ALEXANDER GROTHENDIECK

Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions *L*

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 279, p. 41-55

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__41_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 279

Décembre 1964

FORMULE DE LEFSCHETZ ET RATIONALITÉ DES FONCTIONS L

par Alexander GROTHENDIECK

1° Définitions des fonctions Z et L .

Soit X un schéma de type fini sur le corps premier $\underset{\sim}{F}_p$ (p nombre premier fixe). On définit avec A. WEIL la fonction $Z_X(t)$ par

$$(1) \qquad Z_X(t) = \prod_{x \in X^0} \frac{1}{1 - t^{d(x)}} ,$$

où x parcourt l'ensemble X^0 des points fermés de X , et $d(x)$ désigne le degré du corps résiduel $\varkappa(x)$ sur $\underset{\sim}{F}_p$. C'est un produit infini dans l'anneau de séries formelles $\Omega[[t]]$, convergeant grâce au fait que X^0 ne contient qu'un nombre fini de points x avec $d(x)$ donné :

$$Z_X(t) = 1 + b_1 t + \dots \qquad .$$

Rappelons la formule (calcul immédiat)

$$(2) \qquad \begin{cases} \log Z_X(t) = \sum_1^\infty c_\nu(x) t^\nu / \nu \\ \text{i. e. :} \quad t \dfrac{Z'_X(t)}{Z_X(t)} = \sum_1^\infty c_\nu(x) t^\nu , \end{cases}$$

où

$$(3) \qquad c_\nu(x) = \operatorname{card} X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})$$

est le nombre des points de X à valeur dans l'extension $\underset{\sim}{F}_{p^\nu}$ de degré ν de $\underset{\sim}{F}_p$.

Ainsi, (c'est là son premier et principal intérêt) la connaissance de $Z_X(t)$ équivaut à celle des c_ν , i. e. à la connaissance de X du point de vue diophantien. A. WEIL avait conjecturé que cette fonction est rationelle, et cette conjecture a été prouvée par DWORK ([3], [6]), par une méthode "élémentaire" n'utilisant pas la cohomologie.

Si G est un groupe fini opérant sur X (à droite), M une représentation linéaire de G dans un vectoriel de dimension finie V sur un corps Ω de caractéristique 0 (on prenait classiquement $\Omega = \underset{\sim}{C}$), supposant que $Y = X/G$ existe, on définit plus généralement, avec E. ARTIN, une fonction

(4) $$L_{X,G,M}(t) = \prod_{y\in Y^0} \frac{1}{\det(1 - M^{\natural}(y)t^{d(y)})} ,$$

où

(5) $$M^{\natural}(y) = \frac{1}{\operatorname{card} I_x} \sum_{\substack{g\in D_x \\ g\mapsto f_x}} M(g) ,$$

x étant un point de X au-dessus de y , D_x le "groupe de décomposition" formé des $g \in G$ tels que $gx = x$, I_x le sous-groupe d'inertie de $g \in D_x$ opérant trivialement sur $\varkappa(x)$, f_x l'élément de Frobenius de $D_x/I_x \simeq \mathrm{Gal}(\varkappa(x)/\varkappa(y))$:

$$f_x(\lambda) = \lambda^{p^{d(x)}} ,$$

(L'expression obtenue de $M^{\natural}(y)$ ne dépend manifestement pas du choix de x .) Ici il s'agit d'un produit infini convergeant dans $\Omega[[t]]$, et on obtient par un calcul immédiat

(6) $$\begin{cases} \log L_{X,G,M}(t) = \sum_1^\infty c_\nu(X , G , M)t^\nu/\nu \\ \text{i. e. :} \\ t\,\dfrac{L'_{X,G,M}(t)}{L_{X,G,M}(t)} = \sum_1^\infty c_\nu(X , G , M)t^\nu , \end{cases}$$

avec

(7) $$c_\nu(X , G , M) = \sum_{y\in Y(\mathbb{F}_{p^\nu})} \mathrm{Tr}_M^{\natural} f_y ,$$

où on pose

(8) $$\mathrm{Tr}_M^{\natural}(f_y) = \frac{1}{\operatorname{card} I_x} \sum_{\substack{g\in D_x \\ g\mapsto f_y}} \mathrm{Tr}_M(g) ,$$

x étant un point de $X_{\mathbb{F}_{p^\nu}}$ au-dessus du point y (rationnel sur $\mathbb{F}_{p^\nu}$), f_y l'élément de Frobenius $f_y(\lambda) = \lambda^{p^\nu}$ de

$$D_x/I_x \simeq \mathrm{Gal}(\varkappa(x)/\varkappa(y)) , \qquad (\varkappa(y) = \mathbb{F}_{p^\nu}) .$$

Lorsque G = groupe unité, $\dim V = 1$, on retrouve la fonction $Z_X(t)$.

2. Les conjectures de Weil.

WEIL avait conjecturé également que les fonctions L précédentes sont rationnelles. Comme il l'a montré dans [8], lorque X est projective et lisse sur $\underset{\sim}{F}_p$, la rationalité des fonctions L relatives à X serait une conséquence formelle de la formule de Lefschetz des points fixes, une fois qu'on disposerait d'une théorie de la cohomologie des variétés algébriques (sur un corps de définition k algébriquement clos) à coefficient dans le corps Ω de caractéristique 0 , satisfaisant aux propriétés formelles habituelles (théorème de finitude, formule de Künneth, dualité), permettant de déduire la formule de Lefschetz. Prenons pour simplifier le cas de la fonction Z ordinaire, et notant que $X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})$ n'est autre que l'ensemble des points fixes de f_X^ν dans $X(\overline{\underset{\sim}{F}_p})$ (où $\overline{\underset{\sim}{F}_p}$ désigne une clôture algébrique de $\underset{\sim}{F}_p$), la formule de Lefschetz appliquée à f donnera en effet (X étant complète et lisse sur $\underset{\sim}{F}_p$, de dim n) :

$$c_\nu(X) = \sum_0^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr} f_i^\nu \ , \tag{9}$$

où f_i désigne l'endomorphisme de $H^i(\overline{X})$ induit par l'endomorphisme de Frobenius f_X de X , opérant sur $\overline{X} = X_{\overline{\underset{\sim}{F}_p}}$. Or cette formule équivaut, par un calcul formel immédiat, à la formule

$$Z_X(t) = \frac{P_1(t)\ P_3(t)\ \ldots}{P_0(t)\ P_2(t)\ \ldots} \ , \tag{10}$$

où

$$P_i(t) = \text{dét}(1 - f_i\ t)$$

est le polynôme caractéristique de $f_i = f_X$ opérant sur $H^i(X)$. La formule (10) et son interprétation "cohomologique" forment le (1°) des célèbres "conjectures de Weil" [8]. Ces conjectures affirment de plus : (2°) que les coefficients des $P_i(t)$ sont des entiers rationnels, i. e. les racines inverses de P_i (i. e. les valeurs propres de f_i) sont des entiers algébriques, (3°) que la valeur absolue de ces entiers algébriques est $p^{i/2}$, et affirment enfin (4°) "l'invariance des nombres de Betti par spécialisation", notamment pour un schéma projectif lisse sur un corps de nombres.

Pour les fonctions L , la même méthode donnerait essentiellement une expression

$$L_{X,G,M}(t) = \frac{P_1^M(t)\ P_3^M(t)\ \ldots}{P_0^M(t)\ P_2^M(t)\ \ldots} \ , \tag{11}$$

avec

$$\begin{cases} P_i^M(t) = \text{dét}(1 - tf_{iM}) \\ f_{iM} = \text{opération induite par } f_X \text{ sur } H^i(X, V)^G = H^i(X) \otimes_G V , \end{cases}$$

(N. B. - On fait opérer G sur $H^i(X, V)$ via ses opérations sur X et sur V ...), et on a à cet égard des conjectures (1°) à (4°) analogues.

D'ailleurs, dans le cas où $\dim X = 1$, toutes les conjectures de Weil avaient été prouvées par WEIL lui-même [8], grâce au fait que la jacobienne de X fournit alors un substitut suffisant pour la cohomologie.

Grâce aux travaux de M. ARTIN et du conférencier ([2], [5]), nous disposons maintenant d'une théorie cohomologique des schémas satisfaisante, permettant de transposer en géométrie algébrique la formule de Lefschetz, et permettant de répondre par l'affirmative aux parties (1°) et (4°) des conjectures de Weil (1) (les conjectures (2°) et (3°) restant d'ailleurs non démontrées à l'heure actuelle). Cela établit donc en particulier la rationalité des fonctions L dans le cas d'un schéma X propre et lisse sur $\mathbb{F}_p$. Faute de disposer de la résolution des singularités en caractéristique $p > 0$, ce résultat ne contient d'ailleurs pas le résultat de DWORK, qui ne fait aucune hypothèse de lissité ou de propreté, mais doit en revanche se restreindre à la fonction Z_X, ou du moins doit faire des restrictions sur la représentation de G qui définit la fonction L envisagée.

Le but de cet exposé est de prouver le résultat de rationalité pour toutes les fonctions L envisagées au § 1, et même pour un type de fonctions L beaucoup plus général, associées à des faisceaux ℓ-adiques sur X. Nous donnerons en effet une expression explicite du style Lefschetz-Weil de ces fonctions. Les outils essentiels sont de deux sortes :

(a) Le formalisme de la "cohomologie à supports compacts" d'un schéma algébrique sur un corps k (qui avait été introduite par le conférencier tout d'abord pour les besoins d'une formulation satisfaisante du théorème de dualité en cohomologie étale). On peut dire, de façon générale, que les propriétés fonctorielles de la "cohomologie à supports compacts" sont exactement analogues à celles des fonctions L, ce qui permet de donner une formulation suffisamment générale et précise du théorème de rationalité (cf. § 5), pour réduire ce dernier au cas où X est une courbe projective et complète, mais pour un faisceau de coefficients arbitraire.

(b) Une formule de Lefschetz généralisée, due à J.-L. VERDIER, valable pour

---

(1) Ce résultat avait été établi en avril 1963.

des variétés complètes et des faisceaux ayant des singularités plus ou moins arbitraires. Cette formule, dans le cas où X est de $\dim 1$, donne directement l'expression explicite voulue.

Remarque. - La démonstration est valable modulo la vérification d'une forme particulière du théorème de Verdier que nous aurons à utiliser. Cette vérification n'a pas été faite à l'heure d'écrire cet exposé, mais me parait une pure question de routine, et nous la supposerons faite dans la suite de cet exposé (2).

3. Cohomologie étale à supports compacts et faisceaux ℓ-adiques.

Pour la notion d'espaces topologiques généralisés ("sites" et "topos"), de cohomologie des faisceaux sur de tels "espaces", et plus particulièrement pour la définition de la topologie étale d'un préschéma, des faisceaux pour icelle, et de la cohomologie étale pour ces faisceaux, je renvoie à [2] (cf. aussi [1], [4]). Les résultats établis dans [2] peuvent se résumer en disant que, à condition de se borner à des faisceaux de torsion sur le préschéma X , premier aux caractéristiques résiduelles de X , le formalisme habituel de la cohomologie des faisceaux est également valable dans le contexte présent, en utilisant toujours la topologie étale (ce que nous sous-entendrons par la suite). Je renvoie également au loco citato pour la définition et les propriétés des foncteurs $R^i_! f_*(F)$, cohomologie "à support propre sur S ", qui est définie chaque fois qu'on a un morphisme $f : X \to S$ de type fini "compactifiable" (par exemple quasi-projectif) et que F est un faisceau de torsion. Ils coïncident avec les $R^i f_*(F)$ habituels lorsque f est propre. La notion naturelle de finitude de la théorie est celle de "faisceaux de torsion constructibles", ces faisceaux n'étant autres, lorsque X est noethérien, que les faisceaux de torsion sur X qui sont des objets noethériens de la catégorie des faisceaux.

Parmi les propriétés des $R^i_! f_*$, signalons :

(3.1) La formation des $R^i_! f_*(F)$ commute à tout changement de base.

(3.2) $R^i_! f_*(F)$ est constructible si F l'est.

(3.3) Pour un composé de deux morphismes compactifiables, $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, on a la suite spectrale de Leray

$$R^*_!(gf)_* \Longleftarrow R^i_! g_*(R^j_! f_*) .$$

(3.4) Si U est un ouvert de X , Z son complémentaire, on a une suite exacte de cohomologie :

(2) Voir la Note placée après la Bibliographie.

$$\cdots \to R^i_! f_{U_*}(F|U) \to R^i_! f_*(F) \to R^i_! f_{Z_*}(F|Z) \to \cdots .$$

(3.5) On a $R^i_! f_*(F) = 0$ si $i > 2n$, n = dimension des fibres de $f : X \to S$.

Lorsque S est le spectre d'un corps k [3], et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, posons $\bar{X} = X_{\bar{k}}$, alors la connaissance de $R^i_! f_*(F)$, faisceau sur k, est équivalente à celle de sa "fibre" $R^i_! f_*(F)_{\bar{S}}$ relativement à $\bar{k}$, qui est un groupe abélien ordinaire sur lequel $\pi = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ opère continûment. Ce π-module sera noté $H^i_!(\bar{X}, F)$. Il est <u>fini</u> si F est <u>constructible</u>.

Pour la plupart des applications, on ne peut se limiter à des faisceaux de coefficient qui sont de torsion. Soit ℓ un nombre premier, nous appellerons <u>faisceau ℓ-adique</u>, ou <u>Z_ℓ-faisceau</u>, sur le préschéma X, la donnée d'un système projectif $(F_n)_{n\in N}$ de faisceaux, tels que, pour tout n, l'homomorphisme de transition $F_{n+1} \to F_n$ soit isomorphe au morphisme canonique $F_{n+1} \to F_{n+1} \otimes \underset{\sim}{Z}/\ell^n \underset{\sim}{Z}$, ce qui implique que chaque F_n est annulé par ℓ^n, i. e. est un $\underset{\sim}{Z}/\ell^n \underset{\sim}{Z}$-module. Les faisceaux ℓ-adiques sur X forment une catégorie abélienne de façon évidente contenant les faisceaux de ℓ-torsion comme sous-catégorie pleine. C'est même une catégorie $\underset{\sim}{Z}_\ell$-abélienne, i. e. on a un homomorphisme naturel de $\underset{\sim}{Z}_\ell$ dans l'anneau des endomorphismes du foncteur identique de cette catégorie.

On dit que le faisceau ℓ-adique $F = (F_n)$ est <u>constructible</u> si tout ouvert affine U de X peut se décomposer en union de parties constructibles localement fermées Z_i, telles que les $F_n|Z_i$ soient tous localement constants, et constructibles (i. e. à fibres finies). Si X est localement noethérien, il (faut et) suffit pour cela que les F_n soient localement constructibles. On dit que le faisceau ℓ-adique $F = (F_n)$ est <u>constant tordu constructible</u> si les F_n sont localement constants et constructibles. Lorsque X est connexe, si a en est un point géométrique, alors on a une équivalence canonique entre la catégorie des faisceaux ℓ-adiques constants-tordus constructibles F sur X, et la catégorie des $\underset{\sim}{Z}_\ell$-modules E de type fini sur lesquels $\pi_1(X, a)$ opère continûment à gauche, i. e. muni d'un homomorphisme continu de groupes compacts totalement discontinus :

$$(*) \qquad \pi_1(X, a) \to \mathrm{Aut}_{\underset{\sim}{Z}_\ell}(E) .$$

On fera attention qu'<u>un tel</u> F <u>n'est généralement pas localement constant</u> (même si X est le spectre d'un corps) en d'autres termes que l'homomorphisme $(*)$ ne se factorise pas en général à travers un groupe quotient fini de $\pi_1(X, a)$.

---

(3) Dans ce cas, un théorème de Nagata affirme d'ailleurs que tout schéma de type fini sur k est compactifiable.

Soient $F = (F_n)$ un faisceau ℓ-adique sur X , $f : X \to Y$ un morphisme compactifiable, avec Y localement noethérien, enfin $i \in \underset{\sim}{Z}$, alors $(R^i_! f_*(F_n))_{n \in N}$ forme un système projectif de faisceaux de ℓ-torsion constructibles sur Y , dont nous admettrons ici (cf. [5]) qu'il satisfait la "condition de Mittag-Leffler", et admet une limite projective, notée $R^i_! f_*(F)$, dans la catégorie des faisceaux ℓ-adiques constructibles sur Y . Il y a lieu alors, par passage à la limite à partir du cas des coefficients de torsion, d'étendre tout le formalisme de la cohomologie aux faisceaux ℓ-adiques. Nous supposerons fait ce travail de fondements, et utiliserons librement le formulaire (3.1) à (3.5) pour les $R^i_! f_*(F)$, F faisceau ℓ-adique.

Il y a lieu également dans certaines questions de considérer la catégorie quotient de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques sur le préschéma X , par la sous-catégorie épaisse des faisceaux de ℓ-torsion (les objets de la catégorie sont appelés <u>$\underset{\sim}{Q}_\ell$-faisceaux</u>). C'est une catégorie $\underset{\sim}{Q}_\ell$-abélienne. Le formalisme des $R^i_! f_*$ s'étend aussitôt, par passage au quotient à cette catégorie. Si X est un schéma algébrique sur le corps k , F un $\underset{\sim}{Q}_\ell$-faisceau constructible sur X , alors $H^i_!(\overline{X}, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\underset{\sim}{Q}_\ell$, sur lequel π opère continûment.

Enfin, si A est une algèbre sur $\Lambda = \underset{\sim}{Z}_\ell$, resp. $\underset{\sim}{Q}_\ell$, on définit les <u>A-faisceaux constructibles</u> sur X comme étant les Λ-faisceaux constructibles sur X , munis d'un homomorphisme de Λ-algèbres

$$A \to \mathrm{End}(F) .$$

Cette notion sera surtout utile quand A est fini sur Λ , en particulier quand $\Lambda = \underset{\sim}{Q}_\ell$ et A est une <u>extension</u> finie de Λ .

4. Fonctions L généralisées.

Fixons le corps premier $\underset{\sim}{F}_p$ $(p > 0)$, un nombre premier $\ell \neq p$, et une extension finie Ω de $\underset{\sim}{Q}_\ell$. Les lettres X , Y , S , ... désignent des préschémas de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$. Soit d'abord $X = \mathrm{Spec}\, \underset{\sim}{F}_q$ le spectre d'une extension finie de $\underset{\sim}{F}_p$ $(q = p^d$, $d = d(x) = \deg \varkappa(x) : \underset{\sim}{F}_p)$. Alors la donnée d'un Ω-faisceau sur X équivaut à la donnée d'un vectoriel de dimension finie $V = F_{\overline{x}}$ sur Ω , sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\varkappa}(x)/\varkappa(x)) = \pi_x$ opère continûment. On a un isomorphisme canonique

$$\pi_x = \mathrm{Gal}(\overline{\varkappa(x)}/\varkappa(x)) \simeq \hat{\underset{\sim}{Z}} ,$$

défini à l'aide de <u>l'élément de Frobenius</u>

$$f_x \in \mathrm{Gal}(\overline{\varkappa(x)}/\varkappa(x)) = \mathrm{Gal}(\overline{\underset{\sim}{F}_q}/\underset{\sim}{F}_q) , \qquad f_x(\lambda) = \lambda^{p^d} ,$$

de sorte que l'opération de π_x sur $V = F_{\bar{x}}$ est connue quand on connaît l'automorphisme $(f_x)_V$ (soumis à la seule condition que $(f_x)_V^n \to \mathrm{id}_V$ quand $n \to 0$ multiplicativement). D'ailleurs, si

$$\mathrm{pr}_x : X = \mathrm{Spec}\, \underset{\sim}{F}_q \to \mathrm{Spec}\, \underset{\sim}{F}_p = e$$

est le morphisme canonique, π_x s'identifie de la façon habituelle, via pr_{x*}, à un sous-groupe du groupe de Galois analogue π_e pour $e = \mathrm{Spec}(\underset{\sim}{F}_p)$, engendré topologiquement par le "frobenius absolu" f, et on aura avec cette identification

$$f_x = f^{d(x)} .$$

D'ailleurs, le faisceau $\mathrm{pr}_{x*}(F)$ sera défini par le "module induit"

$$\mathrm{pr}_{x*}(F)_{\bar{e}} \simeq F_{\bar{x}} \otimes_{\pi_x} \pi_e ,$$

d'où on conclut immédiatement la formule

$$\mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f)^{-1}_{\mathrm{pr}_{x*}(F)_{\bar{e}}}\, t) = \mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\, t^{d(x)}) .$$

On posera alors

(12)
$$Z_F(t) = \frac{1}{\mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\, t^{d(x)})} .$$

Si X est un préschéma de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$, F un Ω-faisceau constructible sur X, on posera (en notant $F_x = F|\mathrm{Spec}\, \varkappa(x)$) :

(13)
$$Z_F(t) = \prod_{x \in X^0} Z_{F_x}(t)$$

i. e.

(14)
$$Z_F(t) = \prod_{x \in X^0} \frac{1}{\mathrm{d\acute{e}t}(1 - (f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\, t^{d(x)})} .$$

Il s'agit encore ici d'un produit infini convergeant dans $\Omega[[t]]$, de terme constant 1. Notons d'ailleurs la formule essentiellement équivalente

(15)
$$\begin{cases} \log Z_F(t) = \sum_1^\infty c_\nu(F) t^\nu/\nu \\ \text{i. e.} \\ t\,\dfrac{Z'_F(t)}{Z_F(t)} = \sum_1^\infty c_\nu(F) t^\nu , \end{cases}$$

avec

(16) $$c_\nu(F) = \sum_{x \in X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})} \mathrm{Tr}\left((f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}}\right),$$

où, dans (16), x est considéré comme un élément de $X_{\underset{\sim}{F}_{p^\nu}}$, ce qui précise le sens de f_x comme égal à $f_{\bar{e}}^{\nu}$ ...

On déduit aussitôt de la définition (14) les propriétés formelles suivantes

(4.1) <u>Multiplicativité en</u> F :

$$Z_F(t) = Z_{F'}(t)\, Z_{F''}(t)$$

pour toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$.

(4.2) <u>Multiplicativité en</u> X : Si U est un ouvert de X , Y le fermé complémentaire, on a

$$Z_F(t) = Z_{F|U}(t)\, Z_{F|Y}(t) .$$

(4.3) <u>Multiplicativité par fibration</u> : Si $f : X \to S$ est un morphisme (de préschémas de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$) on a

$$Z_F(t) = \prod_{s \in S^0} Z_{F|X_s} ,$$

où X_s est la fibre $f^{-1}(s)$, et où le produit du deuxième membre est convergeant.

Lorsque F est le Ω-faisceau constant Ω_X , on trouve d'ailleurs la fonction $Z_X(t)$ du § 1 :

(17) $$Z_{\Omega_X}(t) = Z_X(t) .$$

Montrons comment on retrouve également les fonctions L du § 1. Avec les notations du loco citato, on peut toujours supposer d'abord que le corps Ω est une extension <u>finie</u> de $\underset{\sim}{Q}$, puis, quitte à prendre une extension composée de cette dernière et de $\underset{\sim}{Q}_\ell$, que Ω est une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_\ell$. Soit $W = \check{V}$ le dual de V , sur lequel G opère à **droite par** transposition. Les opérations de G sur W et sur X permettent alors de définir les opérations de G sur le faisceau constant W_X , d'où un faisceau sur $Y = X/G$:

(18) $$W_X^G = F , \qquad (W = \check{V}) ,$$

dont la fibre en tout point géométrique $\bar{y}$ de Y n'est autre que

(19) $$F_{\bar{y}} = W^{I_{\bar{x}}} \simeq (V^{I_{\bar{x}}})^{\vee} ,$$

où $\overline{x}$ est un point géométrique de X sur $\overline{y}$, et $I_{\overline{x}}$ son groupe d'inertie. Cela posé, on voit aussitôt que

$$L_{X,G,M}(t) = Z_F(t) , \tag{20}$$

les produits infinis représentés par les deux membres étant égaux terme à terme.

5. Énoncé de la formule fondamentale. Réduction au cas des courbes.

THÉORÈME 5.1. - Soient $\underset{\sim}{F}_p$ le corps premier de caractéristique $p > 0$, ℓ un nombre premier $\neq p$, Ω une extension finie de $\underset{\sim}{Q}_\ell$, X un schéma algébrique compactifiable (par exemple quasi-projectif) sur le corps $\underset{\sim}{F}_p$, F un Ω-faisceau constructible sur X, $g : X \to \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_p$ le morphisme structural. Alors on a

$$Z_F(t) = \prod_i Z_{R^i_! g_*(F)}(t)^{(-1)^i} . \tag{21}$$

Pour mémoire, rappelons

$$Z_{R^i_! g_*(F)}(t) = \frac{1}{\text{dét}(1 - (f)^{-1}_{H^i_!(\overline{X},F)} t)} , \tag{22}$$

donc la formule fondamentale s'écrit aussi

$$\left\{\begin{aligned} Z_F(t) &= \frac{P_1^F(t)\, P_3^F(t) \cdots}{P_0^F(t)\, P_2^F(t) \cdots} \\ P_i^F(t) &= \frac{1}{Z_{R^i_! g_*(F)}(t)} = \text{dét}(1 - (f)^{-1}_{H^i_!(\overline{X},F)} t) . \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Les produits envisagés dans (21) et (23) ont un sens grâce à (3.5).

COROLLAIRE 5.2. - Sous les conditions précédentes, mais supposant seulement X un préschéma de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$ (pas nécessairement compactifiable), $Z_F(t)$ est une fonction rationnelle.

En effet, grâce à la formule (4.2) de multiplicativité, on se ramène aussitôt au cas où X est affine, donc compactifiable, et alors l'assertion résulte de la formule explicite (21) de 5.1.

Réduction au cas des courbes.

LEMME 5.3. - Soient $g : X \to Y$ un morphisme compactifiable de préschémas de type fini sur $\underset{\sim}{F}_p$, F un Ω-faisceau constructible sur X . Si le théorème 5.1 est vrai pour les couples $(X_y , F|X_y)$, où $y \to Y^0$, alors on a

$$Z_F(t) = \prod_i Z_{R_!^i g_*(F)}(t)^{(-1)^i} . \tag{24}$$

En effet, soit $g_y : X_y \to \operatorname{Spec} k(y)$ le morphisme structural, on aura

$$Z_F(t) = \prod_{y \in Y^0} Z_{F|X_y}(t) = \prod_{y \in Y^0} \prod_i Z_{R_!^i g_{y*}(F|X_y)}(t)^{(-1)^i}$$

par (4.3), et l'hypothèse sur les $F|X_y$; d'ailleurs

$$R_!^i\, g_{y*}(F|X_y) = R_!^i\, g_*(F)_y$$

par (3.1), d'où en changeant l'ordre des signes $\prod$ la formule (où l'on pose $F^i = R_!^i\, g_*(F)$) :

$$Z_F(t) = \prod_i \Big(\prod_{y \in Y^0} Z_{F_y^i}(t)\Big)^{(-1)^i} = \prod_i Z_{F^i}(t)^{(-1)^i} ,$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 5.4. - Supposons de plus que le théorème 5.1 soit vrai pour les couples $(Y , R_!^i\, g_*(F))$. Alors il est vrai pour (X , F) .

En effet, avec les notations précédentes, on aura par hypothèse (où $h : Y \to \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_p$)

$$Z_{F^i}(t) = \prod_j Z_{R_!^j h_*(F^i)}(t)^{(-1)^j} ,$$

d'où, en vertu de (24),

$$Z_F(t) = \prod_{i,j} Z_{R_!^j h_*(F^i)}(t)^{(-1)^{i+j}} . \tag{$*$}$$

Or, en vertu de (3.3), on a, si $\varphi : X \to \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_p$,

$$R_!^*\, \varphi_*(F) \Longleftarrow R_!^j\, h_*(R_!^i\, g_*(F)) ,$$

d'où en vertu de (4.1),

$$\prod_k Z_{R_!^k \varphi_*(F)}(t)^{(-1)^k} = \prod_{i,j} Z_{R_!^j h_*(R_!^i g_*(F))}(t)^{(-1)^{i+j}} . \tag{$**$}$$

La comparaison de (☆) et (☆☆) donne la conclusion voulue.

COROLLAIRE 5.5. - Soient $f : X \to Y$ un morphisme fini, F un Ω-faisceau constructible sur X, alors, 5.1 est vrai pour (X , F) si, et seulement si, il l'est pour $(Y , f_*(F))$.

LEMME 5.6.

(a) Sous les conditions préliminaires de 5.1, soient U un ouvert de X, Y son complémentaire, F un Ω-faisceau constructible sur X. Alors si le théorème 5.1 est valable pour deux parmi les trois couples (X , F), $(U , F|U)$, $(Y , F|Y)$, il l'est pour le troisième.

(b) Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une suite exacte de Ω-faisceaux constructibles sur X. Alors si 5.1 est vrai pour deux des trois couples (X , F'), ..., il l'est pour le troisième.

L'assertion (a) par exemple résulte aussitôt de (3.4) et (4.2), qui impliquent que les <u>deux</u> membres de 5.1 sont "multiplicatifs en X".

Utilisant 5.6(b), pour prouver 5.1, on est ramené en général d'abord au cas où X est <u>affine</u>. Pour $\dim X = 0$, on est ramené par 5.6(b) au cas $X = \operatorname{Spec} \underset{\sim}{F}_q$, où c'est trivial par définition. Supposons que ce soit prouvé pour $\dim X = 1$, prouvons alors le cas général, par récurrence sur $n = \dim X$. Comme X est affine, il existe un morphisme $X \to Y$ avec $\dim Y \leqslant n - 1$, à fibres de $\dim \leqslant 1$. En vertu de 5.4 on aura terminé.

On est donc ramené au cas où X est affine de dim 1. On peut supposer X réduit, soit X' le normalisé, $g : X' \to X$ la projection, on a un morphisme canonique $u : F \to g_* F'$, (où $F' = g^* F$), dont le noyau et conoyau sont à support de $\dim \leqslant 0$. Utilisant 5.6 (b) et 5.5, on est ramené à prouver 5.1 pour (X' , F'), i. e. on peut supposer X affine normale. Alors il existe une immersion ouverte $i : X \to \hat{X}$, avec $\hat{X}$ courbe projective <u>normale</u>, donc <u>lisse</u> sur $\underset{\sim}{F}_p$, telle que $\dim(\hat{X} - i(X)) = 0$. Utilisant encore 5.6(a), on est ramené à prouver 5.1 pour $(\hat{X} , i_!(F))$. En fin de compte, <u>on s'est ramené au cas où</u> X <u>est une courbe projective et lisse sur</u> $\underset{\sim}{F}_p$.

Avant d'aller plus loin, signalons la formulation équivalente de (22), obtenue en prenant les logarithmes des deux membres, et en égalant les coefficients :

$$(25) \qquad \sum_{x \in X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})} \operatorname{Tr}(f_x)^{-1}_{F_{\bar{x}}} = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} f_i^{-\nu},$$

où f_i est l'endomorphisme de $H^i_!(\overline{X}, F)$ défini par le frobenius "absolu". Nous inspirant de WEIL, cette formule peut être interprétée comme une formule "purement géométrique", du type de Lefschetz, portant sur $\overline{X}$ et le faisceau induit $\overline{F}$ sur $\overline{X}$. Pour ceci, remarquons que si f_X est l'endomorphisme de Frobenius de X, alors pour tout faisceau étale F sur X, on a un isomorphisme canonique

(26) $$f_{F/X} : F \xrightarrow{\sim} f_X^*(F) ,$$

d'où en prenant l'image inverse sur $\overline{X}$, un isomorphisme canonique

$$\overline{f_{F/X}} : \overline{F} \to \overline{f_X}^*(F) .$$

De ce fait, $\overline{f_{F/X}}$ "opère" sur la cohomologie $H^i_!(\overline{X}, \overline{F})$, i. e. on a un isomorphisme

$$\overline{f_{F/X}}^{(i)} : H^i_!(\overline{X}, \overline{F}) \xrightarrow{\sim} H^i_!(\overline{X}, \overline{F}) .$$

Ceci posé, on vérifie que l'on a

(27) $$f_i \, \overline{f_{F/X}}^{(i)} = \text{identité.}$$

D'ailleurs, les $x \in X(\underset{\sim}{F}_{p^\nu})$ ne sont autres que les points fixes de $\overline{f_X}^\nu$, et si, pour tout tel point, on désigne par $(\overline{f_X}^\nu)_x$ l'endomorphisme induit par $\overline{f_X}^\nu$ dans la fibre $\overline{F}_{\overline{x}}$, on constate également

$$f_x^\nu (\overline{f_X}^\nu)_x = \text{identité.}$$

Ainsi la formule (25) prend la forme typique d'une formule de Lefschetz de nature géométrique :

(25 bis) $$\sum_{x \in X(\overline{\underset{\sim}{F}_p})^g} \operatorname{Tr} g_x = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} ,$$

où $g = \overline{f_X}^\nu$ est un endomorphisme de $\overline{X}$ sur $\overline{\underset{\sim}{F}_p}$, opérant également sur $\overline{F}$, et $g^* = (g^{(i)})$ est l'endomorphisme qu'il définit sur la cohomologie $H^*_!(\overline{X}, \overline{F})$.

Notons encore que, dans le cas qui nous occupe, et lorsque X est lisse sur $\underset{\sim}{F}_p$, les points fixes de $g = f_X^\nu$ sont tous "transversaux".

6. La formule de Verdier.

Soient X un espace topologique compact, Ω un corps, F un faisceau de Ω-espaces vectoriels sur X, tel que les fibres F_x soient de dimension finie, et g une "classe de correspondance dans (X, F) " (cf. papiers futurs de J.-L. VERDIER), définie par exemple (pour fixer les idées) par un endomorphisme g de X et un homomorphisme $u : g^*(F) \to F$. Alors g définit des endomorphismes $g^{(i)}$ dans les $H^i(X, F)$, et il y a lieu de considérer la somme de Lefschetz

$$\nu(X, F, g) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} .$$

Sous des conditions de nature locale très générales (assurant que X et F ne sont pas "trop mauvais" localement), cette somme est définie, et VERDIER l'interprète comme un cup-produit, de telle façon que toute décomposition de l'ensemble X^g des points fixes de g en n parties compactes disjointes Z_α définit une décomposition de ce cup-produit en des invariants $\nu(X, F, g, Z_\alpha)$ jouant le rôle de "traces locales" :

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} = \sum_\alpha \nu(X, F, g, Z_\alpha) . \tag{28}$$

Le cas le plus intéressant est celui où X^g est formé de points isolés, et où on peut prendre pour Z_α les points x de X^g, de sorte qu'on obtient

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} = \sum_{x \in X^g} \nu(X, F, g, x) . \tag{28 bis}$$

Les arguments de VERDIER sont essentiellement "formels" à partir de deux théorèmes de dualité (dualité globale et dualité locale), dus à VERDIER, dont le deuxième nécessite les hypothèses locales restrictives auxquelles il a été fait allusion. Elles sont vérifiées par exemple dans le cas où X est un espace analytique complexe et F est "analytiquement constructible", par exemple lorsque X provient d'un schéma algébrique sur $\underset{\sim}{C}$, et F d'un Ω-faisceau constructible sur X, comme on peut le montrer en utilisant la résolution des singularités de HIRONAKA. En fait, la démonstration montre qu'il suffit ici de connaître la résolution des singularités pour les schémas finis au-dessus de $X \times X$ (4),et moyennant cette hypothèse, les résultats de VERDIER se transportent également mutatis mutandis au cas où X est un schéma propre au-dessus d'un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque (compte tenu toujours des théorèmes de dualité, prouvés par le conférencier dans le cas de la topologie étale). Compte tenu de la résolution des singularités des surfaces (ABHYANKAR), ceci s'applique notamment au cas où $\dim X = 1$.

La détermination explicite des $\nu(X, F, g, x)$ en termes d'invariants locaux connus, notamment dans le cas où X est de $\dim 1$, n'a pas encore été faite par VERDIER à l'heure où ces lignes sont écrites (4), mais comme il a été dit, nous admettrons le résultat suivant :

---

(4) Voir la Note placée après la Bibliographie.

(Futur) THÉORÈME 6.1 (VERDIER). - Soient X une courbe algébrique projective lisse sur un corps algébriquement clos, g un endomorphisme de X dont tous les points fixes sont de multiplicité 1, F un Ω-faisceau constructible sur X, $u : g^*(F) \xrightarrow{\sim} F$ un homomorphisme, $g^{(i)}$ les homomorphismes induits dans les $H^i_!(X, F)$. Pour tout $x \in X^g$, soit g_x l'endomorphisme correspondant de F_x. Alors

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} g^{(i)} = \sum_{x \in X^g} \operatorname{Tr} g_x . \tag{29}$$

Compte tenu du § 5, ce théorème achève la démonstration de 5.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.). - Grothendieck topologies. Notes on a Seminar. Spring 1962. - Cambridge, Harvard University, 1962 (multigraphié).

[2] ARTIN (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Cohomologie étale des schémas, Séminaire de l'Institut des hautes Etudes scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1963/64.

[3] DWORK (Bernard). - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math., t. 82, 1960, p. 631-648.

[4] GIRAUD (Jean). - Analysis situs, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 256, 11 p.

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, Séminaire de l'Institut des hautes Etudes scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1964/65.

[6] SERRE (Jean-Pierre). - Rationalité des fonctions zeta des variétés algébriques, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 198, 11 p.

[7] VERDIER (Jean-Louis). - Papiers secrets (à paraître dans divers périodiques).

[8] WEIL (André). - Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 497-508.

NOTE [Juin 1965]

Comme prévu, le théorème 6.1 a été prouvé, peu de temps après l'exposé, par J.-L. VERDIER et M. ARTIN, de sorte que le résultat 5.1 du présent exposé est effectivement prouvé. D'autre part, la méthode de VERDIER du n° 6, contrairement à ce que nous avons dit, ne nécessite d'hypothèse de résolution que pour les schémas finis sur X (ce qui rend inutile, pour la preuve de 5.1, le délicat théorème de résolution de Abbyankar. Enfin, une méthode toute différente de celle de VERDIER permet de donner une formule de Lefschetz explicite du type 6.1 sans hypothèse de "multiplicité 1" pour les points fixes, en faisant intervenir des "représentations d'Artin" relatives aux points fixes de g (cf. [5]).