ALEXANDER GROTHENDIECK

Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. VI. Les schémas de Picard : propriétés générales

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. nº 236, p. 221-243

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__221_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année, 1961/62, n° 236

Mai 1962

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
VI. LES SCHÉMAS DE PICARD : PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

par Alexander GROTHENDIECK

0. Compléments à l'exposé précédent ([3], V) (1).

Il y a eu quelques progrès concernant les questions d'existence de préschémas de Picard soulevés dans [3], V :

a. (MUMFORD). Il n'est pas vrai en général que lorsque $f : X \to S$ est un morphisme projectif et séparable (= plat à fibres séparables), le préschéma de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, même si les fibres de f sont de dimension 1, et si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet. Un exemple en est fourni en prenant $S = \mathrm{Spec}\, \underset{\sim}{R}[[t]]$, et pour X le sous-schéma de $\underset{\sim}{P}^2_S$ défini par l'équation (où x, y, z sont des variables homogènes) $x^2 + y^2 = tz^2$, qui représente donc une conique dégénérant en deux droites concourrantes géométriquement, mais la fibre spéciale sur le corps $\underset{\sim}{R}$ étant néanmoins irréductible (elle est donnée par l'équation $x^2 + y^2 = 0$ sur $\underset{\sim}{R}$). On voit facilement que, après extension étale $S' \to S$, avec $S' = \mathrm{Spec}\, \underset{\sim}{C}[[t]]$, le préschéma de Picard de X'/S' existe, et on en obtient une description explicite comme somme de copies $\tilde{S}$, où $\tilde{S}$ est déduit de S en dédoublant une infinité de fois l'origine. On constate aisément que la donnée de descante sur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X'/S'}$ pour $S' \to S$ (donnée ici par les opérations du groupe de Galois $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$ de S' sur S) n'est pas effective, le groupe échangeant entre eux certains points dédoublés (de sorte qu'il y a des orbites qui ne sont pas contenues dans un ouvert affine). Cependant, MUMFORD peut montrer que si $f : X \to S$ est un morphisme projectif séparable tel que, pour tout $s \in S$, les composantes irréductibles de X_s sont géométriquement irréductibles relativement à $k(s)$, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe ; sa démonstration s'appuie sur un raffinement de son théorème de passage au quotient, cf. [7]. Noter d'autre part qu'il reste possible que, sans hypothèses sur les composantes irréductibles des fibres X_s, le schéma $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ (qui sera introduit plus bas) existe pourtant.

b. (MURRE). Soit X un schéma propre sur un corps, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe. La démonstration reprend en partie la démonstration de CHEVALLEY [1], et s'appuie à fond sur la structure de groupe du foncteur de Picard.

Pour certains compléments concernant la théorie des schémas de Picard, notamment en relation avec les schémas abéliens, il y aura intérêt à consulter [7]. Enfin, une lacune notable du présent exposé est l'absence de "critères d'équivalence", permettant de comparer le schéma de Picard d'un schéma projectif, et de ses sections hyperplanes ; les théorèmes-clefs pour développer de tels critères se trouvent dans [5], auquel il faut joindre les théorèmes d'existence des schémas de Picard.

1. Propriétés topologiques des préschémas en groupes commutatifs.

Soient d'abord k un corps, G un préschéma en groupes sur k. Comme l'élément neutre e, étant rationnel sur k, est nécessairement fermé, il s'ensuit aussitôt que la diagonale de $G \times_k G$ est fermée, donc G est séparé : tout préschéma en groupes sur un corps est séparé. Nous désignerons par G^o la composante connexe de l'élément neutre e. Comme e est rationnel sur k, G^o est en fait géométriquement connexe, i. e. la formation de G^o est compatible avec le changement de corps de base. Il s'ensuit aussi que G^o est stable par multiplication (ensemblistement), et lorsque G est localement noethérien, donc G^o ouvert, on peut considérer G^o comme un sous-groupe ouvert de G. Dans la suite, nous supposerons G localement de type fini sur k ; alors G^o est géométriquement irréductible et de type fini sur k. En effet, on peut supposer k algébriquement clos, donc de plus G réduit (car $G_{réd}$ sera alors un sous-groupe de G, compte tenu que $G_{réd} \times_k G_{réd}$ sera encore réduit), donc simple sur k sur un ouvert non vide, donc partout comme on voit en translatant ledit ouvert. Mais alors G est localement irréductible, donc ses composantes irréductibles sont identiques à ses composantes connexes, donc G^o est irréductible. Soit alors U un voisinage affine de e dans G^o ; utilisant le fait que G^o est irréductible, on voit tout de suite que $U.U = G^o$, ce qui prouve que G^o est quasi-compact, donc de type fini sur k.

Supposons pour simplifier que G soit commutatif. Pour tout entier $n > 0$, soit $G^{(n)}$ l'image inverse de G^o par l'homomorphisme φ_n de puissance n-ième dans G, donc $G^{(n)}$ est un sous-groupe ouvert de G. Nous poserons :

$$G^{\tau} = \bigcup_n G^{(n)}$$

$$G^{\sigma} = \bigcup_{(n,p)=1} G^{(n)}$$

$$G^{\rho} = \bigcup_{h} G^{(p^h)}$$

où p est l'exposant caractéristique pour le corps k . On obtient donc autant de sous-groupes ouverts de G , satisfaisant

$$G^{\sigma} \cap G^{\rho} = G^{o} \ , \qquad G^{\sigma}.G^{\rho} = G^{\tau} \quad .$$

Remarque. - On peut construire le schéma en groupes quotient $G/G^{o} = N$ (cf. [3], IV), et définir alors G^{τ} , G^{σ} , G^{ρ} comme les images inverses dans G du sous-groupe de torsion de N (resp. de sa composante p-primaire, resp. du complémentaire naturel de cette dernière, somme des composantes q-primaires pour q nombre premier $\neq p$). On notera à ce propos que N est un schéma en groupes discret séparable sur k , donc (une fois choisi une clôture algébrique $\overline{k}$ de k , donnant lieu à un groupe de Galois π) s'identifie à un groupe discret ordinaire sur lequel π opère par automorphismes. C'est de cette façon qu'on peut interpréter de façon évidente la construction du sous-groupe de torsion et la décomposition de ce dernier en ses composantes q-primaires. Lorsque G est le schéma de Picard d'un schéma X propre sur k , N pourra s'appeler le schéma de Néron-Severi (réduit) de X sur k . Lorsque $G_{\text{réd}}$ est un sous-schéma en groupes de G^{o} , ce qui a lieu en particulier chaque fois que k est parfait ou que G^{o} est propre sur k (par exemple X géométriquement normal), il y a lieu également d'introduire le quotient $N' = G/G^{o}_{\text{réd}}$, qui a tendance à se comporter mieux que N du point de vue spécialisation, i. e. quand X varie dans une famille de schémas algébriques.

Soient maintenant S un préschéma localement noethérien, et G un préschéma en groupes sur S , localement de type fini sur S . Nous ne supposons pas G de type fini sur S , ni séparé sur S . Nous poserons alors

$$G^{o} = \bigcup_{s \in S} (G_s)^{o} \qquad ,$$

et lorsque G est commutatif :

$$G^{\tau} = \bigcup_{s\in S} (G_s)^{\tau} \ , \qquad G^{\sigma} = \bigcup_{s\in S} (G_s)^{\sigma} \ , \qquad G^{\rho} = \bigcup_{s\in S} (G_s)^{\rho} \qquad .$$

Ce sont là des parties de G, stable par la multiplication de G, de qui n'implique évidemment pas qu'elles puissent être définies à l'aide de sous-préschémas en groupes de G. Notamment, il semble qu'il n'existe pas en général de sous-préschéma en groupes de G dont l'ensemble sous-jacent soit G^o. Bien entendu, si l'un de ces ensembles est ouvert, alors, muni de la structure induite, c'est un sous-préschéma en groupes ouvert de G. Nous verrons qu'il en est toujours ainsi de G^{τ} ; ainsi, du point de vue des foncteurs représentables, en particulier du point de vue "spécialisations", l'équivalence numérique se comporte de façon plus satisfaisante que l'équivalence algébrique. Voici les principales propriétés générales des ensembles qu'on vient de définir :

THÉORÈME 1.1. - G^o, G^{τ}, G^{σ}, G^{ρ} sont localement constructibles. De plus :

(i) G^o est quasi-compact sur S. Lorsque les G^o_s sont propres et G séparé sur S, alors G^o est propre sur S donc fermé dans G.

(ii) G^{τ} est ouvert. Si G^o est fermé, il en est de même de G^{τ}.

(iii) Si G^o est fermé, il en est de même de G^{σ} pourvu qu'on soit en égale caractéristique, i. e. tous les corps résiduels de S ont même caractéristique. Si G^o est fermé et si $G \to S$ est universellement ouvert en les points de G^{σ} (cf. corollaire 1.5 ci-dessous), alors $G^{\sigma} \to S$ est universellement ouvert.

(iv) Si G^o est fermé, il en est de même de G^{ρ}. Supposons qu'on soit en égale caractéristique, et que, pour tout entier $n > 0$ tel que $(n, p) = 1$, l'homomorphisme de puissance n-ième dans G soit ouvert, alors G^{ρ} est ouvert.

Donnons des indications sur la démonstration. Le fait que G^o soit localement constructible, et quasi-compact sur S, est contenu dans le lemme suivant :

LEMME 1.2. - Supposons que S soit $\neq \emptyset$, alors il existe un ouvert non vide U dans S, et un schéma en groupes de type fini H sur U à fibres connexes, enfin un homomorphisme de schémas en groupes $H \to G|U$ qui soit une immersion ouverte ayant pour image $G^o|U$.

Pour prouver le lemme, on peut supposer S irréductible, soit η son point générique, et faisons le changement de base $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,\eta}) \to S$, on trouve un schéma en groupes G' sur un anneau artinien local $\mathcal{O}_{S,s} = A$, dans lequel on a un sous-schéma en groupes ouvert G'^o de type fini sur A, comme on a dit plus haut. Il provient donc d'un schéma en groupes de type fini H sur un voisinage ouvert U de η, et l'immersion canonique $G'^o \to G'$ provient d'une immersion ouverte $H \to G|U$, qui sera un homomorphisme de schémas en groupes pour U assez petit. Comme les fibres de H sont connexes si on prend U assez petit, et toutes de même dimension, égale à celle des fibres de G pour U assez petit, il s'ensuit que, pour tout $s \in U$, l'image de H_s dans G_s est exactement G_s^o (U assez petit), ce qui prouve 1.2.

La deuxième assertion dans (i) est contenue dans le lemme suivant (qu'on applique à un voisinage ouvert quasi-compact de G^o dans G) :

LEMME 1.3. - *Soient X un préschéma de type fini et séparé sur S localement noethérien, g une section de X sur S, X^o la réunion des composantes connexes des $g(s)$ dans les X_s . Soit $s \in S$, tel que X_s^o soit propre sur $k(s)$, alors il existe un voisinage ouvert U de s , tel que $X^o|U$ soit propre sur U , et a fortiori fermé dans $X|U$.*

Par descente fidèlement plate de la base, on se ramène au cas où S est le spectre d'un anneau local complet, et s son point fermé. Appliquant [2], III, 5.5.1, on voit que X se décompose en somme de deux ouverts disjoints X' et X'' , le premier propre sur S et tel que $X'_s = X_s^o$. Cela nous ramène au cas où $X = X'$, i. e. où X est propre sur S . Dans ce cas on s'en tire par une démonstration standard, utilisant le critère valuatif de propreté d'une partie (oublié dans [2], chap. II).

Prouvons que G^τ est ouvert, ou ce qui revient au même, compte tenu que la formation de G^τ (comme celle de G^o , G^σ , G^ρ) commute à l'extension de la base : pour toute section g de G sur S , $g^{-1}(G^\tau)$ est ouvert. Cela signifie deux choses :

a. Soit $y \in S$ tel que $g(y) \in G^\tau$, alors pour tout $y' \in \overline{y}$ voisin de y , on a $g(y') \in G^\tau$.

b. Soit $y' \in S$ tel que $g(y') \in G^\tau$, alors, pour toute générisation y de y', on a $g(y) \in G^\tau$.

Pour (a), on note qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $g^n(y) \in G^o$, comme G^o est constructible, $(g^n)^{-1}(G^o)$ est constructible, il s'ensuit que l'on a $g^n(y') \in G^o$ pour $y' \in \overline{y}$ voisin de y . Pour (b), on note que les $g(y')^n = g^n(y')$ restent dans un ouvert quasi-compact de $G_{y'}$ (car ils sont contenus dans un nombre fini de classes mod $G^o_{y'}$), donc il existe un ouvert quasi-compact U dans G qui contient les $g^n(y')$, donc aussi leurs générisations $g^n(y)$, donc les puissances de $g(y)$ restent dans un ouvert quasi-compact de G_y , ce qui implique facilement que $g(y) \in G_y^\tau$.

Supposons G^o fermé, prouvons qu'il en est de même de G^τ. Comme on sait déjà que G^τ est ouvert, donc localement constructible, il reste à prouver qu'il est stable par spécialisation, ce qui provient du fait que c'est une réunion de fermés, à savoir les images inverses, par les homomorphismes φ_n de puissance n-ième, du fermé G^o.

Le même argument prouvera que G^σ et G^ρ sont fermés si G^o l'est (sous réserve dans le premier cas qu'on soit en égale caractéristique), une fois démontré que G^σ et G^ρ sont localement constructibles. Or, pour $x \in G^\tau$, soit $\nu(x)$ le plus petit entier $n > 0$ tel que l'homomorphisme φ_n de puissance n-ième envoie x dans G, Donc G^σ (resp. G^ρ) est formé des $x \in X$ tels que $\nu(x)$ soit premier à p (resp. une puissance de p) et notre assertion de constructibilité résulte alors de la suivante, plus précise :

LEMME 1.4. - <u>La fonction</u> ν <u>sur</u> G^τ <u>est localement constructible</u>.

Cela signifie en effet que, pour tout entier $n > 0$, l'ensemble des $x \in G^\tau$, tels que $\nu(x) = n$, est localement constructible ; or c'est la différence de $\varphi_n^{-1}(G^o)$ et de la réunion des $\varphi_d^{-1}(G^o)$, où d parcourt les diviseurs propres de n ; comme G^o est localement constructible, il en est de même des $\varphi_i^{-1}(G^o)$, donc aussi de la différence précédente.

Supposons G^o fermé et $G \to S$ universellement ouvert en les points de G^σ, prouvons que $G^\sigma \to S$ est ouverte, i. e. transforme un voisinage dans G^σ d'un $x \in G^\sigma$ en un voisinage de $y = f(x)$. Comme G^σ est localement constructible, on est ramené à prouver que, pour toute générisation y' de y, il existe une générisation x' de x dans G au-dessus de y'. Cela nous ramène par changement de base au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et où y, y' sont respectivement le point fermé et le point générique. Utilisant le fait que $G \to S$ est ouvert en x (donc qu'il existe une générisation x_1 de x dans G au-dessus de y'), on peut supposer de plus qu'il existe une section g de G sur S, telle que $x = g(y)$ (quitte à faire encore un changement de base). Si $k(y')$ est de caractéristique 0, il suffit de prendre n'importe quelle générisation x' de x dans G au-dessus de y', elle est dans G^τ puisque G^τ est ouvert, donc dans G^σ puisque $G^\sigma_{y'} = G^\tau_{y'}$. Si la caractéristique de $k(y')$ est $p > 0$, posons

$$\nu(g(y')) = p^h m \quad \text{avec} \quad (m, p) = 1 \quad ;$$

soient a et b deux entiers tels que $ap^h + bm = 1$, posons

$$g_1 = g^{ap^h} , \qquad g_2 = g^{bm} \qquad \text{d'où} \quad g = g_1 \, g_2 \qquad ;$$

donc par construction, on a $g_1(y') \in G^\sigma$ et $g_2(y') \in G^\rho$. Comme G^o est fermé il s'ensuit que $g_1(y) \in G^\sigma$ et $g_2(y) \in G^\rho$, d'où, en vertu de

$$g(y) = g_1(y) \; g_2(y) \in G^\sigma \qquad ,$$

aussi $g_2(y) \in G^\sigma$, donc

$$g_2(y) \in G^\sigma_y \cap G^\rho_y = G^o_y \qquad .$$

Or de l'hypothèse, et du fait que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, résulte que $G - (G_y - G^o_y)$ est un ouvert de G sur lequel $G \to S$ induit un morphisme ouvert, donc que, par tout point de G^o_y , passe une "quasi-section" ; par suite, quitte à faire encore une extension sur la base S , on peut supposer qu'il existe une section g'_2 de G^o sur S telle que $g'_2(y) = g_2(y)$. Posons $g' = g_1 \, g'_2$; alors, par construction, $g'(y) = g(y) = x$, et $g'(y') = g_1(y') \, g'_2(y') \in G^\sigma$, donc $g(y') = x'$ est une générisation de x dans G^σ au-dessus de y' , ce qui prouve (iii).

Prouvons enfin la dernière assertion (iv). On est ramené à prouver que, si $x \in G^\rho$, alors toute générisation x' de x est dans G^ρ . On peut supposer (quitte à prendre les images par φ_{n^h} pour h convenable) que l'on a même $x \in G^o$. Alors, pour tout entier n premier à la caractéristique, x est dans l'image de φ_n (car la puissance n-ième dans un groupe de type fini connexe sur un corps de caractéristique première à n est surjective). Comme φ_n est ouverte, il s'ensuit que x' est également dans l'image de φ_n . Plus précisément, soit U un ouvert quasi-compact de G^τ contenant G^o_y , alors on a $x' \in \varphi_n(U)$ pour tout n premier à p . Prenant pour n un multiple commun des facteurs premiers à p des $\nu(z)$, pour $z \in U$, on trouve que $x' \in G^\rho$.

L'assertion (1.1), (iii), se complète ainsi :

COROLLAIRE 1.5. - Soit $n > 1$ un entier tel que l'homomorphisme de puissance n-ième $\varphi_n : G \to G$ soit universellement ouvert, (par exemple étale) posons $G^{(n)} = \varphi_n^{-1}(G^o)$, et supposons que les fibres connexes G^o_s ne "contiennent pas de composante additive" (i. e. le groupe déduit par extension du corps $k(s)$ à la clôture algébrique ne contient pas de sous-groupe isomorphe à G_a). Alors $G \to S$ est universellement ouvert en les points des $G^{(n^h)}$. En particulier, si les G_s^o ne contiennent pas de composante additive et si, pour tout entier $n > 1$, l'homomorphisme φ_n est universellement ouvert en les points de caractéristique résiduelle première à p , alors $G \to S$ est universellement ouvert en les points de G^σ , donc ((1.1), (iii)) si G^o est fermé, $G^\sigma \to S$ est universellement ouvert. Dans ces cas, $s \rightsquigarrow \dim G_s$ est une fonction localement constante sur S .

En effet, de l'hypothèse résulte que le noyau ${}_nG$ de φ_n est universellement ouvert sur S , donc $G \to S$ est universellement ouvert en les points de ${}_nG$, donc (remplaçant n par n^h) en les points des ${}_{(n^h)}G$. Or l'hypothèse sur les fibres G_s^o sert exactement à assurer que les points d'ordre une puissance de n dans G_s sont denses dans la réunion des $G^{(n^h)}$, d'où résulte facilement que $G \to S$ est universellement ouvert en tous les points de cette réunion, en particulier le long de la section unité, d'où facilement le fait que $s \rightsquigarrow \dim G_s$ est une fonction localement constante.

<u>Remarque</u> 1.6. - Rappelons qu'un morphisme $X \to S$ est dit universellement ouvert s'il transforme tout ouvert en un ouvert, et garde cette propriété louable après tout changement de base $S' \to S$. Cela signifie aussi (lorsque S est localement noethérien et $X \to S$ localement de type fini), que toute composante irréductible de X domine S , et que cette propriété est conservée après tout changement de base $S' \to S$. Dans ces deux assertions, il suffit d'ailleurs (moyennant les hypothèses de finitude ci-dessus) de tester avec des changements de base $S' \to S$, où S' est le spectre d'un anneau de valuation discrète, (complet à corps résiduel algébriquement clos si on y tient ...). La définition s'étend de façon évidente au cas d'une partie Z de X (telle la partie G^σ de G). C'est un phénomène parfaitement normal, même si on part d'un morphisme projectif simple $X \to S$ à fibres géométriques connexes (par exemple le carré fibré de la famille modulaire de courbes elliptiques sur $S = \operatorname{Spec} \underline{C}[j]$), que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ ne soit pas universellement ouvert sur S , i. e. qu'il puisse y avoir des composantes irréductibles de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ se trouvant tout entières au-dessus d'un seul point de S : cela est lié au fait que le rang du groupe de Néron-Severi des fibres de X/S peut faire des sauts vers le haut (phénomènes de "multiplication complexe"). Par contre, (1.5) nous assure que, dans les bons cas, $\underline{\mathrm{Pic}}^\sigma_{X/S}$ (et le plus souvent même, semble-t-il, $\underline{\mathrm{Pic}}^\tau_{X/S}$) est universellement ouvert sur S .

Enfin, voici un cas utile où, exceptionnellement, G^o consente à être ouvert :

COROLLAIRE 1.7. - Supposons que $G \to S$ soit universellement ouvert en les points de G^o (cf. (1.5)), et que les fibres G_s soient séparables, donc simples sur $k(s)$ (cette dernière condition étant automatiquement remplie en caractéristique résiduelle nulle, en vertu d'un résultat de CARTIER). Alors G^o est ouvert dans G. Si de plus S est réduit, G^o est simple (en particulier, plat) sur S.

La première assertion peut d'ailleurs se préciser en notant que si, pour un $s \in S$ donné, $G \to S$ est universellement ouvert en les points de G^o_s et si G^o_s est séparable sur $k(s)$, alors G^o est un voisinage de G^o_s (et d'ailleurs, l'hypothèse faite en s restera vérifiée en les points voisins). Cet énoncé, d'ailleurs indépendant de toute structure de groupes, se trouvera démontré dans [2], IV, paragraphe 7. La dernière assertion dans (1.7), également indépendante de toute structure de groupe et de toute question de composante connexe, est un cas particulier d'un critère de platitude donné dans [IV], paragraphe 5, qui implique, plus généralement :

COROLLAIRE 1.8. - Soit U une partie ouverte d'une fibre G_s, telle que $G \to S$ soit universellement ouvert en les points de U (cf. (1.5)). Si G_s est séparable sur $k(s)$ et S réduit en s, alors G est plat sur S en les points de U (donc en l'occurence, simple sur S en les points de U).

Remarques 1.9. - J'ignore si, lorsque G est séparé sur S, G^o ou G^τ est toujours fermé dans G ; cela semble peu probable. On trouve en tous cas des contre-exemples évidents si on laisse tomber l'hypothèse de séparation, par exemple en prenant la droite affine dont on dédouble une infinité dénombrable de fois l'origine, obtenant ainsi un schéma en groupes G sur la droite affine dont toutes les fibres sont réduites au groupe unité, sauf une dont la fibre est $\underset{\sim}{Z}$. Ce schéma en groupes est un sous-schéma en groupes ouvert, savoir l'adhérence de la section unité, dans le préschéma de Picard du S-schéma X correspondant à une famille de coniques dégénérant en deux droites concourrantes.

D'ailleurs, même en partant d'un schéma en groupes fini et plat, G, sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète V, et par suite si G^o est réduit à la section unité, donc fermé, diverses conclusions deviennent fausses si on abandonne certaines hypothèses. Supposons que V soit d'égale caractéristique $p > 0$, et soit G le noyau de l'homomorphisme $\underset{\sim}{G}_a \longrightarrow \underset{\sim}{G}_a$ défini par l'homomorphisme de foncteurs $f \rightsquigarrow f^p - tf$ où t est une uniformisante de V.

(Se rappeler que, par définition, le "groupe additif" $\underset{\sim}{G}_a$ sur S représente le foncteur $S' \rightsquigarrow \Gamma(S', \mathcal{O}_{S'})$.) Alors, en tant que S-schéma, $G = \operatorname{Spec} V[x]/(x^p - tx)$ est réunion de p "droites" concourrantes, figurant un groupe $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ qui dégénère en un groupe infinitésimal de type additif. Dans cet exemple, $G^o = G^\sigma$ (et c'est l'une des p droites), donc n'est pas ouvert dans G . Dans le cas d'inégale caractéristique, caractéristique résiduelle $p > 0$, partons du schéma en groupes $H = \mu_p$ noyau de la puissance p-ième dans $\underset{\sim}{G}_m$, donc $H = \operatorname{Spec} V[x]/(x^p - 1)$, c'est encore la réunion de p droites concourrantes, figurant un groupe $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ (en caractéristique 0) qui dégénère en un groupe infinitésimal de type multiplicatif en caractéristique p . Soit H' le "schéma en groupes constant" défini par le groupe fini ordinaire $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$, donc la somme disjointe de $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ copies de S , ou encore Spec $V^{\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}}$. Alors $G = H \times_S H'$ décrit un groupe $(\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z})^2$ en caractéristique 0 , dégénérant en un groupe infinitésimal fois $\underset{\sim}{Z}/p\underset{\sim}{Z}$ en caractéristique p. Ici G^ρ est la réunion de la section unité et la fibre spéciale, donc G^ρ n'est pas ouvert, alors que G^σ est la réunion de la section unité et de la fibre générale, donc n'est pas fermé, contrairement à ce qui est affirmé dans les cas d'égale caractéristique dans (1.1), (iii) et (iv). Bien entendu, ce sont là des phénomènes liés à la caractéristique $p > 0$. Les résultats qui précèdent donnent en effet :

COROLLAIRE 1.10. - Supposons les caractéristiques résiduelles de S toutes nulles, donc $G^\tau = G^\sigma$, et $G^o = G^\rho$. Alors $G^\tau = G^\sigma$ est ouvert, et même ouvert et fermé si G est séparé sur S et si les G^o_s sont propres ; sous cette même hypothèse, $G^o = G^\rho$ est propre sur S donc fermé dans G . Supposons enfin que, pour tout entier $n > 1$, l'homomorphisme de puissance n-ième dans G soit universellement ouvert, alors G^o est ouvert; et si de plus les G^o_s n'ont pas de composante additive (par exemple les G^o_s propres, comme ci-dessus), alors $G^\tau \to S$ est universellement ouvert, et même simple si S est réduit.

Signalons enfin le résultat facile suivant :

PROPOSITION 1.11. - Il existe une partie ouverte U de S , telles que l'ensemble G' des points de G en lesquels G est simple (resp. plat) au-dessus de S , soit l'ensemble sous-jacent à un sous-schéma en groupes ouvert induit de $G|U$. De plus, toute section de G sur U est une section de G' sur U .

COROLLAIRE 1.12. – Si G est simple (resp. plat) sur S en les points de la section unité, elle l'est en les points de toute section de G sur S, et en tous les points de G^o. Si de plus pour tout entier $n > 0$, l'homomorphisme de puissance n-ième $\varphi_n : G \to G$ est étale en les points de caractéristique première à n, alors G est simple (resp. plat) sur S en tous les points de G^σ.

2. Application aux propriétés locales des schémas de Picard.

THÉORÈME 2.1.

(i) Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et simple, et supposons que $\underline{Pic}_{X/S}$ existe (par exemple f un morphisme projectif). Alors $\underline{Pic}_{X/S}$ est séparé sur S, et pour toute partie fermée Z de $\underline{Pic}_{X/S}$ qui est de type fini sur S, Z est propre sur S.

(ii) Soit X un préschéma sur un corps k, propre et géométriquement normal. Alors $\underline{Pic}^o_{X/S}$ est propre sur k.

Démonstration.

(i) Les critères valuatifs ([2], II, paragraphe 7) nous ramènent à prouver ceci : si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, U l'ouvert réduit au point générique de S, alors toute section rationnelle de $\underline{Pic}_{X/S}$ sur S, i. e. toute section au-dessus de U, se prolonge de façon unique en une section au-dessus de S. Compte tenu de la définition de $\underline{Pic}_{X/S}$, cela équivaut à l'énoncé suivant : pour tout Module inversible $\mathcal{L}$ sur $V = f^{-1}(U)$, il existe un Module inversible sur X qui prolonge $\mathcal{L}$, unique à un isomorphisme près. Or ceci résulte facilement de la description des Modules inversibles sur V, resp. X en termes de classes de diviseurs "de Cartier", compte tenu que les anneaux locaux de X sont réguliers (X étant simple sur S régulier), donc factoriels en vertu de AUSLANDER, ce qui implique que tout diviseur sur S est un diviseur de Cartier. En effet tout diviseur sur V peut se prolonger en un diviseur sur X en prenant son "adhérence".

Remarque 2.2. – La démonstration reste valable en supposant seulement que f est plat et ses fibres X_s sont localement des intersections complètes, et simples sur $k(s)$ en codimension ≤ 2, compte tenu du résultat suivant démontré dans [5] : un anneau local noethérien intersection complète qui est régulier en codimension ≤ 3 est factoriel ("conjecture de Samuel"). On notera que le résultat devient faux si on remplace "codimension ≤ 2" par "codimension ≤ 1", i. e. par l'hypothèse "normal", comme on peut se convaincre sur l'exemple d'une famille de quadratiques non singulières dégénérant en un cône quadratique.

(ii) Utilisant le lemme de Chow, on est ramené au cas où X est projectif, donc plongé dans P_k^n ; on peut supposer X connexe. Si $\dim X = 1$, alors X est simple sur k, et on applique (i). Si $\dim X \geqslant 2$, on peut utiliser une variante des "critères d'équivalence" connus, qui implique qu'il existe un nombre fini de courbes Y_i simples sur X (obtenues comme intersections de X avec des sous-espaces linéaires convenables de P_k^n), telles que $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/k} \to \prod_i \underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{Y_i/k}$ soit un monomorphisme, et induit a fortiori un monomorphisme pour les composantes connexes. Comme celle du second membre est propre sur k d'après ce qui précède, et qu'il s'agit d'un homomorphisme de schémas en groupes, qui sera nécessairement une immersion fermée, il s'ensuit que $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/k}$ est également propre sur k. On peut éviter le recours aux délicats critères d'équivalence en utilisant la structure des groupes algébriques commutatifs sur un corps algébriquement clos (due à CHEVALLEY-BOREL) ; on est ramené à prouver que tout morphisme de la droite affine dans $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est constant, ce qui équivaut à dire que tout Module inversible sur $X[t]$ provient d'un Module inversible sur X, résultat qui est bien connu et fort élémentaire et n'utilise pas même le fait que X soit propre sur k (l'hypothèse X normal permettant de se réduire aussitôt au cas X régulier).

COROLLAIRE 2.3. - Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et normal (i. e. plat et à fibres géométriques normales), supposons que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ est propre sur S, donc fermé dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$; de plus $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}^{\rho}_{X/S}$ sont également fermés, et aussi $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$ en "égale caractéristique".

On applique (1.1) et (2.1), (ii).

COROLLAIRE 2.4. - Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et simple, tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe et soit somme de schémas $P^{(i)}$ de type fini sur S (cf. [3],V,4.1). Alors chaque $P^{(i)}$ est propre sur S.

Résulte de (2.1), (i). Comme on l'a signalé dans (2.2), le résultat peut se généraliser en faisant des hypothèses moins restrictives sur les fibres de f, mais devient faux si on se borne à supposer f normal. Dans ce cas, j'ignore d'ailleurs si $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est néanmoins propre sur S, même en admettant qu'il soit de type fini sur S.

THÉORÈME 2.5. - <u>Soit</u> $f : X \to S$ <u>un morphisme propre et plat, tel que</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ <u>existe, et pour tout entier</u> n , <u>soit</u> φ_n <u>l'homomorphisme puissance</u> n<u>-ième dans ce préschéma en groupes. Alors</u> φ_n <u>est étale en tous les points</u> $x \in X$ <u>à caractéristique résiduelle première à</u> n .

Par la caractérisation infinitésimale des morphismes étales, cette assertion équivaut à la suivante :

LEMME 2.6. - Supposons que S soit le spectre d'un anneau local artinien A dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ soit de puissance $(\nu + 1)$-ième nulle, soit $A_{\nu-1} = A/\mathfrak{m}^{\nu}$, $X_{\nu-1} = X \otimes_A A_{\nu-1}$, $\mathcal{L}$ un Module inversible sur X , enfin $\mathcal{L}'_{\nu-1}$ un Module inversible sur $X_{\nu-1}$ dont la puissance tensorielle n-ième soit isomorphe à $\mathcal{L}_{\nu-1} = \mathcal{L} \otimes_A A_{\nu-1}$. Alors il existe un Module inversible $\mathcal{L}'$ sur X dont la puissance tensorielle n-ième est isomorphe à $\mathcal{L}$ (si n est premier à la caractéristique résiduelle de $k = k(A)$).

Prouvons le lemme. On pose $V = \mathfrak{m}^{\nu} = \mathfrak{m}^{\nu}/\mathfrak{m}^{\nu+1}$, c'est un espace vectoriel sur $k = k(A)$. On commence à prolonger $\mathcal{L}'_{\nu-1}$ en un Module inversible quelconque sur $\mathcal{L}'$ sur X . L'obstruction à ce faire se trouve dans $H^2(X_0 , \mathcal{O}_{X_0}) \otimes_k V$, mais en vertu de l'hypothèse faite sur $\mathcal{L}'_{\nu-1}$ et du fait que $\mathcal{L}_{\nu-1}$ peut se prolonger, on voit que le produit de cette obstruction par n est nul, donc elle-même est nulle puisque n premier a la caractéristique. D'ailleurs, l'arbitraire dans le prolongement effectué se trouve dans $H^1(X_0 , \mathcal{O}_{X_0}) \otimes_k V$, et la déviation ξ de $\mathcal{L}'^{\otimes n}$ avec $\mathcal{L}$ se trouve dans le même Module ; si on essaye de corriger $\mathcal{L}'$ de façon à rendre cette déviation nulle, on est ramené à trouver un η dans ledit Module, tel que $n\eta = \xi$. Or c'est possible encore grâce au fait que n est premier à la caractéristique.

COROLLAIRE. - Sous les conditions de (2.5), supposons de plus que les schémas de Picard des fibres X_s ne contiennent pas de composante additive (par exemple les X_s géométriquement normaux, cf. (2.1), (ii)). Alors $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \to S$ est universellement ouvert en les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$. Si $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ est fermé (par exemple les X_s géométriquement normaux, cf. (2.3)), alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$ est lui-même universellement ouvert sur S . Enfin, dans le cas d'égale caractéristique, $\underline{\mathrm{Pic}}^{\rho}_{X/S} \to S$ est universellement ouvert.

On applique (1.5) et (1.1).

COROLLAIRE 2.7. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat, tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe. Alors la fonction $s \rightsquigarrow \dim \underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$ sur S est semi-continue supérieurement (i. e. elle peut faire des sauts vers le haut, mais pas vers le bas), et elle est même continue (i. e. localement constante) si les $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$ ne contiennent pas de composante additive.

La première assertion est vraie trivialement ou presque pour tout préschéma en groupes localement de type fini sur une base localement noethérienne, puisqu'il suffit de regarder le long de la section unité. La deuxième assertion résulte de (2.5).

REMARQUE 2.8. - Soient s, $s' \in S$ tels que s soit une spécialisation de s', alors (2.7) équivaut à une inégalité (resp. égalité) entre les dimensions des schémas de Picard de $X_{s'}$ et de sa "spécialisée" X_s. D'ailleurs SERRE avait fait observer, dès avant la construction des schémas de Picard, que l'invariance de la dimension des Picards des X_s dans le cas d'un morphisme <u>simple</u> $f : X \to S$ était une conséquence formelle de la théorie de la spécialisation du groupe fondamental ([4], X), et des relations classiques à la Kummer entre les points d'ordre fini sur la variété de Picard, et le groupe fondamental rendu abélien, ([4], XI). Si on désigne de façon générale par α, μ, λ les dimensions de la partie abélienne, multiplicative, additive de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$, et qu'on définit de même α', μ', λ', les relations connues, s'expriment par les inégalités suivantes :

$$(*) \qquad \alpha + \mu + \lambda \geqslant \alpha' + \mu' + \lambda'$$

(valable pourvu que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, donc problablement en tous cas), inégalité qui, pour $\lambda = \lambda' = 0$, se réduit à une égalité, valable sous les mêmes hypothèses d'existence :

$$\alpha + \mu = \alpha' + \mu' \qquad ;$$

d'autre part on a

$$(**) \qquad 2\alpha + \mu \leqslant 2\alpha' + \mu'$$

par l'argument de Serre, si les X_s sont séparables (sans même supposer l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$), ou si les ${}_n\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ (noyaux de φ_n dans le foncteur de Picard) sont séparés sur S , (compte tenu qu'ils sont étales sur S grâce à (2.5)). On aurait tendance à conjecturer que (*) est une égalité en tous cas, ou du moins si les X_s sont séparables, et qu'on a des inégalités

$$(***) \qquad \alpha \leqslant \alpha' , \qquad \lambda \geqslant \lambda'$$

qui devraient être valables chaque fois qu'on a un préschéma en groupes, localement de type fini sur S localement noethérien, dans lequel la dimension des fibres est constante (voir (1.3) pour un résultat positif dans cette direction).

Remarque 2.9. - Dans tous les cas connus, $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est universellement ouvert sur S , mais il ne faut sans doute pas s'en autoriser pour des illusions excessives, même si $f : X \to S$ est simple ; en tous cas, MUMFORD a construit un exemple (il est vrai avec S non réduit, en fait S spectre d'un anneau artinien) où $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ n'est pas plat sur S , en faisant varier infinitésimalement la surface de Igusa. Le point envisagé par MUMFORD se trouve d'ailleurs dans $\underline{\mathrm{Pic}}^{\rho}_{X/S}$, et il reste possible (pour $f : X \to S$ simple) que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ soit plat sur S aux points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$; le conférencier doute cependant qu'il en soit toujours ainsi, même en se restreignant aux points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$ et en supposant que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. La question est d'ailleurs liée à l'étude des points fixes d'un schéma abélien sous un groupe fini d'automorphismes, situation pour laquelle on semble manquer d'exemples. Il semblerait que même en se bornant à $f : X \to S$ simple et projectif, les résultats de régularité locale sur $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ énoncés dans le présent numéro, et les conjectures signalées dans (2.8), épuisent à peu près ce qu'on peut dire à ce sujet sans hypothèses plus particulières sur la nature des fibres de f . Rappelons cependant que, si les fibres géométriques de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ sont réduites et sans composante additive, alors il résulte de (1.8) et de (2.5) que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S en les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$ lorsque S est réduit ; ce résultat vaut même, si $f : X \to S$ est normal, sans hypothèse sur S , comme nous verrons dans (3.5). Signalons à ce propos :

PROPOSITION 2.10.

(i) Si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple (resp. plat) sur S en les points de la section unité, il l'est en tous les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}$, et en les points de toute section de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ sur S .

(ii) Soit $s \in S$ tel que $H^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$, alors il existe un voisinage ouvert U de s tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}|U$ soit simple sur U.

(iii) Soit X un schéma propre sur un corps, alors on a

$$\dim \underline{\mathrm{Pic}}_{X/k} \leq \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) \quad ,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ est simple sur k ; c'est toujours le cas si k est de caractéristique nulle.

(i) résulte de (2.5) et (1.12), (ii) du critère infinitésimal pour les morphismes simples et d'un calcul d'obstructions bien connu, compte tenu que (par le "théorème de semi-continuité") l'hypothèse faite en s sera encore vérifiée aux points voisins. Enfin (iii) résulte du fait que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski en l'élément neutre de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$; la dernière assertion est un cas particulier d'un théorème de CARTIER, disant qu'un "groupe formel" en caractéristique 0 est formellement simple sur k.

3. Le sous-schéma abélien canonique de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, et schéma d'Albanese.

PROPOSITION 3.1. - Soient k un corps, G un schéma en groupes de type fini sur k, commutatif et "sans composante additive". Alors $G^o_{\text{réd}}$ est séparable sur k, et par suite c'est un sous-schéma en groupes simple sur k.

La chose étant triviale si k est parfait, en particulier pour $G_{\bar{k}}$, où $\bar{k}$ est la clôture algébrique de k, il suffit de voir que $(G^o_{\bar{k}})_{\text{réd}}$ provient d'un sous-schéma de G. Or l'hypothèse sur $G_{\bar{k}}$ (pas de composante additive) résulte facilement qu'il existe un entier m tel que $(G^o_{\bar{k}})_{\text{réd}}$ soit l'image "schématique" de l'homomorphisme de puissance m-ième dans $G_{\bar{k}}$. Comme ce dernier homomorphisme provient de l'homomorphisme analogue pour G, l'image schématique de ce dernier répond à la question.

COROLLAIRE 3.2. - Soit X un schéma normal et propre sur k tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ existe, alors il existe un sous-schéma abélien A de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k}$ dont l'ensemble sous-jacent est $\underline{\mathrm{Pic}}^o_{X/k}$.

En effet, en vertu de (2.1), (ii), $\mathrm{Pic}^o_{X/k}$ étant propre sur k satisfait à la condition de (3.1).

Le résultat précédent montre donc que, dans certains cas, la classique "variété de Picard" (qui serait notée $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/k})^{\mathrm{o}}_{\mathrm{réd}}$ dans la théorie actuelle) "est définie sur k ", sans supposer le corps k parfait.

Soit maintenant $f : X \to S$ un schéma relatif propre et plat, avec $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X)$ pour simplifier, tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe et que $\underline{\mathrm{Pic}}^{\mathrm{o}}_{X/S}$ soit propre sur S. Nous supposerons de plus pour (3.3), (ii) qu'il existe un ouvert de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ contenant $\underline{\mathrm{Pic}}^{\mathrm{o}}_{X/S}$ qui soit quasi-projectif sur S ; cette condition est vérifiée, on l'a vu, si f est projectif et à fibres géométriques séparables et irréductibles. Rappelons qu'on appelle *schéma abélien* sur S un schéma en groupes sur S, propre et simple sur S, à fibres géométriques connexes. Nous nous proposons d'examiner s'il existe un sous-schéma en groupes A de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ qui soit un schéma abélien et dont l'ensemble sous-jacent soit $\underline{\mathrm{Pic}}^{\mathrm{o}}_{X/S}$. On vient de voir qu'il en existe toujours si S est le spectre d'un corps. Voici ce qu'on sait dire dans le cas général envisagé ici :

THÉORÈME 3.3. – *Sous les conditions précédentes* :

(i) *S'il existe un sous-schéma abélien de* $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ *dont l'ensemble sous-jacent soit* $\mathrm{Pic}^{\mathrm{o}}_{X/S}$, *il est unique. Sa formation est par suite compatible avec les changements de base.*

(ii) *Pour qu'il existe un tel sous-schéma abélien, il suffit qu'il en existe après tout changement de base* $S' \to S$, *où* S' *est artinien local ; si* S *est le spectre d'un anneau local, il suffit même de tester avec les* $S' = \mathrm{Spec}(A_n)$, *où* $A_n = A/m^{n+1}$. *Si* S *est réduit, il suffit également de tester avec les changements de base* $S' \to S$, *où* S' *est le spectre d'un anneau de valuation discrète, (complet à corps résiduel algébriquement clos si on y tient).*

(iii) *Supposons que* A *existe, et soit* $B = \mathrm{Alb}^{\mathrm{o}}(X/S)$ *le schéma abélien dual,* (i. e. $B = \underline{\mathrm{Pic}}^{\mathrm{o}}_{A/S}$ [7]). *Alors on peut construire canoniquement un espace principal homogène* $P = \mathrm{Alb}^1(X/S)$ *sous* B, *et un* S*-morphisme* $X \to P$ *qui soit universel pour les* S*-morphismes de* X *dans des schémas para-abéliens* (i. e. des espaces principaux homogènes sous des schémas abéliens). *La formation de* $\mathrm{Alb}^{\mathrm{o}}(X/S)$, $\mathrm{Alb}^1(X/S)$ *et* $X \to \mathrm{Alb}^1(X/S)$ *commute au changement de base.*

Esquissons la démonstration :

(i) est une propriété de rigidité générale pour les sous-schémas abéliens des schémas en groupes commutatifs, si deux tels sous-schémas coïncident ensemblistement en un point $s \in S$, ils coïncident au-dessus de toute la composante connexe de s [7]. (Ce résultat généralise un classique théorème de CHOW.)

(ii) Utilisant les schémas de Hilbert, on voit que le foncteur qui, à tout S' sur S, associe l'ensemble (réduit à 1 ou 0 éléments) des sous-schémas abéliens canoniques de $(\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}) \times_S S'$ est représentable par un schéma de type fini T sur S. En vertu de (i), $T \to S$ est un monomorphisme, et en vertu de (3.2) il est surjectif. Dire qu'il existe un sous-schéma abélien canonique de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ signifie que T a une section sur S, ou encore que $T \to S$ est un isomorphisme. Ceci équivaut aussi à dire que $T \to S$ est étale, ou, dans le cas où S est réduit, que $T \to S$ est propre. D'où aussitôt (ii).

(iii) Utilisant simplement la définition de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, on constate que, pour tout schéma abélien C sur S, la donnée d'un S-morphisme de X dans un espace principal homogène sous C, équivaut à la donnée d'un homomorphisme de groupes $C' \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, où C' est le schéma abélien dual de C. Or si le sous-schéma abélien canonique A de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, ces homomorphismes se factorisent nécessairement par A (comme on peut voir encore en utilisant les points d'ordre fini). D'où aussitôt (iii).

Remarques 3.4. – Nous noterons $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ le sous-schéma abélien canonique de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, s'il existe. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas, comme on peut voir en faisant varier infinitésimalement la surface de Igusa (par la déformation modulaire du premier ordre). Il est cependant possible que $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ existe du moins si S est réduit, ou ce qui revient au même d'après (ii), si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Soient alors X_o, X_1 la fibre spéciale et générique de X, et soit $A_1 = \underline{\mathrm{Pic}}_{X_1/K_1}$, où K est le corps des fractions de l'anneau de valuation V. En vertu de KOIZUMI, il existe un schéma abélien A sur S, essentiellement unique, dont la fibre générale est A_1, et on voit aisément comme dans (2.1), (i) (supposant désormais X simple sur S) que le morphisme identique de A_1 se prolonge en un morphisme

$$A \to \underline{\mathrm{Pic}}_{X/S} \quad .$$

D'où un homomorphisme

$$(*) \qquad A_o \to \underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X_o/k} \quad ,$$

dont on montre facilement que c'est un homomorphisme surjectif à noyau un p-groupe fini, où p est l'exposant caractéristique du corps rédiduel k

(toujours par utilisation des points d'ordre fini). Ceci posé, les conditions suivantes sur X/S sont équivalentes :

a. L'homomorphisme précédent (*) est un isomorphisme (ce que SHIMURA exprimerait en disant que la formation de la "variété de Picard" est "compatible avec spécialisations").

b. $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ existe (alors il ne sera autre que A).

c. (Pour mémoire) Les $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X_n/S}$ existent.

D'après la remarque qu'on a faite sur le noyau de (*), la condition (a) est satisfaite si la caractéristique résiduelle est nulle, mais ce résultat sera généralisé notablement (3.5).

Bien entendu, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est simple sur S aux points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}$, alors ce dernier est ouvert dans $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ (cf. (1.7)) et par suite, muni de la structure induite, c'est un sous-schéma abélien de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, donc égal à $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ qui existe dans ce cas. Mais on a bien mieux :

THÉORÈME 3.5. – <u>Sous les conditions de (3.3), soit</u> $s \in S$ <u>tel que</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}$ <u>soit simple sur</u> $k(s)$, <u>(ou ce qui revient au même,</u> $\dim \underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)} = \dim H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$). <u>Alors il existe un voisinage ouvert</u> U <u>de</u> s <u>tel que</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ <u>soit simple sur</u> S <u>en les points de</u> $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X/S}|U$ <u>, qui est donc un sous-schéma abélien ouvert dans</u> $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}|U$. <u>A fortiori,</u> $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X|U/U}$ <u>existe</u>.

Indiquons le principe de la démonstration. Ce qui précède nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau artinien local A , et on raisonne par récurrence sur l'ordre infinitésimal de A . On peut donc supposer $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X_n/A_n}$ simple sur A_n , et se borner à prouver que $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X_{n+1}/A_{n+1}}$ est simple sur A_{n+1} . On constate qu'il suffit pour ceci de construire un schéma abélien P_{n+1} sur A_{n+1} qui prolonge $P_n = \underline{\mathrm{Pic}}^{o}_{X_n/A_n}$, et en même temps un Module inversible $\mathcal{L}_{n+1}$ sur $X_{n+1} \times_{A_{n+1}} P_{n+1}$ qui prolonge le Module inversible $\mathcal{L}_n$ sur $X_n \times_{A_n} P_n$ qui intervient dans la définition du schéma de Picard $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_n/A_n}$ comme solution d'un problème universel. (N. B. – Nous pouvons supposer que X est muni d'une section sur S ...) Pour faire la construction, on doit utiliser le résultat-clef suivant : <u>tout schéma abélien défini sur un quotient d'anneau local artinien peut se prolonger</u> (en d'autres termes, le "schéma formel des Modules" absolu ([3], II.) pour un schéma abélien sur un corps algébriquement clos, est simple sur l'anneau des vecteurs de Witt sur k) ; ce résultat lui-même s'obtient en utilisant les propriétés formelles générales de l'obstruction à relever, et les opérations du groupe. Ce résultat admis, on commence par prolonger P_n n'importe comment en P_{n+1} , on rencontre alors une obstruction à relever $\mathcal{L}_n$, obstruction qui se trouve dans un $H^2(X_o \times P_o , \mathcal{O}_{X_o \times P_o}) \otimes_k V$ (où $V = \mathfrak{m}^{n+1}/\mathfrak{m}^{n+2}$), et même dans le sous-espace $H^1(X_o , \mathcal{O}_{X_o}) \otimes H^1(P_o , \mathcal{O}_{P_o}) \otimes_k V$ (compte tenu que la restriction de $\mathcal{L}_n$ aux deux facteurs X_n et P_n est triviale). Or ce dernier espace n'est autre que $H^1(P_o , \mathcal{G}_{P_o/k}) \otimes V$, où $\mathcal{G}_{P_o/k}$ est le faisceau tangent à P_o/k , donc c'est aussi l'espace qui exprime l'indétermination qu'il y avait dans le relèvement de P_n à P_{n+1} ([3], II). Par suite, on peut corriger ce relèvement (d'une et d'une seule façon comme il se doit) de façon à tuer l'obstruction à relever $\mathcal{L}_n$.

COROLLAIRE 3.6. – Sous les conditions de (3.5), $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ est un Module localement libre sur S au voisinage de s , et sa formation commute au changement de base.

Ce Module n'est autre en effet que le Module tangent à $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ le long de la section unité.

Remarque 3.7. – Utilisant le même argument que pour (3.5), on peut montrer que si S' est un sous-schéma de S défini par un Idéal cohérent nilpotent, et si on suppose seulement que $\mathrm{Pic}^o_{X'/S'}$ existe et est à fibres simples, alors $\underline{\mathrm{Pic}}^o_{X/S}$ existe nécessairement et est un schéma abélien sur S . Cela permet de construire des schémas de Picard dans certains cas malgré l'absence d'hypothèse projective ; par exemple le schéma abélien dual d'un schéma abélien sur un anneau artinien existe toujours. D'autre part, utilisant (3.6) dans le cas où X est un schéma abélien sur S , et utilisant la structure connue de $H^*(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ comme algèbre extérieure sur $H^1(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ (ROSENLICHT-SERRE), on trouve que pour tout i , $R^i f_*(\mathcal{O}_X)$ est localement libre, et de façon précise isomorphe à la puissance extérieure i-ième de $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$.

Remarque 3.8. – Dans le cas d'un morphisme projectif simple $f : X \to S$, S réduit et à caractéristiques résiduelles nulles, le résultat (3.6) était connu par voie transcendante, comme conséquence de la théorie de HODGE. En fait, tous les $R^p f_*(\Omega^q_{X/S})$ sont alors localement libres. On a des contre-exemples par contre dans le cas d'inégales caractéristiques pour " $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ localement libre", à l'aide des variétés de SERRE ([8], p. 50). Il semble qu'on n'ait aucun contre-exemple en égale caractéristique.

COROLLAIRE 3.8. - Sous les conditions de (3.5) $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}|U$ est simple sur U en tous les points de $\underline{\mathrm{Pic}}^{\sigma}_{X/S}|U$.

On applique (2.10), (i). En particulier, tenant compte de (2.10), (iii) :

COROLLAIRE 3.9. - Supposons S à caractéristiques résiduelles nulles. Alors $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est simple sur S.

Remarque 3.10. - On en déduit par exemple, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est aussi propre sur S, que le groupe de torsion de Néron-Severi des fibres géométriques de f reste constant sur toute composante connexe de S (ce qui est d'ailleurs évident par voie transcendante lorsque f est simple projectif). Signalons que l'utilisation directe de (2.5) permet de montrer, plus généralement, que, si $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est propre sur S (par exemple $f : X \to S$ simple et projectif) et si q est un nombre premier distinct des caractéristiques résiduelles de S, alors la composante q-primaire des groupes de torsion de Néron-Severi des fibres géométriques de X/S reste constant sur toute composante connexe de S. Il n'en est cependant plus de même en caractéristique $p > 0$ pour la composante p-primaire de la torsion. Il reste cependant possible que le rang sur $k(s)$ de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_s/k(s)}/\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X_s/k(s)} = T_{X_s/k(s)}$ reste localement constant ; lorsque S est réduit, on peut montrer qu'il revient au même que $\underline{\mathrm{Pic}}^{oo}_{X/S}$ existe, et que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est plat sur S, et il suffit de tester la question pour S spectre d'un anneau de valuation discrète. C'est ce que j'ai vérifié dans les quelques exemples que j'ai regardés ; mais comme l'énoncé correspondant avec S artinien est faux (cf. remarque (2.9) et (3.4)), il ne faut sans doute pas se faire des illusions excessives.

4. Le théorème de finitude pour le schéma de Picard.

Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif et plat tel que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, alors la considération des "polynômes de Hilbert" $Q \in \mathbb{Q}[t]$ permet de décomposer $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ en somme d'ouverts $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$. Lorsqu'on ne fait pas des hypothèses supplémentaires, assurant par exemple que $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est séparé sur S, il ne sera pas vrai en général que ces ouverts soient de type fini sur S ; on obtient un contre-exemple lorsque X est "une conique dégénérant en deux droites". Il est possible qu'il en soit cependant ainsi si f est séparable et à fibres géométriques irréductibles. La question est liée à celle de savoir si $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est de type fini sur S, ce qui est peut-être vrai sans aucune hypothèse sur les fibres de X/S. Lorsque $f : X \to S$ est simple, on note que $\underline{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ est contenu dans un des $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$ (grâce au fait que, sur une variété projective non singulière, l'équivalence "de torsion" est plus fine que (en fait "identique à", d'après MATSUSAKA) l'équivalence numérique pour les diviseurs), donc est de type fini sur S si les $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$ le sont. Noter que les questions de finitude qu'on vient de soulever gardent un sens évident sans supposer même l'existence de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, car elles s'expriment en disant que certaines familles de Modules inversibles sont "limitées" au sens de [3], IV : Considérons, pour tout corps algébriquement clos k, les sous-schémas intègres de $\underset{\sim}{P}^{r}_{k}$, de dimension n et de degré d, et les Modules inversibles sur de tels préschémas, ayant un polynôme de Hilbert Q (où r, n, d, Q sont donnés), montrer que la famille de ces Modules (considérés comme des Modules cohérents sur les $\underset{\sim}{P}^{r}_{k}$) est limitée, i. e. peut se paramétrer par un schéma de type fini sur $\underset{\sim}{Z}$.

Utilisant la méthode de MATSUSAKA [6], une démonstration assez technique (faisant appel aux "critères d'équivalence" sous une forme convenable) permet de répondre par l'affirmative lorsque on se borne aux sous-variétés non singulières de $\underset{\sim}{P}^{r}_{k}$. De façon plus précise, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1. - Soient : $X \to S$ un morphisme simple projectif à fibres géométriques connexes, avec S noethérien, $\mathcal{O}_X(1)$ un Module très ample sur X relatif à S, E une partie de $\underline{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, correspondant à une famille $(\mathcal{L}_i)$ de Modules inversibles sur les fibres géométriques $\overline{X}_{s_i}$ de X/S, D_i un diviseur (pas nécessairement positif) sur $\overline{X}_{s_i}$ définissant $\mathcal{L}_i$, $a^{(i)}_n t^n + \dots + a^{(i)}_o$ le polynôme de Hilbert de $\mathcal{L}_i$, $\xi = \xi_i$ un diviseur définissant $\mathcal{O}_X(1)$, i. e. une section hyperplane. Les conditions sont équivalentes :

a. Q est quasi-compact, i. e. contenu dans un ouvert de type fini sur S, i. e. la famille des $(\mathcal{L}_i)$ est limitée.

b. E est contenu dans la réunion d'un nombre fini des ensembles $\underline{\mathrm{Pic}}^{Q}_{X/S}$, $Q \in \underset{\sim}{Q}[t]$, i. e. l'ensemble des polynômes de Hilbert des $\mathcal{L}_i$ est fini.

b'. (Si les fibres de X/S ont toutes même dimension n). Les deux coefficients $a^{(i)}_{n-1}$ et $a^{(i)}_{n-2}$ des polynômes de Hilbert des $\mathcal{L}_i$ restent dans un ensemble fini.

b". (Si les fibres de X/S ont toutes même dimension n). Les entiers $\xi^{n-1} D_i$ et $\xi^{n-2} D_i^2$ (degrés projectifs de D_i et de D_i^2) restent majorés.

COROLLAIRE 4.2. - Soit $f : X \to S$ un morphisme simple projectif à fibres géométriques connexes, alors les schémas $\underline{\mathrm{Pic}}^Q_{X/S}$ et $\underline{\mathrm{Pic}}^\tau_{X/S}$ $(Q \in \underset{\sim}{Q}[t])$ sont projectifs sur S .

Comme ils sont de type fini sur S d'après (4.1), on peut appliquer (2.4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Sur la théorie de Picard, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 435-490.

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, Chap. 1 et suivants., - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 Institut des hautes Études scientifiques, 4, 8, 11, ...).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I-V., Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p. et n° 195, 22 p. ; t. 13, 1960/61, n° 212, 20 p. et n° 221, 28 p. ; t. 14, 1961/62, n° 232, 19 p.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de géométrie algébrique, 1960/61. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques, 1961.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de géométrie algébrique, 1961/62, rédigé par un groupe d'auditeurs. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques (à paraître).

[6] MATSUSAKA (T.). - The criteria for algebraic equivalence and the torsion group, Amer. J. Math., t. 79, 1957, p. 53-66.

[7] MUMFORD (D.) and TATE (J.). - Séminaire de géométrie algébrique, Harvard University, Spring Term 1962 (à paraître).

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p , Symposium internacional de topologia algebraica [1956. Mexico] ; p. 24-53. - Mexico, Universidad nacional autonoma, 1958.