Séminaire N. Bourbaki

Alexander Grothendieck

Le groupe de Brauer : I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 290, p. 199-219

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__199_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 290

Mai 1965

LE GROUPE DE BRAUER

par Alexander GROTHENDIECK

I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses.

Introduction.

On sait que le groupe de Brauer des classes d'algèbres centrales simples sur un corps k (cf. [10]) joue un rôle de premier plan dans l'étude arithmétique du corps k . La notion a été étendue en 1951 par AZUMAYA [3] au cas d'un anneau de base local, et reprise en 1960 par AUSLANDER-GOLDMAN [2] dans le cas d'un anneau de base quelconque. Les développements de AZUMAYA-AUSLANDER-GOLDMAN peuvent se généraliser d'ailleurs de façon essentiellement triviale au cas des préschémas de base généraux, ce qui est un des buts du présent exposé.

Cependant, l'interprétation cohomologique du groupe de Brauer, qui a joué un rôle important dans le cas classique, ne pouvait être développée dans [3] et [2], faute de disposer d'une théorie de la cohomologie étale, développée dans [1] et [11]. C'est elle qui donne tout son charme à la variante "globale" du groupe de Brauer. Par exemple, le groupe de Brauer global d'une variété algébrique complète non singulière apparaît comme un invariant birationnel global, intimement lié au classique "nombre de Picard" $B_2 - \rho$ des "classes de 2-cohomologie transcendantes" sur une variété algébrique, et lié également (comme l'a remarqué ARTIN) à certaines conjectures récentes et profondes de BIRCH-SWINNERTON-DYER et TATE sur les cycles algébriques sur X . D'autre part, les méthodes cohomologiques permettent de répondre, au moins partiellement, à certaines questions laissées en suspens dans [2]. Le conférencier compte exposer ces questions proprement cohomologiques dans deux exposés ultérieurs, et se bornera ici aux premières variations sur le thème azumayen.

1. Groupe de Brauer d'un espace topologique (*).

1.1. - Soit X un espace topologique, qu'on munit du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ des fonctions continues à valeurs complexes. Pour tout entier $n \geqslant 1$, considérons $P_n(X)$ = l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de fibrés en algèbres localement triviaux sur X , à fibres isomorphes à l'algèbre de matrices $M_n(\underset{\sim}{C})$. On peut l'interpréter aussi, par le dictionnaire bien connu, comme l'ensemble des

(*) Le lecteur est invité à rétablir dans ce texte les expressions "à isomorphisme près" et "à homotopie près", qui font partie du style personnel auquel tient l'auteur.

classes, à un isomorphisme près, de faisceaux d'algèbres $\mathcal{A}$ sur X, qui sont localement isomorphes au faisceau $M_n(\mathcal{O}_X)$ (ou, ce qui revient au même, qui sont localement libres en tant que faisceaux de modules, et tels que, pour tout $x \in X$, la "fibre réduite" $A_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ soit isomorphe à $M_n(\underset{\sim}{C})$, i. e. soit une algèbre simple centrale de rang n^2 sur $\underset{\sim}{C}$). Un autre dictionnaire connu nous fournit l'interprétation suivante. Désignons par $GP(n)$ le "groupe projectif à n variables sur $\underset{\sim}{C}$ ",

$$\underset{\sim}{GP}(n) = \underset{\sim}{G\ell}(n, \underset{\sim}{C})/\underset{\sim}{C}^* = M_n(\underset{\sim}{C})^*/\underset{\sim}{C}^* ,$$

qui s'identifie aussi au groupe des automorphismes (tous intérieurs par SKOLEM-NOETHER ([6], VIII, § 10) de l'algèbre $M_n(\underset{\sim}{C})$. Alors, $P_n(X)$ s'identifie à l'ensemble $H^1\big(X, \underset{\sim}{GP}(n)\big)$ des classes, à un isomorphisme près, de fibrés principaux sous $\underset{\sim}{GP}(n)$, de base X. Lorsque X est par exemple un CW-complexe, alors le point de vue homotopique conduit à regarder $P_n(X)$ comme l'ensemble des classes d'applications (à une homotopie près) de X dans un espace classifiant $B_{\underset{\sim}{GP}(n)}$.

1.2. - Le "groupe de Brauer" de X s'obtient à partir de la collection des $P_n(X)$, en regardant comme "triviaux" les fibrés en algèbres qui sont de la forme $\underset{\sim}{\mathrm{End}}(E)$, où E est un fibré vectoriel de rang n sur X. En termes de faisceaux, ce sont les faisceaux de la forme $\underset{\sim}{\mathrm{End}}(E)$, E un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang n ; en termes de fibrés principaux, ce sont les éléments de $H^1\big(X, \underset{\sim}{GP}(n)\big)$ qui peuvent se remonter en des éléments de $H^1\big(X, \underset{\sim}{GP}(n)\big)$; en termes homotopiques, les classes d'applications $X \to B_{GP(n)}$ qui se factorisent à travers $B_{\underset{\sim}{G\ell}(n)} \to B_{GP(n)}$. De façon précise, appelons <u>Algèbre d'Azumaya</u> une algèbre sur X localement isomorphe à une Algèbre de la forme $M_n(\mathcal{O}_X)$. Deux telles Algèbres $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ sont dites <u>équivalentes</u> si on peut trouver deux faisceaux localement libres $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sur X, et un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{A} \otimes \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{A}' \otimes \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}') .$$

En vertu de l'isomorphisme d'Algèbres $\underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}) \otimes \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}') \simeq \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$, on voit qu'on a bien là une relation d'équivalence entre Algèbres d'Azumaya, d'ailleurs compatible avec l'opération $\otimes$. L'ensemble des classes d'Algèbres d'Azumaya devient ainsi un monoïde commutatif, et même un groupe, car l'algèbre opposée $\mathcal{A}^o$ de $\mathcal{A}$ définit une classe inverse, grâce à l'isomorphisme canonique bien connu

$$\mathcal{A}^o \otimes \mathcal{A} \simeq \underset{\sim}{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}(\mathcal{A}) .$$

Le groupe ainsi obtenu s'appelle <u>groupe de Brauer de</u> X, et se note $Br(X)$.

1.3. - Soit $\mathcal{O}_X^*$ ou $\underset{\sim}{G}_{m_X}$ le faisceau des unités du faisceau d'anneau $\mathcal{O}_X$ (i. e. des applications continues de X dans C^*). La suite exacte de groupes

$$1 \to \underset{\sim}{G}_m \to \underset{\sim}{G\ell}(n) \to \underset{\sim}{GP}(n) \to 1$$

définit une suite exacte de faisceaux sur X, en prenant les faisceaux d'applications continues dans les trois termes, d'où une suite exacte de cohomologie (cf., par exemple, [13] pour X paracompact, [12] en général) :

$$1 \to H^1\left(X, G_{m_X}\right) \to H^1\left(X, \underset{\sim}{G\ell}(n)_X\right) \to H^1\left(X, \underset{\sim}{GP}(n)_X\right) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \underset{\sim}{G}_m),$$

où, pour $\xi \in H^1\left(X, \underset{\sim}{GP}(n)\right) = P_n(X)$, $\delta\xi \in H^2\left(X, \underset{\sim}{G}_{m_X}\right)$ est "l'obstruction à relever ξ en un élément de $H^1\left(X, \underset{\sim}{G\ell}(n)_X\right)$". Un calcul facile montre que, pour deux Algèbres d'Azumaya, on a

$$\delta(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}') = \delta(\mathfrak{A}).\delta(\mathfrak{A}'),$$

ce qui implique de façon à peu près formelle les conditions 1° à 3° de la proposition suivante.

PROPOSITION 1.4.

1° Si $\mathfrak{A}$ est une Algèbre d'Azumaya, $\delta(\mathfrak{A})$ ne dépend que de la classe de $\mathfrak{A}$ dans $Br(X)$.

2° L'application

$$(\star) \qquad \delta : Br(X) \to H^2\left(X, G_{m_X}\right),$$

obtenue de cette façon, est un homomorphisme de groupes.

3° Cet homomorphisme est injectif.

4° L'image de $P_n(X) = H^1\left(X, \underset{\sim}{GP}(n)\right)$ dans $Br(X)$ est annulée par n.

Le 4° peut se prouver en considérant la suite exacte

$$1 \to \mu_{n_X} \to \underset{\sim}{S\ell}(n)_X \to \underset{\sim}{GP}(n)_X \to 1$$

(où $\underset{\sim}{S\ell}(n)$ est le groupe spécial linéaire, μ_n le groupe des racines n-ièmes de l'unité, isomorphe au centre de $\underset{\sim}{S\ell}(n)$, formé des matrices diagonales de $\underset{\sim}{S\ell}(n)$). On en déduit encore une application cobord

$$\delta' : H^1\left(X, \underset{\sim}{GP}(n)_X\right) = P_n(X) \to H^2\left(X, \mu_{n_X}\right),$$

et on voit aussitôt que l'homomorphisme δ est le composé

$$P_n(X) \xrightarrow{\delta'} H^2(X\,,\,\mu_{n_X}) \longrightarrow H^2(X\,,\,\underset{\sim}{G}_{m_X})\,,$$

où la deuxième flèche provient de l'inclusion canonique $(\mu_n)_X \to (\underset{\sim}{G}_m)_X$. Comme $H^2(X\,,\,\mu_{n_X})$ est évidemment annulé par n, cela entraîne le 4°.

Une autre façon de procéder (qui restera valable dans le contexte plus général du n° 2) consiste à noter que $\underset{\sim}{G}P(n) = \underset{\sim}{S\ell}(n)/\mu_n$ opère de façon évidente sur $\mathcal{M}_o = \underbrace{\mathcal{E}_o \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_o}_{n}$, où $\mathcal{E}_o$ est le faisceau localement libre de rang n trivial sur X, sur lequel $\underset{\sim}{S\ell}(n)$ opère de la façon naturelle (noter que $\underset{\sim}{S\ell}(n)$ opère sur $\mathcal{M}_o$ avec opérations triviales de μ_n). On a alors, en posant $\mathcal{A}_o = \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{E}_o)$, un isomorphisme de faisceaux d'Algèbres, compatible avec les opérations de $\underset{\sim}{G}P(n)$:

$$\underbrace{\mathcal{A}_o \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_o}_{n} \simeq \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{M}_o)\,.$$

On peut alors, à tout fibré principal P de groupe $\underset{\sim}{G}P(n)$, de base X, associer le faisceau localement libre "tordu" $\mathcal{M}_o^P = \mathcal{M}$, et si $\mathcal{A}$ est l'Algèbre d'Azumaya associée à P, on aura

$$\underbrace{\mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}}_{n} \simeq \underset{\sim}{\mathrm{End}}(\mathcal{M})\,,$$

ce qui prouve la proposition 1.4, 4°.

COROLLAIRE 1.5. - L'image de $\mathrm{Br}(X)$ dans $H^2(X\,,\,\underset{\sim}{G}_{m_X})$ est formée d'éléments de torsion (du moins si X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, ou est compact).

On peut, dans le cas topologique envisagé ici, donner une interprétation topologique de $H^2(X\,,\,\underset{\sim}{G}_{m_X})$, en utilisant la suite exacte exponentielle bien connue,

$$0 \longrightarrow \underset{\sim}{Z} \longrightarrow \underset{\sim}{C} \xrightarrow{x \leadsto \exp(2i\pi x)} \underset{\sim}{C}^* \longrightarrow 1\,,$$

qui fournit la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \underset{\sim}{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \underset{\sim}{G}_{m_X} \to 0\,,$$

d'où, si X est paracompact (donc $\mathcal{O}_X$ "fin"), les isomorphismes

$$H^i(X\,,\,\underset{\sim}{G}_{m_X}) \simeq H^{i+1}(X\,,\,\underset{\sim}{Z})\,, \qquad i \geqslant 1\,,$$

en particulier $H^2(X , \underset{\sim}{G}_{m_X}) \simeq H^3(X , \underset{\sim}{Z})$, et l'homomorphisme δ de 1.1 peut être interprété comme un homomorphisme

$$(\star\star) \qquad c : \mathrm{Br}(X) \to H^3(X , \underset{\sim}{Z}) ,$$

dont l'image est contenue dans le sous-groupe de torsion. On a ici :

THÉORÈME 1.6 (SERRE). - Si X est un CW-complexe fini, l'homomorphisme ($\star$) de 1.1 induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}(X)$ avec le sous-groupe de torsion de $H^2(X, \underset{\sim}{G}_{m_X})$.

En d'autres termes :

COROLLAIRE 1.7. - L'homomorphisme ($\star\star$) induit un isomorphisme de $\mathrm{Br}(X)$ avec le sous-groupe de torsion de $H^3(X , \underset{\sim}{Z})$. En particulier, $\mathrm{Br}(X)$ est un groupe fini.

Cela donne donc une détermination complète, en termes homologiques, de $\mathrm{Br}(X)$. La démonstration de 1.6 se fait par de la technique homotopique standard : on calcule, grâce à BOTT [5], les groupes d'homotopie de la "limite inductive" $B_{\underset{\sim}{GP}(\infty)}$ des $B_{\underset{\sim}{GP}(n)}$, s'envoyant les uns dans les autres par "tensorisation" par des matrices unité ; on trouve 0 en dimension impaire, $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$ en dimension 2 , et $\underset{\sim}{Q}$ en dimension $2i$ $(i \geq 2)$, d'où s'ensuit que $B_{\underset{\sim}{GP}(\infty)}$ est homotopiquement équivalent au produit $B = K(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z} , 2) \times K(\underset{\sim}{Q} , 4) \times K(\underset{\sim}{Q} , 6) \times \dots$. Si alors $x \in H^3(X,\underset{\sim}{Z})$ est de torsion, il est de la forme dy , $y \in H^2(X , \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z})$, d'où une application $X \to K(\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z} , 2)$, d'où une application $X \to B$, définissant le fibré cherché d'obstruction x .

REMARQUE 1.8. - On peut introduire également une relation d'équivalence moins grossière parmi les Algèbres d'Azumaya, en disant que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ (sur X connexe) sont stablement isomorphes si on peut trouver des entiers n , m tels que $M_n(\mathcal{A}) \simeq M_m(\mathcal{A}')$. Si $KP(X)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence stable, $KP(X)$ est un monoïde commutatif, et on a un homomorphisme naturel,

$$KP(X) \to H^2(X , \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) ,$$

(où $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$ est considéré comme limite inductive des $\mu_n \simeq \underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}$). L'argument de SERRE montre que, si X est un CW-complexe fini, cet homomorphisme est surjectif, et qu'on a même un isomorphisme de foncteurs en X ,

$$(1.1) \qquad KP(X) \xrightarrow{\sim} H^2(X , \underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}) \times \prod_{i \geq 2} H^{2i}(X , \underset{\sim}{Q}) .$$

De façon plus précise, associons à tout $\xi \in H^1(X , \underset{\sim}{GP}(n))$ ses deux classes caractéristiques (où $\mu_\infty = \varinjlim \mu_n$ est le groupe des racines de l'unité, isomorphe ici par l'exponentielle à $\underset{\sim}{Q}/\underset{\sim}{Z}$) :

$$\theta\xi \in H^2(X , \mu_\infty) , \qquad \text{où} \quad \theta\xi = \text{image de} \quad \delta\xi \in H^2(X , \mu_n) \quad \text{dans} \quad H^2(X , \mu_\infty) ,$$

et

$$\mathrm{ch}^{\flat}(\xi) = \frac{1}{n}\,\mathrm{ch}(\xi) \in H^{**}(X , \underset{\sim}{Q}) , \qquad \text{où} \quad \mathrm{ch}(\xi) = 1 + \beta^4(\xi) + \beta^6(\xi) + \dots ,$$

où $\mathrm{ch}(\xi)$ désigne le "caractère de Chern" de ξ (qui, lorsque ξ provient d'un $\xi_0 \in H^1\big(X , \underset{\sim}{S\ell}(n)\big)$, coïncide avec le caractère de Chern habituel). On obtient ainsi des homomorphismes

$$\theta : \mathrm{KP}(X) \to H^2(X , \mu_\infty) , \qquad \mathrm{ch}^{\flat} : \mathrm{KP}(X) \to H^{**}(X , \underset{\sim}{Q})$$

(où $\theta(\xi\xi') = \theta(\xi) + \theta(\xi')$, $\mathrm{ch}^{\flat}(\xi\xi') = \mathrm{ch}^{\flat}(\xi)\,\mathrm{ch}^{\flat}(\xi')$) qui, pour X un CW-complexe fini, fournissent une bijection de la forme (1.1) (ce qui précise, en même temps, quelle est la structure de groupe qu'il convient de mettre au deuxième membre de (1.1)).

1.9. - Il résulte en particulier de ceci que le monoïde $\mathrm{KP}(X)$ est un groupe. D'après SERRE et BASS, ce résultat s'étend au cas où on remplace X par un schéma de base affine, et, pour un tel X , le noyau de $\mathrm{KP}(X) \to \mathrm{Br}(X)$ s'interprète comme le quotient du sous-groupe multiplicatif de $K(X) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{Q}$ des éléments d'augmentation 1 (isomorphe par l'exponentielle au sous-groupe $\tilde{K}(X)$ de $K(X) \otimes \underset{\sim}{Q}$ des éléments d'augmentation nulle) par le sous-groupe image de $\mathrm{Pic}(X)$ dans $K(X) \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \underset{\sim}{Q}$ ($K(X)$ désignant l'anneau des classes de faisceaux localement libres sur X). Ceci résulte formellement des théorèmes de stabilité de BASS [4].

2. Généralisation à un topos localement annelé.

Soit U un univers fixé, et soit $\mathfrak{X}$ un " U-topos" ([17], II) qu'on peut considérer comme le topos des faisceaux d'ensembles sur un site $\mathfrak{C}$. Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ un Anneau commutatif dans $\mathfrak{X}$, grâce auquel $\mathfrak{X}$ sera considéré comme un topos annelé $X = (\mathfrak{X} , \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. Nous supposerons $\mathfrak{X}$ "localement annelé", i. e. que, pour tout $U \in \mathrm{Ob}\mathfrak{X}$ et $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$, on a $U_f \cup U_{1-f} = U$ (où U_f désigne le plus grand sous-objet de U sur lequel f soit inversible). Alors, on peut encore définir les Algèbres d'Azumaya dans $\mathfrak{X}$ comme les Algèbres $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{X}$, qui sont "localement isomorphes" à une Algèbre de la forme $M_n(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. Procédant comme au n° 1, on introduit une relation d'équivalence entre Algèbres d'Azumaya, d'où un groupe de classes d'Algèbres d'Azumaya, noté $\mathrm{Br}(X)$. On définit encore un homomorpnisme canonique injectif

$$(2.1) \qquad \delta : \mathrm{Br}(X) \to H^2\big(X , \underset{\sim}{G}_{m_X}\big) ,$$

en utilisant ici la théorie de l'opération cobord de [12]. Si $\mathfrak{a}$ est une Algèbre d'Azumaya partout de rang n^2, on trouve que $\delta(\mathfrak{a}) \in H^2(X, \underset{\sim}{G}_{m_X})$ est annulé par n ; lorsque la puissance n-ième dans $\underset{\sim}{G}_{m_X}$ est un épimorphisme, on peut même préciser que $\delta(\mathfrak{a})$ provient d'un élément canonique $\delta_n(\mathfrak{a}) \in H^2(X, \mu_{m_X})$. En tous cas, si X est connexe, ou si l'objet final e de $\mathfrak{X}$ est quasi compact (i. e. toute famille couvrante de e admet une sous-famille couvrante finie), alors l'image de $\mathrm{Br}(X)$ dans $H^2(X, \underset{\sim}{G}_{m_X})$ est formée d'éléments de torsion. Mais il n'y a plus, en général, de théorème analogue au théorème de Serre, 1.6.

3. Algèbres centrales simples sur un corps.

Dans ce numéro, k désigne un corps, A une k-algèbre de rang fini sur k. Rappelons ([6], VIII, § 7 et 10) :

PROPOSITION 3.1. - Soit Ω une extension algébriquement close de k, A_Ω la Ω-algèbre $A \otimes_k \Omega$. Conditions équivalentes :

(i) Il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que A_Ω soit isomorphe à l'algèbre de matrices $M_r(\Omega)$.

(ii) A est un anneau simple de centre k.

(ii) bis A est de centre k, et sans radical.

(iii) L'homomorphisme canonique $A \otimes A^o \to \mathrm{End}_{k\text{-mod}}(A)$ est bijectif.

Nous dirons, sous les conditions de 3.1, que A est une Algèbre d'Azumaya sur k. Il est immédiat que, si k' est une extension de k, alors A est une Algèbre d'Azumaya sur k si et seulement si $A \otimes_k k'$ en est une sur k'.

PROPOSITION 3.2. - Supposons les conditions équivalentes de 3.1 vérifiées, ce qui implique que $[A:k]$ est de la forme r^2. Soit L une sous-algèbre de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L est étale sur k (i. e. composée finie d'extensions finies séparables de k) de rang r.

(i) bis L est étale sur k, et est son propre commutant.

(i) ter L est une sous-algèbre commutative étale maximale de A.

(ii) Il existe un isomorphisme $A_\Omega \simeq M_r(\Omega)$ qui transforme L_Ω en la sous-algèbre de $M_r(\Omega)$, formée des matrices diagonales.

Cet énoncé est une conséquence facile du suivant :

LEMME 3.3. - Soient k un corps, A une k-algèbre qui est absolument semi-simple, L une sous-algèbre de A . Conditions équivalentes :

(i) L est étale sur k , et égale à son propre commutant.

(ii) L est une sous-algèbre étale maximale de A .

On a trivialement (i) $\Longrightarrow$ (ii) , prouvons (ii) $\Longrightarrow$ (i) . Soit B le commutant de L dans A ; on voit facilement, en utilisant le fait que L est étale et passant à la clôture algébrique Ω de k , que B est encore absolument semi-simple sur k . On est donc ramené au cas où L est contenu dans le centre Z de A , et à prouver alors $L = A$. Comme le centre Z de A est encore étale sur k , on a $L = Z$, et en décomposant L en ses corps composants, on peut supposer L un corps, donc A simple de centre L . On peut supposer alors $L = k$, et on est ramené à prouver que, si A est centrale simple sur k , $A \neq k$, alors A contient une algèbre étale L sur k , $L \neq k$, ce qui est contenu dans le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.4. - Avec les conditions de 3.2, il existe toujours un $x \in A$ tel que la sous-algèbre $L = k[x]$ de A ait les propriétés envisagées dans 3.2.

Si k est infini, la considération du discriminant du "polynôme caractéristique réduit" d'un élément variable x de A , jointe au "principe du prolongement des identités algébriques", montre que, pour x "assez général", $k[x]$ est étale sur k de degré r . Si k est fini, on sait, grâce au théorème de Wedderburn ([6], VIII, § 11, n° 1, théorème 1), que A est isomorphe à $M_r(k)$, mais une telle algèbre contient comme sous-algèbre toute algèbre L de rang r sur k . Prenant pour L l'extension de degré r de k ([6], V, § 11, prop. 3), la conclusion s'ensuit, grâce au théorème de l'élément primitif (ibid, prop. 4).

PROPOSITION 3.5. - Soit A centrale simple sur k de rang r^2 , et soit L une sous-algèbre étale maximale de A . Alors A est un L-module libre de rang r , pour ses structures de L-module à gauche ou à droite.

Par descente, on peut supposer k algébriquement clos, $A = M_r(k)$, L la sous-algèbre diagonale, et alors la vérification est triviale.

PROPOSITION 3.6. - Soit A comme dans 3.1, et soit L une sous-k-algèbre telle que A soit libre de rang r , pour sa structure naturelle de L-module à droite (ce qui implique que L est de rang r sur k , la réciproque étant vraie si L est un corps). Désignons par V le L-espace vectoriel de dimension r sous-jacent à A , et considérons l'homomorphisme de L-algèbres

(3.1) $$v : A \otimes_k L \to \mathrm{End}_L(V) ,$$

qui, sur $A \otimes_k 1_L$, se réduit à l'homomorphisme de k-algèbres $u : A \to \mathrm{End}_L(V)$, donné par la représentation régulière de A : $u(x)(y) = xy$. Alors, v est un isomorphisme (donc, $A \otimes_k L$ est isomorphe à $M_r(L)$).

En effet, les deux membres de 3.1 étant libres de même rang, il suffit de prouver que, pour tout corps résiduel L_i de L, l'homomorphisme

$$v \otimes \varphi_i : A \otimes_k L_i \to \mathrm{End}_{L_i}\left(V \otimes_L L_i\right)$$

(où $\varphi_i : L \to L_i$ est l'homomorphisme canonique) est un isomorphisme. Or, cela résulte du fait que c'est un homomorphisme de L_i-algèbres de même rang, dont la première est simple.

Conjugant 3.5 et 3.6, on trouve :

COROLLAIRE 3.7. - Soit L une sous-algèbre étale maximale de l'algèbre centrale simple A sur k ; alors, l'homomorphisme canonique (3.1) est un isomorphisme, et A_L est isomorphe à la L-algèbre $M_r(L)$.

COROLLAIRE 3.8. - Soit A une algèbre centrale simple sur k ; alors, il existe une extension finie séparable de k (de degré divisant r, si on veut, où $[A:k] = r^2$) qui neutralise A. En particulier, si k est séparablement clos, A est isomorphe à l'algèbre $M_r(k)$.

Cela implique, en particulier, que, dans 3.1, on peut se borner à supposer Ω séparablement clos.

REMARQUE 3.9. - L'énoncé 3.6 nous donne un moyen de trouver des corps neutralisants pour une algèbre centrale simple A. En fait, on montre ([6], VIII, § 10, prop. 7) que, quitte à se permettre de considérer, en même temps que A, toutes les algèbres de la forme $A \otimes M_r(k)$ (qui, a priori, ont même corps neutralisant que A), on les trouve tous de cette façon. (Pour une généralisation aux Algèbres d'Azumaya, cf. [2], théorème 5.7.) En particulier, si A est un corps gauche sur k de degré r^2, L un corps neutralisant de A, alors $[L:k]$ est un multiple de r.

4. Variations infinitésimales d'algèbres et d'automorphismes d'algèbres.

Soient Λ un anneau commutatif, $A_o = \Lambda/J$ un quotient de Λ par un idéal J, $\Lambda_\nu = \Lambda/J_\nu$ un quotient par un idéal $J_\nu \subset J$ tel que $J.J_\nu = 0$ (donc J_ν de carré nul), A_ν une Λ_ν-algèbre plate, associative (pas nécessairement commutative, ni unitaire). On se propose de classer, à un isomorphisme près, les structures $(A\ ,\ \varphi)$, où A est une Λ-algèbre plate, et φ un isomorphisme

$$\varphi :\ A \otimes_\Lambda \Lambda_\nu \xrightarrow{\sim} A_\nu \ .$$

On suppose qu'on se donne déjà, à un isomorphisme près, la structure de <u>module</u> étendue A ; cela ne modifie d'ailleurs pas le problème initial, si A_ν est (en tant que module) libre, ou projectif de type fini (ce qui implique que A doit avoir la même propriété, et est déterminé, comme module, à un isomorphisme près respectant φ). On doit donc déterminer (à Λ-isomorphisme près induisant l'identité sur $A \otimes_\Lambda \Lambda_\nu$) les structures multiplicatives

$$A \otimes_\Lambda A \to A \ ,$$

étendant la structure donnée

$$A_\nu \otimes_{\Lambda_\nu} A_\nu \to A_\nu \ ,$$

et qui soit associative.

Supposons déjà qu'on dispose d'une telle structure multiplicative, soit p . Alors, tout autre q peut s'écrire sous la forme

$$q = p + C \ ,$$

où $C :\ A \otimes_\Lambda A \to \mathrm{Ker}(A \to A_\nu) \simeq A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu$, et C se factorise nécessairement par

$$c :\ A_o \otimes_{\Lambda_o} A_o \to A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu \ .$$

En exprimant que q définit bien une loi <u>associative</u>, on trouve la condition

$$c(x_o\ ,\ y_o)z_o + c(x_o\, y_o\ ,\ z_o) - x_o\, c(y_o\ ,\ z_o) + c(x_o\ ,\ y_o\, z_o) = 0\ ,$$

qui s'écrit aussi (cf. [8], chapitre IX, § 6)

$$\delta c = 0\ ,$$

i. e. c est un 2-cocycle de l'algèbre associative A_o à valeur dans le A_o-bimodule $A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu$. Pour deux $c\ ,\ c'$, dire que les algèbres associatives correspondantes sont isomorphes au sens précisé, revient, comme on le voit facilement, à dire que les cocycles sont cohomologues. On trouve ainsi aisément :

PROPOSITION 4.1. - Supposons A_o projectif comme Λ_o-module. L'ensemble des structures, à un isomorphisme près, des Λ-algèbres associatives plates A qui prolongent A_ν (pour une extension donnée de la structure de module) est vide ou est un ensemble principal homogène sous $H^2\left(A_o , A_o \otimes J_\nu\right)$ (cohomologie de Hochschild).

Lorsque Λ_o est un corps, A_o une algèbre centrale simple sur le corps, on sait que $H^i\left(A_o , M_o\right) = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ (pour $i = 1$, c'est essentiellement la forme infinitésimale du théorème de Skolem-Noether). On trouve alors :

COROLLAIRE 4.2. - Soient Λ un anneau local artinien, de corps résiduel $k = \Lambda_o$, A_o une algèbre centrale simple sur k ; alors, il existe (à un isomorphisme près) au plus une algèbre associative sur k , qui soit libre comme Λ-module, et telle que $A \otimes_\Lambda k \simeq A_o$. En particulier, si $A_o \simeq M_r(k)$, alors $A \simeq M_r(\Lambda)$.

REMARQUES 4.3. - Sous les conditions générales de 4.1, si A_o est libre, ou projectif de type fini sur Λ_o , alors on définit par la méthode habituelle une classe canonique

$$\delta(A_o) \in H^3\left(A_o , A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu\right) ,$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une Λ-algèbre plate A prolongeant A_ν . Cela implique que, sous les conditions de 4.2, il existe effectivement une algèbre A relevant A_ν . Le résultat 4.2 ainsi complété sera d'ailleurs généralisé dans 6.1 par une autre méthode.

4.4. - Un argument facile montre que, lorsqu'une algèbre associative A sur Λ est telle que A_ν soit unitaire, alors A est elle-même unitaire.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 4.5. - Avec les notations du début du numéro pour Λ , Λ_o , Λ_ν , soit A une Λ-algèbre associative unitaire, plate sur Λ , telle que $A_o = A \otimes_\Lambda \Lambda_o$ soit un Λ_o-module projectif. Soit G le groupe des automorphismes de la Λ-algèbre A induisant l'identité sur $A_\nu = A \otimes_\Lambda \Lambda_\nu$, et soit G' le sous-groupe des automorphismes de A de la forme $x \mapsto a\,x\,a^{-1}$, où a est un élément de A dont l'image dans A_ν est égale à 1 . Alors, D est isomorphe au groupe des Λ_o-dérivations de A_o dans $A_o \otimes_{\Lambda_o} J_\nu$, et cet isomorphisme transforme G' en le sous-groupe $H_o^{\prime}$ de H' formé des dérivations intérieures. En particulier, si A_o est un Λ_o-module projectif, alors

$$G/G' \simeq H_o/H_o^{\prime} \simeq H^1\left(A_o , A_o \otimes_{A_o} J_\nu\right) .$$

On en conclut comme plus haut le résultat suivant, qui n'est qu'une autre façon d'énoncer le classique théorème de Skolem-Noether :

COROLLAIRE 4.6. - Soient Λ un anneau local artinien, de corps résiduel k, A une Λ-algèbre qui est un Λ-module libre de type fini, et tel que $A_o = A \otimes_\Lambda k$ soit une algèbre centrale simple sur k. Alors, tout Λ-automorphisme de A est intérieur.

REMARQUE 4.7. - On comparera les résultats du présent numéro avec les résultats de SGAD ([9], III), sur les extensions infinitésimales de groupes et homomorphismes de groupes, et les résultats plus spécifiques dans le cas semi-simple (SGAD [9], XXIII, XXIV), notamment à la lumière du n° 7 ci-dessous.

5. Algèbres d'Azumaya sur un préschéma.

THÉORÈME 5.1. - Soient X un préschéma, $\mathcal{A}$ une algèbre sur X qui est un $\mathcal{O}_X$-Module de présentation finie. Conditions équivalentes :

(i) $\mathcal{A}$ est localement libre comme $\mathcal{O}_X$-Module, et, pour tout $x \in X$, $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_x \otimes k(x)$ est une algèbre centrale simple sur $k(x)$, i. e. (cf. 3.1) $\mathcal{A}(x) \otimes_{k(x)} \overline{k(x)}$ est isomorphe à une algèbre de matrices sur $\overline{k(x)}$.

(ii) $\mathcal{A}$ est localement libre comme $\mathcal{O}_X$-Module, et l'homomorphisme naturel $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^o \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}(\mathcal{A})$ est bijectif.

(iii) Pour tout $x \in X$, il existe un entier $r \geqslant 1$, un voisinage ouvert U de x, et un morphisme fini étale surjectif $U' \to U$, tels que $\mathcal{A}_{U'}$ soit isomorphe à $M_r(\mathcal{O}_{U'})$.

(iii) bis Comme (iii), avec $U' \to U$ simplement surjectif.

L'équivalence de (i) et (ii) et l'implication (iii) bis $\Longrightarrow$ (i) résultent trivialement de 3.1 ; il reste à prouver que (i) $\Longrightarrow$ (iii). Cela va résulter des propositions plus précises qui vont suivre. Notons, dès maintenant, que 5.1 impliquera le corollaire suivant :

COROLLAIRE 5.2. - Désignons encore par $\mathcal{A}$ l'Algèbre sur le site étale de X définie par $\mathcal{A}$. Alors, les conditions de 4.1 équivalent à dire que $\mathcal{A}$ est une Algèbre d'Azumaya sur $X_{ét}$ (au sens du n° 2).

REMARQUE 5.3. - Compte tenu de la théorie de la descente fidèlement plate, qui implique que la catégorie des Modules de présentation finie sur X (pour la topologie de Zariski) est équivalente à celle des Modules de présentation finie sur $X_{ét}$, on voit donc que la classification des Algèbres d'Azumaya du topos annelé étale de X équivaut à celle des algèbres sur X satisfaisant aux conditions de 4.1, qu'on appellera pour simplifier, et par abus de langage, <u>Algèbres d'Azumaya sur</u> X (notion qu'on se gardera de confondre avec celle d'Algèbre d'Azumaya au sens de la topologie de Zariski de X, qui correspond au cas où dans 4.1 (iii) on peut prendre $U' = U$). [Pour d'autres caractérisations des Algèbres d'Azumaya, cf. [17], II, § 5, ex. 14 ; et [2], 2.1 et 4.7.]

PROPOSITION 5.4. - Supposons que $\mathcal{A}$ satisfasse aux conditions équivalentes (i), (ii), de 5.1, et soit de rang constant (nécessairement de la forme r^2). Soit $\mathcal{L}$ une algèbre finie étale sur X (i. e. une algèbre qui, en tant que $\mathcal{O}_X$-Module, est localement libre de rang fini, est commutative et à fibres des algèbres étales sur les $k(x)$, $x \in X$), partout de rang r, et soit

$$u : \mathcal{L} \to \mathcal{A}$$

un homomorphisme d'algèbres, injectif sur les fibres, i. e. qui induit localement un isomorphisme de $\mathcal{L}$ sur un Module facteur direct de $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{L}$-Module localement libre de rang r pour sa structure naturelle de $\mathcal{L}$-Module à droite, et l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{A} \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{V}) ,$$

où $\mathcal{V}$ est le $\mathcal{L}$-Module sous-jacent à $\mathcal{A}$, est un isomorphisme.

On se ramène trivialement au cas où X est le spectre d'un corps, qui est traîté dans 3.8. Ceci posé, le dictionnaire bien connu nous fournit :

COROLLAIRE 5.5. - Sous les conditions de 4.4, posons $X' = \mathrm{Spec}\, \mathcal{L}$, et soit $\mathcal{E}'$ le Module sur X' défini par le $\mathcal{L}$-Module $\mathcal{V}$. Alors $\mathcal{A}_{X'}$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}')$.

En analogie avec la terminologie "tore maximal" pour un schéma en groupes sur X, on pose par abus de langage la définition suivante :

DÉFINITION 5.6. - Soit $\mathcal{A}$ une Algèbre d'Azumaya sur X. Une sous-Algèbre $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{L}$ soit étale sur X et que l'inclusion $\mathcal{L} \to \mathcal{A}$ satisfasse, en tout point de X, aux conditions de 5.4, est appelée une <u>sous-Algèbre étale maximale</u> de $\mathcal{A}$. Une section ξ de $\mathcal{A}$ est dite <u>régulière</u> si elle engendre une sous-Algèbre étale maximale.

Compte tenu de 5.5, l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) de 5.1 sera conséquence du résultat plus précis suivant :

THÉORÈME 5.7 (AUSLANDER-GOLDMAN). - Soit $\mathfrak{A}$ une **Algèbre** d'Azumaya sur X. Alors, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x, et une sous-Algèbre étale maximale $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}|U$.

C'est une conséquence immédiate de 3.4 et du lemme suivant :

LEMME 5.8. - Soient X un préschéma, $\mathfrak{A}$ une Algèbre d'Azumaya sur X, ξ une section de $\mathfrak{A}$, $x \in X$; supposons que $\xi(x) \in \mathfrak{A}(x) = \mathfrak{A} \otimes k(x)$ soit régulier (déf. 5.6). Alors, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\xi|U$ soit régulière.

Par la technique habituelle, on se ramène au cas où $X = \mathrm{Spec}(\Lambda)$ est local, x son point fermé, puis au cas où X est de plus noethérien. Si A est de rang r^2 sur Λ, il suffit de prouver que le sous-Λ-module engendré par les ξ^i $(0 \leq i < r)$ est un sous-anneau, i. e. que ξ^r se trouve dans ce sous-module. On se ramène immédiatement au cas où Λ est artinien, et par descente plate au cas où $A_0 = A \otimes_\Lambda k$ est une algèbre de matrices. Alors, en vertu de 4.2, A est isomorphe lui-même à $M_r(\Lambda)$, ce qui implique que tout élément de A, et en particulier ξ, satisfait une équation de dépendance intégrale de degré r sur Λ (polynôme de Hamilton-Cayley).

C. Q. F. D.

REMARQUE 5.9. - Une autre démonstration, n'utilisant pas la méthode de réduction au cas artinien et les résultats du n° 4, consiste à définir directement le polynôme de Hamilton-Cayley d'un élément de A (Algèbre d'Azumaya sur l'anneau local Λ), par "descente" à partir du cas où $A = M_r(\Lambda)$. Pour ceci, il faut montrer que A devient isomorphe à une algèbre de matrices, après extension fidèlement plate $\Lambda \to \Lambda'$ de la base. Or, on peut montrer qu'il suffit en fait de prendre pour Λ' le hensélisé strict de Λ, comme on le voit par une méthode de relèvement d'idempotents (cf. [7], III, § 4, ex. 5).

Nous aurons besoin de la généralisation suivante du théorème de Skolem-Noether :

THÉORÈME 5.10 (AUSLANDER-GOLDMAN). - Soient $\mathfrak{A}$ une Algèbre d'Azumaya sur X, u un automorphisme de $\mathfrak{A}$; alors, localement pour la topologie de Zariski (et a fortiori localement pour la topologie étale !), u est intérieur, i. e. de la forme $u\,x = a\,x\,a^{-1}$, où a est une section inversible de $\mathfrak{A}$, déterminée d'ailleurs de façon unique modulo multiplication par une section de $\mathcal{O}_X^*$.

On se ramène, par les méthodes standard, au cas où X est local artinien, justiciable de 4.5.

Voici une autre façon d'exprimer 5.10 :

COROLLAIRE 5.11. - Le schéma des automorphismes de l'algèbre associative $M_r(\mathcal{O}_X)$ est canoniquement isomorphe au groupe projectif $\underset{\sim}{GP}(r)_X$. La classification des Algèbres d'Azumaya de rang r^2 sur X équivaut à celle des torseurs (= fibrés principaux homogènes) sur X de groupe $\underset{\sim}{GP}(r)_X$, au sens de la topologie étale ou f. p. q. c. indifféremment.

La deuxième assertion résulte formellement de la première et de la théorie de la descente fidèlement plate quasi compacte [16].

REMARQUE 5.12. - Le théorème 5.10 fournit la justification du fait (admis implicitement au n° 2) que la classification des Algèbres d'Azumaya de rang r^2 sur un topos annelé en anneaux locaux $\mathfrak{X}$, est la même que celle des torseurs sous le faisceau en groupes $\underset{\sim}{GP}(r)_X$. D'autre part, 5.1 implique que, lorsque le topos localement annelé X est tel que toute algèbre finie étale sur un $U \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{X}$ est splittée localement, alors les Algèbres d'Azumaya sur X sont exactement les algèbres qui satisfont la condition 5.1, (ii). La condition envisagée sur X est vérifiée dans le cas du topos associé à un espace topologique ordinaire muni du faisceau des fonctions complexes continues, ou à un préschéma pour la topologie étale ou f. p. q. c., mais non en général pour un préschéma muni de sa topologie de Zariski (par exemple, le spectre d'un corps k tel que $\mathrm{Br}(k) \neq 0$!). Il s'ensuit bien, dans le cas envisagé au n° 1, que les Algèbres d'Azumaya sur X sont simplement celles qui satisfont la condition 5.1, (i) (où $k(x) = \underset{\sim}{C}$ pour tout $x \in X$!).

5.13. - Le théorème 5.10 (pour le cas $\mathcal{A} = M_r(\mathcal{O}_X)$) permet, grâce à la théorie de la descente (SGA, [9], VIII), de définir, pour toute Algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$ de rang r^2 et toute section ξ de $\mathcal{A}$, le "polynôme de Hamilton-Cayley" de ξ :

$$P(\xi\ ,\ t) = t^r + c_1(\xi)t^{r-1} + \dots + c_r(\xi)\ ,$$

avec les propriétés habituelles ([6], VIII, § 10). En particulier, $c_1(\xi)$ est appelé trace réduite, $c_r(\xi)$ norme réduite. La section ξ est régulière (définition 5.6) si et seulement si le polynôme $P(\xi\ ,\ t) \in \Gamma(\mathcal{O}_X)[t]$ est étale sur $\mathcal{O}_X$, ce qui s'exprime par le fait que son discriminant, qui est une fonction polynômiale $\mathcal{D}(\xi)$ en ξ à valeur dans $\mathcal{O}_X$, est inversible.

5.14. - Le résultat 5.11 prouve que tout torseur sous $\underset{\sim}{GP}(r)_X$, localement trivial pour la topologie fidèlement plate quasi-compacte, est "localement isotrivial", i. e. splitté, localement pour la topologie de Zariski, par un revêtement fini étale. On retrouve ainsi dans un cas particulier un résultat général sur les schémas en groupes semi-simples (SGAA, [1], XXIV).

6. Cas d'un schéma de base local hensélien.

THÉORÈME 6.1 (AZUMAYA). - Soient A un anneau local hensélien (EGA, [14], IV, 18), de corps résiduel k, $X = \mathrm{Spec}\, A$, $x = \mathrm{Spec}\, k$. Soit $P_r(X)$ l'ensemble des classes à un isomorphisme près d'Algèbres d'Azumaya sur X. Alors l'application de restriction

$$P_r(X) \to P_r(x) \tag{6.1}$$

est bijective.

Compte tenu que $P_r(X) \simeq H^1\big(X\,,\, \underset{\sim}{GP}(r)_X\big)$, et que $\underset{\sim}{GP}(r)_X$ est lisse et quasi-projectif sur X, le résultat précédent est un cas particulier d'un résultat général de cohomologie galoisienne non commutative (SGAD, [9], XXIV, Appendice). Pour l'injectivité, l'argument général revient à noter que, si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sont telles que l'on ait un isomorphisme

$$u_0 : \mathfrak{A} \otimes k \overset{\sim}{\to} \mathfrak{A}' \otimes k\,,$$

comme le schéma

$$P = \underset{\sim}{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{O}_X\text{-}\mathrm{Alg}}(\mathfrak{A}\,,\,\mathfrak{A}')$$

est localement isomorphe (ét) à $\underset{\sim}{GP}(n)$, donc lisse sur X, u_0 se relève en une section u de P par le "lemme de Hensel" (SGAD, [9], XI, 1.11). La surjectivité peut d'ailleurs, dans le cas actuel, s'obtenir par un argument tout analogue, qui consiste à noter que "le schéma Σ des structures multiplicatives sur $\mathcal{O}_X^{r^2}$ qui en font une Algèbre d'Azumaya" est lisse sur X.

COROLLAIRE 6.2. - Sous les conditions de 6.1, l'application $\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(x)$ est bijective.

7. Algèbres d'Azumaya et formes du groupe linéaire.

7.1. - Considérons les schémas en groupes sur $\underset{\sim}{Z}$ suivants G_i $(i = 1, 2, 3)$,

$$\underset{\sim}{G\ell}(r)\,,\ \underset{\sim}{S\ell}(r)\,,\ \underset{\sim}{GP}(r) \sim \underset{\sim}{G\ell}(r)/\underset{\sim}{G}_m \sim \underset{\sim}{S\ell}(r)/\mu_r\,. \tag{7.1}$$

Comme $\underset{\sim}{G\ell}(r)$ opère sur lui-même par automorphismes intérieurs, en laissant invariants le sous-groupe $\underset{\sim}{S\ell}(r)$ et le centre $\underset{\sim}{G}_m$, ces opérations passent au quotient, et de cette façon $\underset{\sim}{GP}(r)$ opère par automorphismes sur les trois groupes (7.1). En fait, on vérifie (SGAD, [9], XXIV) que les schémas en groupes des automorphismes $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_{gr}\big(G_i(r)\big)$ $(i = 1, 2, 3)$ sont affines et lisses sur $\underset{\sim}{Z}$, et

$\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)$ s'identifie au sous-groupe $\mathrm{Aut}(G_i)^o$ des composantes connexes. D'ailleurs, pour $r \geqslant 3$, les trois groupes $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(G_i(r)\big)$ sont isomorphes par les homomorphismes naturels

$$\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{\mathrm{G}\ell}(r)\big) \to \underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)\big)\ , \qquad \underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{\mathrm{S}\ell}(r)\big) \to \underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)\big)\ ,$$

et sont isomorphes à un produit semi-direct $(\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z})_{\mathrm{Spec}\ Z}\cdot\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)$, tandis que, pour $r = 1$, 2 , $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{\mathrm{S}\ell}(r)\big)$ et $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)\big)$ sont à fibres connexes, tandis que $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}\big(\underset{\sim}{\mathrm{G}\ell}(r)\big)$ est encore un produit semi-direct $(\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z})_{\mathrm{Spec}\ Z}\cdot\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)$. En tous cas, le schéma en groupes des automorphismes extérieurs de $\underset{\sim}{\mathrm{G}\ell}(r)$ est isomorphe à $(\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z})_{\mathrm{Spec}\ Z}$, l'élément non trivial de $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$ correspondant à l'automorphisme "contragrédient" $u \rightsquigarrow {}^t u^{-1}$.

7.2. - De ce fait, pour tout préschéma X , la donnée d'un torseur sous $\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)_X$ (pour la topologie étale, disons) définit une <u>forme</u> de chacun des groupes (7.1), et de façon plus précise une "forme intérieure" (i. e. déduit du groupe "déployé" en tordant, à l'aide du faisceau des automorphismes <u>intérieurs</u>). De façon précise, G_i $(i = 1 , 2 , 3)$ étant l'un des trois groupes envisagés dans (7.1), et $\Gamma_i = \underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_{S\text{-}gr}\big(G_i\big)$ son schéma en groupes des automorphismes, nous appellerons <u>forme intérieure</u> de G_i sur le préschéma X , un couple (G , φ) d'un schéma en groupes G sur X , localement isomorphe au sens de la topologie étale (ou, ce qui revient au même comme on le constate aisément, au sens de la topologie f. p. q. c.) à G_i , muni d'une section φ du revêtement principal galoisien de groupe Γ_i/Γ_i^o (i. e. $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$, sauf lorsque $r \leq 2$ et $i = 2 , 3$)

$$P = \underset{\sim}{\mathrm{Isom}}_{X\text{-}gr}\big(G_{iX}\ ,\ G\big)/\Gamma_i^o \simeq \underset{\sim}{\mathrm{Isom\ ext}}_{X\text{-}gr}\big(G_{iX}\ ,\ G\big)\ .$$

Ceci posé, la catégorie fibrée des formes intérieures d'un déterminé des groupes G_i de (7.1) $(i = 1 , 2 , 3)$, sur des préschémas de base quelconques X , est équivalente à la catégorie fibrée des torseurs sous $\underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r)$, équivalente elle-même, comme nous l'avons vu au n° 5, à celle des Algèbres d'Azumaya.

7.3. - La forme de $\underset{\sim}{\mathrm{G}\ell}(r)$., associée à l'Algèbre d'Azumaya $\mathcal{A}$, n'est autre que le schéma $W(\mathcal{A})^*$ des <u>unités</u> de $\mathcal{A}$, défini par

$$W(\mathcal{A})^*\ (X') = \Gamma\big(X'\ ,\ \mathcal{A}_{X'}\big)^*$$

pour tout X' sur X ; de même, la forme de $\underset{\sim}{\mathrm{S}\ell}(r)$, associée à $\mathcal{A}$, est le "groupe spécial linéaire de $\mathcal{A}$ ", noyau de la "<u>norme réduite</u>" (5.13)

$$W(\mathcal{A})^* \to \underset{\sim}{G}_{m_X}\ ;$$

enfin, la forme tordue de $\underset{\sim}{GP}(r)$ est $W(\mathfrak{A})^*/\underset{\sim}{G}_{m_X}$, isomorphe aussi au schéma en groupes des automorphismes de l'Algèbre $\mathfrak{A}$.

7.4. - On fera attention que deux Algèbres d'Azumaya non isomorphes peuvent définir des formes isomorphes de $\underset{\sim}{GP}(r)$, ce qui signifie que

$$H^1\left(X , \underset{\sim}{GP}(r)\right) = H^1\left(X , \Gamma_i^o\right) \to H^1\left(X , \Gamma_i\right)$$

n'est pas toujours injectif. De façon précise, pour deux Algèbres d'Azumaya $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ de rang r^2 , $W(\mathfrak{A})^*$ et $W(\mathfrak{B})^*$ sont isomorphes si et seulement si $\mathfrak{B}$ est isomorphe à $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{A}^o$ (en supposant, pour simplifier, X connexe). Le passage de $\mathfrak{A}$ à $\mathfrak{A}^o$ se traduit par le passage de (G , φ) à (G , φ^o) , où φ^o est l'isomorphisme extérieur "opposé" de φ .

7.5. - Si G est une forme intérieure de $\underset{\sim}{G\ell}(r)_X$, correspondant à l'Algèbre d'Azumaya $\mathfrak{A}$, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{G} = \underset{\sim}{\underline{\mathrm{Lie}}}\, G$ de G (SGAD, [9], II) est canoniquement isomorphe à l'algèbre de Lie associée à $\mathfrak{A}$ (par $[X , Y] = xy - yx$). Ceci posé, on prouve facilement que les sections régulières de $\mathfrak{A}$, au sens de 5.6, sont les sections régulières, au sens de la théorie des algèbres de Lie (SGAD [9], XIII), et les sous-algèbres étales maximales $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{A}$ correspondent biunivoquement aux "tores maximaux" T (SGAD, [9], XII) de G , en associant à tout T son algèbre de Lie, et à tout L , le sous-groupe $W(\mathfrak{L})^*$ de $G = W(\mathfrak{A})^*$. La construction locale d'une sous-algèbre étale maximale de $\mathfrak{A}$ (5.7 et 5.8) est essentiellement la même que la construction locale des tores maximaux des schémas en groupes réductifs à l'aide d'un élément régulier de son algèbre de Lie (SGAD, [9], XIV). (Le fait que, pour une telle $\mathfrak{L}$, $X' = \mathrm{Spec}\,\mathfrak{L}$ "splitte" $\mathfrak{A}$ au sens de Brauer, et en particulier que $\mathfrak{A}_{X'}$ soit localement constant au sens de Zariski, ne semble pas par contre avoir été généralisé en termes généraux de formes de groupes semi-simples.)

8. Relations avec les schémas de Brauer-Severi.

8.1. - $\underset{\sim}{GP}(r)_X$ s'identifie également au faisceau de X-automorphismes du fibré projectif $\underset{\sim}{P}_X^{r-1}$ (EGA, [14], IV, § 21 ; ou [15], corollaire à la proposition 2). Donc, par les principes généraux [12], $H^1\left(X , \underset{\sim}{GP}(r)_X\right)$ donne aussi la classification, à un isomorphisme près, des schémas P sur X qui sont isomorphes, localement pour la topologie étale, au fibré projectif $\underset{\sim}{P}_X^{r-1}$. (Il faut utiliser le fait que, pour toute famille couvrante $X_i \to X$ pour la topologie étale, ou seulement pour la topologie f. p. q. c., toute donnée de descente sur la famille des

$P^{r-1}_{X_1}$ est effective, ce qui résulte de [16], 7.8, et du fait que le faisceau $\Omega^{r-1}_{\underset{\sim}{P}_X/X}(\otimes -1)$ sur $\underset{\sim}{P}^{r-1}_X$ est ample relativement à X .) Un tel préschéma s'appellera <u>préschéma de Brauer-Severi</u> sur X . La technique de géométrie formelle [15] permet de prouver l'énoncé suivant, jouant un rôle analogue à 5.1.

THÉORÈME 8.2. - Soit $f : P \to X$ un morphisme propre plat et de présentation finie, et soit $x \in X$ tel que la fibre géométrique $P_{\bar{x}}$ soit isomorphe à l'espace projectif $P^{r-1}_{\overline{k(x)}}$. Alors, il existe un voisinage ouvert U de x , et un morphisme fini étale surjectif $U' \to U$, tel que $P \times_X U'$ soit U'-isomorphe à $\underset{\sim}{P}^{r-1}_{U'}$.

COROLLAIRE 8.3. - Soit P un préschéma sur X . Pour que P soit un préschéma de Brauer-Severi sur X , il faut et il suffit qu'il soit propre, plat, de présentation finie sur X , et que ses fibres géométriques soient des espaces projectifs.

8.4. - La notion de schéma de Brauer-Severi étant ainsi clarifiée, on voit que l'opération de produit tensoriel d'Algèbres se traduit, via les fibrés principaux projectifs, en une opération $P \star Q$ sur les fibrés projectifs, que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter. L'opération de passage à l'algèbre opposée se traduit de même par le passage au fibré de Severi-Brauer <u>dual</u> P^0 de P (correspondant à la notion d'espace projectif dual d'un espace projectif donné). De cette façon, le groupe de Brauer $Br(X)$ peut aussi se décrire en termes de classes d'équivalence de fibrés de Brauer-Severi (P et P' étant équivalents s'il existe des fibrés Q , Q' de Brauer-Severi "<u>banaux</u>", i. e. qui sont des fibrés projectifs associés à des faisceaux localement libres $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, tels que $P \star Q \simeq P' \star Q'$). Retenir surtout qu'à un fibré de Brauer-Severi P est associé une classe

$$\delta P \in Br(X) \subset H^2(X , \underset{\sim}{G}_m)$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour que P soit un fibré projectif.

REMARQUE 8.5. - 8.2 peut aussi s'exprimer en disant que l'espace projectif P^{r-1}_k sur un corps k "n'a pas de déformation de structure non triviale", i. e. que

$$H^1\left(P_k , \mathfrak{G}_{P_k}\right) = 0 ,$$

où $\mathfrak{G}_{P_k}$ est le faisceau tangent à P_k . D'ailleurs, le fait que

$$\underset{\sim}{G}P(r) \xrightarrow{\sim} \underset{\approx}{\mathrm{Aut}}_{gr}\left(P^{r-1}\right)$$

se traduit infinitésimalement par le fait que l'homomorphisme naturel

$$\text{Lie } \underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r) \simeq \mathfrak{Gl}(r)_k/k \to H^0\left(P_k\ ,\ \mathfrak{G}_k\right)$$

est un isomorphisme pour tout corps k , où $\mathfrak{Gl}(r)_k \simeq M_r(K)$ est l'algèbre de Lie de $\underset{\sim}{\mathrm{Gl}}(r)_k$. Il est plausible que, sous cette forme, les résultats précédents se généralisent au cas des espaces homogènes propres de groupes semi-simples, et notamment à la "variété des Borels" (ou "variété des drapeaux") de tels groupes. Cela permettrait d'établir une correspondance parfaite entre "fibrés en variétés de drapeaux" (jouant le rôle des schémas de Brauer-Severi dans le présent numéro) et schémas en groupes semi-simples.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Séminaire de Géométrie algébrique, 1963/64 (SGAA) : Cohomologie étale des schémas. - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques [multigr., à paraître].

[2] AUSLANDER (M.) and GOLDMAN (O.). - The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. math. Soc., t. 97, 1960, p. 367-409.

[3] AZUMAYA (G.). - On maximally central algebras, Nagoya math. J., t. 2, 1951, p. 119-150.

[4] BASS (Hyman). - K-theory and stable algebra. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, n° 22, p. 5-60).

[5] BOTT (Raoul). - The stable homotopy of the classical groups, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 43, 1957, p. 933-935.

[6] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre, Chap. 4-5 et 8. - Paris, Hermann, 1950 et 1958 (Act. scient. et ind., 1102 et 1261 ; Bourbaki, 11 et 23).

[7] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1-2 et 3-4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 et 1293 ; Bourbaki, 27 et 28).

[8] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[9] DEMAZURE (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Séminaire de Géométrie algébrique, 1963 et 1964 (SGAD) : Schémas en groupes. - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques [multigr., 4 fasc. parus, 3 fasc. à paraître].

[10] **DEURING (Max).** - Algebren. - Berlin, J. Springer, 1935 (Ergebnisse der Mathematik, 4, 1).

[11] GIRAUD (Jean). - Analysis situs, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 256, 11 p.

[12] GIRAUD (Jean). - Thèse, en préparation.

[13] GROTHENDIECK (Alexander). - A general theory of fibre spaces with structure sheaf. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1955 (National Science Foundation Research Project on Geometry of Function Space, Report n° 4).

[14] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de Géométrie algébrique, Chapitre 4. - Paris, Presses universitaires de France, 1964-1965 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, n° 20 et 24). [Chap. 5, à paraître.]

[15] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 182, 28 p.

[16] GROTHENDIECK (Alexander). - Descente fidèlement plate, Séminaire de Géométrie algébrique, 1961 (SGA), exposé VIII. - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (multigr.).

[17] VERDIER (Jean-Louis). - Topologie et faisceaux, Séminaire de Géométrie algébrique, 1963/64 (SGAA) : Cohomologie étale des schémas, fasc. 1 (exposés I à VI). - Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Etudes Scientifiques [multigr., exposés I-III parus, exposés IV-VI à paraître].