ALEXANDRE GROTHENDIECK

Sur le mémoire de Weil. Généralisation des fonctions abéliennes

Séminaire N. Bourbaki, 1958, exp. n° 141, p. 57-71
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1956-1958__4__57_0>

Séminaire BOURBAKI
(Décembre 1956)

SUR LE MÉMOIRE DE WEIL [4]
GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS ABÉLIENNES

par Alexandre GROTHENDIECK.

1. Préliminaires de cohomologie non commutative.

Sans être bien indispensables ici, les considérations de ce paragraphe ont le mérite d'unifier de nombreux contextes différents.

1°) Soit X un espace topologique où opère un groupe π d'homéomorphismes : nous supposerons pour simplifier la condition suivante vérifiée :

(D) Pour tout $x \in X$, le stabilisateur π_x de x est fini, et il existe un voisinage U_x de U tel que pour tout α dans π non dans π_x, on ait $U_x \cap \alpha . U_x = \emptyset$.

[Noter que cette condition n'est pas vérifiée dans le cas d'un groupe fini opérant dans une variété algébrique muni de sa topologie de Zariski ; on peut alors remplacer (D) par des hypothèses sur les faisceaux qu'on considère]. Soit Y l'espace quotient X/π, p la projection canonique $X \to Y$. On considère la catégorie des fibrés sur X (fibré = espace E muni d'une application continue $E \to X$) dans lesquels π opère de façon compatible avec ses opérations dans X (appelés π-fibrés) ; on a en particulier la notion de π-faisceau, de π-faisceau de groupes, de π-faisceau de groupes abéliens, etc. Si $\mathcal{G}$ est un π-faisceau sur X, on note $H^0(X, \pi ; \mathcal{G}) = H^0(X, \mathcal{G})^{\pi}$ l'ensemble de ses sections invariantes sous π : c'est un groupe si $\mathcal{G}$ est un π-faisceau de groupes.

Tout fibré E sur Y définit par image réciproque un π-fibré $p^{-1}(E)$ sur X, qui est un π-faisceau (resp. un π-faisceau de groupes, etc.) si E l'est ; de plus, on a un homomorphisme fonctoriel $H^0(Y,E) \to H^0(X, \pi ; p^{-1}(E))$ si E est un faisceau sur Y. De même, en sens inverse, tout π-faisceau $\mathcal{G}$ sur X définit par image directe un faisceau $p_*(\mathcal{G})$ sur Y (dont les sections sur l'ouvert $V \subset Y$ sont les sections de $\mathcal{G}$ sur $p^{-1}(V)$) qui est encore un π-faisceau (quand on fait opérer π trivialement sur Y) ; on peut aussi considérer le sous-faisceau $p_*(\mathcal{G})^{\pi} = p_*^{\pi}(\mathcal{G})$ des invariants sous π, (dont les sections sur V sont les éléments de $H^0(p^{-1}(V), \pi ; \mathcal{G})$). Les faisceaux $p_*(\mathcal{G})$ et $p_*^{\pi}(\mathcal{G})$ sont des faisceaux de groupes si $\mathcal{G}$ l'est. On a des isomorphismes fonctoriels

$$H^0(X, \pi ; \mathcal{G}) = H^0(Y, p_*^{\pi}(\mathcal{G})) .$$

Si on part d'un faisceau E sur Y , alors $p_*^\pi(p^{-1}(E))$ s'identifie à E ; si on part d'un faisceau $\mathcal{G}$ sur X , alors $p^{-1}(p_*^\pi(\mathcal{G}))$ s'identifie au sous-faisceau $\mathcal{G}^\pi$ de $\mathcal{G}$ dont la fibre en $x \in X$ est l'ensemble $\mathcal{G}_x^{\pi_x}$ des invariants de $\mathcal{G}_x$ sous le stabilisateur π_x . En particulier <u>si $\mathcal{G}$ opère "sans points fixes" alors la notion de π-faisceau sur X est équivalente à la notion de faisceau sur</u> $Y = X/\pi$, grâce aux deux foncteurs p_*^π et p^{-1} réciproques l'un de l'autre.

2°) Oublions un instant le groupe π . Considérons sur X un faisceau de groupes $\mathcal{G}$ et un fibré-type Φ , supposons $\mathcal{G}$ réalisé comme un faisceau de germes d'automorphismes de Φ . On définit alors la notion de fibré de type (Φ, G) sur X ; c'est un fibré localement isomorphe à Φ , les isomorphismes locaux étant de plus <u>donnés</u> à une opération de $\mathcal{G}$ près (voir pour des détails un rapport à l'Université de Kansas : "A general theory of fibre spaces with structure sheaf", 1955) ; $\mathcal{G}$ est appelé le <u>faisceau structural</u>. L'ensemble des classes de tels fibrés mod. isomorphismes ne dépend que de $\mathcal{G}$ et non de Φ (il suffit par exemple de faire $\Phi = \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ opérant par la représentation régulière gauche, les fivrés de type (Φ, G) sont alors appelés faisceaux principaux à droite sous $\mathcal{G}$), on le note $H^1(X, \mathcal{G})$; il se calcule de la manière classique par recouvrements de Čech ; c'est un groupe si $\mathcal{G}$ est un groupe abélien, et coïncide alors avec le groupe de cohomologie de Čech désigné par le même symbole. Supposons maintenant que $\mathcal{G}$ et Φ soient des π-faisceaux et que les opérations de $\mathcal{G}$ sur Φ soient compatibles avec les opérations de π , considérons alors les fibrés de type $(\Phi ; \mathcal{G})$ admettant π comme groupe d'automorphismes, appelés aussi $(\pi, \Phi, \mathcal{G})$-fibrés (ou simplement $(\pi, \mathcal{G})$-fibrés si Φ est sous-entendu). L'ensemble des classes de tels fibrés (pour la notion évidente d'isomorphisme) ne dépend encore que du π-faisceau de groupes $\mathcal{G}$, on le note $H^1(X, \pi ; \mathcal{G})$. Son calcul peut s'expliciter par des cochaînes qui généralisent les cochaînes de Čech (correspondant au cas π réduit à l'unité) et les cochaînes d'un groupe discret (correspondant au cas X réduit à un point), mais qui, par ailleurs, semblent inutiles. $H^1(X, \pi ; \mathcal{G})$ est un foncteur en $\mathcal{G}$.

Les notions introduites donnent lieu à des variantes diverses de la suite exacte de cohomologie, qui se développent exactement comme dans le rapport cité (correspondant au cas π réduit à l'identité). En particulier si on a un π-faisceau de groupes $\mathcal{G}$, un sous-π-faisceau de groupes $\mathcal{F}$ et si on considère le π-faisceau quotient $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$, on a une suiteexacte de cohomologie

$$e \to H^0(X, \pi ; \mathcal{F}) \to H^0(X, \pi ; \mathcal{G}) \to H^0(X, \pi ; \mathcal{H}) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \pi ; \mathcal{F}) \to H^1(X, \pi ; \mathcal{G})$$

l'exactitude signifiant que chaque ensemble est muni d'un "élément unité" permettant de définir le "noyau" d'une application, lequel est égal à l'image de l'application précédente. D'ailleurs $H^1(X,\pi;\mathcal{G})$ est un groupe opérant de façon évidente dans $H^0(X,\pi;\mathcal{H})$, et deux éléments de ce dernier ensemble sont congrus sous le groupe d'opérateurs précédent si et seulement si leur image par π est la même (N.B.: si on se borne aux π-faisceaux de groupes abéliens, la suite exacte précédente est le début de la suite exacte relative aux foncteurs dérivés du foncteur $H^0(X,\pi;\mathcal{G})$).

3°) Soit $\mathcal{G}$ un π-faisceau de groupes sur X. On va écrire deux suites exactes qui, dans le cas où $\mathcal{G}$ est abélien, proviennent respectivement de deux suites spectrales aboutissant aux foncteurs dérivés de $H^0(X,\pi;\mathcal{G})$, mais qui, ici, s'établissent directement de façon immédiate, sans hypothèse de commutativité sur $\mathcal{G}$.

$$\text{(I)} \qquad e \to H^1(\pi, H^0(X,\mathcal{G})) \xrightarrow{i} H^1(X,\pi;\mathcal{G}) \xrightarrow{j} H^1(X,\mathcal{G})^{\pi} \qquad \text{(i injective)}$$

Le dernier ensemble est l'ensemble des éléments de $H^1(X,\mathcal{G})$ invariants sous π, et l'application j est l'application évidente obtenue en remarquant qu'un $(\pi,\mathcal{G})$-faisceau principal est aussi un $\mathcal{G}$-faisceau principal. Le premier ensemble est l'ensemble des classes d'homomorphismes croisés φ de π dans le π-groupe $M = H^0(X,\mathcal{G})$ $[\varphi(e) = e,\ \varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)(\alpha.\varphi(\beta))]$ φ et φ' étant "cohomologues" si il existe $m \in M$ tel que $\varphi'(\alpha) = m\varphi(\alpha)(\alpha.m)^{-1}$. L'homomorphisme i s'obtient en remarquant qu'il y a correspondance naturelle entre homomorphismes croisés de φ dans $H^0(X,\mathcal{G})$ et les $(\pi-\mathcal{G})$-faisceaux principaux P sur X munis d'une section marquée f (mod. isomorphismes de tels systèmes) ; un tel (P,f) définissant φ par $\alpha.f = f.\varphi(\alpha)$ $(\alpha \in \pi)$; et φ définissant sur $\underline{E} = \mathcal{G}$ considéré comme faisceau principal sous $\mathcal{G}$ (opérant à droite) muni de la section unité, une structure de π-faisceau compatible avec les opérations de $\mathcal{G}$, à $\alpha \in \pi$ correspondant l'opération $\sigma(\alpha)$ définie par $\sigma(\alpha).a = \varphi(\alpha)\alpha.a$ pour $a \in \mathcal{G}$. L'exactitude de (I) est triviale

$$\text{(II)} \qquad e \to H^1(Y, p_*^{\pi}(\mathcal{G})) \xrightarrow{i} H^1(X,\pi;\mathcal{G}) \xrightarrow{j} H^0(Y, \mathcal{H}^1(\pi, p_*(\mathcal{G}))) \qquad \text{(i injective)}$$

Le premier homomorphisme provient du fait que tout fibré sur Y à faisceau structural $\mathcal{E} = p_*^{\pi}(\mathcal{G})$ définit par image réciproque un $(\pi, p^{-1}(\mathcal{E}))$-faisceau, d'où grâce à l'injection de $p^{-1}(\mathcal{E}) = \mathcal{G}^{\pi}$ dans $\mathcal{G}$ un $(\pi,\mathcal{G})$-faisceau dont on considère la classe dans $H^1(X,\pi;\mathcal{G})$. Dans le dernier membre,

$\mathcal{H}^1(\pi, p_*(\mathcal{G}))$ désigne le faisceau sur Y défini par le préfaisceau suivant : à l'ouvert $V \subset Y$ on associe l'ensemble $H^1(\pi, H^0(p^{-1}(V), \mathcal{G}))$, avec l'application de restriction évidente pour $V' \subset V$. Si $y \in Y$, soit V un voisinage ouvert assez petit pour que $p^{-1}(V)$ soit réunion disjointe des αU_x, où x est un point fixé de X au-dessus de y, U_x un voisinage de x invariant sous π_x, et où α varie dans π mod π_x ; alors on a $H^1(\pi, H^0(p^{-1}(V), \mathcal{G})) =$ $= H^1(\pi_x, H^0(U_x, \mathcal{G}))$ d'où, en passant à la limite inductive sur les U_x :

$$\mathcal{H}^1(\pi, p_*(\mathcal{G}))_y = H^1(\pi_x, \mathcal{G}_x) .$$

Voici comment s'explicitent les applications

$$H^1(X, \pi ; \mathcal{G}) \to H^1(\pi, p_*(\mathcal{G}))_x = H^1(\pi_x, \mathcal{G}_x) \quad ;$$

on écrit la suite exacte (I) en y remplaçant X par un voisinage ouvert U_x de x stable sous π_x comme ci-dessus, puis on passe à la limite inductive sur les U_x ; comme $\varinjlim H^1(U_x, \mathcal{G})$ est réduit à un seul élément (tout faisceau principal sous $\mathcal{G}$ est trivial au voisinage de x) on trouve

$$\varinjlim H^1(U_x, \pi_x, \mathcal{G}) = \varinjlim H^1(\pi_x, H^0(U_x, \mathcal{G})) = H^1(\pi_x, \varinjlim H^0(U_x, \mathcal{G})) = H^1(\pi_x, \mathcal{G}_x),$$

d'autre part on a des applications évidentes de restriction $H^1(X, \pi ; \mathcal{G}) \longrightarrow$ $\longrightarrow H^1(U_x, \pi_x ; \mathcal{G})$ d'où l'application cherchée. L'exactitude de (II) est alors triviale.

(Noter qu'on vient de voir aussi que $H^1(\pi_x, \mathcal{G}_x)$ s'identifie aussi à l'ensemble des classes de germes en y de π-$\mathcal{G}$-fibrés au-dessus d'un $p^{-1}(U)$, où U est un voisinage ouvert variable de y). On peut aussi caractériser, plus généralement, l'ensemble des éléments de $H^1(X, \pi ; \mathcal{G})$ dont l'image dans $H^0(Y, \mathcal{H}^1(\pi, p_*(\mathcal{G})))$ est la même que celle d'un π-$\mathcal{G}$-fibré E (i.e. des π-fibrés qui sont localement isomorphes à E au-dessus de tout $y \in Y$) : il s'identifie à $H^1(Y, p_*^{\pi}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathcal{G}}(E)))$, où $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathcal{G}}(E)$ est le faisceau de groupes des germes d'automorphismes de E considéré comme fibré à faisceau structural $\mathcal{G}$ (abstraction faite de π).

2. Fibrés analytiques sur une variété analytique où opère un groupe discret : généralités.

1°) Gardons les notations du paragraphe 1, mais supposons que X soit un espace analytique (voir Séminaire Cartan, t. 6, 1953/54) dont π est un groupe fidèle d'automorphismes. Alors [1] $Y = X/\pi$ est un espace analytique, quand on prend comme faisceau d'anneaux locaux sur Y le faisceau $p_*^{\pi}(\mathcal{O}_X)$ ($\mathcal{O}_X$ désignant le faisceau d'anneaux locaux sur X). Soit G un groupe de Lie complexe, soit $\mathcal{O}_X(G)$ le faisceau des germes d'applications analytiques de X dans G, c'est un faisceau de groupes et $p_*^{\pi}(\mathcal{O}_X(G)) = \mathcal{O}_Y(G)$. Les faisceaux principaux sous $\mathcal{O}_X(G)$ sont exactement les faisceaux de germes de sections holomorphes des fibrés analytiques principaux de groupe G sur X. D'ailleurs $\mathcal{O}_X(G)$ est évidemment un π-faisceau, on peut donc considérer les $(\pi, \mathcal{O}_X(G))$-faisceaux principaux sur X, correspondant aux fibrés analytiques principaux de groupe G admettant π comme groupe d'automorphismes, appelés (π, G)-fibrés analytiques principaux. En vertu de la suite exacte (I) les (π, G)-fibrés analytiques qui proviennent d'un homomorphisme croisé de π à valeurs dans le groupe $H^0(X, \mathcal{O}_X(G))$ des applications holomorphes de X dans G sont ceux qui sont triviaux quand on fait abstraction des opérations de π ; en vertu d'un théorème de Grauert cette condition est toujours remplie si X est une variété de Stein contractible (voir exposé de H. CARTAN dans ce même Séminaire).

Soit P un (π, G)-fibré analytique principal défini par un homomorphisme croisé φ de π dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(G))$ (paragraphe 1, 3), considérons une représentation holomorphe de G dans une variété holomorphe F, permettant de construire un fibré associé E, qui est alors un π-fibré analytique. Ses sections holomorphes (resp. méromorphes) s'identifient aux applications holomorphes (resp. méromorphes) f de X dans F, avec π opérant par la formule $\sigma(\alpha)f(x) = \varphi(\alpha)f(\alpha^{-1}.x)$, en particulier les sections invariantes sont celles qui satisfont à

$$f(\alpha^{-1}.x) = \varphi(\alpha)^{-1}.f(x).$$

Si par exemple φ est un homomorphisme de φ dans G, cela s'écrit $f(\alpha, x) = = \varphi(\alpha).f(x)$.

2°) La classification locale, au-dessus d'un point $y \in Y$, des (π, G)-fibrés analytiques, revient en vertu du paragraphe 1 n° 3, à la détermination de l'ensemble $H^1(\pi_x, \mathcal{O}_x(G))$ où $\mathcal{O}_x(G)$ est le groupe des germes d'application holomorphes au point x à valeurs dans G (x étant un point au-dessus de y). Or $\mathcal{O}_x(G)$ est produit semi-direct du sous-groupe $\mathcal{J}_x(G)$ formé des germes dont la valeur en x est e, par le groupe G, et $\mathcal{J}_x(G)$ est invariant sous π_x et π_x opère trivialement dans G. Il s'ensuit que l'on a des applications canoniques $H^1(\pi_x, G) \to H^1(\pi_x, \mathcal{O}_X(G)) \to H^1(\pi_x, G)$ dont le composé est l'identité, d'ailleurs $H^1(\pi_x, G)$ est l'ensemble des classes de représentations de π_x dans G, mod.

composition avec automorphismes intérieurs dans G .

PROPOSITION 1. - Si X est sans singularités et de dimension complexe 1 , ou si $G = GL(n,C)$, on a $H^1(\pi_X, \mathcal{O}_X(G)) = H^1(\pi_X, G)$ par l'homomorphisme précédent.

La démonstration du premier cas résultera du paragraphe 3, ici donnons une démonstration purement algébrique du cas où $G = GL(n,C)$. Or, plus généralement, soit $\mathcal{O}$ un anneau local intègre dans lequel opère un groupe fini fidèle d'automorphismes, on suppose que Γ opère trivialement dans le corps des restes k et que ce dernier est de caractéristique nulle, enfin que $\mathcal{O}$ est somme directe de son idéal maximal et d'un sous-corps. Alors l'application naturelle $H^1(\Gamma, GL(n, \mathcal{O})) \to H^1(\Gamma, GL(n,k))$ est bijective. On se sert du fait bien connu que (K désignant le corps des fractions de $\mathcal{O}$) $H^1(\Gamma, GL(n,K))$ est réduit à l'élément neutre, par suite si φ est un homomorphisme croisé de Γ à valeurs dans $\mathcal{O}$, il existe une matrice $M \in GL(n,K)$ telle qu'on ait $\alpha.M = M\varphi(\alpha)$ pour $\alpha \in \Gamma$. Posons $M' = \sum_{\alpha\in\Gamma} \alpha^{-1}.M \, \overline{\varphi}(\alpha)$, où $\overline{\varphi}$ est la représentation de Γ dans $GL(n,K)$ composée de φ et de l'homomorphisme de $\mathcal{O}$ sur k (identifié à un sous-corps de $\mathcal{O}$, ce qui est possible) ; on a $M' = MU$ avec $U = \sum_\alpha \varphi(\alpha^{-1}) \, \overline{\varphi}(\alpha)$ donc $U \in M_n(\mathcal{O})$ et même $U \in GL(n, \mathcal{O})$ car $\overline{U} = \sum_\alpha \overline{\varphi}(\alpha^{-1}) \, \overline{\varphi}(\alpha) = mI_n$ où m = ordre de Γ , d'où $\overline{\det U} = \det \overline{U} \neq 0$ (i.e. $\det U$ est inversible dans $\mathcal{O}$). Donc $M' \in GL(n,K)$ et si on pose $\alpha.M' = M' \varphi'(\alpha)$, alors φ' est un homomorphisme croisé de Γ dans $GL(n,\mathcal{O})$ cohomologue à φ ; or on voit aussitôt que $\varphi'(\alpha) = \overline{\varphi}(\alpha)$. C.Q.F.D.

3°) Définition de fibrés par des G-diviseurs. - Soit $\mathcal{M}_X(G)$ le faisceau des germes d'applications méromorphes de X dans le groupe complexe linéaire G, $\mathcal{O}_X(G)$ en est un sous-faisceau, et le faisceau quotient, en prenant les classes à gauche $\mathcal{O}_X(G).f$, est appelé faisceau des germes de diviseurs à valeurs dans G (ou germes de G-diviseurs), noté $\mathcal{D}_X(G)$, ses sections sur X sont appelées G-diviseurs sur X . ?Bien entendu π opère dans ces faisceaux, on peut donc considérer en particulier des G-diviseurs invariants sous π , appelés π , $\mathcal{G}$ -diviseurs. D'après les généralités du paragraphe 1 n° 2 , un tel diviseur D définit un (π,G)-fibré (principal si on veut) analytique, que l'on peut préciser ainsi : ses sections holomorphes sur X s'identifient aux fonctions méromorphes f de X dans G telles que $f_i f$ soit holomorphe sur U_i pour tout i (si D est donné par des f_i méromorphes définies sur des U_i ouverts recouvrant X , $f_i.f_j^{-1}$ étant régulière sur $U_i \cap U_j$) ; π opère de la façon naturelle par $(\alpha.f)(x) = f(\alpha^{-1}.x)$; caractérisation analogue des sections méromorphes, elles s'identifient simplement aux fonctions méromorphes de X dans G, avec les opérations usuelles de π ; enfin, ces caractérisations s'étendent, mot pour mot, quand on considère un fibré holomorphe E associé à $\mathfrak{P}$ et une représentation de G par automorphismes d'une variété-fibre F. En particulier, les sections méromorphes invariantes sous π s'identifient aux applications méromorphes de $Y = X/\pi$ dans E, et la condition pour qu'une section soit holomorphe est celle indiquée plus haut.

D'après le paragraphe 1 n° 2, deux G-diviseurs définissent des (π,G)-fibrés analytiques isomorphes si et seulement si ils sont congrus sous le groupe $H^0(X,\pi;\mathcal{M}_X(G)) = H^0(Y,\mathcal{M}_Y(G))$ des applications méromorphes de Y dans G, opérant à droite sur l'ensemble des (π,G)-diviseurs de la façon évidente. Ainsi, l'ensemble des classes de (π,G)-diviseurs sur X mod. les opérations définies par les applications méromorphes de $Y = X/\pi$ dans G s'identifie à un sous-ensemble de l'ensemble $H^1(X,\pi;\mathcal{O}_X(G))$ des classes des (π,G)-fibrés analytiques ; de façon précise (toujours d'après la suite exacte de cohomologie) on obtient ainsi exactement les classes des (E,π)-fibrés analytiques principaux qui admettent une section méromorphe invariante sous π. On en conclut, par exemple, que si $G = GL(n,C)$, i.e. si on s'intéresse à la classification des π-fibrés vectoriels analytiques E sur X, tout tel fibré peut être défini par un diviseur matriciel invariant sous π pourvu que $Y = X/\pi$ soit une variété projective ou une variété de Stein. En effet, la condition ci-dessus signifie qu'il existe n sections méromorphes invariantes sous π linéairement indépendantes de E ; soit $\mathcal{O}_X(E)$ le π-faisceau des germes de sections holomorphes de E, alors $p_*^{\pi}(\mathcal{O}_X(E))$ est un faisceau analytique cohérent $\mathfrak{F}$ sur Y, il faut exprimer qu'il existe n "sections méromorphes" linéairement indépendantes (sur le corps des fonctions méromorphes sur Y) de ce faisceau, ce qui résulte de la théorie des variétés de Stein (CARTAN) resp. de la théorie des variétés projectives (SERRE [3]). On conclut de ceci que ce résultat reste valable si G peut être plongé dans un $GL(n,C)$ de telle façon que $GL(n,C)$ fibré par G ait une section méromorphe ; ceci est le cas par exemple si $G = S\ell(n,C)$ ou $Sp(n,C)$, mais j'ignore s'il en est de même pour $SO(3,C)$.

Remarquons enfin que pour qu'un (π,G)-fibré analytique défini par un homomorphisme croisé φ de π dans $H^0(X,\mathcal{O}_X(G))$ puisse être défini par un diviseur, il faut et il suffit qu'il soit un cobord en tant que homomorphisme à valeurs dans $H^0(X,\mathcal{M}_X(G))$, i.e. qu'il existe une application méromorphe M de X dans G

telle que $\alpha . M = M\varphi(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \pi$; alors le G-diviseur défini par M^{-1} est évidemment invariant sous π, et définit un (π,G)-fibré analytique, isomorphe à celui défini par la cochaîne φ.

4°) Classification des extensions de π-fibrés vectoriels analytiques.- Soit $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ une suite exacte de π-fibrés vectoriels analytiques, l'extension E de E_2 par E_1 est triviale si et seulement si il existe un homomorphisme holomorphe de E_2 dans E, invariant sous π, dont le composé avec la projection $E \to E_2$ soit l'identité. Considérons donc la suite exacte $0 \to E_2' \otimes E_1 \to E_2' \otimes E \to E_2' \otimes E_2 \to 0$ obtenue en tensorisant avec le fibré dual E_2' de E_2, et la suite exacte correspondante $0 \to \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1) \to \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E) \to$ $\to \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_2) \to 0$ de π-faisceaux abéliens, d'où d'après le paragraphe 1 n° 2 une suite exacte de cohomologie $\ldots \to H^0(X,\pi ; \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E)) \to H^0(X,\pi ; \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_2)) \to$ $\to H^1(X,\pi ; \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1)) \to \ldots$; il faut donc exprimer que l'élément I_{E_2} (endomorphisme identique de E_2) appartient à l'image du premier ensemble, ce qui équivaut au fait que l'élément $\partial I_{E_2} = c(E) \in H^1(X,\pi ; \mathcal{O}_X(E_2 \otimes E_1))$ est nul. $c(E)$ est appelé classe caractéristique de l'extension E de E_2 par E_1, sa nullité signifie donc que l'extension est triviale. Plus généralement, il n'est pas difficile de voir (par des considérations plus générales !) que $E \to c(E)$ définit une correspondance biunivoque entre classes de π-fibrés vectoriels analytiques extensions de E_2 par E_1, et les éléments de $H^1(X,\pi ; \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1))$. Cela amène à étudier ce dernier groupe, et de façon générale le groupe $H^1(X,\pi ; \mathcal{O}_X(E))$ relatif à un π-fibré vectoriel analytique quelconque. Il suffit d'appliquer la suite exacte (II) du paragraphe 1, n° 3 et de remarquer que (π_x étant fini et le corps C de caractéristique nulle) $H^1(\pi_x, \mathcal{O}_x(E))$ est nul pour tout $x \in X$, pour trouver

$$H^1(X,\pi ; \mathcal{O}_X(E)) = H^1(Y, p_*^{\pi}(\mathcal{O}_X(E)))$$

(formule qui vaut d'ailleurs encore en toute dimension). Noter que $p_*^{\pi}(\mathcal{O}_X(E))$ est un faisceau analytique cohérent sur Y.

5°) Fibrés vectoriels indécomposables. - Un π-fibré holomorphe est dit indécomposable, s'il n'est pas somme directe non triviale de deux sous-π-fibrés holomorphes. Il est immédiat que tout π-fibré vectoriel holomorphe est somme directe de π-fibrés indécomposables. De plus :

PROPOSITION 2 (Atiyah). - Si $Y = X/\pi$ est compact, deux décompositions d'un π-fibré holomorphe vectoriel en π-fibrés indécomposables se correspondent par un automorphisme de E .

En effet, une telle décomposition correspond, dans l'anneau A des π-endomorphismes de X , à une décomposition de l'identité en somme d'idempotents "indécomposables" mutuellement orthogonaux. Or si Y est compact, A est une algèbre de dimension finie sur C , donc un anneau d'Artin, et le résultat s'obtient en appliquant le classique théorème de Krull-Remak-Schmidt à A considéré comme un module de longueur finie sur lui-même.

6°) Faits spéciaux au cas où X est sans singularités de dimension complexe 1. - Alors l'ensemble des points de X fixes sous des opérations $\alpha \neq e$ dans π est discret, sa projection sur Y est une partie discrète Y_0 de Y (donc finie si Y_0 est compacte). D'ailleurs Y est alors sans singularités, et les π_x sont des groupes cycliques. De façon précise, on sait qu'on peut au point x trouver une uniformisante locale τ_x telle que π_x soit le groupe des multiplications de τ_x par ξ^k , où ξ est une racine primitive n_x-ième de l'unité (et où k varie mod. n_x). Evidemment n_x ne dépend que de $y = p(x)$, et est égal à 1 sauf si $y \in Y_0$. On dit que la fonction $y \to n_y$ à valeurs entières ≥ 1 et égale à 1 sauf sur un ensemble discret Y_0 , est la signature sur Y définie par le recouvrement ramifié Y (les $y \in Y_0$ sont appelés points de ramification). On peut montrer que si on se donne a priori Y et une signature sur Y , il existe un recouvrement ramifié simplement connexe unique à isomorphisme près qui définit cette signature, sauf dans le cas où Y est isomorphe à la sphère de Riemann et où Y_0 contient exactement un point, ou deux points avec des indices de ramification distincts (C'est une question de pure topologie des surfaces). Il est parfois bon, alors, de ne considérer X muni de π que comme espace auxiliaire et d'exprimer toutes les notions introduites directement en termes de Y muni de sa signature η (ce même point de vue peut d'ailleurs se développer si on veut pour Y de dimension quelconque, mais nous n'insisterons pas ici). Ainsi un (π, G)-diviseur sur X peut être considéré comme une somme localement finie sur Y de (η, G)-diviseurs ponctuels, un (η, G)-diviseur au point y étant défini ainsi : On considère l'extension $\tilde{K}_y$ de degré n du corps des fractions K_y de $\mathcal{O}_y$ obtenu par adjonction d'une racine n_y-ième d'une uniformisante locale (cette extension ne dépend évidemment pas du choix de l'uniformisante), et la clôture intégrale $\tilde{\mathcal{O}}_y$ de $\mathcal{O}_y$ dans ce corps ; les éléments de l'ensemble quotient $GL(n, K_y)/GL(n, \mathcal{O}_y)$ (espace homogène à droite) sont les diviseurs matriciels de degré n au point y

relatifs à la signature η (pour simplifier, on suppose $G = GL(n,C)$). Si d'ailleurs Y est une courbe algébrique sans singularités, A_y son anneau local algébrique en y et L_y son corps des fonctions rationnelles, alors le complété de L pour la valeur absolue définie par l'anneau local A_y s'identifie au complété analogue de K_y, d'où résulte facilement que l'ensemble des diviseurs matriciels en y relatifs à la signature η se définissent de façon purement algébrique ainsi : on prend une uniformisante quelconque de A_y, on adjoint à L une racine n_y-ième de cette dernière, on prend la clôture intégrale $\tilde{A}_y$ de A_y dans le corps obtenu $\tilde{L}_y$ et on forme l'ensemble quotient $GL(n,\tilde{L}_y)/GL(n,\tilde{A}_y)$ (le résultat est indépendant du choix de l'uniformisante locale). Dans le cas où de plus Y est compacte, les fonctions méromorphes sur Y sont rationnelles, donc la définition de l'ensemble des classes de diviseurs est elle aussi purement algébrique.

D'après le n° 2 un diviseur matriciel de degré r (relatif à η) en un point y est caractérisé à équivalence près par une classe de représentation linéaire ρ de degré r de π_x (ou $x \in p^{-1}(y)$) ; si u est le générateur envisagé plus haut, du groupe π_x cyclique d'ordre n_x, il revient au même de se donner les n_x valeurs propres de $\rho(u_x)$, qui doivent être de la forme $\xi_x^{d_i}$, où ξ_x est la racine primitive envisagée n_x-ième de l'unité, et où $0 \leqslant d_i < n_x$. Les invariants d_i ne dépendent pas du choix de la racine primitive ξ_x ni du paramètre τ_x. On conclut aussitôt de ceci que tout diviseur en y peut se représenter par une matrice $D\tilde{P}$, où $\tilde{P}$ est la matrice méromorphe en x définie par une matrice méromorphe P au point y de Y, et où D est de la forme

$$D = \begin{pmatrix} \tau_x^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tau_x^{d_r} \end{pmatrix}$$

(les d_i étant les invariants envisagés plus haut). Soit θ un diviseur matriciel de degré r relatif à η défini par des matrices $D_y P_y$ de la forme ci-dessus, pour les divers $y \in Y$. Soit E le π-fibré vectoriel défini par θ. On vérifie aussitôt qu'un germe en y du faisceau $p_*^{\pi}(\mathcal{O}_X(E))$ s'identifie à un germe de section holomorphe du fibré vectoriel sur Y défini par le diviseur (non ramifié) représenté par les matrices P_y. Pour tout π-fibré vectoriel holomorphe E sur X, $p_*^{\pi}(\mathcal{O}_X(E))$ s'identifie à un faisceau de la forme $\mathcal{O}_Y(p_*(E))$, où $p_*(E)$ est un fibré vectoriel sur Y, évidemment bien défini par cette condition. On a ainsi un foncteur remarquable $E \to p_*(E)$ qui malheureusement ne permute pas à l'opération de produit tensoriel et de passage au dual. Cependant, soit Λ_X^1 le fibré vectoriel sur X correspondant aux 1-formes holomorphes, posons $E^0 = \Lambda_X^1 \otimes E'$, et adoptons des notations analogues sur Y. Alors on a les formules

$$p_*(\Lambda_X^1) = A_Y^1 \quad , \quad p_*(E^0) = p_*(E))^0$$

On en conclut, si Y est compact, en se souvenant du "théorème de dualité analytique" de Serre (connu depuis longtemps dans le cas des courbes) :

PROPOSITION 3. - Si X est une variété holomorphe de dimension 1 munie d'un groupe discontinu π d'automorphismes tel que $Y = X/\pi$ soit compacte, alors pour tout π-fibré vectoriel holomorphe E sur X, le dual de $H^1(X,\pi;\mathcal{O}_X(E))$ s'identifie à $H^0(X,\pi;\mathcal{O}_X(E^0))$, où $E^0 = \Lambda_X^1 \otimes E'$.

En effet, puisqu'on est en caractéritique 0, nous avons déjà remarqué que $H^1(X,\pi;\mathcal{O}_X(E))$ s'identifie à $H^1(Y,p_*^\pi(\mathcal{O}_X(E)) = H^1(Y,\mathcal{O}_Y(p_*(E))$, d'où le résultat.

D'après le n° 3, puisque Y est ou bien une variété projective ou bien une variété de Stein (Behnke-Stein), il existe une section méromorphe invariante s pour tout π-fibré vectoriel holomorphe. On constate aussitôt, Y étant non singulière de dimension 1, que la section correspondante pour le fibré projectif associé est holomorphe, d'où l'existence d'un sous-fibré holomorphe de dimension 1 de E, d'où de proche en proche :

PROPOSITION 4. - Pour tout π-fibré vectoriel holomorphe sur X (variété holomorphe de dimension 1), on peut réduire le groupe structural au groupe triangulaire.

Cela signifie aussi que tout diviseur matriciel relatif à la signature η est équivalent à un diviseur matriciel défini par des $D_y\tilde{P}_y$, avec P_y triangulaire.

3. Classe caractéristique d'un fibré holomorphe, et théorème de Weil.

1°) Classe caractéristique et critère d'Atiyah. - Soit X une variété holomorphe munie d'un groupe π discontinu d'automorphismes ; soit P un fibré holomorphe principal sur X, de groupe structural un groupe de Lie complexe G. Le groupe G définit des isomorphismes transitifs entre les espaces vectoriels tangents à P aux points d'une même fibre P_x, soit $\ell(P_x)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur P_x tangents à P et invariants sous G, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}_x \longrightarrow \ell(P)_x \rightarrow T_x \rightarrow 0$$

où T_x est l'espace tangent à X en x , et $\mathfrak{g}_x$ l'espace des champs de vecteurs sur la variété P_x , invariants sous G . $\mathfrak{g}_x$ est aussi la fibre du <u>fibré adjoint</u> de P , (i.e. le fibré associé à P et la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$), et on obtient ainsi une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes

(1) $$0 \to \mathrm{ad}(P) \to \ell(P) \to T \to 0$$

<u>Une connexion holomorphe</u> sur P est par définition un homomorphisme de fibré vectoriel holomorphes $T \to \ell(P)$, dont la composée avec $\ell(P) \to T$ soit l'identité. D'après le paragraphe 2 n° 4, l'obstruction à l'existence d'une connexion holomorphe, i.e. la classe de l'extension de fibrés holomorphes donnés par (1) , est un élément $c(P)$ de $H^1(X, \mathcal{O}_X(T' \otimes \mathrm{ad}(P))) = H^1(X, \Omega^1 \otimes \mathcal{O}_X(\mathrm{ad}(P)))$, (où dans le dernier terme, Ω^1 est le faisceau de germes de 1-formes holomorphes, et le produit tensoriel est pris sur $\mathcal{O}_X$), dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une connexion holomorphe sur P . Plus généralement, si P est un π-fibré, (1) est une suite exacte de π-fibrés holomorphes, dont la classe est un élément

$$c(P, \pi) \in H^1(X, \pi; \Omega^1 \otimes \mathcal{O}_X(\mathrm{ad}(P)))$$

appelé <u>classe caractéristique</u> du π-fibré holomorphe P , et dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une connexion holomorphe sur P <u>invariante</u> par π (critère de Atiyah). Bien entendu, si π est réduit à l'élément neutre, on retrouve la classe $c(P)$.

Remarquons d'ailleurs que si X est de dimension complexe 1 , toute connexion holomorphe sur X est <u>intégrable</u> , ce qui signifie aussi, quand X est de plus simplement connexe, que la connexion peut être définie à l'aide d'un isomorphisme de P avec le produit $X \times G$; si de plus la connexion est <u>invariante</u>, π opère dans $X \times G$ par l'intermédiaire d'une représentation de π dans G , <u>donc si</u> X <u>est de dimension complexe</u> 1 <u>et simplement connexe, l'annulation</u> de $c(P, \pi)$ est <u>nécessaire et suffisante pour que le</u> π<u>-fibré holomorphe</u> P <u>puisse être défini à l'aide d'une représentation de</u> π <u>dans</u> G .

2°) <u>Cas où</u> Y <u>est compacte de dimension</u> 1. - Supposons alors que P soit le fibré principal associé à un π-fibré vectoriel holomorphe E , alors $\mathrm{ad}(P)$ s'identifie à $E' \otimes E$. D'autre part, en vertu du paragraphe 2, proposition 3 , le dual de $H^1(X, \pi; \Omega^1 \otimes \mathcal{O}_X(\mathrm{ad}(P)))$ est $H^0(X, \pi; \mathcal{O}_X(\mathrm{ad}(P)))$, c'est-à-dire ici, puisque $(E' \otimes E)' = E \otimes E'$, le dual s'identifie à l'espace des endomorphismes du π-fibré vectoriel E. Donc la détermination de $c(P,\pi)$ revient à la détermination des produits scalaires $\langle c(P,\pi),u\rangle$, où u est un endomorphisme du π-fibré holomorphe vectoriel E. Or considérant le polynome caractéristique $\det(z-u)$, ses coefficients sont des fonctions holomorphes sur X invariantes sous π, donc s'identifient à des fonctions holomorphes sur $Y = X/\pi$, donc sont constantes puisque Y est compact. Il s'ensuit que E se décompose en la somme directe de π-fibrés holomorphes E_i invariants sous u, la restriction u_i de u à E_i, n'ayant qu'une seule valeur propre λ_i : $u_i = \lambda_i + v_i$ est un π-endomorphisme nilpotent de E_i. On en conclut $\langle c(P,\pi),u\rangle = \sum_i \langle c(P_i,\pi),u_i\rangle$ ce qui nous ramène à calculer $\langle c(P,\pi),u\rangle$ quand u est soit nilpotent, soit l'identité. Dans le premier cas, utilisant la proposition 4 du paragraphe 2, on trouve 0. Quant à $\langle c(P,\pi),1\rangle$, c'est un entier appelé <u>degré</u> du π-fibré vectoriel E, noté $C^1(E,\pi)$, qui dans le cas $X = Y$, $\pi = \{\ell\}$ est <u>un invariant topologique</u> de ce fibré, coincidant avec la première classe de Chern (= degré d'un diviseur).

En tout cas, on a (si E a une fibre de dimension r) $c^1(E,\pi) = c^1(\Lambda E,\pi)$, et ce nombre peut se calculer ainsi : appelons <u>degré</u> en y d'un π-diviseur matriciel $M = (M_y)$ (où M_y est une matrice méromorphe au voisinage d'un $x \in p^{-1}(y)$) le quotient par n_x (la ramification) de l'ordre en x de la fonction méromorphe $\det(M_y)$; alors le degré de E est la somme des degrés en les points $y \in Y$ d'un diviseur matriciel définissant E. On en conclut par exemple la formule

$$c^1(E,\pi) = c^1(p_*(E)) + \sum_y \frac{1}{n_y} \sum_i d_i(y)$$

De ce qui précède résulte aussitôt le

THÉORÈME DE WEIL. - <u>Soit</u> X <u>une variété holomorphe simplement connexe de dimension</u> 1 <u>munie d'un groupe discontinu</u> π <u>d'automorphismes tel que</u> $Y = X/\pi$ <u>soit compact</u> ; <u>soit</u> $E = \sum_i E_i$ <u>un</u> π-<u>fibré vectoriel holomorphe sur</u> X <u>somme directe de</u> π-<u>fibrés holomorphes indécomposables</u> E_i. <u>Pour que</u> E <u>puisse être défini par une représentation linéaire de</u> π, <u>il faut et il suffit que les degrés</u> $c^1(E_i,\pi)$ <u>des</u> E_i <u>soient tous nuls</u>.

3°) <u>Compléments</u>. - Par des raisonnements heuristiques, WEIL détermine de plus, pour une dimension donnée r de la fibre, une signature donnée η sur Y, et des valeurs propres $\xi_y^{d_i}$ données aux points de ramification y de Y, la dimension de la "variété" des classes de π-fibrés holomorphes vectoriels correspondants pouvant se définir à l'aide d'une représentation de π, i.e. de l'ensemble des "classes" de représentations linéaires de degré r de π, induisant sur les groupes de stabilité π_x des représentations correspondantes aux valeurs propres données ; deux telles représentations φ, ψ étant mises dans la même classe si elles définissent des π-fibrés holomorphes isomorphes, ou encore définissent le même élément de $H^1(\pi, H^0(X, \mathcal{O}_X(G)))$;i.e. s'il existe une matrice holomorphe inversible M sur X telle que l'on ait $M(\alpha, x) = \varphi(\alpha)M(x)\psi(\alpha)^{-1}$. Il trouve, si g est le genre de Y, et si pour tout point de ramification y_μ, et tout entier k tel que $1 \leq k \leq n_{y_i}$ on désigne par $N_{\mu i}$ le nombre de valeurs propres en y_μ égales à $\exp(2\pi i \frac{k}{n_\mu})$, la valeur suivante pour la dimension

$$r^2(g-1)+1+\sum_\mu \sum_{i<j} N_{\mu_i} N_{\mu_j} \quad .$$

Pour WEIL, la "variété" ainsi obtenue devrait jouer le rôle d'une variété jacobienne généralisée. Malheureusement, une étude détaillée faite par ATIYAH du cas où X est le revêtement universel d'une courbe elliptique montre que la "variété" de Weil n'en est pas une, étant réductible. Il semble plausible cependant que si $g \geq 1$ les classes de π-fibrés indécomposables correspondant à des invariants topologiques donnés r, N_{μ_i} et degré d, forment bien une variété irréductible, et que pour $d = 0$ sa dimension est donnée par la formule de Weil : c'est du moins ce qui se passe dans le cas étudié par ATIYAH, où toutes ces variétés sont isomorphes à X, donc de dimension 1.

4°) Remarques finales. - Ce n'est que dans un très petit nombre de cas qu'on est arrivé à une classification complète des fibrés holomorphes de base X et groupe structural G donnés (même en laissant de côté les questions de ramification). Ecartant le cas où G est résoluble, les seuls cas où on ait une classification explicite sont les suivants :

a) Si X est une variété de Stein, la classification des espaces fibrés holomorphes à groupe G est la même que la classification topologique (GRAUERT). C'est là une extension fort agréable du théorème de Cartan sur les matrices holomorphes inversibles.

b) Si X est une courbe elliptique, ATIYAH a classifié complètement les fibrés vectoriels holomorphes sur X, et déterminé les opérations tensorielles essentielles sur ces fibrés. Ses résultats sont trop complexes pour être détaillés ici.

c) Si X est une courbe de genre 0, le conférencier a obtenu la classification pour tout groupe structural réductif : on peut toujours ramener le groupe structural au sous-groupe de Cartan, et ceci de façon unique à une opération du groupe de Weyl près [2] . Pour les fibrés vectoriels, cela signifie qu'un fibré vectoriel holomorphe indécomposable sur X à une fibre de dimension 1. Utilisant la remarque finale de paragraphe 1 , on peut aussi traiter le cas où on se donne une signature non triviale sur X , mais les résultats sont moins simples, et en particulier la structure multiplicative dans l'ensemble des classes de fibrés vectoriels n'est pas claire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes, Algebraic geometry and topology, A symposium in honor of S. Lefschetz. - Princeton, Princeton University Press, 1957 (Princeton mathematical Series, n° 12).

[2] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 121-138.

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie analytique et géométrie algébrique, Ann. Inst. Fourier, t. 6, 1955/56, p. 1-42.

[4] WEIL (André). - Généralisation des fonctions abéliennes, J. Math. pures et appl., t. 17, 1938, p.47-87.