ALEXANDER GROTHENDIECK

Le groupe de Brauer : II. Théories cohomologiques

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 297, p. 287-307

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__287_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 297 Novembre 1965

LE GROUPE DE BRAUER

par Alexander GROTHENDIECK

II. Théorie cohomologique.

Nous continuons l'étude [5], cité dans la suite comme GB I.

0. Compléments à l'exposé précédent.

Comme résultat spécifique, dans l'interprétation du groupe de Brauer d'un préschéma X en termes de formes tordues des groupes linéaires $\underline{Gl}(n)_X$ sur X (GB I, n° 7), signalons le résultat suivant dû essentiellement à CHEVALLEY, et qu'il convient de rapprocher de GB I 4.2, 5.1 et 8.2 (qui donnent les résultats spécifiques correspondants, pour l'interprétation du groupe de Brauer en termes d'Algèbres d'Azumaya, resp. en termes de schémas de Severi-Brauer) : les schémas en groupes G sur X, localement isomorphes pour la topologie étale (ou pour la topologie fpqc, cela revient au même) à $\underline{Gl}(n)_X$, sont exactement ceux qui sont affines et lisses sur X, et dont les fibres géométriques sont isomorphes au groupe $\underline{Gl}(n)$. La forme infinitésimale de ce résultat s'écrit simplement

$$H^2(G,\underline{g}) = 0 ,$$

où G est un groupe $\underline{Gl}(n)$ sur un corps algébriquement clos, et $\underline{g}$ son algèbre de Lie sur laquelle G opère par la représentation adjointe, le H^2 étant celui de (SGAD I [1]). Le fait que le sous-schéma en groupes des composantes connexes de $\underline{\mathrm{Aut}}\ \underline{gr}_X(\underline{Gl}(n)_X)$ ne soit autre que le groupe $\underline{GP}(n)_X$ des automorphismes intérieurs, s'interprète sous forme infinitésimale par la formule

$$H^1(G,\underline{g}) = 0 .$$

Ces résultats sont en fait valables pour tous les "schémas en groupes réductifs", comme il a été établi par CHEVALLEY et DEMAZURE (SGAD XXIII et XXIV).

Signalons un autre résultat spécifique dans l'interprétation de $Br(X)$ en termes de formes des $\underline{G\ell}(n)_X$, savoir un critère pour qu'une telle forme G soit localement triviale au sens de Zariski, (c'est-à-dire triviale, si X est un schéma local) : il faut et il suffit pour cela que G admette, localement pour la topologie de Zariski, un tore maximal "trivial" i.e. isomorphe à $(\underline{G}_{m\,X})^n$. C'est également là un résultat valable pour tous les schémas en groupes réductifs (SGAD XXIV), mais qui se réduit pour des formes <u>intérieures</u> de $\underline{G\ell}(n)_X$, à l'aide du dictionnaire donné dans GB I 7.5, à la remarque évidente qu'une algèbre d'Azumaya $\underline{A}$ sur X est triviale au voisinage d'un point x si et seulement si elle admet au voisinage de ce point une sous-Algèbre étale maximale $\underline{L}$ triviale, ce qui résulte aussitôt de GB I 5.4 (en fait il suffit que $\mathrm{Spec}(\underline{L})$ admette une section).

On a également un résultat de locale trivialité en termes de fibrés de Severi-Brauer : si un tel fibré admet une section, il est "banal" i.e. associé à un Module localement libre sur X , ce qui montre que P est localement trivial au sens de Zariski si et seulement si il admet une section localement au sens de Zariski. Pour montrer que si P admet une section, il est banal, on note qu'une section de P peut s'interpréter comme un diviseur de Cartier relatif, de degré projectif 1 sur toutes les fibres, du fibré de Severi-Brauer dual P^o de P . Ce diviseur relatif définit un Module inversible $\underline{L}$ sur P^o , et si $g : P^o \longrightarrow X$ est la projection, on vérifie aisément, par les techniques standard, que $g_*(\underline{L}) = \underline{E}$ est un Module localement libre sur X , et que P^o est canoniquement isomorphe au fibré projectif $P(\underline{E})$, donc P est isomorphe à $P(\check{\underline{E}})$. On prouve de la même façon que P est banal si et seulement si il existe sur P un Module inversible $\underline{L}$ tel que $\underline{L}$ induise sur les fibres géométriques le fibré inversible standard de degré 1 .

Signalons que la notion et le nom de variété de Severi-Brauer sur un corps sont dus à F. CHATELET [3], qui a mis en évidence le lien de ces variétés avec le groupe de Brauer. Il convient également d'indiquer le lien du groupe de Brauer avec la théorie des représentations des groupes, qui a joué un rôle important dans des recherches classiques sur cette notion. Soient G un groupe, k un corps, k' une extension galoisienne de k (par exemple la clôture séparable de k), V un vectoriel de dimension finie sur k , donnons-nous une représentation <u>absolument irréductible</u> de G par des automorphismes de $V' = V \otimes_k k'$, et supposons que cette représentation soit équivalente à celles qu'on en déduit par des opérations du groupe de Galois de k' sur k (ce qui s'exprime simplement par le fait que le caractère de la représentation considérée est à valeurs dans k , lorsque k est de caractéristique nulle). On se demande sous quelle condition la représentation donnée est équivalente à la représentation déduite par extension du corps de base d'une représentation de G par automorphismes de V . Introduisant l'algèbre A du groupe G , à coefficients dans k , la donnée de la classe de la représentation linéaire absolument irréductible u équivaut, grâce au théorème de Wedderburn, à la donnée d'une algèbre quotient B' de $A' = A \otimes_k k'$ qui soit isomorphe à une algèbre de matrices $M_n(k')$; l'hypothèse d'invariance signifie que ce quotient est stable par les opérations du groupe de Galois $Gal(k'/k)$ sur A' , ou ce qui revient au même, provient d'une algèbre quotient B de A . Comme $B \otimes_k k' \simeq B'$, B est nécessairement une algèbre d'Azumaya, et on constate aussitôt que le problème posé a une solution si et seulement si cette dernière est triviale, i.e. si sa classe dans $Br(k)$ est nulle. Bien entendu, on pourrait se **débarrasser** de l'hypothèse que k'/k soit galoisienne, et remplacer k par une base quelconque, en reformulant le problème en termes de faisceaux fpqc ; on laisse ce plaisant exercice au soin du lecteur.

1. Résultats préliminaires sur les $H^i(X,\underline{G}_m)$.

LEMME 1.1.- Soient X un préschéma quasi-compact et quasi-séparé (par exemple un préschéma noethérien), $x \in X$, F_x un faisceau sur $x = \operatorname{Spec} k(x)$ (au sens de la topologie étale SGAA VII [2]), $i_x : x \longrightarrow X$ le morphisme canonique. Alors les faisceaux $R^q i_{x*}(F_x)$ sur X sont des faisceaux de torsion pour $q \geqslant 1$, et les groupes $H^q(X,i_{x*}(F_x))$ sont des groupes de torsion pour $q \geqslant 1$.

On utilise simplement le fait que la cohomologie du spectre d'un corps, et plus généralement d'un schéma dont l'espace sous-jacent est fini et discret, est de torsion en dimension $\geqslant 1$. Ceci, et le calcul des fibres des $R^q i_{x*}(F_x)$ (SGAA VIII 5.2) prouve que ces faisceaux sont des faisceaux de torsion pour $q \geqslant 1$. Il s'ensuit alors que $H^p(X,R^q i_{x*}(F_x))$ est un groupe de torsion pour tout p , compte tenu de l'hypothèse sur X (SGAA IX), et la deuxième assertion du lemme résulte alors de la suite spectrale de Leray

$$(1) \qquad E_2^{p,q} = H^p(X,R^q i_{x*}(F_x)) \Longrightarrow H^*(x,F_x) .$$

COROLLAIRE 1.2.- Sous les conditions de 1.1 sur X , soit $\underline{R}_X^*$ le faisceau des fonctions rationnelles inversibles sur X . Supposons que X n'ait qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors les groupes $H^q(X,\underline{R}_X^*)$ sont de torsion pour $q \geqslant 1$.

On applique 1.1 aux points maximaux x de X, et aux faisceaux des fonctions rationnelles inversibles sur $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x})$.

Supposons de plus que X soit réduit, ou noethérien et sans cycles associés immergés, de sorte que l'homomorphisme canonique $\underline{G}_{m\,X} \dashrightarrow \underline{R}_X^*$ de faisceaux étales sur X est injectif. On a donc une suite exacte

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow \underline{G}_{m\,X} \longrightarrow \underline{R}_X^* \longrightarrow \underline{\mathrm{Div}}_X \longrightarrow 0 ,$$

où $\underline{\mathrm{Div}}_X$ (faisceau des diviseurs de Cartier) est défini comme le faisceau quotient. Alors la suite exacte de cohomologie et 1,2 donnent :

COROLLAIRE 1.3.- Supposons X noethérien sans cycle premier immergé, ou X quasi-compact, quasi-séparé, réduit et n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Alors pour $q \geqslant 1$, l'homomorphisme

$$H^q(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(X,\underline{G}_{m\,X})$$

est un isomorphisme mod groupes de torsion.

PROPOSITION 1.4.- Soit X un préschéma noethérien. Supposons que les anneaux hensélisés stricts (SGAA VIII 4.4) des anneaux locaux de X soient factoriels, en d'autres termes que pour tout X' étale sur X, les anneaux locaux de X' soient factoriels (hypothèse satisfaite, en vertu de Auslander-Buchsbaum, si X est régulier). Alors les groupes $H^q(X,\underline{G}_m)$ sont des groupes de torsion pour $q \geqslant 2$.

En vertu de 1.3 il revient au même de dire que les $H^q(X,\underline{\mathrm{Div}}_X)$ sont des groupes de torsion pour $q \geqslant 1$. Or l'hypothèse faite sur X peut aussi s'exprimer en disant que le faisceau $\underline{\mathrm{Div}}_X$ des diviseurs de Cartier coïncide avec le faisceau $\underline{Z}_X^1$ des diviseurs de Weil, lequel peut s'écrire

$$(3) \qquad \underline{Z}^1 = \coprod_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(\underline{Z}_x) ,$$

où $X^{(1)}$ désigne la partie de X formée des $x \in X$ tels que $\dim \underline{O}_{X,x} = 1$, i.e. formée des points génériques des parties fermées irréductibles de codimension 1 de X, et $\underline{Z}_x$ désigne le faisceau constant $\underline{Z}$ sur x. Comme la formation des $H^q(X, \ )$ commute aux sommes directes quelconques (SGAA VII 3,3), la conclusion résulte de 1.1.

COROLLAIRE 1.5.- La conclusion de 1.4 reste valable si on remplace l'hypothèse de factorialité par celle que $\dim X \leq 1$.

En effet, dans ce cas on voit immédiatement que l'on a un isomorphisme canonique

$$\text{(3 bis)} \qquad \underline{\mathrm{Div}}_X = \coprod_{x \in X^{(1)}} i_{x*}(\underline{\mathrm{Div}}_{X,x}) \ ,$$

où $\underline{\mathrm{Div}}_{X,x} = i_x(\underline{\mathrm{Div}}_X)$, et la conclusion résulte encore de 1.1 comme ci-dessus.

LEMME 1.6.- Sous les conditions de 1.2 on a

$$H^1(X, \underline{R}_X^*) = 0 \ ,$$

et l'application canonique

$$H^2(X, \underline{R}_X^*) \longrightarrow \coprod_i H^2(x_i, \underline{R}_{x_i}^*)$$

(où les x_i sont les points maximaux de X) est injective.

Cela résulte en effet aussitôt de la suite spectrale (1) et du théorème 90 de Hilbert, qui implique que

$$R^1 i_{x*}(\underline{R}_x^*) = 0 \quad , \quad H^1(x, \underline{R}_x^*) = 0$$

pour tout $x \in X$, et en particulier pour tout point maximal de X.

On en conclut, grâce à la suite exacte de cohomologie déduite de (2) :

PROPOSITION 1.7.- Sous les conditions de 1.3, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow H^2(X,\underline{R}_X^*) \longrightarrow H^2(X,\underline{\mathrm{Div}}_X) \quad \dots ,$$

et l'application de restriction

$$(4) \qquad H^2(X,\underline{G}_m) \longrightarrow \coprod_i H^2(\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x_i}),\underline{G}_m)$$

a comme noyau $H^1(X,\underline{\mathrm{Div}}_X)$, (où les x_i sont les points maximaux de X).

COROLLAIRE 1.8.- Sous les conditions de 1.4 l'application (4) est injective. Même conclusion sous les conditions de 1.5, si on suppose de plus que pour tout point fermé x de X , $k(x)$ est séparablement clos.

Il revient au même de prouver que $H^1(X,\underline{\mathrm{Div}}_X)$ est nul, ce qui résulte de la forme (3) resp. (3 bis) du faisceau $\underline{\mathrm{Div}}_X$ et du

LEMME 1.9.- Sous les conditions de 1.1, supposons de plus que F_x soit le faisceau constant défini par un groupe sans torsion M . Alors on a $H^1(X,i_{x*}(F_x)) = 0$.

En effet, en vertu de (1) ce groupe est isomorphe à un sous-groupe de $H^1(x,M)$, qui est nul comme on constate aussitôt par l'interprétation de ce groupe en termes de cohomologie galoisienne (SGAA VIII 2.3).

Utilisant l'inclusion canonique $\mathrm{Br}(X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)$ (GB I, n° 2), et le fait que $\mathrm{Br}(\underline{O}_{X,x_i}) \simeq \mathrm{Br}(k(x_i))$ (cas particulier du théorème d'Azumaya pour un anneau local hensélien GB I 6.1), on trouve :

COROLLAIRE 1.10.- Sous les conditions de 1.8, si (x_i) est la famille des points maximaux de X , l'application canonique

$$\mathrm{Br}(X) \longrightarrow \coprod_i \mathrm{Br}(X_i)$$

est injective.

REMARQUES 1.11.- a) Lorsque X est régulier, 1.9 est dû à AUSLANDER-GOLDMAN. D'autre part, d'après le dictionnaire GB I 5.11, le résultat 1.10 implique que tout torseur (= fibré principal homogène) sur X , de groupe le groupe projectif $\underline{GP}(r)_X$, qui est trivial aux points maximaux de X , i.e. qui admet une section rationnelle, est localement trivial. On peut conjecturer que la même propriété est vraie, sur tout préschéma localement noethérien régulier X , pour tout préschéma en groupes G semi-simple sur X ; comparer SGAD, Exp V, n° 5, remarque 3°.

b) Supposant que X soit normal et noethérien, on peut préciser le noyau $H^1(X,\underline{Div}_X)$ qui intervient dans 1.7 grâce à la suite exacte

$$(5) \qquad 0 \to \underline{Div}_X \to \underline{Z}^1_X \to \underline{P}_X \to 0 ,$$

où le faisceau $\underline{P}_X$, qui mesure en un sens le défaut de factorialité des anneaux locaux de X et des X' étales sur X , mérite le nom de faisceau des groupes de Picard locaux sur X . Comme on a $H^1(X,\underline{Z}^1_X) = 0$ en vertu de 1.10 et (3), il vient

$$(6) \qquad H^1(X,\underline{Div}_X) = \operatorname{Coker}(\underline{Z}^1(X) \longrightarrow H^0(X,\underline{P}_X)) .$$

Un cas intéressant est celui où les conditions de factorialité de 1.4 sont satisfaites sauf en les points d'une partie fermée discrète Z de X (par exemple si X est régulier sauf en un nombre fini de points singuliers isolés). Alors le faisceau $\underline{P}_X$ est concentré sur Z , et on déduit facilement de (6) un isomorphisme

$$(7) \qquad H^1(X,\underline{Div}_X) = \coprod_{x\in Z} \operatorname{Pic}(\overline{U}_x)^{\pi_x} / \operatorname{Im} \operatorname{Pic}(U_x) ,$$

où $U_x = \operatorname{Spec}(\underline{O}_{X,x}) - x$, $\overline{U}_x = \operatorname{Spec}(\overline{\underline{O}_{X,x}}) - \overline{x}$ ($\overline{\underline{O}_{X,x}}$ étant le hensélisé strict de $\underline{O}_{X,x}$), et enfin $\pi_x = \operatorname{Gal}(\overline{k(x)}/k(x))$, qu'on fait opérer sur $\operatorname{Spec}(\overline{\underline{O}_{X,x}})$ donc sur $\overline{U}_x$ de la façon habituelle, enfin les Pic désignent les groupes de Picard des schémas envisagés. Lorsque $k(x)$ est séparablement clos, cette expression se simplifie en

(7 bis) $$H^1(X, \underline{Div}_X) = \coprod_{x \in Z} \mathrm{Pic}(\overline{U_x}) / \mathrm{Im}\, \mathrm{Pic}(U_x) ,$$

ce qui montre que ce groupe mesure l'écart entre les groupes de Picard locaux, en les $x \in Z$, au sens de la topologie de Zariski et au sens de la topologie étale. Sauf malentendu de la part du conférencier, MUMFORD a construit une surface normale (sur le corps des complexes si on veut), et un point $x \in X$, pour lequel $\mathrm{Pic}(U_x) = 0$ i.e. $\underline{O}_{X,x}$ est factoriel, mais $\mathrm{Pic}(\overline{U_x}) \neq 0$ (donc le hensélisé de $\underline{O}_{X,x}$ n'est pas factoriel), et même tel que $\mathrm{Pic}(\overline{U_x})$ ne soit pas un groupe de torsion ni même un groupe de type fini ([9], p. 16 ; comparer [6], Exp XIII, n° 5). En vertu de 1.7 cela donne donc un exemple où $H^2(X, \underline{G}_m) \longrightarrow H^2(x, \underline{G}_m) = \mathrm{Br}(x)$ (x le point générique) n'est pas injectif, le noyau n'étant pas de torsion, et a fortiori un exemple où $H^2(X, \underline{G}_m)$ n'est pas de torsion, X étant une surface algébrique normale ; il ne devrait pas être difficile de la même façon de construire un exemple d'une surface algébrique normale pour laquelle $\mathrm{Br}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(x)$ n'est pas injectif. Dans le cas d'une courbe non normale, un tel exemple figure dans AUSLANDER-GOLDMAN, savoir le cas de la courbe $\mathrm{Spec}\ \underline{\underline{R}}[X,Y]/(X^2 + Y^2)$, où $\underline{\underline{R}}$ est le corps des réels.

c) La conclusion d'injectivité de 1.8, lorsque X est de dimension ≤ 1 , peut sans doute être prouvée sous des conditions plus générales, par exemple en supposant seulement que les corps résiduels $k(x)$ (x point fermé de X) sont de dimension ≤ 1 au sens de Serre [10], ou que X est "géométriquement unibranche", comme on voit en explicitant les sommandes du deuxième membre de (3 bis). Faire attention cependant à l'exemple de AUSLANDER-GOLDMAN qu'on vient de signaler dans b).

2. Cas de surjectivité de l'application canonique $Br(X) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)$.

Que cette application (toujours injective, rappelons-le) n'est pas nécessairement bijective résulte du fait que si X est quasi-compact, $Br(X)$ est un groupe de torsion (GB I n° 2), alors qu'on a signalé (1.11 b)) que $H^2(X,\underline{G}_m)$ n'est pas toujours un groupe de torsion. On peut cependant se demander si cette application a comme image exactement le sous-groupe de torsion du H^2 , ce qui constituerait une généralisation du théorème de Serre GB I 1.6. Apparemment, on n'a pas construit encore de contre-exemple, et on ignore la réponse même dans le cas d'une surface algébrique (projective, ou affine) normale sur le corps $\underline{C}$, ou d'une variété (projective, ou affine) non singulière de dimension trois sur $\underline{C}$. Un autre cas, intéressant parce que très explicite, qui mériterait d'être regardé, est celui de la réunion X de quatre plans affines en position générale dans l'espace affine à trois dimensions, de sorte que X est homotope à la sphère S^2 , et par la théorie de Kummer (cf. n° suivant), le sous-groupe des éléments x de $H^2(X,\underline{G}_m)$ tels que $nx = 0$ est engendré par un élément canonique : cet élément est-il défini par une algèbre d'Azumaya sur X ?

Voici les quelques résultats positifs connus.

THÉORÈME 2.1.- Soit X un préschéma noethérien. Pour tout $\xi \in H^2(X,\underline{G}_m)$, il existe une partie fermée Y de X , de codimension $\geqslant 2$, telle que $\xi \mid X - Y$ soit dans $Br(X - Y)$, i.e. définissable par une Algèbre d'Azumaya sur $X - Y$. Lorsque X est régulier, on peut dans cet énoncé prendre même Y de codimension $\geqslant 3$.

COROLLAIRE 2.2.- Si X est de dimension $\leqslant 1$, on a $Br(X) = H^2(X,\underline{G}_m)$. La même conclusion est vraie si X est régulier et de dimension $\leqslant 2$.

Indiquons le principe de la démonstration, fort élémentaire, de 2.1. Utilisant, si on veut, le fait bien connu que $Br(K) = H^2(K,\underline{G}_m)$ lorsque K est un corps, on en déduit grâce à GB I 6.1 l'assertion analogue pour K artinien, d'où facilement l'existence d'un ouvert dense U dans X, et d'une algèbre d'Azumaya $\underline{A}$ de rang constant sur U, définissant $\xi|U$. Si $Z = X - U$ contient encore des composantes irréductibles Z_i de codimension 1, on montre que si x_i est le point générique de Z_i, on peut prolonger $\underline{A}$ en une Algèbre d'Azumaya sur un voisinage ouvert U_i de x_i, quitte au besoin à remplacer $\underline{A}$ d'abord par son produit tensoriel par une Algèbre de matrices $\underline{M}_n(\underline{O}_U)$. En effet, on voit aussitôt que ce problème se ramène au problème analogue avec X remplacé par $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x_i})$, et il n'est pas difficile de voir qu'il admet une solution, utilisant le fait que $\underline{O}_{X,x_i}$ est de dimension 1. De cette façon, on diminue de proche en proche Z en lui enlevant ses composantes irréductibles de codimension 1, ce qui prouve la première assertion de 2.1, compte tenu de 1.8. Pour la deuxième, lorsque X est régulier, on note que si $i : U = X - Y \longrightarrow X$ est l'inclusion, alors $i_*(\underline{A})$ est une Algèbre sur X qui est un Module cohérent "réflexif", et pour cette raison libre en les points x de X tels que $\dim \underline{O}_{X,x} \leq 2$. Utilisant le critère GB I 5.1 (iii), on voit de plus que $i_*(\underline{A})$ est une Algèbre d'Azumaya en tout point où il est localement libre, en particulier en les $x \in X$ tels que $\dim \underline{O}_{X,x} \leq 2$. Il suffit donc de prendre pour Y l'ensemble des $x \in X$ en lesquels $i_*(\underline{A})$ n'est pas localement libre, appliquant encore 1.8. Signalons que ce dernier raisonnement, et la deuxième assertion dans 2.2, sont dus essentiellement à AUSLANDER-GOLDMAN, sous la forme suivante n'utilisant pas de cohomologie :

PROPOSITION 2.3.- Soient X un préschéma régulier connexe de dimension ≤ 2,

η le point générique de X , $K = k(\eta)$, de sorte que $Br(X) \subset Br(K)$, et de même pour tout $x \in X$, $Br(\underline{O}_{X,x}) \subset Br(K)$, en vertu de 1.8. Ceci posé, on a

$$Br(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} Br(\underline{O}_{X,x}) , \tag{9}$$

l'intersection prise dans $Br(K)$, et $X^{(1)}$ désignant l'ensemble des $x \in X$ tels que $\underline{O}_{X,x}$ soit de dimension 1 , i.e. soit un anneau de valuation discrète.

La démonstration est essentiellement celle qui précède.

PROPOSITION 2.4.- Soit X le spectre d'un anneau local, et $\xi \in H^2(X,\underline{G}_m)$. Pour que ξ soit dans $Br(X)$, il faut et il suffit que ξ soit "isotrivial" i.e. qu'il existe un morphisme fini étale surjectif $f : X' \longrightarrow X$ tel que l'image inverse $f^*(\xi)$ soit nulle.

Le "il faut" résulte de GB I 5.1. Pour le "il suffit", on utilise la suite spectrale de HOCHSCHILD-SERRE (SGAA VIII 8.4)

$$E_2^{p,q} = H^p(G,H^q(X',\underline{G}_{m\,X'})) \Longrightarrow H^*(X,\underline{G}_{m\,X}) ,$$

en supposant X' principal galoisien de groupe G , ce qui est loisible. Tenant compte du fait que $H^1(X',\underline{G}_{m\,X'}) = Pic(X') = 0$, car X' est semi-local, on en tire la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^2(G,\underline{G}_m(X')) \xrightarrow{\alpha} H^2(X,\underline{G}_{m\,X}) \xrightarrow{\beta} H^2(X',\underline{G}_{m\,X'})^G ,$$

qui montre que si ξ est dans le noyau de β (comme on le suppose), il est défini par un élément de $H^2(G,\underline{G}_m(X'))$, donc par un 2-cocycle de G à coefficients dans $\underline{G}_m(X')$. La construction classique bien connue de l'algèbre "produit croisé" associée à un tel cocycle s'applique encore dans le cas actuel, et permet de construire une algèbre d'Azumaya sur l'anneau affine A de X , de rang n^2 où $n = card(G)$, dont l'invariant est ξ .

COROLLAIRE 2.5.- On a $\mathrm{Br}(X) = H^2(X,\underline{G}_m)$ lorsque X est local hensélien.

En effet, dans ce cas toute classe de cohomologie sur X, en dimension > 0, est isotriviale, car le hensélisé strict A' de l'anneau local hensélien A est alors limite inductive d'algèbres finies et étales sur A, et toute classe de cohomologie en dimension > 0 s'annule sur $\mathrm{Spec}(A')$, et on peut appliquer SGAA VII 5.8.

COROLLAIRE 2.6.- Soit X un schéma local et soit ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique résiduelle de X. Pour que tout élément de ℓ-torsion de $H^2(X,\underline{G}_m)$ soit dans $\mathrm{Br}(X)$, il faut et il suffit que pour tout entier $n > 0$, et tout $\xi \in H^2(X,\mu_{\ell^n})$ (où μ_{ℓ^n} désigne le faisceau localement constant des racines n-èmes de l'unité sur X), soit isotrivial i.e. soit effaçable par un morphisme fini étale surjectif $X' \longrightarrow X$.

La première assertion résulte de 2.4 et de la théorie de Kummer (cf. n° suivant), la deuxième en est une simple reformulation, compte tenu que μ_{ℓ^n} est localement isomorphe à $\underline{Z}/\ell^n\underline{Z}$ (au sens de la topologie étale). La dernière assertion est due à ARTIN, et résulte de l'existence des "bons voisinages" d'ARTIN pour les points d'un préschéma lisse sur un corps algébriquement clos (SGAA XI), qui implique que toute classe de cohomologie en degré > 0 sur un schéma X lisse sur un corps k, à coefficients $\underline{Z}/n\underline{Z}$, n premier à la caractéristique, est localement isotriviale.

REMARQUE 2.7.- En l'absence de critères généraux satisfaisants assurant l'égalité $\mathrm{Br}(X) = H^2(X,\underline{G}_m)$, et vu l'importance du groupe $H^2(X,\underline{G}_m)$ indépendamment de toute interprétation géométrique en termes d'Algèbres d'Azumaya, nous appellerons

$H^2(X,\underline{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique du préschéma X, et nous le noterons $Br'(X)$. Il est donc identique au groupe de Brauer ordinaire $Br(X)$ lorsque X est noethérien et de dimension ≤ 1, ou régulier et de dimension 2, ou lorsque X est local hensélien, ou enfin lorsque X est le spectre d'un anneau local d'un schéma lisse sur un corps k de caractéristique nulle.

3. Application de la suite exacte de Kummer.

C'est la suite exacte de faisceaux étales sur X :

$$(10) \qquad 0 \longrightarrow (\mu_n)_X \longrightarrow (\underline{G}_m)_X \xrightarrow{x \mapsto x^n} (\underline{G}_m)_X \longrightarrow 0 ,$$

où n est un entier > 0 premier aux caractéristiques résiduelles de X, et où μ_n désigne le faisceau des racines n-èmes de l'unité, qui est localement isomorphe (pour la topologie étale) au faisceau constant $\underline{Z}/n\underline{Z}$. Désignant, pour tout groupe abélien B, par $B(\ell)$ le sous-groupe de ℓ-torsion de B (formé des éléments dont l'ordre est une puissance de ℓ), on trouve, à l'aide de la suite exacte de cohomologie déduite de (10) et passage à la limite pour $n = \ell^m$:

THÉORÈME 3.1.- Soient X un préschéma, ℓ un nombre premier distinct de toute caractéristique résiduelle de X. Alors on a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)\otimes_{\underline{Z}}\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell \longrightarrow H^2(X,\mu_{\ell^\infty}) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)(\ell) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^{i-1}(X,\underline{G}_m)\otimes_{\underline{Z}}\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell \longrightarrow H^i(X,\mu_{\ell^\infty}) \longrightarrow H^i(X,\underline{G}_m)(\ell) \longrightarrow 0 \qquad \text{si } i \geq 3 .$$

Rappelons aussi pour mémoire les valeurs de $H^i(X,\underline{G}_m)$ pour $i = 0,1$, qui sont des invariants fondamentaux bien connus de X :

$$H^0(X,\underline{G}_m) = H^0(X,\underline{O}_X)^* \quad , \quad H^1(X,\underline{G}_m) = \mathrm{Pic}(X) .$$

COROLLAIRE 3.2.- Supposons que les $H^i(X,\mu_{\ell^\infty})$ soient des $\underline{Z}_\ell$-modules "de type cofini", i.e. que l'annulateur de ℓ dans ce groupe soit fini, i.e. que ce groupe soit isomorphe à une somme directe $(\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell)^r +$ groupe fini (ou ce qui revient au même, grâce à la suite exacte de cohomologie relative à la suite exacte de faisceaux $0 \longrightarrow \mu_\ell \longrightarrow \mu_{\ell^\infty} \xrightarrow{x \mapsto x^\ell} \mu_{\ell^\infty} \longrightarrow 0$, que les $H^i(X,\mu_\ell)$ soient des groupes finis). Alors les groupes $H^i(X,\underline{G}_m)(\ell)$ sont également de type cofini, et on a, sous les conditions de 1.8:

$$H^i(X,\underline{G}_m)(\ell) \simeq H^i(X,\mu_{\ell^\infty}) \qquad \text{pour } i \geq 3 .$$

Cela résulte de la suite exacte de cohomologie associée à (10) pour $n = 1$, de la deuxième suite exacte dans 3.1 et du fait que si M est un groupe de ℓ-torsion de type cofini, alors $M \otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell = 0$.

CAS PARTICULIERS 3.3.- En vertu des résultats de finitude exposés dans SGAA XIV, les hypothèses de 3.2 sont vérifiées dans chacun des cas suivants :

a) X est de type fini sur un corps k séparablement clos ou fini, et est soit propre sur k , soit lisse sur k , ou (pour pouvoir disposer de la résolution des singularités de HIRONAKA [7] resp. ABHYANKAR [1]) k est de caractéristique zéro, ou $\dim X \leq 2$.

b) X est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, et est soit lisse sur $\mathrm{Spec}\,\underline{Z}$, soit propre sur un ouvert de $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$.

Il est d'ailleurs très plausible que les hypothèses de finitude de 3.2 sont vérifiées dès que X est de type fini sur un corps fini, ou un corps séparablement clos, ou sur $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, mais les moyens actuels ne permettent pas de le démontrer (faute notamment de disposer de la résolution des singularités sous des conditions suffisamment générales).

COROLLAIRE 3.4.- Sous les conditions de 3.2 le "corang" de la partie de ℓ-torsion de $\mathrm{Br}'(X)$ est égal à $B_2 - \rho$, où B_2 est le "deuxième nombre de Betti ℓ-adique de X ", défini comme le rang de $H^2(X,\underline{Z}_\ell)$ ou encore comme le "corang" de $H^2(X,\mu_{\ell^\infty})$, et où ρ est le "nombre de Picard" de X , défini comme le corang de $\mathrm{Pic}(X) \otimes \underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell$.

Précisons que par "corang" d'un groupe de ℓ-torsion M qui est de type cofini, i.e. isomorphe à $(\underline{Q}_\ell/\underline{Z}_\ell)^r \times$ groupe fini, on entend le nombre entier r , qui est aussi égal au rang du $\underline{Z}_\ell$-module de type fini

$$T_\ell(M) = \varprojlim_n {}_{\ell^n}M ,$$

où pour tout entier m , ${}_{\ell^m}M$ désigne le noyau de la multiplication par ℓ^m dans M .

3.5.- Lorsqu'on ne fait pas d'autre hypothèse que dans 3.4, le "nombre de Picard" de X dépend a priori de ℓ , tout comme B_2 lui-même. Cependant, dans des cas importants, $\mathrm{Pic}(X)$ est une extension d'un groupe abélien de type fini $\mathrm{NS}(X)$ par un groupe $\mathrm{Pic}(X)^o$ qui est ℓ-divisible pour tout ℓ premier aux caractéristiques résiduelles de X . C'est sans doute le cas lorsque X est de type fini sur un corps k séparablement clos, et peut être prouvé du moins lorsque de plus X est propre sur k (en utilisant le théorème de finitude de Néron, l'existence du schéma de Picard de X et la structure des groupes algébriques commutatifs connexes sur k) ; lorsque k est un corps fini, $\mathrm{Pic}(X)$ est même un groupe de type fini, du moins si X est propre sur k ; de même, il est plausible que si X est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$ et réduit, $\mathrm{Pic}(X)$ est un groupe de type fini lui-même. Lorsque $\mathrm{Pic}(X)$ a la structure qu'on vient d'envisager, alors le nombre ρ introduit dans 3.4 n'est autre que le rang du groupe de Néron-Severi

NS(X) , et en particulier ne dépend pas de ℓ . C'est là un invariant fondamental bien connu, appelé souvent "nombre de Picard" de X . Il est bien connu que cet invariant est de nature essentiellement arithmétique, et non topologique, contrairement aux nombres de Betti B_i , car contrairement à ces derniers, le nombre ρ ne reste pas constant en général lorsque X varie dans une famille de schémas algébriques lisses définie par un morphisme propre et lisse $Y \longrightarrow Z$, avec Z connexe. Pour cette raison, le corang $B_2 - \rho$ du groupe $Br'(X)(\ell)$ est également un invariant de nature essentiellement arithmétique.

3.6.- Ajoutons que lorsque X est de type fini sur un corps séparablement clos ou sur $\mathrm{Spec}(\underline{Z})$, il est sans doute vrai que les nombres de Betti ℓ-adiques (ℓ premier aux caractéristiques résiduelles) ne dépendent pas de ℓ . Malheureusement, ce fait n'est pas démontré encore à l'heure actuelle, même pour le B_2 d'un schéma projectif et lisse de dimension 3 sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Il est démontré cependant lorsque X est lisse et propre sur k séparablement clos, et $\dim X \leq 2$, grâce au fait que B_1 s'interprète comme la dimension du schéma de Picard, que l'on a la formule de dualité $B_i = B_{2n-i}$ (où $n = \dim X$, X supposé connexe), et que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\sum_i (-1)^i B_i$ s'interprète comme la self-intersection de la diagonale dans $X \times X$. Il s'ensuit donc, compte tenu de 2.2 :

COROLLAIRE 3.7.- Supposons X lisse et propre sur un corps k séparablement clos, et $\dim X \leq 2$. Alors le corang de la partie de ℓ-torsion $Br(X)(\ell)$ de $Br(X)$ ne dépend pas du nombre premier ℓ distinct de la caractéristique de k .

D'ailleurs, si $\dim X \leq 1$, ce corang est nul, comme il résulte soit de 3.1 et du calcul explicite de $H^2(X,\mu_n)$ lorsque X est une courbe lisse et propre, soit de 1.8 et du théorème de Tsen pour le corps des fonctions de X (du moins lorsque k est même algébriquement clos, et alors on trouve même que $Br(X) = 0$; alors que pour k séparablement clos de caractéristique $p > 0$ on peut conclure seulement que $Br(X)$ est un groupe de p-torsion).

REMARQUE 3.8.- L'interprétation de $B_2 - \rho$ comme corang ℓ-adique du groupe de Brauer cohomologique $Br'(X)$ fournit immédiatement l'<u>inégalité de Picard</u>

(11) $$\rho \leq B_2 ,$$

qui avait été étendue par IGUSA [8] au cas des surfaces projectives lisses sur un corps algébriquement clos k de caractéristique quelconque, en utilisant la structure du groupe fondamental "tame" d'une courbe algébrique. IGUSA ne disposant pas à l'époque de la cohomologie étale, définit B_2 dans le cas d'une surface lisse projective connexe par la formule

$$B_2 = c_2 + 2(q - 1) ,$$

où $q = B_1$ est la dimension du schéma de Picard, et c_2 est la caractéristique d'Euler-Poincaré i.e. la self-intersection de la diagonale. Utilisant la définition générale de B_2 en termes de cohomologie étale, nous obtenons l'inégalité (11) pour un schéma propre quelconque X sur k. Signalons que la même méthode peut être utilisée pour prouver en même temps le <u>théorème de Néron</u>, disant que le groupe de Néron-Severi $NS(X)$ de X est de type fini, dans le cas d'un X propre sur k et par ailleurs quelconque, et avec la précision supplémentaire que lorsque X varie dans une famille $f : Y \longrightarrow Z$ paramétrée par un préschéma quasi-compact Z (f un morphisme de présentation finie à fibres propres), alors les groupes de Néron-Severi correspondants ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, à isomorphisme près. Ceci est lié bien entendu au fait que la majoration de Picard-Igusa pour ρ est faite par un invariant B_2 qui est de nature topologique, donc a une tendance à rester constant pour un X variant dans une famille ...

REMARQUE 3.9.- On peut donner une interprétation géométrique de la première suite exacte dans 3.1, en introduisant une variante du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ d'un préschéma X, qu'on pourrait appeler groupe de Brauer spécial de X et désigner par le symbole $\mathrm{SBr}(X)$. Il se définit en termes d'Algèbres d'Azumaya de la même façon que le groupe de Brauer ordinaire, mais en négligeant non pas toutes les Algèbres d'Azumaya de la forme $\mathrm{End}(\underline{E})$, $\underline{E}$ Module localement libre de type fini, mais seulement celles pour lesquelles $\underline{E}$ peut être choisi tel que sa puissance extérieure maxima $\det(\underline{E})$ soit isomorphe à $\underline{O}_X$. Du point de vue torseurs sous le groupe projectif $\underline{\mathrm{GPL}}(n)_X$, ceci signifie qu'on néglige ceux dont le groupe structural peut se relever à $\underline{\mathrm{S}\ell}(n)_X$ (et non seulement à $\underline{\mathrm{G}\ell}(n)_X$). Il s'ensuit qu'à un élément de $\mathrm{SBr}(X)$ défini par une Algèbre d'Azumaya de rang n^2 est associé un invariant dans $H^2(X,\mu_n)$ (et non seulement dans $H^2(X,\underline{G}_m)$), - du moins si n est premier aux caractéristiques résiduelles de X, ou en convenant dans le cas général de travailler avec la topologie "fidèlement plate de présentation finie" au lieu de la topologie étale, (qui donne le même résultat si n premier aux caractéristiques résiduelles). On obtient ainsi un homomorphisme caractéristique :

$$\mathrm{SBr}(X)(\ell) \longrightarrow H^2(X,\mu_{\ell^\infty}) \ , \tag{12}$$

avec les mêmes précautions. D'autre part, on définit aisément une suite exacte canonique :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \otimes \underline{Q}/\underline{Z} \longrightarrow \mathrm{SBr}(X) \longrightarrow \mathrm{Br}(X) \longrightarrow 0 \ , \tag{13}$$

qui précise les relations entre $Br(X)$ et $SBr(X)$. Prenant enfin les composantes de ℓ-torsion dans (13), cette suite exacte s'envoie dans la première suite exacte de 3.1 à l'aide de l'homomorphisme (12) sur les termes médians, et l'homomorphisme caractéristique $Br(X)(\ell) \longrightarrow H^2(X,\underline{G}_m)(\ell)$ pour les termes de droite. Cela montre en particulier que ce dernier est un isomorphisme si et seulement si (12) l'est.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR - Local Uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$. Ann. of Math. 63 (1956), 491-526.

[2] M. ARTIN et A. GROTHENDIECK - Cohomologie étale. Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques 1963/64 (multigraphié en trois fascicules, en préparation, exposés I à VIII tirés), (cité SGAA).

[3] F. CHÂTELET - Variations sur un thème de H. Poincaré. Annales ENS, 61, 1944, p. 249-300.

[4] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK - Schémas en Groupes. Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques 1963 et 1964 (multigraphié en sept fascicules, en préparation, fascicules 1, 3, 4 parus), (cité SGAD).

[5] A. GROTHENDIECK - Le Groupe de Brauer, I, Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses. Séminaire Bourbaki Mai 1965, n° 290, 21 p., (cité GB I).

[6] A. GROTHENDIECK - Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques 1962 (multigraphié en deux fascicules).

[7] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.

[8] J. I. IGUSA - Betti and Picard numbers of abstract algebraic surfaces, Proc. Nat. Acad. Sc. 46 (1960), 724-726.

[9] D. MUMFORD - The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publications Math. 9 (1961), 5-22.

[10] J.-P. SERRE - Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Math, 5 (1964), Springer.

ERRATA

Page 297-10 - Ligne 6 du bas, après "noethérien" ajouter : "régulier en codimension ≤ 1 .".

Ligne 3 du bas, après "régulier" ajouter : "en codimension ≤ 2 ".

Après la ligne 3 du bas, ajouter à la ligne : "La même démonstration prouvera : ".

Ligne 2 du bas, après "de dimension ≤ 1" ajouter : "à corps résiduels séparablement clos (de dimension cohomologique ≤ 1 suffit sans doute, cf. 1.11 c)),"

Page 297-13 - Ligne 12, à la fin du COROLLAIRE 2.6, ajouter : "Cette condition est vérifiée si X est localisé d'un schéma lisse sur un corps k .".

Page 297-15 - Ligne 10, supprimer "de type cofini".

-:-:-:-

Commentaire

(ajouté le 28.8.66)

A propos de la structure de Pic(X) prévue dans page 16, ligne -4, précisons que lorsque X est de type fin sur Spec($\underline{Z}$) et que X est de plus propre sur Spec($\underline{Z}$) ou normal, alors Pic(X) est bien un groupe de type fini; par contre, si on suppose seulement X réduit, et même lorsque X est affine, Pic(X) n'est pas nécessairement de type fini, comme l'ont remarqué Bass et Murthy (en précisant, dans l'esprit de la théorie de la descente, les relations entre le groupe de Picard de X et de son normalisé).