Rappelons par contre qu'il y a des anneaux locaux noethériens intègres de dimension 2 qui ne sont pas universellement caténaires, ni *a fortiori* strictement formellement caténaires (5.6.11).

(ii) On ignore si un anneau formellement caténaire (7.1.9) est strictement formellement caténaire; cela tient à ce qu'on ne sait pas si pour un anneau local noethérien intègre B, $\hat{\mathrm{B}}$ est sans idéaux premiers associés immergés (6.4.3). Nous ignorons également si, dans les conditions équivalentes *c)*, *d)*, *e)* de (7.2.5), on peut remplacer l'hypothèse que A est universellement caténaire par l'hypothèse que A est caténaire; on peut montrer qu'il en est ainsi lorsque A est hensélien (18.9.6).

7.3. Fibres formelles des anneaux locaux noethériens.

(7.3.1) Nous allons considérer dans ce numéro et les deux suivants des propriétés $\boldsymbol{P}(\mathrm{Z}, k)$ de la forme suivante :

« Z est un préschéma localement noethérien sur un corps k,

et pour tout $z \in \mathrm{Z}$, on a $\boldsymbol{Q}(\mathcal{O}_z, k)$ »

où $\boldsymbol{Q}(\mathrm{A}, k)$ est une propriété d'un anneau local noethérien A qui est une k-algèbre; on suppose que si k' est un corps isomorphe à k, et si A' est un anneau local noethérien qui est une k'-algèbre di-isomorphe à A, les propriétés $\boldsymbol{Q}(\mathrm{A}, k)$ et $\boldsymbol{Q}(\mathrm{A}', k')$ sont équivalentes.

[1] Le cor. (7.2.8) n'est pas utilisé pour démontrer (7.4.4).

Si X, Y sont deux préschémas localement noethériens, nous dirons qu'un morphisme $f: X \to Y$ est un ***P**-morphisme* si :

1° f est *plat*;

2° pour tout $y \in Y$, la propriété $\boldsymbol{P}(f^{-1}(y), \boldsymbol{k}(y))$ est vraie.

Lemme **(7.3.2)**. — *Soient* X, Y *deux préschémas localement noethériens*, $f: X \to Y$ *un morphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *f est un **P**-morphisme.*

b) *Pour tout* $x \in X$, *si l'on pose* $y = f(x)$, *alors* $\mathcal{O}_x$ *est un* $\mathcal{O}_y$*-module plat et la propriété* $\boldsymbol{Q}(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_y} \boldsymbol{k}(y), \boldsymbol{k}(y))$ *est vraie.*

c) *Pour tout* $x \in X$, *si l'on pose* $y = f(x)$, *le morphisme* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ *correspondant à l'homomorphisme* $\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x$ *est un **P**-morphisme.*

c') *Pour tout point fermé* $x \in X$, *le morphisme* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_x) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_y)$ *est un **P**-morphisme.*

L'équivalence de *a)* et *b)* résulte en effet des définitions; il en est de même de l'équivalence de *b)* et *c)*, compte tenu de (**I**, 2.4.2); enfin l'équivalence de *b)* et *c')* résulte de ce que pour tout $x \in X$, $\overline{\{x\}}$ contient un point fermé (5.1.11).

Corollaire **(7.3.3)**. — *Soient* A, B *deux anneaux noethériens*, $\varphi: A \to B$ *un homomorphisme tel que le morphisme correspondant* $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *soit un **P**-morphisme. Alors, pour toute partie multiplicative* S *de* A, *le morphisme* $\mathrm{Spec}(S^{-1}B) \to \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ *est un **P**-morphisme.*

Cela résulte aussitôt de (7.3.2) et de (**I**, 1.6.2).

(7.3.4) Nous supposerons toujours dans ce qui suit que la propriété $\boldsymbol{Q}$ est telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

(P_{I}) *(transitivité)*. — Si $f: X \to Y$ est un morphisme régulier (6.8.1) et $g: Y \to Z$ un **P**-morphisme, alors $g \circ f$ est un **P**-morphisme.

(P_{II}) *(descente)*. — Si $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ sont des morphismes de préschémas localement noethériens tels que f soit fidèlement plat et que $g \circ f$ soit un **P**-morphisme, alors g est un **P**-morphisme.

(P_{III}). — Pour tout corps k, la propriété $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(k), k)$ est vraie.

Remarques **(7.3.5)**. — (i) Les conditions (P_{I}) et (P_{III}) entraînent que *tout morphisme régulier est un **P**-morphisme.*

(ii) Notons que les hypothèses de (P_{I}) (resp. (P_{II})) entraînent que $h = g \circ f$ (resp. g) est plat (2.2.13); les hypothèses de (P_{I}) ou de (P_{II}) entraînent d'autre part que pour tout $z \in Z$, $f_z: h^{-1}(z) \to g^{-1}(z)$ est plat (2.1.4); comme, pour tout $y \in g^{-1}(z)$, $f_z^{-1}(y)$ est isomorphe à $f^{-1}(y)$ (**I**, 3.6.4), cela montre qu'il suffit, pour vérifier les conditions (P_{I}) et (P_{II}), de le faire seulement lorsque Z est le *spectre d'un corps*.

(iii) Dans certains cas, la propriété $\boldsymbol{Q}$ sera telle que la condition suivante soit vérifiée :

(P'_{I}). — Si $f: X \to Y$ et $g: Y \to Z$ sont deux **P**-morphismes, alors $g \circ f$ est un **P**-morphisme.

(7.3.6) Nous dirons que la propriété $\boldsymbol{P}$ est *géométrique* si elle satisfait (en outre de (P_I), (P_{II}) et (P_{III})) à la condition :

(P_{IV}) *(extension de type fini du corps de base).* — Si $\boldsymbol{P}(Z, k)$ est vraie, alors, pour toute extension k' de type fini de k, $\boldsymbol{P}(Z\otimes_k k', k')$ est vraie.

Lemme **(7.3.7)**. — *Soient* $f : X\rightarrow Y$ *un* $\boldsymbol{P}$*-morphisme de préschémas localement noethériens,* $g : Y'\rightarrow Y$ *un morphisme localement de type fini. Alors, si* $\boldsymbol{P}$ *vérifie la condition* (P_{IV}), *le morphisme* $f'=f_{(Y')} : X\times_Y Y'\rightarrow Y'$ *est un* $\boldsymbol{P}$*-morphisme.*

En effet, pour tout $y'\in Y'$, si l'on pose $y=g(y')$, $\boldsymbol{k}(y')$ est une extension de type fini de $\boldsymbol{k}(y)$ (**I**, 6.4.11) et $f'^{-1}(y')=f^{-1}(y)\otimes_{\boldsymbol{k}(y)}\boldsymbol{k}(y')$ (**I**, 3.6.4); il suffit donc d'appliquer (P_{IV}).

Exemples **(7.3.8)**. — Les propriétés $\boldsymbol{P}(Z, k)$ suivantes vérifient les conditions (P_I), (P_{II}) et (P_{III}) :

(i) (aussi notée (i_n)) Z est de coprofondeur $\leqslant n$.

(ii) Z est un préschéma de Cohen-Macaulay.

(iii) (aussi notée (iii_n)) Z vérifie (S_n).

(iv) Z est régulier.

(v) (aussi notée (v_n)) Z vérifie (R_n).

(vi) Z est réduit.

(vii) Z est normal.

Pour les propriétés (ii) à (vii), cela résulte de (6.6.1) qui, en fait, démontre la condition plus forte (P'_I). Pour (i), la propriété (P_{II}) résulte de (6.6.2); la propriété (P_I) résulte, par le même raisonnement que dans (6.6.1, (i)), de (6.3.2) et du fait qu'un préschéma régulier est de coprofondeur 0.

En outre, il résulte de (6.7.1) que les propriétés (i), (ii) et (iii) sont *géométriques*; en vertu de (6.7.8), il en est de même des suivantes :

(iv') Z est géométriquement régulier.

(v') (aussi notée (v'_n)) Z possède la propriété (R_n) géométrique.

(vi') Z est géométriquement réduit.

(vii') Z est géométriquement normal.

Remarques **(7.3.9)**. — (i) Chacune des propriétés (iv'), (v'_n), (vi'), (vii') entraîne respectivement la propriété correspondante (iv), (v_n), (vi), (vii). La propriété (iv) implique toutes les propriétés de (i) à (vii), et la propriété (iv') implique toutes les propriétés énumérées dans (7.3.8). Rappelons aussi que (i_0) est équivalente à (ii); la conjonction de (iii_1) et de (v_0) (resp. de (iii_1) et de (v'_0)) équivaut à (vi) (resp. (vi')) (5.8.5); enfin la conjonction de (iii_2) et (v_1) (resp. de (iii_2) et (v'_1)) équivaut à (vii) (resp. (vii')) (5.8.6).

(ii) Dans tous les exemples de (7.3.8), la propriété $\boldsymbol{Q}(\mathcal{O}_z, k)$ qui sert à définir $\boldsymbol{P}$ est telle que, pour toute *générisation* z' de z dans Z, $\boldsymbol{Q}(\mathcal{O}_z, k)$ *entraîne* $\boldsymbol{Q}(\mathcal{O}_{z'}, k)$: en vertu de (2.3.4), il suffit de le vérifier pour les propriétés (i) à (vii) (et même (i) à (v) d'après la remarque (7.3.9, (i)) : or c'est inclus dans la définition pour (iii) et (v) (5.7.2 et 5.8.2), cela résulte de (6.3.9) pour (i), et enfin de (**0**, 16.5.10 et 17.3.2) pour (ii) et (iv).

(7.3.10) Nous dirons qu'une propriété $\boldsymbol{P}(Z, k)$ est *du premier type* si la propriété $\boldsymbol{Q}(A, k)$ qui sert à définir $\boldsymbol{P}$ est une propriété $\boldsymbol{R}(A)$ *ne faisant pas intervenir* k et est vraie lorsque A est un *corps*; nous dirons que $\boldsymbol{P}(Z, k)$ est *du second type* si la propriété $\boldsymbol{Q}(A, k)$ est de la forme

« Pour toute extension k' de type fini de k et tout point z' de $\mathrm{Spec}(A\otimes_k k')$ au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$, on a $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{z'})$ »

$\boldsymbol{R}(A)$ étant encore supposée vraie lorsque A est un corps. Il est clair que dans les exemples de (7.3.8), les propriétés (i) à (vii) sont du premier type, les propriétés (iv') à (vii') du second type.

Cela étant, si l'on reprend les raisonnements de (6.6.1) et (6.8.3), on constate que lorsque $\boldsymbol{P}$ est du premier ou du second type pour une propriété $\boldsymbol{R}(A)$, *les conditions* (P_I) *et* (P_{II}) *sont conséquences des conditions suivantes sur* $\boldsymbol{R}$:

(R_I) Soient X, Y deux préschémas localement noethériens, $f: X\rightarrow Y$ un morphisme *régulier*; alors, pour tout $x\in X$, la propriété $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{f(x)})$ implique la propriété $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_x)$.

(R_{II}) Soit $\varphi: A\rightarrow B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens faisant de B un A-module *plat*; alors $\boldsymbol{R}(B)$ implique $\boldsymbol{R}(A)$.

En outre, la propriété (P_{III}) résulte de ce que $\boldsymbol{R}(k)$ est vraie par hypothèse pour tout corps k; enfin, lorsque $\boldsymbol{P}$ est du second type, la condition (P_{IV}) est conséquence de la définition de $\boldsymbol{P}$ et de la transitivité des extensions de type fini.

Remarque **(7.3.11)**. — Nous laissons au lecteur le soin de formuler la propriété $\boldsymbol{R}$ correspondant à chacun des exemples de (7.3.8), et de vérifier les conditions (R_I) et (R_{II}) dans chacun des cas, à l'aide des résultats du § 6. En fait, sauf pour l'exemple (i) de (7.3.8), la propriété $\boldsymbol{R}$ vérifie dans les autres cas la condition suivante :

(R'_I) Soient X, Y deux préschémas localement noethériens, $f: X\rightarrow Y$ un $\boldsymbol{P}$*-morphisme* (pour la propriété $\boldsymbol{P}$ du premier ou du second type définie par $\boldsymbol{R}$); alors, pour tout $x\in X$, la propriété $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{f(x)})$ implique la propriété $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_x)$.

Les raisonnements de (6.6.1) et (6.8.3) prouvent que si $\boldsymbol{R}$ vérifie les conditions (R'_I) et (R_{II}), alors $\boldsymbol{P}$ vérifie les conditions (P'_I) (7.3.4, (iii)) et (P_{II}).

Proposition **(7.3.12)**. — *Soit* $\boldsymbol{P}$ *une propriété du premier ou du second type définie à partir d'une propriété* $\boldsymbol{R}$ *vérifiant les conditions* (R_I) *et* (R_{II}) (resp. (R'_I) *et* (R_{II})). *Si pour tout préschéma localement noethérien* X, $U_{\boldsymbol{R}}(X)$ *désigne l'ensemble des* $x\in X$ *tels que* $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_x)$ *soit vraie, alors, pour tout morphisme régulier* (resp. *tout* $\boldsymbol{P}$*-morphisme*) $f: X\rightarrow Y$ *de préschémas localement noethériens, on a*

(7.3.12.1) $$U_{\boldsymbol{R}}(X)=f^{-1}(U_{\boldsymbol{R}}(Y)).$$

C'est une conséquence immédiate des définitions.

(7.3.13) Étant donné un anneau semi-local noethérien A, nous appellerons *fibres formelles* de A les fibres du morphisme canonique $f:\mathrm{Spec}(\hat{A})\rightarrow\mathrm{Spec}(A)$; pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, la fibre formelle en $\mathfrak{p}$ est donc le schéma $\mathrm{Spec}(\hat{A}\otimes_A \boldsymbol{k}(\mathfrak{p}))$; comme le complété de l'anneau local $A/\mathfrak{p}$ est $\hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A}=(A/\mathfrak{p})\otimes_A\hat{A}$, on voit que la fibre formelle de A en $\mathfrak{p}$ est aussi *la fibre formelle de* $A/\mathfrak{p}$ *au point générique* (0) *de* $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$.

La propriété $\boldsymbol{P}$ étant définie comme dans (7.3.1), nous dirons que *les fibres formelles de* A *ont la propriété* $\boldsymbol{P}$, ou que A est un $\boldsymbol{P}$*-anneau,* si, pour tout $x \in \operatorname{Spec}(A)$, $\boldsymbol{P}(f^{-1}(x), \boldsymbol{k}(x))$ est vraie. Comme f est *plat*, il revient au même de dire que f est un $\boldsymbol{P}$*-morphisme.*

Proposition **(7.3.14).** — *Soient* A *un anneau semi-local noethérien,* $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ *ses idéaux maximaux, et posons* $A_i = A_{\mathfrak{m}_i}$; *pour que* A *soit un* $\boldsymbol{P}$*-anneau, il faut et il suffit que chacun des* A_i *le soit.*

En effet, $\hat{A}$ est composé direct des $\hat{A}_i$, donc la fibre formelle de A en un point $x \in \operatorname{Spec}(A)$ est la *somme* des fibres formelles en x de ceux des A_i tels que $x \in \operatorname{Spec}(A_i)$.

Proposition **(7.3.15).** — *Soit* A *un anneau semi-local noethérien.*

(i) *Si* A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau, tout anneau quotient de* A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau.*

(ii) *Si de plus* $\boldsymbol{P}$ *satisfait à la condition* (P_{IV}) (7.3.6), *alors toute* A*-algèbre finie est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau.*

Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, $\hat{A} \otimes_A (A/\mathfrak{a})$ est le complété de $A/\mathfrak{a}$, et les fibres formelles de $A/\mathfrak{a}$ sont donc les fibres formelles de A aux points de $V(\mathfrak{a})$, d'où (i). D'autre part, si B est une A-algèbre finie, donc un anneau semi-local, on a $\hat{B} = B \otimes_A \hat{A}$, et (ii) résulte donc de (7.3.7).

Proposition **(7.3.16).** — *On suppose que la propriété* $\boldsymbol{P}$ *est du premier* (resp. *du second*) *type, définie à partir d'une propriété* $\boldsymbol{R}$ (7.3.10). *Lorsque* $\boldsymbol{P}$ *est du second type, on suppose en outre que la relation*

« *pour toute extension* finie k' *de* k, *et tout* $z' \in Z \otimes_k k'$, $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{z'})$ *est vraie* »

entraîne $\boldsymbol{P}(Z, k)$ (ce qui est vérifié pour les exemples (iv') à (vii') de (7.3.8), en vertu de (6.7.7) et (4.6.1)).

Soit A *un anneau semi-local noethérien. Si la propriété* $\boldsymbol{R}$ *vérifie les conditions* (R_I) *et* (R_{II}), *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau.*

b) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A (resp. *toute* A*-algèbre finie intègre* B) *et tout idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* $\hat{B}$ *dont l'image réciproque dans* B *est* 0, $\boldsymbol{R}(\hat{B}_{\mathfrak{q}})$ *est vraie.*

Si de plus $\boldsymbol{R}$ *satisfait à la condition* (R'_I), *les propriétés* a) *et* b) *sont aussi équivalentes à :*

c) *Pour tout anneau quotient* B *de* A (resp. *toute* A*-algèbre finie* B) *si l'on pose* $Y = \operatorname{Spec}(B)$, $Y' = \operatorname{Spec}(\hat{B})$, *et si* $g : Y' \to Y$ *est le morphisme canonique, on a* (*avec les notations de* (7.3.12))

$$U_{\boldsymbol{R}}(Y') = g^{-1}(U_{\boldsymbol{R}}(Y)). \tag{7.3.16.1}$$

L'équivalence de *a)* et *b)* est immédiate lorsque $\boldsymbol{P}$ est du premier type : en effet, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on a vu que la fibre formelle de $B = A/\mathfrak{p}$ au point générique (0) de Spec(B) n'est autre que la fibre formelle de A au point $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ (7.3.13).

Lorsque $\boldsymbol{P}$ est du second type, l'équivalence de *a)* et *b)* résulte du lemme plus général suivant :

Lemme **(7.3.16.2).** — *Soient* A, A' *deux anneaux,* $\varphi : A \to A'$ *un homomorphisme,* $f : \operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$ *le morphisme correspondant. Afin que pour tout* $x \in \operatorname{Spec}(A)$, *toute* *extension finie* k *de* $\boldsymbol{k}(x)$ *et tout point* z *de* $f^{-1}(x)\otimes_{\mathbf{k}(x)}k=\mathrm{Z}$, *la propriété* $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{\mathrm{Z},z})$ *soit vraie, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : pour toute* A*-algèbre intègre finie* B, *si* $g:\mathrm{Spec}(\mathrm{A}'\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ *est le morphisme déduit de* f *par extension à* B *de l'anneau de base, et si* $\mathrm{T}=g^{-1}(\xi)$ *est la fibre du point générique* ξ *de* Spec(B), *alors, pour tout* $t\in\mathrm{T}$, $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{\mathrm{T},t})$ *est vraie.*

La condition est trivialement nécessaire puisque si x est le point de Spec(A) au-dessus duquel est ξ, $\boldsymbol{k}(\xi)$ est une extension finie de $\boldsymbol{k}(x)$. Inversement, considérons un point quelconque $x\in\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et soit k une extension finie de $\boldsymbol{k}(x)$. Si l'on pose $\mathfrak{p}=\mathfrak{j}_x$, $\boldsymbol{k}(x)$ est le corps des fractions de $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$, et il y a une base de k sur $\boldsymbol{k}(x)$ formée d'éléments entiers sur $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$; si B est le sous-anneau de k engendré par ces éléments, B est une A-algèbre intègre finie et k est le corps $\boldsymbol{k}(\xi)$ au point générique ξ de Spec(B); comme x est l'image de ξ dans Spec(A), la fibre $g^{-1}(\xi)$ n'est autre que $f^{-1}(x)\otimes_{\mathbf{k}(x)}k$, ce qui achève de démontrer le lemme.

Le fait que *a)* entraîne *c)* est une conséquence immédiate de (7.3.15) et (7.3.12). D'autre part, si on spécialise *c)* au cas où B est intègre, et si y désigne le point générique de $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$, on a $\mathcal{O}_{\mathrm{Y},y}=\boldsymbol{k}(y)$, donc $y\in\mathrm{U}_{\mathbf{R}}(\mathrm{Y})$, puisque $\boldsymbol{R}(k)$ est vraie pour tout corps k; en exprimant que tout point $y'\in g^{-1}(y)$ appartient à $\mathrm{U}_{\mathbf{R}}(\mathrm{Y}')$, on obtient l'énoncé *b)*, donc *c)* entraîne *b)*. C.Q.F.D.

Proposition **(7.3.17).** — *Supposons que la propriété* $\boldsymbol{R}$ *vérifie les conditions* $(\mathrm{R}'_{\mathrm{I}})$ *et* $(\mathrm{R}_{\mathrm{II}})$ *et que* $\boldsymbol{P}$ *soit la propriété du premier* (resp. *du second*) *type définie à partir de* $\boldsymbol{R}$ (7.3.10). *Alors, si* A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau, les propriétés* $\boldsymbol{R}(\mathrm{A})$ *et* $\boldsymbol{R}(\hat{\mathrm{A}})$ *sont équivalentes.*

Cela résulte de (7.3.12.1) appliqué à $\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\hat{\mathrm{A}})$.

Proposition **(7.3.18).** — *Supposons que* $\boldsymbol{P}$ *soit une propriété du premier* (resp. *du second*) *type définie à partir d'une propriété* $\boldsymbol{R}$ *vérifiant les conditions* $(\mathrm{R}'_{\mathrm{I}})$ *et* $(\mathrm{R}_{\mathrm{II}})$ *ainsi que la condition suivante :*

$(\mathrm{R}_{\mathrm{III}})$ *Pour tout anneau local noethérien* complet C, *si l'on pose* $\mathrm{Z}=\mathrm{Spec}(\mathrm{C})$, *l'ensemble* $\mathrm{U}_{\mathbf{R}}(\mathrm{Z})$ (7.3.12) *est ouvert dans* Z.

Alors, si A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau et si l'on pose* $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, *l'ensemble* $\mathrm{U}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X})$ *est ouvert dans* X.

En effet, si $\mathrm{X}'=\mathrm{Spec}(\hat{\mathrm{A}})$ et si $f:\mathrm{X}'\rightarrow\mathrm{X}$ est le morphisme canonique, on a $\mathrm{U}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X}')=f^{-1}(\mathrm{U}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X}))$ (7.3.12). Comme f est fidèlement plat et quasi-compact et que par hypothèse $\mathrm{U}_{\mathbf{R}}(\mathrm{X}')$ est ouvert dans X', la conclusion découle de (2.3.12).

Remarques **(7.3.19).** — (i) La propriété $\boldsymbol{R}$ qui sert à définir $\boldsymbol{P}$ vérifie la condition $(\mathrm{R}_{\mathrm{III}})$ dans tous les exemples énumérés dans (7.3.8). Pour (i), (ii) et (iii), cela résulte de (6.11.2) et du théorème de Cohen (**0**, 19.8.8); lorsque $\boldsymbol{P}$ est une des propriétés (iv), (iv'), (v), (v'), cela découle de (6.12.7) et (6.12.9), et lorsque $\boldsymbol{P}$ est l'une des propriétés (vii), (vii'), de (6.12.7) et (6.13.4); enfin, pour (vi) et (vi') l'assertion de (7.3.18) est triviale, étant vraie pour tout préschéma localement noethérien.

(ii) Nous avons déjà signalé (6.4.3) que lorsque $\boldsymbol{P}$ est l'une des propriétés (ii) ou (iii_1) de (7.3.8), nous ignorons si tout anneau local noethérien est un $\boldsymbol{P}$-anneau; rappelons toutefois que lorsque A est un anneau *quotient d'un anneau de Cohen-Macaulay*, les fibres formelles de A sont des *schémas de Cohen-Macaulay* (6.3.8).

(iii) Le cas le plus intéressant de la notion de $\boldsymbol{P}$-anneau est celui qui correspond à la propriété la plus forte (iv′) de (7.3.8), c'est-à-dire les anneaux dont *les fibres formelles sont géométriquement régulières*. Les corps, et plus généralement les anneaux locaux noethériens *complets*, vérifient trivialement cette propriété.

(iv) Soit A un anneau local noethérien de *dimension 1*; Spec(A) est alors formé du point fermé a, correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et des points maximaux b_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ correspondant aux idéaux premiers minimaux de A. On a $\dim(\hat{A}) = 1$ et l'idéal maximal de $\hat{A}$ est $\mathfrak{m}\hat{A}$; la fibre formelle de A au point a est donc Spec(k), où $k = A/\mathfrak{m}$ est le corps résiduel de A; la fibre formelle en chacun des b_i est le spectre d'un anneau artinien dont les corps résiduels sont les corps résiduels L_{ij} de Spec($\hat{A}$) aux points maximaux b_{ij} au-dessus de b_i. Comme un anneau artinien est un anneau de Cohen-Macaulay, on voit que A est un $\boldsymbol{P}$-anneau lorsque $\boldsymbol{P}$ est la propriété (ii) de (7.3.8). En outre, comme un anneau artinien réduit est une somme directe de corps, les propriétés suivantes sont équivalentes (6.7.7) :

a) les fibres formelles de A sont géométriquement réduites;

b) les fibres formelles de A sont géométriquement normales;

c) les fibres formelles de A sont géométriquement régulières;

en outre, lorsque A est *réduit*, elles sont aussi équivalentes à :

d) $\hat{A}$ est réduit et L_{ij} est une extension séparable de K_i pour tout couple (i, j) (4.6.1).

En particulier, si A est un *anneau de valuation discrète*, K son corps des fractions, et si $\hat{K}$ est le complété de K pour une valuation correspondant à A (corps des fractions de $\hat{A}$), pour que les fibres formelles de A soient géométriquement régulières, il faut et il suffit que $\hat{K}$ soit une *extension séparable de* K. Ce sera toujours le cas lorsque K est *de caractéristique* 0.

7.4. Permanence des propriétés des fibres formelles.

(7.4.1) Dans toute la suite du numéro, nous supposons que la propriété $\boldsymbol{P}$ est de la forme définie dans (7.3.1), et *vérifie les conditions* ($\mathrm{P_I}$), ($\mathrm{P_{II}}$) *et* ($\mathrm{P_{III}}$) de (7.3.4). En outre, nous supposons que la propriété $\boldsymbol{Q}$ qui sert à définir $\boldsymbol{P}$ est telle que, pour toute *générisation* z' de z dans Z, $\boldsymbol{Q}(\mathcal{O}_z, k)$ *entraîne* $\boldsymbol{Q}(\mathcal{O}_{z'}, k)$.

Lemme **(7.4.2)**. — *Soient* A, A′ *des anneaux locaux noethériens,* $\varphi : A \to A'$ *un homomorphisme local tel que* $f = {}^a\varphi : \mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ *soit un* $\boldsymbol{P}$*-morphisme. Alors, si les fibres formelles de* A′ *sont géométriquement régulières,* A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau.*

Considérons l'homomorphisme complété $\hat{\varphi} : \hat{A} \to \hat{A}'$ et le morphisme correspondant $\hat{f} = {}^a\hat{\varphi}$; on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(\hat{A}) \arrow[d, "g"'] & \operatorname{Spec}(\hat{A}') \arrow[l, "\hat{f}"'] \arrow[d, "g'"] \\ \operatorname{Spec}(A) & \operatorname{Spec}(A') \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

où g et g' sont les morphismes canoniques. Comme par hypothèse f est un $\boldsymbol{P}$-morphisme et g' un morphisme régulier, il résulte de (P_I) que $f \circ g' = g \circ \hat{f}$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme. D'autre part, l'hypothèse que f est un $\boldsymbol{P}$-morphisme implique que f est plat, donc il en est de même de $\hat{f}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 5, nº 4, cor. de la prop. 3), qui est d'ailleurs un homomorphisme local, donc fidèlement plat $(\mathbf{0}_I, 6.6.2)$; il résulte alors de (P_{II}) que g est un $\boldsymbol{P}$-morphisme.

Corollaire **(7.4.3)**. — (i) *Soient* A *un* $\boldsymbol{P}$-*anneau local noethérien,* $A' = \hat{A}$ *son complété. Supposons que pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}'$ *de* A', *les fibres formelles de* $A'_{\mathfrak{p}'}$ *soient géométriquement régulières ; alors, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, $A_{\mathfrak{p}}$ *est un* $\boldsymbol{P}$-*anneau.*

(ii) *Supposons que* $\boldsymbol{P}$ *vérifie la condition* (P_{IV}) (7.3.6). *Soient* A *un* $\boldsymbol{P}$-*anneau local noethérien,* B *une* A-*algèbre locale essentiellement de type fini, et telle que l'homomorphisme* $A \to B$ *soit local. Posons* $A' = \hat{A}$, *et soit* $\mathfrak{n}'$ *l'unique idéal premier de* $B' = B \otimes_A A'$ *au-dessus de l'idéal maximal de* B *et de l'idéal maximal de* A'. *Si les fibres formelles de* $B'_{\mathfrak{n}'}$ *sont géométriquement régulières, alors* B *est un* $\boldsymbol{P}$-*anneau.*

(i) Comme par hypothèse $\operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme, il en est de même de $\operatorname{Spec}(A'_{\mathfrak{p}'}) \to \operatorname{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$ en vertu de (7.3.2, *b)*), pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A et tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de A' au-dessus de $\mathfrak{p}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme (7.4.2) à ce morphisme, en remarquant que le morphisme $\operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$ est surjectif.

(ii) En vertu de (7.4.2), il suffit de prouver que le morphisme $\operatorname{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'}) \to \operatorname{Spec}(B)$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme. Or on a $B = C_{\mathfrak{n}}$, où C est une A-algèbre de type fini et $\mathfrak{n}$ un idéal premier de C au-dessus de l'idéal maximal de A. Si on pose $C' = C \otimes_A A'$, il résulte des hypothèses et de (7.3.7) que $\operatorname{Spec}(C') \to \operatorname{Spec}(C)$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme; comme $B'_{\mathfrak{n}'}$ est un anneau local en un idéal premier de C' au-dessus de $\mathfrak{n}$, la conclusion résulte de (7.3.2, *b)*).

Théorème **(7.4.4)**. — *Les hypothèses sur* $\boldsymbol{P}$ *étant celles de* (7.4.1), *soit* A *un* $\boldsymbol{P}$-*anneau local noethérien.*

(i) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, $A_{\mathfrak{p}}$ *est un* $\boldsymbol{P}$-*anneau.*

(ii) *Supposons en outre que* $\boldsymbol{P}$ *vérifie la condition* (P_{IV}). *Alors tout anneau local qui est une* A-*algèbre essentiellement de type fini est un* $\boldsymbol{P}$-*anneau.*

(i) Appliquant (7.4.3, (i)), tout revient à voir que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de $A' = \hat{A}$, $A'_{\mathfrak{p}'}$ a ses fibres formelles géométriquement régulières. Or, cela a été démontré dans (**0**, 22.3.3 et 22.5.8).

(ii) Soit B une A-algèbre essentiellement de type fini qui soit un anneau local; si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier de A au-dessus duquel est l'idéal maximal de B, B est aussi une $A_{\mathfrak{p}}$-algèbre essentiellement de type fini (1.3.8); en vertu de (i), on peut donc supposer que $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A. On a donc $B = C_{\mathfrak{q}}$, où C est une A-algèbre de type fini, $\mathfrak{q}$ un idéal premier de C au-dessus de $\mathfrak{m}$; soit $\mathfrak{n} \supset \mathfrak{q}$ un idéal maximal de C (nécessairement au-dessus de $\mathfrak{m}$); si l'on pose $k = A/\mathfrak{m}$, $C/\mathfrak{m}C$ est une k-algèbre de type fini, donc le corps résiduel k' de C en l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ est *fini* sur k (**I**, 6.4.2); en vertu de (i), il suffira de prouver que $C_{\mathfrak{n}}$ est un ***P***-anneau, puisque $C_{\mathfrak{q}}$ est un anneau local en un idéal premier de $C_{\mathfrak{n}}$. On est ainsi ramené à démontrer le

Lemme **(7.4.4.1)**. — *Soient* A *un* ***P***-*anneau local noethérien*, k *son corps résiduel*, C *une* A-*algèbre de type fini*, B *un anneau local en un idéal premier* $\mathfrak{n}$ *de* C, *tel que :* 1° *l'homomorphisme* $A \to B$ *soit local;* 2° *le corps résiduel* k' *de* B *soit une extension finie de* k. *Si* ***P*** *satisfait à* (P_{IV}), B *est un* ***P***-*anneau.*

Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ un système de générateurs de la A-algèbre C; montrons d'abord que l'on peut raisonner par récurrence sur m. Soit C' la sous-algèbre de C engendrée par $x_1, \ldots, x_{m-1}$, et soit $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n} \cap C'$. L'homomorphisme $A \to C_{\mathfrak{n}}$ se factorise en $A \to C'_{\mathfrak{n}'} \to C_{\mathfrak{n}}$ et il est clair que $A \to C'_{\mathfrak{n}'}$ et $C'_{\mathfrak{n}'} \to C_{\mathfrak{n}}$ sont des homomorphismes locaux; si k'' est le corps résiduel de $C'_{\mathfrak{n}'}$, $k \to k'$ se factorise de même en $k \to k'' \to k'$, donc k'' est extension finie de k et k' extension finie de k''. L'hypothèse de récurrence entraîne que $C'_{\mathfrak{n}'}$ est un ***P***-anneau; en outre, si $S' = C' - \mathfrak{n}'$, $C_{\mathfrak{n}}$ est un anneau local de $S'^{-1}C$; comme $C = C'[x_m]$, on a $S'^{-1}C = C'_{\mathfrak{n}'}[x_m/1]$ et l'hypothèse de récurrence montre encore que $C_{\mathfrak{n}}$ est un ***P***-anneau. On est ainsi ramené au cas où C est une A-algèbre engendrée par *un seul* élément t.

Appliquons (7.4.3, (ii)); en posant $A' = \hat{A}$, $B' = B \otimes_A A'$ est un anneau local de $C \otimes_A A'$ en un idéal premier au-dessus de $\mathfrak{n}$; comme A et A' ont même corps résiduel k, le corps résiduel de $C \otimes_A A'$ en cet idéal premier est égal à k'. D'ailleurs $C \otimes_A A'$ est une A'-algèbre engendrée par un seul élément. Il résulte donc de (7.4.3, (ii)) qu'on peut se borner à démontrer (7.4.4.1) lorsque ***P*** est la propriété (iv') de (7.3.8), que A est *complet* et C engendrée par un seul élément t.

Pour montrer que les fibres formelles de $B = C_{\mathfrak{n}}$ sont alors géométriquement régulières, appliquons le critère (7.3.16, *b)*). Soit B_1 une B-algèbre finie *intègre*, donc engendrée par un nombre fini d'éléments entiers sur B. En multipliant ces éléments par un élément de $S = C - \mathfrak{n}$, on peut supposer qu'ils sont entiers sur C, et on peut donc écrire $B_1 = S^{-1}C_1$, où C_1 est une sous-C-algèbre de B_1 engendrée par un nombre fini d'éléments entiers sur C, donc une C-algèbre *finie et intègre*. D'autre part, B_1 est un anneau semi-local, et tout anneau local B_2 de B_1 en un idéal maximal est un anneau local de C_1 en un idéal premier, tel que $A \to B_2$ soit un homomorphisme local; en outre, le corps résiduel de B_2 est une extension finie de k', donc de k. On voit donc (compte tenu de (7.3.14) et de (i)) qu'on est ramené à la question suivante : soit C un anneau noethérien *intègre*, contenant un sous-anneau C_0 qui est une A-algèbre engendrée par un seul élément t et telle que C soit une C_0-algèbre *finie*; si $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de C au-dessus de l'idéal maximal de A, et $B = C_{\mathfrak{n}}$, il s'agit de montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\hat{B}$, dont l'image réciproque dans B est o, l'anneau $\hat{B}_{\mathfrak{q}}$ est *régulier*. On peut d'ailleurs remplacer A par son image dans C, qui est un anneau local complet (comme quotient de A) et intègre. La conclusion à prouver est alors conséquence du lemme suivant, plus général en apparence :

Lemme **(7.4.4.2)**. — *Soient* A *un anneau local noethérien intègre et complet, k son corps résiduel,* C *un anneau intègre contenant* A, *tel qu'il existe* $t \in C$ *pour lequel* C *soit une* $A[t]$*-algèbre finie. Soit* $\mathfrak{n}$ *un idéal maximal de* C *au-dessus de l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A; *posons* $B = C_{\mathfrak{n}}$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $B' = \hat{B}$, $X' = \mathrm{Spec}(\hat{B})$; *si* $U = \mathrm{Reg}(X)$, $U' = \mathrm{Reg}(X')$, *et si* $f : X' \to X$ *est le morphisme canonique, on a alors* $f^{-1}(U) \subset U'$.

L'assertion à démontrer pour obtenir (7.4.4.1) se déduira de ce lemme en observant que, puisque B est intègre, le point générique de X appartient à U.

On notera que puisque C est une A-algèbre de type fini, et $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de C, le corps résiduel k' de $C_{\mathfrak{n}} = B$ (donc aussi de B') est une extension *finie* de k (**I**, 6.4.11 et 6.4.2).

Si l'on pose $Y = \mathrm{Spec}(C)$, il résulte de (6.12.8) que Reg(Y) est *ouvert* dans Y; comme les anneaux locaux de X sont des anneaux locaux de Y (**I**, 2.4.2), on a $U = X \cap \mathrm{Reg}(Y)$, donc U est *ouvert* dans X; d'autre part (6.12.7) U' est ouvert dans X', donc $S' = X' - U'$ est fermé; par suite $S' \cap f^{-1}(U)$ est *localement fermé* dans X', et tout revient à prouver que cet ensemble est *vide*. On sait (5.1.10) que dans le cas contraire, il existerait dans $S' \cap f^{-1}(U)$ un idéal premier $\mathfrak{p}'$ tel que $\dim(B'/\mathfrak{p}') \leqslant 1$. Remarquons d'abord que $\mathfrak{p}'$ ne peut être l'idéal maximal $\mathfrak{m}B'$ de B', où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de B. En effet, cela signifierait que $B = B_{\mathfrak{m}}$ serait régulier, donc aussi $B' = \hat{B}$ (**0**, 17.1.5), et on aurait par suite $\mathfrak{m}B' \in U'$ contrairement à l'hypothèse. On doit donc avoir $\dim(B'/\mathfrak{p}') = 1$. Posons $\mathfrak{p} = B \cap \mathfrak{p}'$; par hypothèse $B_{\mathfrak{p}}$ est régulier, mais $B'_{\mathfrak{p}'}$ ne l'est pas; comme $B'_{\mathfrak{p}'}$ est un $B_{\mathfrak{p}}$-module plat, il résulte de (6.5.2) que la fibre Z de f au point $\mathfrak{p}$ *n'est pas régulière au point* $\mathfrak{p}'$. Montrons qu'*on peut se ramener au cas où* $\mathfrak{p} = 0$. En effet, dans le cas général, si l'on pose $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap C$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{p} \cap A$, $C/\mathfrak{q}$ est une $(A/\mathfrak{r})[\bar{t}]$-algèbre finie (où $\bar{t}$ est la classe de t mod. $\mathfrak{q}$); comme $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}B$, $B/\mathfrak{p}$ est égal à $(C/\mathfrak{q})_{\mathfrak{n}/\mathfrak{q}}$, et $\mathfrak{n}/\mathfrak{q}$ est un idéal maximal de $C/\mathfrak{q}$ au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{r}$ de $A/\mathfrak{r}$; on voit donc que les hypothèses de (7.4.4.2) sont encore remplies par $A/\mathfrak{r}$, $C/\mathfrak{q}$ et $B/\mathfrak{p}$, et comme le complété de $B/\mathfrak{p}$ est $B'/\mathfrak{p}B'$, cela prouve notre assertion. Supposons donc $\mathfrak{p} = 0$, de sorte que Z est la fibre générique et que l'homomorphisme $B \to B'/\mathfrak{p}'$ est *injectif*. Posons $V = B'/\mathfrak{p}'$, et distinguons deux cas :

I) V *est une* A*-algèbre finie.* — Comme $B \subset V$, B est *a fortiori* une A-algèbre finie, et comme A est complet, il en est de même de B (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9), d'où $B' = B$, $\mathfrak{p}' = 0$, donc $B'_{\mathfrak{p}'}$ est un corps, et par suite un anneau régulier, contrairement à l'hypothèse.

II) V *n'est pas une* A*-algèbre finie.* — Comme l'anneau local A est *complet*, cela implique que V n'est pas une A-algèbre *quasi-finie* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.1 et 7.4.2); mais par hypothèse le corps résiduel k' de V est extension *finie* du corps résiduel k de A, donc ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.4) l'idéal $\mathfrak{m}\mathrm{V}$ *n'est pas un idéal de définition de* V. Comme V est un anneau local intègre noethérien de dimension 1, 0 est le seul idéal de V qui ne soit pas un idéal de définition, donc $\mathfrak{m}\mathrm{V}=0$. Mais on a $\mathrm{A}\subset\mathrm{V}$ et V est intègre, d'où $\mathfrak{m}=0$ et $\mathrm{A}=k$ est un *corps*. On en déduit tout d'abord $\dim(\mathrm{C})\leqslant 1$ (**0**, 16.1.5); mais comme $\dim(\mathrm{V})=1$, les relations $\dim(\mathrm{V})\leqslant\dim(\mathrm{B}')=\dim(\mathrm{B})\leqslant\dim(\mathrm{C})$ montrent que cela entraîne $\dim(\mathrm{C})=\dim(\mathrm{B})=\dim(\mathrm{B}')=\dim(\mathrm{B}'/\mathfrak{p}')=1$, et par suite $\mathfrak{p}'$ est nécessairement un *idéal premier minimal* de B'. Nous arriverons donc encore à une contradiction si nous prouvons que $\mathrm{B}'_{\mathfrak{p}'}$ est un *corps*, ou encore que l'anneau B' est réduit. Or, comme C est une k-algèbre de type fini, la clôture intégrale C_1 de C est une C-algèbre *finie* (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. V, § 3, n° 2, th. 2); si l'on pose $\mathrm{S}=\mathrm{C}-\mathfrak{n}$, $\mathrm{B}_1=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{C}_1$ est la clôture intégrale de B, donc B_1 est une B-algèbre *finie*, et par suite un anneau semi-local noethérien, intègre et intégralement clos et de dimension 1 (**0**, 16.1.5); si $\mathfrak{m}_j$ $(1\leqslant j\leqslant h)$ sont ses idéaux maximaux, les $(\mathrm{B}_1)_{\mathfrak{m}_j}$ sont donc des anneaux de valuation discrète (**II**, 7.1.6), et le complété B'_1 de B_1 est le composé direct des anneaux de valuation discrète complétés des $(\mathrm{B}_1)_{\mathfrak{m}_j}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 13, prop. 18); B'_1 est donc réduit, et comme le complété B' de B est un sous-anneau de B'_1 (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9), c'est aussi un anneau réduit. C.Q.F.D.

Corollaire (**7.4.5**). — *Supposons que la propriété* $\boldsymbol{P}$ *satisfasse aux conditions* $(\mathrm{P_I})$, $(\mathrm{P_{II}})$, $(\mathrm{P_{III}})$. *Soit* A *un anneau noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau.*

b) *Pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau.*

Si de plus $\boldsymbol{P}$ *satisfait à* $(\mathrm{P_{IV}})$, *les propriétés* a) *et* b) *sont aussi équivalentes à :*

c) *Pour toute* A-*algèbre de type fini* B *et tout idéal premier* $\mathfrak{q}$ *de* B, $\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}$ *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau.*

L'équivalence de *a)* et *b)* résulte de (7.4.4, (i)), et celle de *a)* et *c)* de (7.4.4, (ii)).

Lorsque la condition *a)* de (7.4.5) est remplie, on dit que A est un $\boldsymbol{P}$*-anneau*; pour les anneaux semi-locaux noethériens, cette définition coïncide avec celle de (7.3.13), lorsque les conditions $(\mathrm{P_I})$, $(\mathrm{P_{II}})$ et $(\mathrm{P_{III}})$ sont satisfaites. L'anneau $\mathbf{Z}$ est un $\boldsymbol{P}$-anneau (7.3.19, (iv)); tout anneau local complet est un $\boldsymbol{P}$-anneau.

Proposition (**7.4.6**). — *Supposons que la propriété* $\boldsymbol{P}$ *satisfasse aux conditions* $(\mathrm{P_I})$, $(\mathrm{P_{II}})$ *et* $(\mathrm{P_{III}})$. *Soient* A *un anneau noethérien,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, $\hat{\mathrm{A}}$ *le séparé complété de* A *pour la topologie* $\mathfrak{J}$*-préadique. Alors, si* A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau* (7.4.5), *le morphisme canonique* $\mathrm{Spec}(\hat{\mathrm{A}})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *est un* $\boldsymbol{P}$*-morphisme.*

En utilisant (7.3.2, *c')*), il suffit de prouver que pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $\hat{\mathrm{A}}$, d'image réciproque $\mathfrak{m}$ dans A, le morphisme $\mathrm{Spec}((\hat{\mathrm{A}})_{\mathfrak{n}})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}})$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme. On sait (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 3, n° 4, prop. 8) que l'homomorphisme canonique $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\rightarrow(\hat{\mathrm{A}})_{\mathfrak{n}}$ est injectif, que la topologie $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$-préadique sur $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est induite par la topologie $\mathfrak{n}(\hat{\mathrm{A}})_{\mathfrak{n}}$-préadique et que $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est dense dans $(\hat{\mathrm{A}})_{\mathfrak{n}}$ pour cette topologie, de sorte que le complété de $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ pour la topologie $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$-préadique s'identifie à celui de $(\hat{\mathrm{A}})_{\mathfrak{n}}$ pour la topologie $\mathfrak{n}(\hat{\mathrm{A}})_{\mathfrak{n}}$-préadique. On a donc deux morphismes

$$\mathrm{Spec}((\mathrm{A}_{\mathfrak{m}})^{\wedge})\xrightarrow{f}\mathrm{Spec}((\hat{\mathrm{A}})_{\mathfrak{n}})\xrightarrow{g}\mathrm{Spec}(\mathrm{A}_{\mathfrak{m}})$$

tels que f soit fidèlement plat; comme par hypothèse $g \circ f$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme, il en est de même de g en vertu de (P_{II}).

Corollaire **(7.4.7).** — *Supposons que* $\boldsymbol{P}$ *vérifie les conditions* (P_I), (P'_I), (P_{II}), (P_{III}) *et* (P_{IV}). *Alors, si* A *est un* $\boldsymbol{P}$*-anneau* (7.4.5), *le morphisme canonique* $\mathrm{Spec}(A[[T_1, \ldots, T_r]]) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ *est un* $\boldsymbol{P}$*-morphisme. En particulier, si de plus* A *est intègre,* K *son corps des fractions, et si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de* $B = A[[T_1, \ldots, T_r]]$ *tel que* $\mathfrak{p} \cap A = 0$, *alors la propriété* $\boldsymbol{P}(B_{\mathfrak{p}}, K)$ *est vraie.*

En effet, le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ se factorise en

$$\mathrm{Spec}(A[[T_1, \ldots, T_r]]) \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}(A[T_1, \ldots, T_r]) \xrightarrow{g} \mathrm{Spec}(A).$$

Il est clair que le morphisme g est régulier $(\mathbf{0}, 17.3.7)$; en vertu de (7.4.5), $A[T_1, \ldots, T_r]$ est un $\boldsymbol{P}$-anneau, donc il résulte de (7.4.6) que f est un $\boldsymbol{P}$-morphisme; comme g est régulier, donc est aussi un $\boldsymbol{P}$-morphisme (7.3.5, (i)), il en est de même de $g \circ f$ en vertu de (P'_I).

On notera que la conclusion est encore valable si au lieu de supposer que $\boldsymbol{P}$ vérifie (P'_I) et que tout morphisme régulier est un $\boldsymbol{P}$-morphisme, on suppose seulement qu'un morphisme composé $g \circ f$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme lorsque g est régulier et f un $\boldsymbol{P}$-morphisme (condition symétrique en quelque sorte de (P'_I)).

Remarque **(7.4.8).** — Les résultats précédents posent les problèmes suivants :

A) Soit A un anneau de Zariski *complet*, et soit $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A; si l'anneau $A/\mathfrak{J}$ est un $\boldsymbol{P}$-anneau, en est-il de même de A ? Il en résulterait que pour tout $\boldsymbol{P}$-anneau noethérien A et tout idéal $\mathfrak{J}$ de A, le séparé complété $\hat{A}$ pour la topologie $\mathfrak{J}$-préadique serait aussi un $\boldsymbol{P}$-anneau.

B) Soit k un corps valué complet non discret; on appelle encore anneau des *séries formelles restreintes* $k\{T_1, \ldots, T_n\}$ le sous-anneau de l'anneau de séries formelles $k[[T_1, \ldots, T_n]]$ formées des séries dont les coefficients *tendent vers* 0. Un tel anneau est-il un $\boldsymbol{P}$-anneau ?

C) Si A est un $\boldsymbol{P}$-anneau linéairement topologisé, S une partie multiplicative de A, les anneaux $A\{S^{-1}\}$ $(\mathbf{0}_I, 7.6.1)$ et $A_{\{S\}}$ $(\mathbf{0}_I, 7.6.15)$ sont-ils des $\boldsymbol{P}$-anneaux?

7.5. Un critère pour les $\boldsymbol{P}$-morphismes.

(7.5.0) Ce numéro ne sera pas utilisé dans la suite du chapitre IV, et peut donc être omis en première lecture. Nous verrons d'ailleurs plus loin (7.9.8) que les résultats du présent numéro peuvent être considérablement améliorés quand on dispose de la « résolution des singularités ».

Dans la suite de ce numéro, nous considérerons une propriété $\boldsymbol{R}(A)$, et nous désignerons par $\boldsymbol{P}(Z, k)$ la propriété suivante :

« Z est un préschéma localement noethérien sur un corps k, et, pour toute extension *finie* k' de k, si l'on pose $Z' = Z \otimes_k k'$, la propriété $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{Z', z'})$ est vraie pour tout $z' \in Z'$. »

Théorème **(7.5.1).** — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens* complets, $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, $k = A/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel,* $\varphi : A \rightarrow B$ *un homomorphisme local tel que :*

(i) *Le corps résiduel de* B *est une extension finie de* k.

(ii) B *est un* A*-module plat.*

Soit d'autre part $\boldsymbol{R}(C)$ *une propriété vérifiant la condition* (R_{III}) (7.3.18) *et la condition suivante :*

(R_{IV}) *Pour tout anneau local* C *en un idéal premier d'un anneau local noethérien complet et tout élément* C*-régulier* t *dans l'idéal maximal de* C, *la propriété* $\boldsymbol{R}(C/tC)$ *implique* $\boldsymbol{R}(C)$.

Cela étant, soit $f = {}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, *et supposons que la propriété* $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(B \otimes_A k), k)$ *soit vraie. Alors, pour tout* $x \in \mathrm{Spec}(A)$ *la propriété* $\boldsymbol{P}(f^{-1}(x), \boldsymbol{k}(x))$ *est vraie.*

Autrement dit, la propriété $\boldsymbol{P}$ pour *la fibre du point fermé* de $\mathrm{Spec}(A)$ entraîne cette même propriété pour *toutes les fibres* du morphisme f (c'est-à-dire que f est un $\boldsymbol{P}$-*morphisme* (7.3.1)).

Nous procéderons en plusieurs étapes :

I) *Réduction à l'étude des anneaux locaux de la fibre générique.* — Appliquons le lemme (7.3.16.2) : il suffit de voir que pour toute A-algèbre *finie* et *intègre* A′, de corps des fractions K′, si l'on pose $B' = B \otimes_A A'$, tous les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(B' \otimes_{A'} K')$ vérifient la propriété $\boldsymbol{R}$. L'anneau A′ (resp. B′) est semi-local complet (B′ étant une B-algèbre finie), donc produit d'anneaux locaux complets; comme A′ est supposé intègre, il est *local*; tout idéal maximal $\mathfrak{n}'$ de B′ est au-dessus de l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, donc au-dessus de $\mathfrak{m}$, et par suite son image réciproque dans A′ est l'idéal maximal $\mathfrak{m}'$ de A′. Comme tout anneau local de $\mathrm{Spec}(B' \otimes_{A'} K')$ est un anneau local de $\mathrm{Spec}(B')$, donc de l'un des $\mathrm{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'})$ (au-dessus du point générique de A′), on voit qu'il suffira de prouver que les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'} \otimes_{A'} K')$ possèdent la propriété $\boldsymbol{R}$. Or A′ et $B'_{\mathfrak{n}'}$ sont des anneaux locaux noethériens complets; le corps résiduel de $B'_{\mathfrak{n}'}$ est extension finie de celui de B, donc aussi de k, et *a fortiori* du corps résiduel k' de A′; cette remarque et (2.1.4) montrent que A′ et $B'_{\mathfrak{n}'}$ vérifient les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. D'autre part, si k'' est une extension finie de k', k'' est aussi extension finie de k, et les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'} \otimes_{A'} k'')$ sont aussi des anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(B \otimes_A k'')$; donc l'hypothèse que $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(B \otimes_A k), k)$ est vraie entraîne que $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'} \otimes_{A'} k'), k')$ est vraie.

On est ainsi ramené au cas où A est de plus supposé *intègre*, de corps des fractions K, et à prouver que *les anneaux locaux de* $\mathrm{Spec}(B \otimes_A K)$ *possèdent la propriété* $\boldsymbol{R}$.

II) *Cas où* $\dim(A) = 1$. — Soit A′ la clôture intégrale de A; on sait ($\mathbf{0}$, 23.1.6) que A′ est une A-algèbre *finie* et un anneau *local* complet; si l'on pose $B' = B \otimes_A A'$, on a $B \otimes_A K = B' \otimes_{A'} K$. Le même raisonnement que dans I) montre qu'il suffit, pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}'$ de B′, de prouver que les anneaux locaux de $B'_{\mathfrak{n}'} \otimes_{A'} K$ vérifient $\boldsymbol{R}$; en outre, ce raisonnement montre aussi que A′ et $B'_{\mathfrak{n}'}$ vérifient les hypothèses (i) et (ii) de l'énoncé et que $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(B'_{\mathfrak{n}'} \otimes_{A'} k'), k')$ est vraie (k' étant le corps résiduel de A′). En outre, comme $\dim(A') = 1$ ($\mathbf{0}$, 16.1.5) et que A′ est intègre et intégralement clos, c'est un *anneau de valuation discrète complet*. On peut donc se borner au cas où A est déjà un anneau de valuation discrète complet; si alors u est une uniformisante de A, le fait que u soit A-régulier et que B soit un A-module plat entraîne que $t = \varphi(u)$ est un élément B-régulier, qui appartient à l'idéal maximal de B. L'hypothèse que $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(B \otimes_A k), k)$ est vraie entraîne en particulier que $\boldsymbol{R}(B/tB)$ est vraie; en vertu de (R_{IV}), $\boldsymbol{R}(B)$ est donc vraie. Autrement dit, $U_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Spec}(B))$ contient le point fermé de $\mathrm{Spec}(B)$. Mais comme $U_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Spec}(B))$ est ouvert en vertu de (R_{III}) et que $\mathrm{Spec}(B)$ est le seul ensemble ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ contenant le point fermé, tous les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(B)$ possèdent la propriété $\boldsymbol{R}$, et en particulier ceux de $\mathrm{Spec}(B \otimes_A K)$.

III) *Cas général.* — Le cas $\dim(A) = 0$ est trivial, puisqu'alors $A = k$; on peut donc se borner au cas où $\dim(A) \geqslant 1$. On sait (6.12.7) que $\mathrm{Spec}(A)$ contient un ouvert non vide V dont tous les points sont réguliers; comme $\dim(A) \geqslant 1$, l'intersection V′ de V et du complémentaire du point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ est un ouvert non vide, contenant donc le point générique de $\mathrm{Spec}(A)$. Si nous prouvons que $f^{-1}(V') \subset U_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Spec}(B))$, la proposition sera démontrée *a fortiori*. Autrement dit, il suffit de voir que l'ensemble Z, intersection de $f^{-1}(V')$ et du complémentaire de $U_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Spec}(B))$, est *vide*. Raisonnons par l'absurde : comme, en vertu de (R_{III}), $U_{\boldsymbol{R}}(\mathrm{Spec}(B))$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}(B)$, Z est localement fermé dans $\mathrm{Spec}(B)$; s'il n'était pas vide, il contiendrait un point x tel que $\dim(\overline{\{x\}}) \leqslant 1$ (5.1.10); comme $f(x) \in V'$ est distinct du point fermé de $\mathrm{Spec}(A)$, x est distinct du point fermé de $\mathrm{Spec}(B)$, autrement dit $\dim(\overline{\{x\}}) = 1$. Nous allons prouver que cela est impossible, autrement dit que, si $\dim(\overline{\{x\}}) = 1$ et $f(x) \in V'$ alors on a $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_x)$. En d'autres termes, il s'agit de voir que, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B tel que $\dim(B/\mathfrak{q}) = 1$ et si $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ est distinct de $\mathfrak{m}$ et tel que $A_{\mathfrak{p}}$ soit *régulier*, alors on a $\boldsymbol{R}(B_{\mathfrak{q}})$. Comme $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}(B/\mathfrak{q})$ n'est pas réduit à 0, donc est un idéal de définition de l'anneau local intègre $B/\mathfrak{q}$ de dimension 1; d'autre part, en vertu de (i), le corps résiduel de $B/\mathfrak{q}$ est une extension finie du corps résiduel k de $A/\mathfrak{p}$, donc $B/\mathfrak{q}$ est une $(A/\mathfrak{p})$-algèbre *quasi-finie* ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.4). Mais $A/\mathfrak{p}$ est complet et $B/\mathfrak{q}$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-préadique (qui est identique à sa topologie d'anneau local); donc ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.4.1), $B/\mathfrak{q}$ est une $(A/\mathfrak{p})$-algèbre *finie*. En outre, par définition, l'homomorphisme $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{q}$ est injectif, donc ($\mathbf{0}$, 16.1.5) on a $\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(B/\mathfrak{q}) = 1$. On peut alors appliquer aux anneaux $A/\mathfrak{p}$ et $B/\mathfrak{p}B$ le résultat de II), car les corps résiduels de ces anneaux locaux sont respectivement ceux de A et de B, et $B/\mathfrak{p}B$ est un $(A/\mathfrak{p})$-module plat; en outre, on a $(B/\mathfrak{p}B) \otimes_{A/\mathfrak{p}} k = B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}B$. Par suite, les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}((B/\mathfrak{p}B) \otimes_{A/\mathfrak{p}} \boldsymbol{k}(\mathfrak{p}))$ vérifient $\boldsymbol{R}$. Or, $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ est un des anneaux locaux de $\mathrm{Spec}((B/\mathfrak{p}B) \otimes_{A/\mathfrak{p}} \boldsymbol{k}(\mathfrak{p}))$. En outre, $B_{\mathfrak{q}}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module plat, et $A_{\mathfrak{p}}$ est *régulier*. Or on a le lemme suivant :

Lemme **(7.5.1.1).** — *Soit* $\boldsymbol{C}$ *une sous-catégorie pleine de la catégorie des anneaux locaux noethériens, telle que tout anneau quotient d'un anneau de* $\boldsymbol{C}$ *appartienne encore à* $\boldsymbol{C}$. *Soit* $\boldsymbol{R}(\mathrm{C})$ *une propriété telle que si* $\mathrm{C}\in\boldsymbol{C}$ *et si* t *est un élément régulier de l'idéal maximal de* C *tel que* $\boldsymbol{R}(\mathrm{C}/t\mathrm{C})$ *soit vraie, alors* $\boldsymbol{R}(\mathrm{C})$ *est vraie.*

Cela étant, soient C *un anneau local régulier,* k *son corps résiduel,* D *un anneau local appartenant à* $\boldsymbol{C}$, $\varphi : \mathrm{C}\rightarrow\mathrm{D}$ *un homomorphisme local faisant de* D *un* C*-module plat. Alors, si* $\boldsymbol{R}(\mathrm{D}\otimes_{\mathrm{C}}k)$ *est vraie, il en est de même de* $\boldsymbol{R}(\mathrm{D})$.

Raisonnons par récurrence sur $n=\dim(\mathrm{C})$, le lemme étant vrai par hypothèse si $n=0$, puisqu'alors $\mathrm{C}=k$. Soit t un élément de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de C n'appartenant pas à $\mathfrak{m}^2$; on sait alors que $\mathrm{C}/t\mathrm{C}$ est régulier et que $\dim(\mathrm{C}/t\mathrm{C})=n-1$ ((**0**, 17.1.8) et (**0**, 16.3.4)). Comme $(\mathrm{D}/t\mathrm{D})\otimes_{\mathrm{C}/t\mathrm{C}}k=\mathrm{D}\otimes_{\mathrm{C}}k$, et que $\mathrm{D}/t\mathrm{D}\in\boldsymbol{C}$, l'hypothèse de récurrence montre que $\boldsymbol{R}(\mathrm{D}/t\mathrm{D})$ est vraie; en outre, t est C-régulier, donc aussi D-régulier par platitude ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.4); l'hypothèse faite sur $\boldsymbol{R}$ montre donc que $\boldsymbol{R}(\mathrm{D})$ est vraie.

Pour terminer la démonstration de (7.5.1), il suffit ici d'appliquer le lemme (7.5.1.1) en prenant pour $\boldsymbol{C}$ la catégorie des anneaux locaux des spectres d'anneaux locaux complets, tenant compte de l'hypothèse ($\mathrm{R_{IV}}$), et prenant pour C l'anneau $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$, pour D l'anneau $\mathrm{B}_{\mathfrak{q}}$.

Corollaire **(7.5.2).** — *Soient* A *un anneau local noethérien,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, $k=\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ *son corps résiduel,* B *un anneau local noethérien,* $\varphi : \mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}$ *un homomorphisme local tel que :*

(i) *Le corps résiduel de* B *est une extension finie de* k.

(ii) B *est un* A*-module plat.*

Soit d'autre part $\boldsymbol{R}(\mathrm{C})$ *une propriété vérifiant les conditions* ($\mathrm{R_{II}}$) (7.3.10), ($\mathrm{R_{III}}$) (7.3.18) *et* ($\mathrm{R_{IV}}$) (7.5.1).

Enfin, soit $\boldsymbol{R}'(\mathrm{C})$ *une propriété vérifiant la condition suivante :*

($\mathrm{R_V}$) *Si* C, D *sont deux anneaux locaux noethériens,* $\psi : \mathrm{C}\rightarrow\mathrm{D}$ *un homomorphisme local tel que*

$$g={}^a\psi : \mathrm{Spec}(\mathrm{D})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{C})$$

soit un $\boldsymbol{P}$*-morphisme, alors la propriété* $\boldsymbol{R}'(\mathrm{C})$ *implique* $\boldsymbol{R}(\mathrm{D})$.

Supposons que le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ *soit un* $\boldsymbol{P}'$*-morphisme, où* $\boldsymbol{P}'$ *se définit à partir de* $\boldsymbol{R}'$ *comme* $\boldsymbol{P}$ *à partir de* $\boldsymbol{R}$ *dans* (7.5.0).

Cela étant, soit $f={}^a\varphi : \mathrm{Spec}(\mathrm{B})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, *et supposons que la propriété* $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{B}}\otimes_{\widehat{\mathrm{A}}}k), k)$ *soit vraie. Alors, pour tout* $x\in\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, *la propriété* $\boldsymbol{P}(f^{-1}(x), \boldsymbol{k}(x))$ *est vraie* (autrement dit, f est un $\boldsymbol{P}$*-morphisme*).

Procédons encore en deux étapes :

I) *Réduction à l'étude des anneaux locaux de la fibre générique.* — Appliquons encore le lemme (7.3.16.2); la seule différence avec le raisonnement de I) dans (7.5.1) est qu'ici l'anneau A′ est seulement un anneau *semi-local* intègre, mais non nécessairement local; tout idéal maximal $\mathfrak{n}'$ de B′ est alors au-dessus d'un idéal maximal $\mathfrak{m}'$ de A′; comme tout anneau local de $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}'\otimes_{\mathrm{A}'}\mathrm{K}')$ est un anneau local de $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}')$, donc de l'un des $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}'_{\mathfrak{n}'})$ (au-dessus du point générique de $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}'_{\mathfrak{m}'})$) on est ramené à prouver que les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}'_{\mathfrak{n}'}\otimes_{\mathrm{A}'_{\mathfrak{m}'}}\mathrm{K}')$ possèdent la propriété $\boldsymbol{R}$. Or, la définition de $\boldsymbol{P}'$ implique que si $\boldsymbol{P}'(\mathrm{Z}, k)$ est vraie, il en est de même de $\boldsymbol{P}'(\mathrm{Z}\otimes_k k', k')$ pour toute extension finie k' de k; le même raisonnement que dans (7.3.7) prouve que les fibres formelles de $\mathrm{A}'_{\mathfrak{m}'}$ possèdent la propriété $\boldsymbol{P}'$. On voit comme dans la partie I) de la démonstration de (7.5.1) que $\mathrm{A}'_{\mathfrak{m}'}$ et $\mathrm{B}'_{\mathfrak{n}'}$ vérifient les conditions (i) et (ii) de (7.5.2); d'autre part, si k' est le corps résiduel de $\mathrm{A}'_{\mathfrak{m}'}$, la propriété $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{B}}'_{\mathfrak{n}'}\otimes_{\widehat{\mathrm{A}}'_{\mathfrak{m}'}}k'), k')$ est vraie : en effet, le complété de $\mathrm{A}'_{\mathfrak{m}'}$ est l'un des anneaux locaux composants de $\widehat{\mathrm{A}}'=\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'$ et le complété de $\mathrm{B}'_{\mathfrak{n}'}$ l'un des anneaux locaux composants de $\widehat{\mathrm{B}}'=\widehat{\mathrm{B}}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{B}'=\widehat{\mathrm{B}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{A}'=\widehat{\mathrm{B}}\otimes_{\widehat{\mathrm{A}}}\widehat{\mathrm{A}}'$; le raisonnement de I), dans (7.5.1), prouve donc notre assertion.

On peut donc se borner au cas où A est en outre supposé *intègre*, et à prouver que, si K est le corps des fractions de A, *les anneaux locaux de* $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{K})$ *possèdent la propriété* $\boldsymbol{R}$.

II) *Réduction au cas où* A *et* B *sont complets.* — Soient ξ le point générique de Spec(A), y un point quelconque de $f^{-1}(\xi)$; il s'agit de prouver que $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_y)$ est vraie; compte tenu de la condition ($\mathrm{R_{II}}$), il suffira de voir qu'il existe dans $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{B}})$ un point z au-dessus de y et tel que $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_z)$ soit vraie. Or, il résulte de l'hypothèse faite sur $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{B}}\otimes_{\widehat{\mathrm{A}}}k)$ et de (7.5.1) que le morphisme ${}^a\widehat{\varphi} : \mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{B}})\rightarrow\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$ est un $\boldsymbol{P}$-morphisme. D'autre part, pour tout point $z\in\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{B}})$ au-dessus de y (il en existe, puisque $\widehat{\mathrm{B}}$ est un B-module fidèlement plat), l'image x de z dans $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$ appartient à la fibre $h^{-1}(\xi)$ pour le morphisme canonique $h : \mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})\rightarrow\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$; en vertu de l'hypothèse faite sur A, la propriété $\boldsymbol{R}'(\mathcal{O}_x)$ est vraie; donc en vertu de ($\mathrm{R_V}$), $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_z)$ est vraie. C.Q.F.D.

Exemples **(7.5.3).** — Considérons les propriétés $\boldsymbol{R}(\mathrm{C})$ suivantes (C étant un *anneau local noethérien*) :

(i) (aussi notée (i_n)) $\mathrm{coprof}(\mathrm{C})\leqslant n$.

(ii) (aussi notée (ii_n)) C vérifie (S_n).
(iii) C est un anneau de Cohen-Macaulay.
(iv) C est un anneau régulier.
(v) (aussi notée (v_n)) C est intègre, intégralement clos et vérifie (R_n).
(vi) C est intègre et intégralement clos.
(vii) C est intègre.
(viii) C est réduit.

Toutes ces propriétés vérifient (R_{III}), comme on l'a vu dans (7.3.19, (i)). Elles vérifient aussi (R_{IV}) : pour (i), cela résulte de (**0**, 16.4.10, (ii)), et pour (ii) et (iii), cela résulte de (5.12.4) et du fait qu'un anneau local noethérien complet est caténaire (5.6.4); pour (iv), c'est un cas particulier de (**0**, 17.1.8); pour (vii), cela découle de (3.4.5) et pour (viii) de (3.4.6); pour (vi) cela résulte de (5.12.7) et de ce qu'un anneau local noethérien complet est caténaire (5.6.4); enfin, pour (v), cela résulte de ce qui précède et de (5.12.5).

On peut donc appliquer le théorème (7.5.1) lorsque $\boldsymbol{R}$ est l'une quelconque des propriétés ci-dessus. D'autre part, on a déjà remarqué (7.3.11) que les propriétés (i) à (viii) vérifient (R_{II}) (sauf pour (vii), où la vérification de (R_{II}) est conséquence de (2.1.14)). En ce qui concerne (R_V), on notera que si l'on y fait $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{R}$, la condition ($R_V$) se réduit à la condition (R'_I) de (7.3.11), et on a noté que les propriétés (ii) à (vi), ainsi que (viii), vérifient (R'_I) (7.3.11); pour la propriété (i), on peut prendre pour $\boldsymbol{R}'$ la propriété d'être un anneau de Cohen-Macaulay, en vertu de (6.3.2). Enfin, pour la propriété (vii), la condition (R'_I) n'est plus vérifiée (ni d'ailleurs (R_I)), comme le montre l'exemple de (6.15.11, (ii)) ou de (6.5.5, (ii)). Par contre, (R_V) est alors vraie lorsque l'on prend pour $\boldsymbol{R}'$ la propriété d'être *régulier* : il suffit en effet d'appliquer le lemme (7.5.1.1) en prenant pour $\boldsymbol{C}$ la catégorie de tous les anneaux locaux noethériens, et pour $\boldsymbol{R}(C)$ la propriété d'être intègre; cela est possible en vertu de (3.4.5).

On voit ainsi en particulier que lorsque $\boldsymbol{R}$ est l'une quelconque des propriétés (i) à (viii), la conclusion du corollaire (7.5.2) est applicable lorsque l'on suppose que *les fibres formelles de* A *sont géométriquement régulières* (cf. (7.8.2)).

Remarques **(7.5.4)**. — (i) Il serait intéressant de savoir si le théorème (7.5.1) subsiste sans l'hypothèse de finitude (i) sur le corps résiduel de B. La réponse est affirmative lorsque le corps résiduel k de A est de caractéristique 0, comme on le voit en utilisant les résultats de Hironaka sur la résolution des singularités (cf. (7.9.8)). Signalons le cas particulier suivant de la question soulevée ici : Soient A et B deux anneaux noethériens complets, k le corps résiduel de A, $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local faisant de B une A-algèbre *formellement lisse* (**0**, 19.3.1) (ce qui équivaut à dire que B est un A-module plat et que $B\otimes_A k$ est géométriquement régulier sur k (**0**, 19.7.1)). Alors les fibres du morphisme ${}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ sont-elles géométriquement régulières ? Il en est ainsi lorsque le corps résiduel k' de B est une extension *finie* de k, d'après (7.5.1); on peut démontrer que la réponse est encore affirmative lorsque k' est une extension *de type fini* de k. Nous ignorons la réponse lorsque $B\otimes_A k$ est un corps égal à la *clôture séparable* de k.

(ii) On pourrait énoncer un résultat analogue à (7.5.1) relatif à un A-module M, un B-module N, tous deux de type fini, concernant les propriétés de $(M\otimes_A N)_y \otimes_{\mathcal{O}_x} \boldsymbol{k}(y)$, où y parcourt Spec(B) et $x=f(y)$, découlant de propriétés de même type de M_x et N_y.

(iii) Lorsque la propriété $\boldsymbol{R}$ vérifie les conditions (R'_I), (R_{II}), (R_{III}) et (R_{IV}) et que les hypothèses (i) et (ii) de (7.5.2) sont remplies, alors, des propriétés $\boldsymbol{R}(A)$ et $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(\widehat{B}\otimes k), k)$ on déduit $\boldsymbol{R}(B)$. C'est le cas, comme on l'a vu (7.5.3), pour les propriétés données en exemples dans (7.5.3), sauf pour (i) et (vii). En ce qui concerne (vii), il est cependant plausible que la réponse à la question suivante soit affirmative : soit $\varphi : A \rightarrow B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, faisant de B un A-module *plat*. Supposons que A soit *complet*, *intègre* et *géométriquement unibranche* et que la fibre $\mathrm{Spec}(B\otimes_A k)$ (où k est le corps résiduel de A) soit *géométriquement localement intègre*; alors est-il vrai que B soit *intègre* ? On peut le démontrer lorsque k est de caractéristique 0, en utilisant la résolution des singularités de Hironaka (7.9.8); on peut montrer aussi que la réponse est affirmative lorsque B est une A-algèbre essentiellement de type fini (1.3.8) (cf. (11.3.10) et (11.3.11)) ou lorsque $\mathrm{Spec}(B\otimes_A k)$ est *géométriquement normale* (car il résulte alors de (7.5.3) que le morphisme $\mathrm{Spec}(B) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est normal, donc on conclut par (6.15.10)). Mais même en supposant que le corps résiduel de B soit égal à celui de A et que B est aussi complet, nous ignorons si la réponse est affirmative dans le cas général.

(iv) Considérons la propriété $\boldsymbol{R}(C)$: « C est réduit, équidimensionnel et vérifie (R_n) »; elle vérifie (R_{IV}), en vertu de (5.12.5), mais on ignore par contre si elle vérifie (R'_I), (R_{II}) ou (R_{III}), les difficultés provenant de la vérification de l'équidimensionalité.

Dans la suite de ce numéro, nous allons appliquer (7.5.1) à l'étude des *produits tensoriels complétés* $A\widehat{\otimes}_k B$ d'anneaux locaux noethériens qui sont des algèbres sur un corps k.

Lemme **(7.5.5)**. — *Soient k un corps,* A, B *deux anneaux locaux noethériens complets contenant k, le corps résiduel de* A *étant une extension finie de k. Soit* C *le produit tensoriel complété* $A\widehat{\otimes}_k B$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 7.7.5)$. *Alors :*

(i) C *est un anneau semi-local noethérien complet.*

(ii) C *est un* A-*module plat et un* B-*module plat.*

(iii) *Si* $\mathfrak{m}$ *est l'idéal maximal de* A, $\mathfrak{m}$C *est contenu dans le radical de* C, *et* C/$\mathfrak{m}$C *est isomorphe à* $(A/\mathfrak{m})\otimes_k B$.

(iv) *Les corps résiduels des composants locaux de* C *sont des extensions finies du corps résiduel de* B.

Les propriétés (i), (iii) et la première assertion de (ii) sont des cas particuliers de (**0**, 19.7.1.2). Pour prouver que C est un B-module plat, notons que pour tout $h>0$, $C/\mathfrak{m}^h C=(A/\mathfrak{m}^h)\otimes_k B$ est un B-module plat, puisque k est un corps; il suffit donc d'appliquer $(\mathbf{0}_{\mathrm{III}}, 10.2.6)$ à chacun des composants locaux de C (dont C est le composé direct). Enfin, si $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal de B, les corps résiduels des composants locaux de C sont aussi ceux des composants locaux de l'anneau artinien $(A/\mathfrak{m})\otimes_k(B/\mathfrak{n})$, qui, par hypothèse, sont des extensions finies de B/$\mathfrak{n}$.

Proposition **(7.5.6)**. — *Soient k un corps,* A, B *deux anneaux locaux noethériens complets contenant k, et dont les corps résiduels sont des extensions finies de k. Soit d'autre part* $\boldsymbol{R}$ *une propriété vérifiant les conditions* (R'_{I}), (R_{III}) *et* (R_{IV}) (la propriété $\boldsymbol{P}$ étant définie à partir de $\boldsymbol{R}$ par (7.5.0)). *Supposons que* $\boldsymbol{R}(A)$ *soit vraie, ainsi que* $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(B), k)$ (ce qui signifie que pour toute extension finie k' de k et pour chacun des anneaux locaux complets B'_i dont le composé direct est $B\otimes_k k'$, $\boldsymbol{R}(B'_i)$ est vraie). *Alors, pour chacun des anneaux locaux complets* C_j *dont* $A\widehat{\otimes}_k B$ *est le composé direct,* $\boldsymbol{R}(C_j)$ *est vraie.*

Il résulte de (7.5.5, (iii)) que chacun des homomorphismes $A\to C_j$ est local et de (7.5.5, (ii)) que chacun des C_j est un A-module plat; enfin, par (7.5.5, (iv)), les corps résiduels des C_j sont des extensions finies de A/$\mathfrak{m}$. D'autre part, la propriété $\boldsymbol{P}(\mathrm{Spec}(C\otimes_A(A/\mathfrak{m})), A/\mathfrak{m})$ est vraie, car $C/\mathfrak{m}C=(A/\mathfrak{m})\otimes_k B$, et l'assertion résulte de la définition de $\boldsymbol{P}$ et de l'hypothèse que A/$\mathfrak{m}$ est une extension *finie* de k. Toutes les conditions de (7.5.1) sont donc vérifiées pour les homomorphismes locaux $A\to C_j$ et les morphismes correspondants $\mathrm{Spec}(C_j)\to\mathrm{Spec}(A)$ sont donc des $\boldsymbol{P}$-*morphismes*; la conclusion résulte alors de (R'_{I}) et de l'hypothèse que $\boldsymbol{R}(A)$ est vraie.

Corollaire **(7.5.7)** (Chevalley). — *Soient k un corps parfait* (resp. *algébriquement clos*), A, B *deux anneaux locaux noethériens complets contenant k et dont les corps résiduels sont des extensions finies de k. Alors, si* A *et* B *sont réduits* (resp. *intègres*) *le produit tensoriel complété* $A\widehat{\otimes}_k B$ *est réduit* (resp. *intègre*).

I) Supposons k parfait, A et B réduits; soient A_i (resp. B_j) les quotients de A (resp. B) par ses idéaux premiers minimaux $(1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant s)$, qui sont complets; l'hypothèse entraîne que A (resp. B) s'identifie à un sous-anneau du composé direct des A_i (resp. B_j); les produits tensoriels étant pris sur un corps, $A\otimes_k B$ s'identifie à un sous-anneau du composé direct des $A_i\otimes_k B_j$, et on vérifie aussitôt que la topologie produit tensoriel de $A\otimes_k B$ est induite par le produit des topologies des $A_i\otimes_k B_j$. Il en résulte que $A\widehat{\otimes}_k B$ s'identifie à un sous-anneau du composé direct des $A_i\widehat{\otimes}_k B_j$, et on est donc ramené au cas où A et B sont *intègres*. Soient alors A′ et B′ les clôtures intégrales de A et B respectivement; on sait, par le théorème de finitude de Nagata (**0**, 23.1.6), que A′ (resp. B′) est un A-module (resp. B-module) de type fini et un anneau local complet. En outre, $A\widehat{\otimes}_k B$ s'identifie à un sous-anneau de $A'\widehat{\otimes}_k B'$: en effet, il suffira de prouver que $A\widehat{\otimes}_k B$ s'identifie à un sous-anneau de $A'\widehat{\otimes}_k B$, et ce dernier à un sous-anneau de $A'\widehat{\otimes}_k B'$. Cela résulte du lemme suivant :

Lemme **(7.5.7.1)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens complets contenant un corps k et dont les corps résiduels sont des extensions finies de k. Soit* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A. *Pour tout* A-*module* M *de type fini (muni de la topologie* $\mathfrak{m}$-*adique), le produit tensoriel complété* $M\widehat{\otimes}_k B$ $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 7.7.1)$ *s'identifie canoniquement à* $M\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B)$.

En effet, on a un isomorphisme canonique $M\otimes_k B \xrightarrow{\sim} M\otimes_A(A\otimes_k B)$ donc un homomorphisme canonique composé

$$\varphi : M\otimes_k B \xrightarrow{\sim} M\otimes_A(A\otimes_k B)\to M\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B)$$

et il est immédiat que cet homomorphisme est continu pour les topologies produits tensoriels; en outre, $M\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B)$ est séparé et complet ((7.5.5) et $(\mathbf{0}_{\mathrm{I}}, 7.7.8)$), donc on a aussi par complétion un homomorphisme continu

$$\widehat{\varphi} : M\widehat{\otimes}_k B\to M\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B)$$

Il est immédiat que cet homomorphisme est bijectif lorsque M est libre de type fini; comme on a une suite exacte $L' \to L \to M \to 0$, où L et L′ sont des A-modules libres de type fini, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} L'\widehat{\otimes}_k B & \longrightarrow & L\widehat{\otimes}_k B & \longrightarrow & M\widehat{\otimes}_k B & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ L'\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B) & \to & L\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B) & \to & M\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B) & \to & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes (la première en vertu de la définition du produit tensoriel complété et de $(\mathbf{0}_{\text{III}}, 13.2.2)$); les deux premières flèches verticales étant des bijections, il en est de même de la troisième.

Le fait que $A\widehat{\otimes}_k B$ s'identifie à un sous-anneau de $A'\otimes_A(A\widehat{\otimes}_k B)$ résulte alors de ce que A est un sous-anneau de A′ et de ce que $A\widehat{\otimes}_k B$ est un A-module plat (7.5.5). On peut ainsi supposer en outre que A et B sont *intégralement clos*; comme en outre k est supposé *parfait*, Spec(A) et Spec(B) sont *géométriquement normaux* sur k en vertu de (6.7.7, *b)*); on peut alors appliquer (7.5.6) en prenant pour $\boldsymbol{R}$ la propriété (vi) de (7.5.3).

II) Supposons k algébriquement clos, A et B intègres. Le raisonnement de I) ramène encore au cas où A et B sont *intégralement clos*; il résulte alors de (7.5.6) que $\mathrm{Spec}(A\widehat{\otimes}_k B)$ est *normal*, donc $A\widehat{\otimes}_k B$ est composé direct d'anneaux locaux complets intégralement clos, et tout revient à voir que $A\widehat{\otimes}_k B$ est un anneau *local*; il suffit pour cela de vérifier que si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ sont les idéaux maximaux de A et B, $(A/\mathfrak{m})\otimes_k(B/\mathfrak{n})$ est un anneau local (voir démonstration de $(\mathbf{0}, 19.7.1.2)$); mais comme $A/\mathfrak{m}$ et $B/\mathfrak{n}$ sont des extensions finies de k, elles sont identiques à k, d'où la conclusion.

Remarque **(7.5.8)**. — Il serait intéressant de déterminer si, dans (7.5.7), on peut remplacer l'hypothèse que k est parfait ou algébriquement clos par l'hypothèse que Spec(A) ou Spec(B) est *géométriquement intègre* sur k, ou tout au moins par l'hypothèse que A (par exemple) soit intègre et contienne un sous-anneau A_0 isomorphe à un anneau de séries formelles $k[[T_1, \ldots, T_n]]$, tel que le corps des fractions K de A soit *séparable* sur le corps des fractions K_0 de A_0 (on peut montrer que cette condition entraîne que A est géométriquement intègre sur k, et que les deux propriétés sont équivalentes lorsque $[k : k^p]$ est fini (p étant l'exposant caractéristique de k)). De même il serait désirable de développer des variantes de (7.5.6) et (7.5.7) où on affaiblirait l'hypothèse de finitude des corps résiduels de A et B, en supposant par exemple qu'un seul d'entre eux est extension finie de k, l'autre étant quelconque.

7.6. Applications : I. Anneaux japonais locaux.

Proposition **(7.6.1)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien réduit dont les fibres formelles sont géométriquement normales. Alors le complété* $\hat{A}$ *est réduit, la fermeture intégrale* A′ *de* A *dans son anneau total des fractions est une* A-*algèbre finie (donc un anneau noethérien semi-local) et son complété* $\hat{A}'$ *est isomorphe à la fermeture intégrale de* $\hat{A}$ *dans son anneau total des fractions.*

Les fibres formelles de A sont *a fortiori* géométriquement réduites, donc l'hypothèse que A est réduit entraîne qu'il en est de même de $\hat{A}$, en vertu de (7.3.17). Soient $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les idéaux premiers minimaux de A, et soit $B_i = A/\mathfrak{p}_i$; les fibres formelles des anneaux locaux B_i sont alors aussi géométriquement normales (7.3.15), donc les $\hat{B}_i$ sont aussi réduits et il résulte de $(\mathbf{0}, 23.1.7, \text{(i)})$ que la clôture intégrale B'_i de B_i dans son corps des fractions est un B_i-module de type fini, donc un A-module de type fini; comme A′ est composée directe des B'_i (**II**, 6.3.8), on voit que A′ est un A-module de type fini. Soient $\mathfrak{m}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ les idéaux maximaux de l'anneau semi-local A′; on sait que le complété $\hat{A}'$ de A′ s'identifie au composé direct des complétés $\hat{A}'_{\mathfrak{m}_j}$ des $A'_{\mathfrak{m}_j}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. III, § 2, n° 13, cor. de la prop. 19). Or, il résulte de l'hypothèse et de (7.3.15) que les fibres formelles des $A'_{\mathfrak{m}_j}$ sont géométriquement normales; comme Spec(A') est normal par définition, il en est de même des Spec($A'_{\mathfrak{m}_j}$), et on déduit donc de (7.3.17) que Spec($\hat{A}'_{\mathfrak{m}_j}$) est normal pour tout j, donc aussi Spec($\hat{A}'$). D'autre part (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9 et chap. III, § 3, n° 4, th. 3), $\hat{A}'$ s'identifie à $A' \otimes_A \hat{A}$ puisque A' est un A-module de type fini; comme A' contient A et est contenu dans l'anneau total des fractions R de A, et que $\hat{A}$ est un A-module plat, $\hat{A}'$ contient $\hat{A}$ et est contenu dans $R' = R \otimes_A \hat{A}$; enfin, comme $\hat{A}$ est un A-module plat, tout élément régulier de A est aussi $\hat{A}$-régulier ($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 6.3.4); donc R' s'identifie canoniquement à un sous-anneau de l'anneau total des fractions R'' de $\hat{A}$ (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. II, § 2, n° 1, *Remarque* 7). Comme Spec($\hat{A}'$) est normal et que $\hat{A}'$ est un $\hat{A}$-module de type fini, $\hat{A}'$ est bien la fermeture intégrale de $\hat{A}$ dans R''.

Corollaire **(7.6.2)**. — *Sous les hypothèses de* (7.6.1), *il y a une correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des idéaux maximaux* $\mathfrak{m}_j$ *de* A' (autrement dit, l'ensemble des points de Spec(A') au-dessus du point fermé de A) *et l'ensemble des idéaux premiers minimaux* $\mathfrak{q}_j$ *de* $\hat{A}$ (autrement dit, l'ensemble des points maximaux de Spec($\hat{A}$)); *dans cette correspondance, le complété* $\hat{A}'_{\mathfrak{m}_j}$ *de* $A'_{\mathfrak{m}_j}$ *est isomorphe à la clôture intégrale de* $\hat{A}/\mathfrak{q}_j$.

On sait en effet que la fermeture intégrale de $\hat{A}$ dans son anneau total des fractions est composée directe des clôtures intégrales des $\hat{A}/\mathfrak{q}_j$, qui sont des anneaux locaux complets (**0**, 23.1.6).

Corollaire **(7.6.3)**. — *Sous les hypothèses de* (7.6.1), *pour que* $\hat{A}$ *soit intègre, il faut et il suffit que* A *soit unibranche; pour que* $\hat{A}$ *soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit que* A *le soit.*

C'est un cas particulier de (7.6.2).

Théorème **(7.6.4)** (Zariski-Nagata). — *Soit* A *un anneau semi-local noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour toute* A-*algèbre finie réduite* C, *le complété* $\hat{C}$ *est un anneau réduit.*

a') *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *de corps des fractions* K, *le complété* $\hat{B}$ *est réduit, et les corps composants* L_i *de l'anneau total des fractions de* $\hat{B}$ *sont des extensions séparables de* K.

a'') *Les fibres formelles de* A *sont géométriquement réduites* (autrement dit, pour tout anneau quotient intègre B de A, de corps des fractions K, la K-algèbre $\hat{B} \otimes_B K$ est séparable (4.6.2)).

b) *Tout anneau quotient intègre* B *de* A *est un anneau japonais.*

Pour montrer que *a)* entraîne *a')*, il suffit de vérifier que les L_i sont des extensions séparables de K, ou encore (4.6.1) que pour toute extension finie K' de K, l'anneau $\hat{B} \otimes_B K'$ est réduit; or K' est engendré par un nombre fini d'éléments entiers sur B, et ces derniers engendrent une sous-B-algèbre finie B' de K', dont K' est corps des fractions. On a $\hat{B}' = \hat{B} \otimes_B B'$ (($\mathbf{0}_{\mathrm{I}}$, 7.3.3) et Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9), donc $\hat{B}\otimes_B K'=\hat{B}'\otimes_{B'} K'$ par associativité du produit tensoriel; mais B′ est une A-algèbre intègre finie, donc $\hat{B}'$ est un anneau réduit en vertu de *a)*, et comme $\hat{B}'$ est un B′-module plat, les éléments $\neq 0$ de B′ sont $\hat{B}'$-réguliers, ce qui entraîne que $\hat{B}'\otimes_{B'} K'$ s'identifie à un sous-anneau de l'anneau total des fractions de $\hat{B}'$, et *a fortiori* est réduit.

Pour voir que *a')* entraîne *a'')*, considérons un point quelconque x de $X=\mathrm{Spec}(A)$, et soit Y le sous-schéma fermé intègre de X ayant $\overline{\{x\}}$ pour espace sous-jacent; on a $Y=\mathrm{Spec}(B)$, où B est un anneau quotient intègre de A, et $\mathrm{Spec}(\hat{B})=Y\times_X \mathrm{Spec}(\hat{A})$, de sorte que la fibre formelle de A au point x est la même que celle de B, ou encore est égale à $\mathrm{Spec}(\hat{B}\otimes_B K)$. Comme les anneaux locaux de $\mathrm{Spec}(\hat{B}\otimes_B K)$ sont ceux de $\mathrm{Spec}(\hat{B})$ aux points de la fibre de x, l'hypothèse entraîne que $\hat{B}\otimes_B K$ est réduit, et les conditions de *a')* entraînent donc que $\hat{B}\otimes_B K$ est une K-algèbre séparable (4.6.1).

La condition *a'')* entraîne *a)*, car il résulte de (7.3.15) que les fibres formelles de C sont alors géométriquement réduites, et si C est réduit, il en est donc de même de $\hat{C}$ (cas particulier de (7.3.17)).

Le fait que *a')* implique *b)* est un cas particulier de (**0**, 23.1.7). Reste donc à prouver que *b)* entraîne *a)*. Notons que si C est une A-algèbre finie, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de C, l'image réciproque $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{q}$ dans A est un idéal premier et $C/\mathfrak{q}$ est une $(A/\mathfrak{p})$-algèbre finie, donc l'hypothèse *b)* entraîne que tout anneau quotient intègre de C est un anneau japonais. On est ainsi ramené à prouver que sous l'hypothèse *b)*, *le complété de tout quotient intègre de* A *est réduit*. Raisonnons par récurrence sur $n=\dim(A)$, l'assertion étant triviale pour $n=0$; en remplaçant A par les quotients de A par ses idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_i$, on peut se borner au cas où A est intègre (tout quotient intègre de A étant quotient de l'un des $A/\mathfrak{p}_i$). Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}\neq 0$, l'hypothèse de récurrence montre déjà que le complété de $A/\mathfrak{p}$ est réduit, et il suffit donc de prouver que $\hat{A}$ est réduit. En outre, la clôture intégrale A′ de A est par hypothèse un A-module de type fini, donc un anneau semi-local noethérien et $\hat{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $\hat{A}'$ (($\mathbf{0}_\mathrm{I}$, 7.3.3) et Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. IV, § 2, n° 5, cor. 3 de la prop. 9); il suffira donc de prouver que $\hat{A}'$ est réduit; on a vu ci-dessus que l'hypothèse *b)* est aussi vérifiée par A′, qui par ailleurs est aussi de dimension n (**0**, 16.1.5); on peut donc se borner au cas où A est *intégralement clos*. Soit $t\neq 0$ un élément du radical de A, et soient $\mathfrak{q}_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ les idéaux premiers minimaux parmi ceux contenant tA; on a les propriétés suivantes :

(i) t est régulier.

(ii) A/tA n'a pas d'idéaux premiers associés immergés.

(iii) Les $A_{\mathfrak{q}_j}$ sont des anneaux de valuation discrète.

(iv) Les complétés des $A/\mathfrak{q}_j$ sont réduits.

En effet, (i) est triviale puisque A est intègre et $t\neq 0$. Comme A est intégralement clos, A/tA vérifie (S_1), c'est-à-dire (5.7.7) est sans idéaux premiers associés immergés (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VII, § 1, n° 4, prop. 8). Toujours parce que A est intégralement clos, les $A_{\mathfrak{q}_j}$ le sont et on sait *(loc. cit.)* que ces anneaux sont de dimension 1, donc ce sont des anneaux de valuation discrète, d'où (iii). Enfin, (iv) provient de l'hypothèse de récurrence. La démonstration sera achevée si nous prouvons le

Lemme **(7.6.4.1)** (Zariski). — *Soient* A *un anneau semi-local noethérien, t un élément de son radical vérifiant les conditions* (i) *à* (iv) *précédentes; alors* $\hat{A}$ *est réduit.*

Posons pour simplifier $A'=\hat{A}$, et considérons t comme un élément de A'; on a $A'/tA'=(A/tA)\otimes_A A'$, et comme A' est un A-module plat, il résulte de (3.3.1) que les idéaux premiers de A' associés au A'-module A'/tA' sont les idéaux premiers $\mathfrak{q}'_{jh}$ tels que $\mathfrak{q}'_{jh}$ soit au-dessus de $\mathfrak{q}_j$ et associé au k_j-module $(A'/tA')\otimes_A k_j$, où k_j est le corps des fractions de $A/\mathfrak{q}_j$. Or, $\operatorname{Spec}((A'/tA')\otimes_A k_j)$ est la fibre formelle de A au point $\mathfrak{q}_j$, ou aussi celle de $A/\mathfrak{q}_j$ au point $\mathfrak{q}_j$ (point générique de $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{q}_j)$). Comme en vertu de (iv) le complété $A'/\mathfrak{q}_jA'$ de $A/\mathfrak{q}_j$ est réduit, il en est de même de la fibre formelle de $A/\mathfrak{q}_j$ au point générique de $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{q}_j)$; cette fibre formelle n'a donc pas de cycle premier associé immergé et ses anneaux locaux aux points génériques $\mathfrak{q}'_{jh}$ de ses composantes irréductibles sont des corps (3.2.1). On voit donc par (3.3.3) et l'hypothèse (ii) que A'/tA' n'a pas d'idéaux premiers associés immergés, et d'autre part que $\mathfrak{q}_jA'_{\mathfrak{q}'_{jh}}$ est l'idéal maximal de $A'_{\mathfrak{q}'_{jh}}$ pour tout h; comme $A_{\mathfrak{q}_j}$ est un anneau de valuation discrète, son idéal maximal $\mathfrak{q}_jA_{\mathfrak{q}_j}$ est principal, donc l'idéal maximal de l'anneau local noethérien $A'_{\mathfrak{q}'_{jh}}$ est principal, ce qui entraîne que cet anneau est un anneau de valuation discrète (Bourbaki, *Alg. comm.*, chap. VI, § 3, n° 6, prop. 9). Nous venons ainsi de vérifier les hypothèses (i) à (iv) pour *l'anneau local complet* A'. Il suffit donc de montrer que si A est *complet* et vérifie les hypothèses (i) à (iii) ((iv) l'étant automatiquement dans ce cas), alors A est réduit. Or, les hypothèses (i) et (ii) impliquent que, si $\varphi : A \to \prod_{j=1}^{n} A_{\mathfrak{q}_j}$ est l'homomorphisme canonique, on a $t^nA=\varphi^{-1}(\varphi(t^nA))$ (3.4.9); comme l'image canonique de tA dans l'anneau de valuation discrète $A_{\mathfrak{q}_j}$ est une puissance $\mathfrak{q}_j^hA_{\mathfrak{q}_j}$ de l'idéal maximal, on voit que sur A la topologie (tA)-préadique est l'image réciproque par φ de la topologie produit sur $\prod_{j=1}^{n} A_{\mathfrak{q}_j}$. Or, comme t appartient au radical de A, la topologie (tA)-préadique est séparée, donc φ est *injectif.* Mais en vertu de l'hypothèse (iii), les $A_{\mathfrak{q}_j}$ sont intègres, donc $\prod_{j=1}^{n} A_{\mathfrak{q}_j}$ est réduit, et *a fortiori* il en est de même de A. C.Q.F.D.

Corollaire **(7.6.5)**. — *Soit* A *un anneau semi-local noethérien vérifiant les conditions équivalentes de* (7.6.4); *toute* A-*algèbre semi-locale essentiellement de type fini vérifie aussi les conditions de* (7.6.4).

La condition *a'')* de (7.6.4) signifie en effet que A est un ***P****-anneau*, où $\boldsymbol{P}$(Z, k) est la propriété « Z est géométriquement réduit sur k »; le corollaire est donc conséquence du théorème général (7.4.4).

Corollaire **(7.6.6)**. — *Soient* A *un anneau semi-local noethérien intègre de dimension* 1, K *son corps des fractions. Pour que* A *soit un anneau japonais, il faut et il suffit que le complété* $\hat{A}$

de A *soit réduit et que, si* $\mathfrak{q}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *sont les idéaux premiers minimaux de* $\hat{\mathrm{A}}$, *les corps des fractions des anneaux intègres* $\hat{\mathrm{A}}/\mathfrak{q}_j$ *soient des extensions séparables de* K.

Les quotients intègres de A sont en effet A lui-même et des corps, donc la condition *b)* de (7.6.4) équivaut à l'hypothèse que A est un anneau japonais, et l'hypothèse *a')* aux conditions de l'énoncé sur $\hat{\mathrm{A}}$, d'où la conclusion.

Remarques **(7.6.7).** — (i) Les conditions équivalentes de (7.6.6) signifient encore que les fibres formelles de A sont *géométriquement régulières* (7.3.19, (iv)). On a déjà observé *(loc. cit.)* que cette condition est vérifiée lorsque A est un *anneau de valuation discrète dont le corps des fractions est de caractéristique* 0.

(ii) Le même raisonnement que dans la première partie de la démonstration de (7.6.4) montre que pour un anneau semi-local noethérien A, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *le complété* $\hat{\mathrm{B}}$ *est réduit.*

a') *Les fibres formelles de* A *sont réduites.*

Compte tenu de (**0**, 23.1.7, (i)), ces deux conditions impliquent la suivante :

b) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *la clôture intégrale de* B *est une* B-*algèbre finie.*

Lorsque A est un anneau *universellement caténaire,* on peut prouver que la condition *b)* entraîne inversement *a)*; nous n'aurons pas à utiliser ce résultat.

7.7. Applications : II. Anneaux universellement japonais.

(7.7.1) Rappelons (**0**, 23.1.1) que l'on appelle anneau *universellement japonais* un anneau A tel que toute A-algèbre *intègre de type fini* soit un anneau japonais. Il revient au même de dire que pour toute A-algèbre intègre *de type fini* B, la clôture intégrale de B est une B-algèbre *finie.*

Théorème **(7.7.2)** (Nagata). — *Soit* A *un anneau noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est un anneau universellement japonais.*

b) *Tout anneau quotient intègre de* A *est un anneau japonais.*

c) *Pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, *tout anneau quotient intègre de* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ *est un anneau japonais, et pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *de corps des fractions* K, *toute extension radicielle finie* K′ *de* K *et toute sous-*B-*algèbre finie* B′ *de* K′, *de corps des fractions* K′, *il existe* $f' \neq 0$ *dans* B′ *tel que* $\mathrm{B}'_{f'}$ *soit intégralement clos* (cf. (6.13.7)).

De plus, si A *vérifie ces conditions, il en est de même de tout anneau de fractions* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *de* A *et de toute* A-*algèbre de type fini.*

Montrons d'abord que *b)* entraîne *c)*; tout anneau quotient intègre de $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de fractions d'un anneau quotient intègre de A, donc un anneau japonais (**0**, 23.1.1). D'autre part, tout quotient B de A par un de ses idéaux premiers est un anneau japonais, donc il en est de même de B′ (**0**, 23.1.1). On en déduit que l'ensemble Nor(Spec(B′)) est ouvert (6.13.3), donc contient un ensemble ouvert non vide $\mathrm{D}(f') = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}'_{f'})$.

Montrons en second lieu que si A vérifie *c)*, il en est de même de toute A-algèbre de type fini B. En premier lieu, pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B, $B_{\mathfrak{q}}$ est anneau local en un idéal premier de $S^{-1}B$, où $S = A - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ étant l'image réciproque de $\mathfrak{q}$ dans A; comme par hypothèse tout anneau quotient intègre de $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau japonais, il en est de même de tout anneau quotient intègre de $B_{\mathfrak{q}}$, puisque $S^{-1}B$ est une $A_{\mathfrak{p}}$-algèbre de type fini (7.6.5). D'autre part, si C est un quotient intègre de B, de corps des fractions K, K' une extension radicielle finie de K et C' une sous-C-algèbre finie de K', de corps des fractions K', C' est une A-algèbre intègre de type fini, et en vertu de (6.13.7), l'hypothèse *c)* sur A entraîne que le spectre de C' contient une partie ouverte non vide dont tous les points sont normaux; autrement dit, il y a un $g' \neq 0$ dans C' tel que $C'_{g'}$ soit intégralement clos, ce qui prouve notre assertion.

Ce résultat montre que, pour prouver l'équivalence de *a)*, *b)* et *c)*, il suffit de montrer que *c)* entraîne *b)*, et même de prouver que pour tout anneau quotient intègre B de A, de corps des fractions K, la clôture intégrale B' est un B-module de type fini. Or, la condition *c)* entraîne qu'il existe $f \neq 0$ dans B tel que B_f soit intégralement clos, et on a ainsi vérifié pour B la condition (i) de (6.13.6). D'autre part, la condition (ii) de (6.13.6) est aussi vérifiée par B; en effet, pour tout idéal maximal $\mathfrak{q}$ de B, $B_{\mathfrak{q}}$ est quotient d'un anneau local $A_{\mathfrak{p}}$, où $\mathfrak{p}$ est maximal dans A; comme $A_{\mathfrak{p}}$ est par hypothèse un anneau japonais, il en est de même de $B_{\mathfrak{q}}$; en outre, pour tout idéal premier $\mathfrak{r}$ de B, $B_{\mathfrak{r}}$ est anneau de fractions d'un $B_{\mathfrak{q}}$, où $\mathfrak{q}$ est un idéal maximal de B, donc est encore un anneau japonais, ce qui prouve notre assertion.

On a en outre vu plus haut que si A vérifie les conditions équivalentes *a)*, *b)*, *c)*, il en est de même de toute A-algèbre de type fini. D'autre part, si A vérifie *b)*, il en est de même de tout anneau de fractions $S^{-1}A$, car tout quotient intègre de $S^{-1}A$ est de la forme $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A, et comme $A/\mathfrak{p}$ est par hypothèse un anneau japonais, il en est de même de $S^{-1}(A/\mathfrak{p})$ (**0**, 23.1.1). Cela achève de prouver la dernière assertion de l'énoncé.

Corollaire **(7.7.3)**. — *Soient* A *un anneau noethérien vérifiant les conditions suivantes :*

(i) *Pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* A, *les fibres formelles de* $A_{\mathfrak{m}}$ *sont géométriquement réduites.*

(ii) *Les conditions équivalentes de* (6.12.4) *sont vérifiées.*

Alors A *est universellement japonais.*

En effet, il résulte alors de (7.6.4) que tout anneau quotient intègre de $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau japonais; d'où la conclusion, en vertu de (7.7.2).

Corollaire **(7.7.4)**. — *Un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est de caractéristique* 0 *(en particulier* **Z**) *est un anneau universellement japonais. Un anneau local noethérien dont les fibres formelles sont géométriquement réduites (en particulier un anneau local noethérien complet) est universellement japonais.*

La première assertion résulte de (7.7.3), (7.6.7, (i)) et (6.12.6). La seconde résulte de (7.6.4) et (7.7.2).

7.8. Anneaux excellents.

(7.8.1) Les numéros précédents de ce paragraphe (ainsi que (6.11), (6.12) et (6.13)) ont été consacrés à l'étude de problèmes que l'on rencontre fréquemment dans l'utilisation des anneaux et des préschémas *noethériens*, et qui peuvent se grouper dans les types suivants :

A) Pour un anneau *local* noethérien A, les propriétés de A se « transmettent-elles » à son *complété* $\hat{A}$? Par exemple, si A est réduit (resp. intègre, resp. intègre et intégralement clos), en est-il de même de $\hat{A}$? La plupart de ces questions sont liées aux propriétés locales des *fibres formelles* de A (rappelons que ce sont les fibres du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\hat{A}) \rightarrow \mathrm{Spec}(A)$). Une exception est formée par les propriétés liées à la notion de dimension, par exemple la propriété d'être équidimensionnel; c'est alors la *condition des chaînes* et ses divers raffinements qui jouent le rôle essentiel.

B) Pour un préschéma localement noethérien X (en particulier pour un schéma affine Spec(A)), l'ensemble des $x \in X$ où l'anneau local $\mathcal{O}_x$ possède une certaine propriété (par exemple être intégralement clos, ou de Cohen-Macaulay, ou régulier) est-il *ouvert* ?

C) Pour un anneau *intègre* A, la fermeture intégrale de A dans une extension finie de son corps des fractions est-elle un A-module *de type fini* ? Bien entendu, cette question peut se traduire pour les préschémas noethériens (**II**, 6.3).

Les problèmes de type B) ou C) peuvent aussi être posés pour des anneaux *locaux*, mais il ne suffit pas en général qu'ils soient résolus affirmativement pour tout anneau local $A_{\mathfrak{p}}$ d'un anneau A pour qu'ils le soient pour A (cf. (6.13.6)).

Soulignons en outre que dans l'étude de ces problèmes, nous nous sommes systématiquement préoccupés de savoir si la réponse affirmative à l'un d'eux est *stable* pour les deux opérations les plus importantes de l'Algèbre commutative : la localisation et le passage à une algèbre de type fini.

Les résultats obtenus dans l'étude de ces problèmes amènent à dégager la définition d'une classe d'anneaux noethériens dont le comportement à cet égard est le meilleur possible :

Définition **(7.8.2)**. — *On dit qu'un anneau* A *est* excellent *s'il est noethérien et s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) A *est universellement caténaire* (ou, ce qui revient au même (5.6.3, (i)), *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, $A_{\mathfrak{p}}$ *est universellement caténaire*).

(ii) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* A, *les fibres formelles de* $A_{\mathfrak{p}}$ *sont géométriquement régulières.*

(iii) *Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A *et toute extension finie radicielle* K' *du corps des fractions* K *de* B, *il existe une sous-*B*-algèbre finie* B' *de* K', *contenant* B, *ayant* K' *pour corps des fractions, et telle que l'ensemble des points réguliers de* Spec(B') *contienne un ouvert non vide.*

Avec cette terminologie, l'essentiel des résultats du § 7 et d'une partie du § 6 se résume alors comme suit :

Scholie **(7.8.3)**. — (i) *Dans les conditions* (i) *et* (ii) *de la définition* (7.8.2) *on peut se borner aux idéaux* $\mathfrak{p}$ *maximaux dans* A. *Pour qu'un anneau* local *noethérien soit excellent, il faut et* *il suffit qu'il soit universellement caténaire et que ses fibres formelles soient géométriquement régulières.*

(ii) *Si* A *est un anneau excellent, il en est de même de tout anneau de fractions* $S^{-1}A$ *et de toute* A-*algèbre de type fini.*

(iii) *Un anneau local complet (en particulier un corps) est excellent. Un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est de caractéristique* 0 (*en particulier* $\mathbf{Z}$) *est excellent.*

(iv) *Soient* A *un anneau excellent,* $X = \operatorname{Spec}(A)$; *l'ensemble* $\operatorname{Reg}(X)$ (resp. $\operatorname{Nor}(X)$, $U_{R_n}(X)$) *des points où* X *est régulier* (resp. *normal*, resp. *vérifie* (R_n)) *est ouvert dans* X. *Pour tout* $\mathcal{O}_X$-*Module cohérent* $\mathcal{F}$, *l'ensemble* $U_{C_n}(\mathcal{F})$ (resp. $U_{S_n}(\mathcal{F})$, $\operatorname{CM}(\mathcal{F})$) *des* $x \in X$ *où* $\operatorname{coprof}(\mathcal{F}_x) \leqslant n$ (resp. *des points où* $\mathcal{F}$ *vérifie* (S_n), resp. *des points où* $\mathcal{F}_x$ *est un* $\mathcal{O}_x$-*Module de Cohen-Macaulay*) *est ouvert dans* X.

(v) *Soient* A *un anneau excellent*, $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A, $\hat{A}$ *le séparé complété de* A *pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*préadique. Alors le morphisme canonique* $f : \operatorname{Spec}(\hat{A}) \to \operatorname{Spec}(A)$ *est régulier* (autrement dit, *plat* et à fibres *géométriquement régulières*). *Si l'on pose* $X = \operatorname{Spec}(A)$, $X' = \operatorname{Spec}(\hat{A})$, *on a* (*avec les notations de* (iv) *et en posant* $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$),

(7.8.3.1)

$$\operatorname{Reg}(X') = f^{-1}(\operatorname{Reg}(X)), \quad \operatorname{Nor}(X') = f^{-1}(\operatorname{Nor}(X)), \quad U_{R_n}(X') = f^{-1}(U_{R_n}(X))$$
$$U_{C_n}(\mathcal{F}') = f^{-1}(U_{C_n}(\mathcal{F})), \quad U_{S_n}(\mathcal{F}') = f^{-1}(U_{S_n}(\mathcal{F})), \quad \operatorname{CM}(\mathcal{F}') = f^{-1}(\operatorname{CM}(\mathcal{F}))$$

En particulier, si $\mathfrak{J}$ *est contenu dans le radical de* A (par exemple si A est local et $\mathfrak{J}$ son idéal maximal), *pour que* A *soit régulier* (resp. *normal*, resp. *réduit*, resp. *vérifie* (R_n), resp. *soit de coprofondeur* $\leqslant n$, resp. *vérifie* (S_n), resp. *soit un anneau de Cohen-Macaulay*), *il faut et il suffit qu'il en soit de même de* $\hat{A}$; *en particulier, pour que* A *n'ait pas d'idéaux premiers associés immergés, il faut et il suffit qu'il en soit de même de* $\hat{A}$.

(vi) *Un anneau excellent* A *est universellement japonais; en particulier, si* A *est intègre, sa fermeture intégrale dans toute extension finie de son corps des fractions est une* A-*algèbre finie.*

(vii) *Soit* A *un anneau* local *excellent réduit. Alors le complété* $\hat{A}$ *est réduit, la fermeture intégrale* A′ *de* A *dans son anneau total des fractions est une* A-*algèbre finie* (donc un anneau *semi-local*), *et la fermeture intégrale de* $\hat{A}$ *dans son anneau total des fractions est isomorphe au complété* $\hat{A}'$ *de* A′. *En outre, il y a une correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des points maximaux de* $\operatorname{Spec}(\hat{A})$ (autrement dit, l'ensemble des idéaux premiers *minimaux* de $\hat{A}$) *et l'ensemble des points fermés de* $\operatorname{Spec}(A')$ (autrement dit, l'ensemble des idéaux *maximaux* de A′). *Pour que l'anneau local* A *soit unibranche, il faut et il suffit que* $\hat{A}$ *soit intègre; pour que* A *soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit que* $\hat{A}$ *le soit.*

(viii) *Si* A *est un anneau excellent intègre, la clôture intégrale de* A *est l'intersection des clôtures intégrales des anneaux* $A_{\mathfrak{p}}$, *où* $\mathfrak{p}$ *parcourt l'ensemble des idéaux premiers de* A *de hauteur* 1.

(ix) *Soient* A *un anneau excellent,* $X = \operatorname{Spec}(A)$, Z *une partie fermée de* X, $U = X - Z$, $i : U \to X$ *l'injection canonique,* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_U$-*Module cohérent. Pour que le* $\mathcal{O}_X$-*Module* $i_*(\mathcal{F})$ *soit cohérent, il faut et il suffit que, pour tout* $x \in \operatorname{Ass}(\mathcal{F})$, *on ait* $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}} \cap Z, \overline{\{x\}}) \geqslant 2$. *En particulier, si* A *est intègre et* $\mathcal{F}$ *sans torsion, pour que* $i_*(\mathcal{F})$ *soit cohérent, il faut et il suffit que* $\operatorname{codim}(Z, X) \geqslant 2$.

(x) *Soit* A *un anneau local excellent. Pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, $\hat{B}$ *est équidimensionnel. Pour que* A *soit équidimensionnel, il faut et il suffit que* $\hat{A}$ *le soit.*

La plupart de ces résultats ont déjà été démontrés.

(i) La première assertion résulte de (5.6.3, (i)) et (7.4.4, (i)); la seconde, de (7.4.4), (7.3.18), (6.12.7) et (6.12.4).

L'assertion (ii) résulte de (5.6.1), (5.6.3, (i)), (7.4.4) et (6.12.4).

(iii) La première assertion a été vue dans (5.6.4) et (7.4.4), compte tenu de (i). La seconde a été vue dans (5.6.4) et (7.3.19, (iv)), compte tenu de (i).

L'assertion (iv) résulte de (6.12.4), (6.13.5), (6.12.9) et (6.11.8) (compte tenu de (ii)).

La première assertion de (v) est conséquence de (7.4.6); les relations (7.8.3.1) en découlent, compte tenu respectivement de (6.5.1), (6.5.4), (6.5.3), (6.3.5) et (6.4.2). La dernière assertion de (v) est le cas particulier correspondant à la propriété (S_n) pour $n=1$ (5.7.5).

L'assertion (vi) résulte de (7.7.3), et l'assertion (vii) de (7.6.1), (7.6.2) et (7.6.3). Pour prouver (viii), notons que l'anneau $A^{(1)}$, intersection des $A_{\mathfrak{p}}$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A, est une A-algèbre *finie*, comme il résulte de (vi), de (7.8.2, (i)) et de (5.11.2). Comme la clôture intégrale A′ de A est une A-algèbre finie, les idéaux premiers de hauteur 1 de A′ sont exactement ceux qui sont au-dessus des idéaux premiers de hauteur 1 de A (5.10.17, (iv)); la conclusion résulte donc de (**0**, 23.2.9).

La première assertion de (ix) est conséquence de (vi) et de (5.11.4); la seconde en est un cas particulier, si l'on observe que lorsque $\mathscr{F}$ est sans torsion, $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$ est réduit au point générique de Spec(A). Enfin, pour prouver (x), il suffit d'observer que B est un anneau local excellent par (ii); comme B est universellement caténaire et universellement japonais en vertu de (vi), l'anneau $B^{(1)}$ est une B-algèbre finie (5.11.2), ce qui montre que A est strictement formellement caténaire par (7.2.5, *c)*) et achève la démonstration de (x).

Remarques **(7.8.4).** — (i) Si on considère les anneaux noethériens A qui vérifient seulement les conditions (ii) et (iii) de la définition (7.8.2), on vérifie par inspection des démonstrations précédentes que les assertions (ii), (iii), (iv), (v), (vi) et (vii) de (7.8.3) sont encore valables, en remplaçant « excellent » par « vérifiant » (7.8.2, (ii) et (iii)).

(ii) L'anneau local caténaire A construit dans (5.6.11) vérifie les conditions (ii) et (iii) (mais non la condition (i)) de la définition (7.8.2). En effet, la fibre formelle en l'idéal maximal $\mathfrak{n}C_{\mathfrak{n}}$ de A est trivialement géométriquement régulière, et celle aux autres idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de A coïncide avec celle de l'anneau E en ces idéaux premiers; or E est une V-algèbre de type fini et V est un anneau de valuation discrète, qui est par suite un anneau excellent si l'on prend le corps k_0 de caractéristique o (7.8.3, (iii)); par suite E est un anneau excellent (7.8.3, (ii)) et cela prouve donc que A vérifie la condition (7.8.2, (ii)). D'autre part, le complémentaire du point fermé dans Spec(A) est isomorphe à un ouvert de Spec(E), dont un ouvert affine est le spectre d'un anneau excellent, donc vérifie la condition (6.12.4, *a)*) en vertu de (7.8.3, (v)); cela prouve que A lui-même vérifie la condition de (6.12.4, *a)*), donc aussi (6.12.4, *c)*), qui n'est autre que la condition (7.8.2, (iii)). Pourtant A ne satisfait pas à la condition (7.8.2, (i)), puisque nous avons vu (5.6.11) qu'il n'est pas universellement caténaire.

(iii) On peut remplacer la condition (i) de la définition (7.8.2) par la suivante (plus faible en apparence, compte tenu de (5.6.10)) :

(i') *Pour tout idéal premier minimal* $\mathfrak{p}_i$ *de* A $(1 \leqslant i \leqslant r)$, *soit* A'_i *la clôture intégrale de l'anneau intègre* $A_i = A/\mathfrak{p}_i$; *alors, pour tout idéal maximal* $\mathfrak{m}'$ *de* A'_i, *on a, en désignant par* $\mathfrak{m}$ *l'image réciproque de* $\mathfrak{m}'$ *dans* A,

(7.8.4.1) $$\dim(A_{\mathfrak{m}}) = \dim(A'_i)_{\mathfrak{m}'}.$$

En effet, on a vu (Remarque (i)) que sous les seules hypothèses (ii) et (iii) de (7.8.2), les analogues des propriétés (ii), (v), (vi) et (vii) de (7.8.3) sont valables. On déduit donc d'abord de (vi) et (ii) que les A'_i vérifient (7.8.2, (ii) et (iii)); il résulte alors de (v) que les complétés $((A'_i)_{\mathfrak{m}'})^\wedge$ sont intègres (et intégralement clos). Soit maintenant $\mathfrak{m}$ un idéal maximal quelconque de A ; pour tout i tel que $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{m}$, la clôture intégrale de $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{m}}$ est une $(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{m}})$-algèbre finie par (vi), donc semi-locale, et ses composants locaux sont de la forme $(A'_i)_{\mathfrak{m}'}$, où $\mathfrak{m}'$ est un idéal premier (nécessairement maximal) de A'_i au-dessus de $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i$; il résulte alors de (vii), de ce qui précède et de (7.8.4.1) que les quotients du complété $(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{m}})^\wedge$ par ses idéaux premiers minimaux ont tous même dimension égale à $\dim(A_{\mathfrak{m}})$. Par suite (7.1.9 et 7.1.8, *b)*), $A_{\mathfrak{m}}$ est formellement caténaire, et *a fortiori* (7.1.11) universellement caténaire ; il en est donc de même de $A_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A (5.6.3, (i)), donc aussi de A.

En particulier, si A est normal, ou plus généralement si $A_{\mathfrak{m}}$ est unibranche pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, la condition (i') est toujours remplie, puisque $\mathfrak{m}$ ne peut contenir qu'un seul idéal premier $\mathfrak{p}_i$ (**0**, 16.1.5) ; on peut dans ce cas omettre (i) dans la définition (7.8.2). Plus particulièrement, si A est un anneau noethérien *local unibranche*, il est excellent si et seulement si ses fibres formelles sont géométriquement régulières.

(iv) Rappelons qu'un anneau quotient d'un anneau local de Cohen-Macaulay (et *a fortiori* un anneau quotient d'un anneau local régulier) vérifie aussi les propriétés (7.8.3, (ix) et (x)) en vertu de (7.2.7); mais l'intérêt des quotients d'anneaux réguliers réside surtout dans leurs propriétés cohomologiques (chap. III, 3e Partie).

(v) Nous verrons plus loin (§ 18) que si k est un corps valué complet non discret, l'anneau $k\{\{T_1, \ldots, T_n\}\}$ des *séries entières convergentes* (dans un voisinage de 0 dans k^n) est un *anneau excellent*.

(7.8.5) On dit qu'un préschéma localement noethérien X est *excellent* si pour un recouvrement (U_α) de X formé d'ouverts affines, chacun des anneaux A_α des U_α est *excellent* ; cette propriété est alors vraie pour *tout* recouvrement (U_α) de X formé d'ouverts affines.

Proposition **(7.8.6)**. — *Soit* X *un préschéma excellent.*

(i) *Si* $f : X' \to X$ *est un morphisme localement de type fini,* X' *est excellent.*

(ii) *Si* X *est réduit, son normalisé* X′ (**II**, 6.3.8) *est fini sur* X.

(iii) *Les ensembles* Reg(X), Nor(X), $U_{R_n}(X)$ *sont ouverts dans* X, *ainsi que* $U_{C_n}(\mathscr{F})$, $U_{S_n}(\mathscr{F})$ *et* CM($\mathscr{F}$) *pour tout* $\mathcal{O}_X$*-Module cohérent* $\mathscr{F}$.

Cela résulte aussitôt de (7.8.3, (ii), (vi) et (iv)). Notons aussi que (7.8.3, (ix)) est valable sans modification d'énoncé lorsque X est un préschéma excellent.

7.9. Anneaux excellents et résolution des singularités.

(7.9.1) Étant donné un préschéma *localement noethérien réduit* X, on appelle *morphisme résolvant* pour X un morphisme $f : X' \rightarrow X$ tel que X′ soit *régulier* et que f soit *propre* et *birationnel*. Lorsqu'il existe un tel morphisme, on dit qu'on peut *résoudre les singularités de* X (ou plus simplement que l'on peut *résoudre* X). Par exemple, si A est un *anneau japonais de dimension* 1, on peut résoudre X = Spec(A) puisque le morphisme $X' \rightarrow X$ (où X′ est le *normalisé* de X) est fini (donc propre) et birationnel, et que les anneaux locaux de X′ sont des anneaux intégralement clos de dimension 1, donc des anneaux de valuation discrète, et par suite sont réguliers.

(7.9.2) Il est clair que si l'on peut résoudre X, on peut aussi résoudre tout préschéma induit sur un *ouvert* de X et tout préschéma local Spec($\mathcal{O}_x$) de X (**II**, 5.4.2). D'autre part, si l'on peut résoudre X, il est clair qu'il existe dans X un ouvert *partout dense* contenu dans Reg(X). Ces remarques montrent aussitôt que si, pour tout sous-préschéma *fermé intègre* Y de X et tout Y-préschéma Y′ *intègre, fini* et *radiciel* sur Y, on peut résoudre Y′, alors les ouverts affines de X vérifient *la condition* (iii) *de* (7.8.2).

D'autre part, pour les schémas locaux, on a la proposition suivante :

Proposition **(7.9.3)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien réduit, et supposons que l'on puisse résoudre* Spec(A). *Alors les fibres du morphisme canonique* Spec($\hat{A}$) → Spec(A) *aux points maximaux de* Spec(A) *sont régulières.*

Posons X = Spec(A), X′ = Spec($\hat{A}$), et soit $g : X' \rightarrow X$ le morphisme canonique. Soit $f : Y \rightarrow X$ un morphisme résolvant; posons $Y' = X' \times_X Y$, et soient $f' : Y' \rightarrow X'$ et $g' : Y' \rightarrow Y$ les projections canoniques, de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "g'"] \\ X & Y \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Il suffira de prouver que le préschéma Y′ est *régulier* : en effet, comme f est birationnel et de type fini, il y a un ouvert U partout dense dans X tel que la restriction $f^{-1}(U) \rightarrow U$ de f soit un isomorphisme et que $f^{-1}(U)$ soit partout dense dans Y (**I**, 6.5.5); les préschémas induits respectivement sur l'ouvert $g^{-1}(U)$ de X′ et l'ouvert $g'^{-1}(f^{-1}(U))$ de Y′ sont donc isomorphes; cela prouve que $g^{-1}(U)$ est régulier, et *a fortiori* il en est de même des fibres de g aux points maximaux de X, qui sont contenus dans U.

Notons que le morphisme f' est propre (**II**, 5.4.2), et en particulier de type fini, donc Y' est noethérien, puisqu'il en est ainsi de X'. Soit a' le point fermé de X'; pour voir que Y' est régulier, il suffira de prouver que *pour tout* $y' \in f'^{-1}(a')$, *l'anneau local* $\mathcal{O}_{Y',y'}$ *est régulier*. En effet, on aura alors $f'^{-1}(a') \subset \mathrm{Reg}(Y')$. Mais comme X' est le spectre d'un anneau local complet et que f' est de type fini, Reg(Y') est *ouvert* dans Y' (6.12.8), et comme le morphisme f' est *fermé* et que $f'^{-1}(a') \subset \mathrm{Reg}(Y')$, il existe un voisinage V' de a' dans X' tel que $f'^{-1}(V') \subset \mathrm{Reg}(Y')$. Comme $\hat{A}$ est un anneau local, on a nécessairement $V' = X'$, donc $\mathrm{Reg}(Y') = Y'$ et la proposition sera démontrée.

Or, si a est le point fermé de X, on a $g^{-1}(a) = \{a'\}$ et les corps résiduels $\boldsymbol{k}(a)$ et $\boldsymbol{k}(a')$ sont isomorphes; donc $g'^{-1}(f^{-1}(a)) = f'^{-1}(a')$ et la restriction $f'^{-1}(a') \to f^{-1}(a)$ de g' est un *isomorphisme* de ces deux fibres. Soit $y = g'(y')$ et posons $B = \mathcal{O}_{Y,y}$; si $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_y$ est l'idéal maximal de B, ce qui précède montre qu'il existe dans l'anneau (noethérien) $B' = B \otimes_A \hat{A}$ un seul idéal maximal $\mathfrak{n}'$ au-dessus de $\mathfrak{n}$ et que l'on a $\mathcal{O}_{Y',y'} = B'_{\mathfrak{n}'}$. Pour montrer que l'anneau local $B'_{\mathfrak{n}'}$ est régulier, il suffit d'établir que son *complété* (**0**, 17.1.5) l'est; or, par hypothèse B est régulier, donc il en est de même de son complété $\hat{B}$. La conclusion résultera par suite du lemme suivant :

Lemme **(7.9.3.1)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme local tel que l'anneau* $B' = B \otimes_A \hat{A}$ *soit noethérien. Alors, pour tout idéal maximal* $\mathfrak{n}'$ *de* B' *au-dessus de l'idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* B *et de l'idéal maximal de* $\hat{A}$, *les complétés de* B *et de* $B'_{\mathfrak{n}'}$ *sont isomorphes.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A et posons $B'' = B'_{\mathfrak{n}'}$. Pour tout entier $h > 0$, on a $B'/\mathfrak{m}^h B' = B \otimes_A (\hat{A}/\mathfrak{m}^h \hat{A})$; mais $\hat{A}/\mathfrak{m}^h \hat{A}$ est isomorphe à $A/\mathfrak{m}^h$, donc $B'/\mathfrak{m}^h B'$ est isomorphe à $B/\mathfrak{m}^h B$, et en particulier c'est un anneau local dont l'idéal maximal est $\mathfrak{n}'/\mathfrak{m}^h B'$; par suite $B''/\mathfrak{m}^h B''$, isomorphe à $(B'/\mathfrak{m}^h B')_{\mathfrak{n}'}$, est B-isomorphe à $B'/\mathfrak{m}^h B'$, et finalement à $B/\mathfrak{m}^h B$; en particulier, l'idéal maximal de B'' est égal à $\mathfrak{n}B''$, et $B''/\mathfrak{n}^h B''$ est isomorphe à $B/\mathfrak{n}^h$ d'après ce qui précède. Comme $\hat{B}'' = \varprojlim_h (B''/\mathfrak{n}^h B'')$, le lemme est démontré, ainsi que (7.9.3).

Corollaire **(7.9.4)**. — *Soit* A *un anneau local noethérien.*

(i) *Si, pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *on peut résoudre* Spec(B), *alors les fibres formelles de* A *sont régulières.*

(ii) *Supposons que, pour tout anneau quotient intègre* B *de* A, *et tout anneau intègre* B' *contenant* B, *qui est une* B-*algèbre finie et dont le corps des fractions est radiciel sur celui de* B, *on puisse résoudre* Spec(B') ; *alors les fibres formelles de* A *sont géométriquement régulières.*

Toute fibre formelle de A étant fibre formelle d'un anneau quotient intègre de A au point générique de son spectre, il est clair que (i) est conséquence immédiate de (7.9.3), et (ii) résulte de (i) et de (6.7.7).

Proposition **(7.9.5)**. — *Soit* X *un préschéma localement noethérien, tel que, pour tout préschéma* Y *intègre et fini sur* X, *on puisse résoudre* Y. *Alors les anneaux des ouverts affines de* X *vérifient les conditions* (ii) *et* (iii) *de* (7.8.2) ; *si en outre* X *est universellement caténaire* (5.6.3) (et en particulier si X est *localement immersible dans un préschéma régulier* (5.6.4)), X *est un préschéma excellent* (7.8.5).

Cela résulte aussitôt de (7.9.4) et (7.9.2).

Remarque **(7.9.6).** — Il est possible que la réciproque de (7.9.5) soit vraie, c'est-à-dire que l'hypothèse que X est réduit et que les anneaux des ouverts affines de X vérifient les conditions (ii) et (iii) de (7.8.2) implique la possibilité de résoudre X (et par suite aussi la possibilité de résoudre tout préschéma réduit localement de type fini sur X, en vertu de (7.4.4) et (6.12.4)). C'est vrai en tout cas lorsqu'on se borne aux préschémas *noethériens* réduits dont les corps résiduels sont de *caractéristique* 0, comme le montrent les résultats récents de Hironaka [35] (ce dernier énonce ses résultats sous des hypothèses trop restrictives, ses raisonnements étant en fait valables sous les seules hypothèses (ii) et (iii) de (7.8.2) pour les anneaux des ouverts affines de X, jointes au fait que les corps résiduels sont de caractéristique 0). Au contraire, pour le cas général, on ne sait jusqu'ici résoudre que les schémas algébriques de dimension 2 sur un corps parfait [36]. Vu l'importance que la résolution des singularités est en train de prendre dans l'étude topologique des schémas (notamment en ce qui concerne leurs propriétés homologiques et homotopiques), cela donne un intérêt particulier à la catégorie des anneaux excellents ou des préschémas excellents.

On peut aussi noter à ce propos que la partie la moins délicate des raisonnements de Hironaka *(loc. cit.)* montre qu'indépendamment de toute hypothèse sur les caractéristiques des corps résiduels, et en utilisant uniquement les propriétés (ii) et (iii) de (7.8.2) pour les anneaux locaux d'un préschéma X, le problème de la résolution des singularités de X se ramène au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$, A étant un anneau local noethérien intègre et *complet*. Par conséquent, si des résultats ultérieurs devaient mettre en défaut la conjecture avancée plus haut, et devaient donc amener à formuler des conditions plus restrictives sur les anneaux locaux de X, cela ne pourrait guère être que par l'intermédiaire de conditions restrictives imposées à des anneaux locaux complets (probablement des conditions concernant leurs corps résiduels, peut-être la condition $[k:k^p] < +\infty$ (p exposant caractéristique de k)).

(7.9.7) Considérons d'une part une sous-catégorie pleine $\boldsymbol{C}$ de la catégorie des préschémas localement noethériens, d'autre part une propriété $\boldsymbol{R}(A)$, soumises aux conditions suivantes :

1° Pour tout $X \in \boldsymbol{C}$, tout préschéma localement de type fini sur X appartient à $\boldsymbol{C}$. Pour tout anneau noethérien A tel que $\mathrm{Spec}(A) \in \boldsymbol{C}$ et toute partie multiplicative S de A, on a $\mathrm{Spec}(S^{-1}A) \in \boldsymbol{C}$.

2° Pour tout $X \in \boldsymbol{C}$, l'ensemble $U_{\boldsymbol{R}}(X)$ des $x \in X$ tels que $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{X,x})$ soit vraie est ouvert dans X.

3° Pour tout anneau local noethérien A tel que $\mathrm{Spec}(A) \in \boldsymbol{C}$ et tout élément régulier t de l'idéal maximal de A, $\boldsymbol{R}(A/tA)$ entraîne $\boldsymbol{R}(A)$.

Désignons alors comme dans (7.5.0) par $\boldsymbol{P}(Z, k)$, pour un corps k et un k-préschéma $Z \in \boldsymbol{C}$, la propriété suivante :

« Pour toute extension *finie* k' de k, tous les anneaux locaux de $Z \otimes_k k'$ vérifient la propriété $\boldsymbol{R}$. »

Nous supposerons encore que $\boldsymbol{R}$ vérifie la condition suivante :

4° Si $\boldsymbol{P}(Z, k)$ est vraie, alors, pour toute extension *de type fini* k'' de k, tous les anneaux locaux de $Z \otimes_k k''$ vérifient la propriété $\boldsymbol{R}$.

On notera que ces conditions sont vérifiées lorsque l'on prend pour $\boldsymbol{C}$ la catégorie des préschémas *excellents* et pour $\boldsymbol{R}$ une des propriétés (i) à (viii) de (7.5.3); pour la condition 1°, cela résulte de (7.8.3, (ii)), et pour les conditions 2° et 3°, des raisonnements de (7.5.3), compte tenu de ce que tout anneau excellent est caténaire. Enfin, pour la condition 4°, elle résulte, pour (i), (ii) et (iii) de (6.7.1); pour (iv), (v), (vi) de (6.7.7), et pour (viii) de (4.6.1); en ce qui concerne la propriété (vii) de (7.5.3), la propriété correspondante $\boldsymbol{P}(Z, k)$ entraîne que Z est localement intègre (étant localement noethérien) et que chacun des sous-préschémas intègres dont Z est somme est géométriquement intègre, en vertu de (4.5.9) et (4.6.1); on en conclut encore la propriété 4° ci-dessus dans ce cas.

Avec ces notations et hypothèses :

Proposition **(7.9.8).** — *Soient* A *un anneau local noethérien,* k *son corps résiduel,* B *un anneau local noethérien tel que* $\mathrm{Spec}(B) \in \boldsymbol{C}$, $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local faisant de* B *un* A-*module plat ; posons* $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ *et soit* $f : X \to Y$ *le morphisme correspondant à* φ. *On suppose que :*

1° *la propriété* $\boldsymbol{P}(B \otimes_A k, k)$ *soit vraie ;*

2° *pour tout morphisme fini* $Y_1 \to Y$, *on peut résoudre* $(Y_1)_{\mathrm{red}}$.

Alors, pour tout $y \in Y$, *la propriété* $\boldsymbol{P}(f^{-1}(y), \boldsymbol{k}(y))$ *est vraie.*

Notons que la condition 2° de (7.9.8) est encore vérifiée quand on remplace Y par le spectre d'un anneau local en un idéal maximal d'une A-algèbre finie A' (7.9.2); d'autre part, en vertu de la condition 1° de (7.9.7), le spectre d'un anneau de fractions de $B \otimes_A A'$ appartient aussi à $\boldsymbol{C}$. Le lemme (7.3.16.2) montre alors (comme dans la partie I) du raisonnement de (7.5.2)) qu'il suffit de prouver que, si Y est intègre et si y est le point générique de Y, les anneaux locaux de la fibre $f^{-1}(y)$ vérifient $\boldsymbol{R}$.

Cela étant, il existe par hypothèse un préschéma *régulier* Y' et un morphisme propre et birationnel $g : Y' \to Y$; comme Y' est noethérien et localement intègre, l'hypothèse que g est birationnel entraîne que Y' est intègre; soit $X' = X \times_Y Y'$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

(7.9.8.1)
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y' \end{array}$$

où f' et g' sont les projections canoniques. Compte tenu de la condition 2° de (7.9.7), le même raisonnement que dans le début de (7.9.3) montre qu'il suffit de prouver que l'on a $U_{\mathbf{R}}(X') = X'$, puis, en désignant par a le point fermé de X, que $g'^{-1}(a) \subset U_{\mathbf{R}}(X')$. Or, soit $x' \in g'^{-1}(a)$, et posons $z' = f'(x')$, de sorte que $b = g(z')$ est le point fermé de Y. On a donc $f'^{-1}(z') = f^{-1}(b) \otimes_k \boldsymbol{k}(z')$, et comme $\boldsymbol{k}(z')$ est une extension *de type fini* de k (puisque g est propre, donc de type fini), l'hypothèse que $\boldsymbol{P}(f^{-1}(b), k)$ est vraie entraîne en vertu de la condition 4° de (7.9.7), qu'il en est de même de $\boldsymbol{P}(f'^{-1}(z'), \boldsymbol{k}(z'))$. Mais comme $\mathcal{O}_{z'}$ est un anneau régulier et que $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{x'}) \in \boldsymbol{C}$ en vertu de la condition 1° de (7.9.7), le lemme (7.5.1.1) prouve que $\boldsymbol{R}(\mathcal{O}_{X',x'})$ est vraie, ce qui achève la démonstration.

Corollaire **(7.9.9)**. — *Soient* A, B *deux anneaux locaux noethériens,* $\varphi : A \to B$ *un homomorphisme local, faisant de* B *un* A*-module plat. Supposons que* A *soit intègre et géométriquement unibranche, et que pour toute* A*-algèbre finie intègre* A′ *on puisse résoudre* Spec(A′) (ce qui sera par exemple le cas si les fibres formelles de A sont géométriquement régulières et le corps résiduel de A de caractéristique 0, en raison des résultats de Hironaka [35]). *Soit k le corps résiduel de* A *et supposons que* $\mathrm{Spec}(B \otimes_A k)$ *soit géométriquement ponctuellement intègre* (4.6.9). *Alors* B *est intègre.*

Nous allons appliquer (7.9.8) en prenant pour $\boldsymbol{C}$ la catégorie de tous les préschémas localement noethériens, pour $\boldsymbol{R}$ la propriété d'être intègre; les raisonnements de (7.5.3) et (7.9.7) montrent que les conditions 1°, 2°, 3° et 4° de (7.9.7) sont satisfaites dans ce cas. L'hypothèse sur $B \otimes_A k$ et la proposition (7.9.8) montrent donc (avec les notations de (7.9.8)) que les fibres $f^{-1}(y)$ sont géométriquement ponctuellement intègres pour $y \in Y$; *a fortiori* les $f^{-1}(y)$ pour $y \in Y$ sont des préschémas réduits, et comme A est intègre (et *a fortiori* réduit), on voit déjà que B est *réduit* (3.3.5). Il reste à prouver que $X = \mathrm{Spec}(B)$ est *irréductible*. Or, la démonstration de (7.9.8) prouve que X′ est localement intègre (étant localement noethérien). Comme le morphisme $g' : X' \to X$ est surjectif, il suffit donc de voir que X′ est irréductible, ou (puisque X′ est localement intègre), que X′ est *connexe*. Mais il suffit pour cela de prouver que la fibre $g'^{-1}(a)$ est *connexe*. En effet, si ce point est établi, X′ ne peut être somme de deux préschémas ouverts non vides X'_1, X'_2, car on aurait alors par exemple $g'^{-1}(a) \cap X'_2 = \emptyset$; mais la restriction $X'_2 \to X$ de g' étant propre (puisque X'_2 est un sous-préschéma fermé de X′), $g'(X'_2)$ serait une partie fermée non vide de X ne contenant pas le point fermé a, ce qui est absurde. Or, on a $g'^{-1}(a) = g^{-1}(b) \otimes_k \boldsymbol{k}(a)$; mais $g : Y' \to Y$ est propre et birationnel, donc, dans la factorisation de Stein $Y' \xrightarrow{v} Y'' \xrightarrow{u} Y$ du morphisme g (**III**, 4.3.3), le morphisme fini u est aussi birationnel et par suite Y″ est intègre. Comme A est supposé géométriquement unibranche, il résulte alors de (**III**, 4.3.4) que $g^{-1}(b)$ est *géométriquement connexe*, ce qui achève la démonstration.

Remarques **(7.9.10)**. — (i) Nous montrerons plus loin (18.8.11) que pour qu'un anneau local B réduit soit géométriquement unibranche, il faut et il suffit que pour tout morphisme étale $h : X' \to X = \mathrm{Spec}(B)$ et tout point $x' \in X'$ au-dessus du point fermé de X, $\mathcal{O}_{X',x'}$ soit intègre. On en déduit que si, dans (7.9.9) on suppose, non seulement que $\mathrm{Spec}(B \otimes_A k)$ soit géométriquement ponctuellement intègre, mais géométriquement unibranche, alors on peut en conclure que B est *géométriquement unibranche.*

(ii) Soient X, Y deux préschémas excellents, $f: X \to Y$ un morphisme plat, et supposons que pour tout morphisme fini $Y_1 \to Y$, on puisse résoudre $(Y_1)_{\text{red}}$. Il résulte de (7.9.8), en prenant pour $\boldsymbol{R}$ la propriété d'être *régulier*, que l'ensemble U des points $x \in X$ tels que la fibre au point $f(x)$ du morphisme

$$\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_{f(x)}} \boldsymbol{k}(f(x))) \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{k}(f(x)))$$

soit *géométriquement régulière*, est *stable par générisation*. Nous ignorons si cet ensemble est *ouvert* (ou, ce qui revient au même ($\mathbf{0}_{\text{III}}$, 9.2.5), s'il est *constructible*) même dans le cas particulier où Y est le spectre de $\mathbf{Z}$ ou d'un anneau de polynômes à une indéterminée $k[T]$ sur un corps k, et où par suite la condition de « résolubilité » imposée à Y est trivialement satisfaite.

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE *(suite)*

[33] M. Nagata, Note on a chain condition for prime ideals, *Mem. Coll. Sci. Kyoto*, t. 32 (1959), p. 85-90.

[34] H. Hironaka, article à paraître sur Les morphismes projectifs.

[35] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. of Math.*, t. 79 (1964), p. 109-326.

[36] S. Abhyankhar, Local uniformization of algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$, *Amer. J. of Math.*, t. 63 (1956), p. 491-526.

[37] H. Cartan, Séminaire de l'École Normale Supérieure, 13[e] année (1960-61).

[38] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Paris (Hermann), 1959.

INDEX DES NOTATIONS

INDEX TERMINOLOGIQUE

TABLE DES MATIÈRES

Manuscrit reçu le 15 décembre 1963.