A. Grothendieck

Compléments de géométrie algébrique. Espaces de transformations

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. nº 5, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A5_0>

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. ESPACES DE TRANSFORMATIONS.

(Exposé par A. GROTHENDIECK, le 3.12.1956)

1.- Discriminant et ramification. Normalisation d'une variété.

(Dans ce numéro, on ne suppose pas que k est algébriquement clos).

LEMME 1.- Soit T une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel V de dimension finie n sur un corps k. Soient x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des points de V ; pour qu'ils forment une base, il faut et il suffit que $\det.(T(x_i , x_j)) \neq 0$. Plus généralement, soient $\underline{O}$ un sous-anneau de k dont k soit le corps des fractions, M un sous-$\underline{O}$-module de V engendrant l'espace vectoriel V, tel que $T(x , y) \in \underline{O}$ pour $x , y \in M$. Pour que M soit un $\underline{O}$-module libre et que $T(x , y)$ définisse un isomorphisme de M sur le module dual M', il faut et il suffit qu'il existe n éléments x_i de M tels que $\det. (T(x_i , x_j))$ soit un élément inversible de $\underline{O}$. Alors ces systèmes (x_i) sont identiques aux bases de M sur $\underline{O}$, et M est identique à l'ensemble des $x \in V$ tels que $T(x , y) \in \underline{O}$ pour tout $y \in M$.

Evidemment la première assertion est un cas particulier des suivantes. Soit (x_i) une base de M sur $\underline{O}$, et supposons que T définisse un isomorphisme de M sur le module dual M'. Comme la matrice de l'homomorphisme $M \rightarrow M'$ par rapport à la base (x_i) et la base duale est $(T(x_i , x_j))$, il s'ensuit que le déterminant de cette matrice est inversible dans $\underline{O}$. D'ailleurs soit (x'_i) un autre système de n éléments de M, $x'_i = \sum_j c_{ij} x_j$, alors on vérifie aussitôt que

$$\det. (T(x'_i , x'_j)) = (\det \cdot (c_{ij}))^2 \det. (T(x_i , x_j))$$

d'où résulte que le premier membre est inversible dans $\underline{O}$ si et seulement si $\det.(c_{ij})$ l'est, i.e. si (x'_i) est une base de M sur $\underline{O}$. Supposons réciproquement que l'on ait n éléments x_i de M tels que $\det.(T(x_i , x_j))$ soit inversible dans $\underline{O}$; d'après ce qui précède les x_i forment donc une base de V sur k ; montrons qu'ils forment même une base de M sur $\underline{O}$. Comme tout $x \in V$ s'écrit $x = \sum_i c_i x_i$, il suffit de montrer que si $x \in M$, les c_i sont dans $\underline{O}$, et nous prouverons même que si x est tel que $T(x , x_i) \in \underline{O}$ pour tout i, alors les c_i sont dans $\underline{O}$ (ce qui prouvera aussi la dernière assertion du lemme). En effet, on aura

$$T(x , x_j) = \sum_i c_i T(x_i , x_j) \qquad (j = 1 , \dots , n)$$

C'est là un système linéaire de n équations à n inconnues c_i, à seconds membres dans $\underline{O}$ et dont le déterminant est inversible dans $\underline{O}$; ses solutions sont donc dans $\underline{O}$. Enfin, la matrice de l'homomorphisme $M \to M'$ défini par T, par rapport à la base (x_i) et la base duale, est $(T(x_i , x_j))$ donc inversible, on a donc bien un isomorphisme de M sur M'.

Soit R une algèbre sur le corps k. On dit que R est <u>séparable</u> si quelle que soit l'extension K de k, l'algèbre $R \otimes K$ obtenue par extension des scalaires n'a pas de radical. Dans le cas où R est une extension de k, on retrouve la notion usuelle de séparabilité (cf. Séminaire 1956, exposé 13, théorème 3). D'ailleurs, on montre que pour vérifier que R est séparable sur k, il suffit de vérifier la condition de la définition pour <u>une</u> extension <u>algébriquement close</u> (ou même seulement parfaite) K de k ; nous ne nous servirons de cette notion que si R est commutative et de dimension finie, auquel cas la remarque précédente se démontre de façon quasi-triviale (sans radical signifiant alors : sans élément nilpotent). En ce cas, R séparable signifie que R est composé direct d'un nombre fini d'extensions <u>séparables</u> de k.

Supposons l'algèbre R de dimension finie. Soit $x \in R$, la trace de l'endomorphisme $y \to xy$ de l'espace vectoriel R est notée $\mathrm{Tr}_{R/k}x$. (Quand R est une extension <u>séparable</u> de k, cette notion coïncide avec la notion usuelle de trace). Alors $\mathrm{Tr}_{R/k}xy$ est une forme bilinéaire symétrique sur R. Si on a n éléments x_i de R, on pose

$$D_{R/k}(x_1 , \dots , x_n) = \det.(\mathrm{Tr}_{R/k}(x_i x_j))$$

<u>LEMME 2</u>.- Soit R une algèbre commutative de dimension finie n sur k. Pour que R soit séparable, il faut et il suffit que la forme bilinéaire $\mathrm{Tr}_{R/k}xy$ sur $R\times R$ soit non dégénérée, i.e. que pour une base $(x_1 , \dots , x_n)$ de R, on ait $D_{R/k}(x_1 , \dots , x_n) \neq 0$.

On est ramené immédiatement au cas où k est algébriquement clos. Si R est séparable donc semi-simple, c'est un composé direct de corps isomorphes à k, d'où aussitôt le fait que $\mathrm{Tr}_{R/k}xy = \sum_i x_i y_i$ est non dégénérée. Si R n'est pas séparable, donc pas semi-simple, il a un élément nilpotent non nul a , or alors pour tout $y \in R$, ay est nilpotent d'où aussitôt $Tr_{R/k}ay = 0$, ainsi la forme $Tr_{R/k}xy$ est dégénérée.

Soit R une algèbre commutative sur k , n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers m_i , qui sont maximaux. Alors le radical $\mathfrak{r}(R) = \bigcap m_i$ coïncide avec l'ensemble des éléments nilpotents de R (qui est en effet l'intersection des idéaux premiers de R), et $R/\mathfrak{r}(R)$ s'identifie au composé direct des corps $k_i = R/m_i$.

Supposons maintenant R algébrique sur k (i.e. tout élément de R engendre une algèbre de dimension finie) ; alors les k_i sont algébriques sur k . Rappelons qu'on appelle <u>degré séparable</u> de k_i sur k , et qu'on note $[k_i : k]_s$, le degré (fini ou infini) de la plus grande extension séparable de k ; ce nombre est égal à celui des k-isomorphismes distincts de k_i dans une clôture algébrique de k et aussi (en vertu du théorème de l'élément primitif) à la borne supérieure des degrés sur k des éléments de k_i qui sont séparables sur k . Nous appellerons degré séparable de R , et nous noterons $[R : k]_s$, le nombre $\sum_i [k_i : k]_s$.

<u>LEMME 3</u>.- Avec les notations précédentes, supposons de plus que k soit un corps <u>infini</u>. Soit d un entier fini $\leqslant [R : k]_s$; alors il existe un $x \in R$ dont le polynome minimal est de degré $\geqslant d$, et même $> d$ si R n'est pas séparable. Si R est séparable et de dimension finie, il y a un $x \in R$ tel que $R = k[x]$.

Soit $\overline{R} = R/\underline{r}(R) = \sum_i k_i$; soit, pour chaque i , $\overline{x}_i$ un élément de k_i ; soient f_i le polynome minimal de $\overline{x}_i$ et d_i son degré. On va montrer qu'il y a un élément de R dont le polynome minimal est de degré $\geqslant \sum_i d_i$. Soit e_i l'élément unité de k_i ; si $a \in k$, le polynome minimal de $\overline{x}_i + ae_i$ est $f_i(X-a)$; comme k est infini, on peut toujours choisir a tel que $f_i(X-a)$ soit premier à un polynome arbitraire donné à l'avance. Remplaçant de proche en proche les $\overline{x}_i$ par des éléments de la forme $\overline{x}_i + a_ie_i$, on voit qu'il y a des éléments $\overline{x}'_i \in k_i$ dont les polynomes minimaux f'_i sont de degré d_i et sont premiers entre eux deux à deux ; le polynome minimal de $\overline{x} = \sum_i \overline{x}'_i$ est alors évidemment $\prod_i f'_i$, de degré $\sum_i d_i$; si x est un représentant dans R de la classe $\bar{x} \in \bar{R}$, le polynome minimal de x est évidemment de degré $\geqslant \sum_i d_i$, ce qui démontre notre assertion. Il en résulte immédiatement que si $\sum_i [k_i : k]_s = \infty$, il y a des éléments de R dont les polynomes minimaux ont des degrés arbitrairement élevés et qu'en tout état de cause il y a un élément de R dont le polynome minimal est de degré $\geqslant d$. Si R est séparable de dimension finie, $\sum_i [k_i : k]_s$ est égal à la dimension n de R ; si x est un élément dont le polynome minimal est de degré n , on a $R = k[x]$. Supposons maintenant que $\sum_i [k_i : k]_s$ soit fini et que R ne soit pas séparable. Supposons d'abord que, pour un certain i , k_i ne soit pas séparable sur k . Il y a alors un élément x_i de k_i de degré $\geqslant [k_i : k]_s$ par rapport à k . Soient en effet $\sigma_1 , \ldots , \sigma_m$ les k-isomorphismes distincts de k_i dans une clôture algébrique $\bar{k}$ de k $(m = [k_i : k]_s)$, et soit y un élément de k_i séparable sur k tel que les $\sigma_j(y)$ soient tous distincts. Soit x un élément de k_i non séparable sur k ; k étant infini, il y a un $a \in k$ tel que les $\sigma_j(x+ay)$ soient tous distincts ; $k(x+ay)$ est alors une extension non séparable de k qui admet $m = [k_i : k]_s$ k-isomorphismes distincts dans $\bar{k}$ et qui est par suite de degré $> m$, ce qui démontre notre assertion. Pour tout $j \neq i$, il y a un élément de k_j de degré $[k_j : k]_s$ par rapport à k ; il y a donc un élément de R dont le polynome minimal est de degré $> \sum_i [k_i : k]_s$. Supposons maintenant que les k_i soient tous séparables sur k mais que $\underline{r}(R) \neq \{0\}$. Soit x un élément de R tel que le polynome minimal $\bar{f}$ de la classe $\bar{x}$ de x modulo $\underline{r}(R)$ soit de degré $\sum_i [k_i : k]_s$. Ce polynome est évidemment sans racine multiple. Si $a \in \underline{r}(R)$, le polynome minimal de $x + a$ est divisible par $\bar{f}$; il suffira de montrer qu'on peut choisir a tel que $\bar{f}(x+a) \neq 0$; si $\bar{f}(x) = 0$, $\bar{f}(x+a)$ est de la forme ca , où c appartient à la classe $\bar{f}'(\bar{x})$ modulo $\underline{r}(R)$; comme $\bar{f}'$ est premier à $\bar{f}$, $\bar{f}'(x)$ est inversible dans $R/\underline{r}(R)$, donc c inversible dans R , d'où $ca \neq 0$ si $a \neq 0$, ce qui démontre le lemme 3 .

THÉORÈME 1.- Soient $\underline{O}$ un anneau local intègre et intégralement clos, K son corps des fractions, K' une extension algébrique de degré fini n de K, $\underline{O}'$ un sous-anneau de K' dont le corps des fractions est K', $\underline{m}$ l'idéal maximal de $\underline{O}$, $\underline{m}'_i$ les idéaux premiers de $\underline{O}'$ prolongeant $\underline{m}$ (ils sont en nombre fini et maximaux ; on a $\underline{m}'_i \cap \underline{O} = \underline{m}$; cf. séminaire 1955/56, exposé 1), $\underline{m}' = \underline{O}'\underline{m}$, $R = \underline{O}'/\underline{m}'$, $k_i = \underline{O}'/\underline{m}'_i$, $k = \underline{O}/\underline{m}$. Alors R est une algèbre algébrique sur k, et on a $[R : k]_s = \sum_i [k_i : k]_s \leq n$; si $\underline{O}'$ est un module de type fini sur $\underline{O}$, on a $n \leq [R : k]$. De plus les conditions suivantes a) et b) sont équivanentes, entraînent c) et sont même équivalentes à c) si $\underline{O}'$ est un module de type fini sur $\underline{O}$:

a) $[R : k]_s = n$, i.e. $\sum_i [k_i : k]_s = n$;

b) il existe n éléments x_i de $\underline{O}'$ tels que $D_{K'/K}(x_1, \ldots, x_n)$ soit un élément inversible de $\underline{O}$;

c) R est une k-algèbre séparable.

COROLLAIRE 1.- Si a) et b) sont satisfaites, K' est une extension séparable de K, $\underline{O}'$ est un $\underline{O}$-module libre et est la clôture intégrale de $\underline{O}$ dans K'.

Cela résulte des lemmes 1 et 2, tenant compte de ce que la trace par rapport à K de tout élément de K' entier sur $\underline{O}$ est dans $\underline{O}$.

REMARQUES.

1) La condition de finitude sur $\underline{O}'$ est automatiquement satisfaite si K' est séparable sur K et $\underline{O}$ noethérien ou si $\underline{O}$ est une localité de K (Séminaire 1955/56, exposé 4, théorème 1). La condition c) peut se formuler comme suit : on a $\underline{m}\,\underline{O}' = \bigcap_i \underline{m}'_i$ et les k_i sont séparables sur k. La première de ces conditions signifie aussi que $\underline{r}(R) = \{0\}$, et implique manifestement que $\underline{m}\,\underline{O}'_{\underline{m}'_i} = \underline{m}'_i\underline{O}'_{\underline{m}'_i}$ pour tout i. La réciproque est vraie, d'où, si k est parfait, la forme classique de la condition de non ramification.

DÉMONSTRATION.- Nous ferons la démonstration en supposant k infini (suffisant pour ce dont nous aurons besoin), mais on peut se débarrasser de cette hypothèse. Comme le polynome minimal de tout élément de $\underline{O}'$ sur K est à coefficients dans $\underline{O}$ ($\underline{O}'$ étant entier sur $\underline{O}$), il s'ensuit aussitôt que tout élément de R est algébrique sur k, ainsi R satisfait à toutes les conditions envisagées pour le lemme 3. Si on avait $[R : k]_s > n$, il existerait donc un élément $\bar{x}$ de R de degré sur k strictement supérieur à n, il en serait a fortiori de même du degré du polynome minimal d'un représentant dans $\underline{O}'$ de cet élément (les coefficients de ce polynome étant dans $\underline{O}$), ce qui est absurde. Donc $[R : k]_s \leq n$.

Prouvons a) $\Longrightarrow$ c) , en effet si R n'était séparable, il résulterait encore du lemme 3 qu'il existerait un élément de R dont le degré sur k soit $> [R : k]_s$, ce qui est absurde puisque $[R : k]_s = n$. Prouvons a) $\Longrightarrow$ b) , en effet en vertu du lemme 3 il existe un générateur $\bar{x}$ de R (qui est séparable de dimension n) on aura donc $D_{R/k}(1 , \bar{x} , \ldots , \bar{x}^{n-1}) \neq 0$ (lemme 2) , or si $x \in \underline{O}'$ est un représentant de $\bar{x}$, son polynome minimal réduit mod. $\underline{m}$ est multiple de celui de $\bar{x}$ sur k , donc identique à ce dernier pour des raisons de degré. Or on constate facilement que le discriminant, pour une base d'une extension monogène formée des puissances $1 , \xi , \ldots , \xi^{n-1}$ d'un générateur, s'exprime en polynome universel, à coefficients entiers indépendants de la caractéristique, en les coefficients de l'équation minimale de ce générateur ; d'où résulte ici que $D_{R/k}(1 , \bar{x} , \ldots , \bar{x}^{n-1})$ s'obtient en réduisant mod $\underline{m}$ l'élément $D_{K'/K}(1 , x , \ldots , x^{n-1})$, qui est donc un ~~élément~~ inversible de $\underline{O}$. Prouvons b) $\Longrightarrow$ a) , soient n éléments x_i de $\underline{O}'$ tels que $D_{K'/K}(x_1 , \ldots , x_n)$ soit un élément inversible de $\underline{O}$, il en résulte d'abord que K' est séparable sur K (lemme 2), on peut alors appliquer le lemme 1, (car $Tr_{K'/K}xy \in \underline{O}$ si $x , y \in \underline{O}'$) qui nous apprend que $\underline{O}'$ admet (x_i) comme base sur $\underline{O}$. Les $\bar{x}_i$ forment donc une base de R sur k , et on constate aussitôt que leur discriminant s'obtient par réduction mod $\underline{m}$ de celui des x_i , il est donc non nul, et par suite R est séparable (lemme 2). Donc $[R : k]_s = [R : k] = n$, d'où a) .

Prouvons enfin que $n \leq [R : k]$ si $\underline{O}'$ est un module de type fini sur $\underline{O}$, il en résultera aussi, sous ces conditions, que $[R : k] = [R : k]_s$ implique $n = [R : k]_s$, d'où c) $\Longrightarrow$ a) . Soit $(\bar{x}_i)$ une base de R sur k , il suffit de prouver que les $x_i \in \underline{O}'$ engendrent le $\underline{O}$-module $\underline{O}'$ (et a fortiori engendrent le K-espace vectoriel K'). Soit L le sous-$\underline{O}$-module de $\underline{O}$-module $\underline{O}' = M$, engendré par les x_i ; on a $L + \underline{m}M = M$, i.e. en posant $Q = M/L$: $\underline{m}Q = Q$, or Q est un $\underline{O}$-module de type fini, d'où $Q = 0$ (Séminaire 1956, exposé 1, appendice), i.e. $L = M$. C.Q.F.D.

<u>DÉFINITION 1</u>.- Soient $\underline{O}$ un anneau local intègre et intégralement clos, K son corps des fractions, K' une extension de degré fini de K , O' la clôture intégrale de $\underline{O}$ dans K' . On dit que $\underline{O}$ est <u>non ramifié</u> dans K' s'il satisfait aux conditions équivalentes a) et b) du théorème 1 .

<u>COROLLAIRE 2</u>.- Soient A un anneau intègre et intégralement clos, K son corps des fractions, K' une extension de degré fini n de K , A' la clôture

intégrale de A dans K', $\vartheta_{A'/A}$ l'idéal de A engendré par les $D_{K'/K}(x_1, \ldots, x_n)$ pour tous les systèmes de n éléments x_i de A'. Soit $\underline{p}$ un idéal premier de A ; pour que $A_{\underline{p}}$ soit ramifié dans K', il faut et il suffit que $\underline{p} \supset \vartheta_{A'/A}$.

En effet, il faut exprimer que pour n éléments quelconques de $A_{\underline{p}}$, qu'on peut supposer écrits sous la forme x_i/a ($x_i \in A$, $a = A - \underline{p}$) l'élément $D_{K'/K}(x_1/a, \ldots, x_n/a)$ est dans l'idéal maximal de $A_{\underline{p}}$, ce qui signifie (en multipliant par a^n, qui est inversible dans $A_{\underline{p}}$) que $D_{K'/K}(x_1, \ldots, x_n) \in \underline{p}$.

<u>COROLLAIRE 3</u>.- Soient V une variété normale sur le corps algébriquement clos k, $K = k(V)$ son corps des fractions rationnelles, K' une extension de degré fini n de K, V' la variété normalisée de V dans le corps K', f l'application canonique de V' dans V. Pour que l'anneau local $\underline{O}_x$ d'un $x \in V$ soit non ramifié dans K', il faut et il suffit que $f^{-1}(x)$ contienne exactement n éléments. Si K' est extension <u>séparable</u> de K, l'ensemble des éléments de V qui ont cette propriété forme un ouvert dense.

Précisons d'abord qu'on a défini dans le Séminaire 1956, exposé 7, théorème 1 la notion de schéma dérivé normal S' dans K' d'un schéma S de corps des fractions K, et qu'on appelle en conséquence <u>variété normalisée</u> de V dans K' la variété définie par le schéma dérivé normal dans K' du schéma de V. Le morphisme canonique $S' \to S$ (loc. cité) définit alors le morphisme $V' \to V$ de l'énoncé (cf. exposé 2). Si $x \in V$, les points de $f^{-1}(x)$ correspondent donc aux idéaux maximaux de la clôture normale de $\underline{O}_x$ dans K' (loc. cité, théorème 2). D'ailleurs $\underline{O}_x$ est normal, donc le théorème 1 s'applique, et comme le corps résiduel de $\underline{O}_x$ est k donc algébriquement clos, les k_i sont identiques à k, de sorte que la condition $[R : k]_s = n$ signifie précisément qu'il y a n idéaux maximaux dans $(\underline{O}_x)'$, ce qui prouve la première assertion du corollaire. Pour la seconde, on peut se borner au cas où V est affine, donc défini par une algèbre affine A, de sorte que V' est définie par l'algèbre affine A' clôture normale de A dans K' (loc. cité). Comme K' est séparable sur K, il existe des éléments x_i de K tels que $D_{K'/K}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ (lemme 2) donc on a, avec les notations de corollaire 2 $\vartheta_{A'/A} \neq 0$. L'ensemble des $x \in V$ tels que $\underline{O}_x$ se ramifie dans K' s'identifie à l'ensemble des idéaux maximaux de A qui contiennent l'idéal non nul $\vartheta_{A'/A}$, c'est donc un fermé de V, distinct de V. C.Q.F.D.

COROLLAIRE 4.- Sous les conditions du corollaire 3 ; soit $n = [K' : K]_s$. Alors pour tout $x \in V$, $f^{-1}(x)$ a au plus n éléments, et l'ensemble des $x \in V$ tels que $f^{-1}(x)$ ait n éléments est ouvert dense.

Soit K'_s le sous-corps de K' formé des éléments séparables sur K , alors K'_s est séparable de degré n sur K , et K' purement inséparable sur K'_s . Soit V'_s la normalisée de V dans K'_s , alors (loc. cité) f se factorise en produit des applications canoniques

$$V' \xrightarrow{f_i} V'_s \longrightarrow V$$

(V' s'identifie à la normalisée de V'_s dans K'). Compte tenu du corollaire 3, il suffit de prouver que f_i est une bijection de V' sur V'_s . Pour ceci, on est encore ramené au cas où V est la variété affine définie par une algèbre affine A . Soit A'_s sa clôture normale dans K'_s , nous voulons donc démontrer que tout idéal premier de A'_s est trace d'un unique idéal premier de A' . Or K' étant une extension normale de K'_s dont le groupe de Galois est réduit à l'unité, il suffit d'appliquer le lemme 3 du Séminaire 1956, exposé 1.

2.- Forme géométrique du "Main theorem" de Zariski.

Le théorème 2 du Séminaire 1956, exposé 12, est essentiellement équivalent (dans le cas de schémas correspondant à des variétés sur k) au cas particulier suivant, de forme plus "globale" :

THÉORÈME 2 ("Main theorem"). Soit f une application régulière birationnelle d'une variété X dans une variété normale Y , telle que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ soit fini. Alors f est un isomorphisme de X sur une partie ouverte de Y .

Loc. cité dit en effet que l'application rationnelle f^{-1} est définie en tous les points de $f(X)$, donc dans un ouvert U contenant $f(X)$. Soit g la restriction de f^{-1} à U , c'est une application régulière de U dans X , et on a évidemment fg = identité et gf = identité partout (puisque ces identités sont vraies dans des ouverts denses, et que gf et fg sont continues), d'où résulte que f est un isomorphisme de X sur U .

COROLLAIRE 1.- Soit f une application régulière d'une variété X dans une variété normale Y , telle que $f(X)$ soit dense dans Y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) X est normale, et $f^{-1}(y)$ est fini pour tout $y \in Y$.

b) Le morphisme f est composé d'un isomorphisme de X sur une partie ouverte d'une normalisée Y' de Y dans une extension finie de $K = k(Y)$, et de l'application canonique $Y' \to Y$.

Evidemment b) $\Rightarrow$ a) , réciproquement supposons a) vérifié. Soit $K' = k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X , grâce à f on peut considérer K' comme une extension de K . Comme les $f^{-1}(y)$ sont de dimension 0 , il s'ensuit que le degré de transcendance de K' sur K est 0 (Séminaire 1956, exposé 8, théorème 2) donc que K' est une extension finie de K (puisque K est extension algébrique ayant un nombre fini de générateurs). Soit Y' la normalisée de Y dans K' . Comme X est normale, f se factorise en $X \to Y' \to Y$ (Séminaire 1956, exposé 7, théorème 1), or l'application $X \to Y'$ est régulière, birationnelle, et les images réciproques des points de Y' sont finies, donc, Y' étant normale, on peut appliquer le théorème 2 : $X \to Y'$ est un isomorphisme de X sur une partie ouverte de Y' C.Q.F.D.

<u>COROLLAIRE 2</u>. Soit f comme dans le corollaire précédent, et satisfaisant à la condition a). Soit n le degré séparable du corps des fractions rationnelles de X sur celui de Y . Alors pour tout $y \in Y$, il existe au plus n éléments dans $f^{-1}(y)$, et l'ensemble des points de Y tels que $f^{-1}(y)$ ait n points est ouvert dense.

En vertu du corollaire 1 , on peut supposer que X est un ouvert d'une normalisée Y' de Y . La première assertion résulte alors du corollaire 4 appliqué à $f : Y' \to Y$. Soit Z le complémentaire fermé de X dans Y' , son image $f(Z)$ est une partie fermée de Y car Y' est "complet au dessus de Y" (Séminaire 1956, exposé 6 paragraphe 7, et exposé 8, théorème 1) donc f transforme fermés en fermés (Séminaire 1956, exposé 8, théorème 1 bis). Soit d'autre part F l'ensemble des points $y \in Y$ dont l'image réciproque dans Y' contient strictement moins que n points, c'est une partie fermée de Y distincte de Y (théorème 1, corollaire 4). Alors l'ensemble des $y \in Y$ dont l'image réciproque dans X contient strictement moins que n points est égal à $F \cup f(Z)$, c'est donc un fermé distinct de Y , C.Q.F.D.

<u>COROLLAIRE</u> 3.- Soit f une application régulière d'une variété normale X dans une variété normale Y , telle que $f(X)$ soit dense dans Y , et que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ ait un nombre fini de points, indépendant de y . Alors f s'identifie à l'application canonique $Y' \to Y$ de la variété normalisée de Y dans l'extension $k(X)$ de $k(Y)$, et par suite (Séminaire 1956, exposé 8, théorème 1 bis) si Y est complète resp. projective, X est complète resp. projective.

(N.B.- On dit qu'une variété est <u>complète</u> resp. <u>projective</u>, si le schéma associé l'est au sens du Séminaire 1956, exposé 5).

Il suffit d'appliquer le corollaire 1 ; X s'identifie à un ouvert de Y' qui est nécessairement tout Y', en vertu du théorème 1, corollaire 4, puisque autrement il y aurait des points de Y dont l'image réciproque n'aurait pas le "bon" nombre d'éléments.

<u>REMARQUES</u>. En passant à la normalisée de X, on voit facilement que la conclusion " X complète si Y complète" du corollaire 3 est valable même si X n'est pas supposée normale. Il est cependant essentiel que Y le soit, même en dimension 1, comme on voit en prenant pour Y une courbe complète ayant un seul point double ordinaire, pour X la normalisée de Y privée d'un des deux points au dessus du point double.

3.- <u>Variétés projectives</u>.

Nous avons dit qu'une variété est dite projective (resp. complète) si le schéma associé l'est (Séminaire 1956, exposé 5). Une variété projective est complète, (loc. cité, proposition 7), on ignore si la réciproque est vraie.

<u>L'espace projectif</u> $P(V)$. Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur k, $K = k(V)$ le corps des fonctions rationnelles sur V. Le dual V' de V est un sous-espace vectoriel de K, soit $S(V)$ le schéma projectif qu'il définit (loc. cité), i.e. le schéma défini par les algèbres affines $k[V'x'^{-1}]$, où $x' \in V'$ $x' \neq 0$. Soit $S_{x'}$, le schéma affine défini par $k[V'x'^{-1}]$, $P_{x'}$ la variété affine correspondante, ensemble des homomorphismes de l'algèbre affine envisagée dans k. Prenant une base $(X_1, \dots, X_n)$ dans V' avec $X_1 = x'$, (les X_i sont donc des générateurs algébriquement indépendants de K), $V'x'^{-1}$ est l'espace vectoriel ayant pour base $1, X_2/X_1, \dots, X_n/X_1$, donc l'algèbre affine qu'il engendre est l'algèbre de polynomes engendrée par les éléments algébriquement indépendants $X_2/X_1, \dots, X_n/X_1$, de sorte qu'un élément de $P_{x'}$ s'identifie à un système de $n-1$ éléments de k (valeurs du caractère associé sur les X_i/X_1, $2 \leq i \leq n$) ou plus intrinsèquement, à une forme linéaire sur $V'x'^{-1}$ prenant la valeur 1 sur $1 \in V'x'^{-1}$. Soit alors $x \in V$ tel que $\langle x, x' \rangle \neq 0$, soit $\bar{x}$ le point de $P_{x'}$ associé à la forme linéaire $X \to \langle x, X \rangle / \langle x, x' \rangle$ sur $V'x'^{-1}$; si $L_{x'}$ désigne l'hyperplan de V défini par x', $x \to \bar{x}$ est manifestement une application de $V - L_{x'}$ <u>sur</u> $P_{x'}$, et deux éléments de $V - L_{x'}$ ont la même image dans $P_{x'}$ si et seulement

si ils sont proportionnels. Soit K_o le corps des fonctions rationnelles sur la variété $P(V)$ définie par $S(V)$ i.e. le corps engendré par $V'x'^{-1}$, (ou encore le sous-corps de $k(X_1, \ldots, X_n)$ formé des fractions rationnelles homogènes de degré 0). Par construction, pour tout $x \in V - L_{x'}$, $\bar{x}$ est caractérisé par la condition que pour tout $f = X/x' \subset V'x'^{-1} \subset K_{o,f(\bar{x})}$ soit défini et égal à $X(x)/x'(x)$. Il en résulte que si y' est un autre point non nul de V', et si $x \in V - L_{x'} - L_{y'}$, alors les points de $P_{x'}$ et $P_{y'}$ définis par x sont identiques (car si $\bar{x}$ est le premier, on aura pour $f = X/y'$: $f = (X/x')/(y'/x')$, et comme y'/x' est défini et non nul en $\bar{x}$, et X/x' défini en $\bar{x}$, f est défini en $\bar{x}$ et $f(\bar{x}) = (X(x)/x'(x))/(y'(x)/x'(x)) = X(x)/y'(x)$. C.Q.F.D.). Ainsi, pour tout x non nul dans V, $\bar{x}$ désigne un point bien déterminé de $P(V)$, et l'application $x \rightarrow \bar{x}$ est une application de $V - (0)$ sur $P(V)$, deux points x, y ayant la même image si et seulement si ils sont proportionnels. Ainsi, en tant qu'ensemble $P(V)$ s'identifie à "l'espace projectif" défini par V (= ensemble des droites homogènes de V). Quand on considèrera cet ensemble comme variété algébrique, il sera entendu qu'il s'agira de la structure qu'on vient de définir.

La vérification des points suivants, qui ne sont pas plus difficiles que ce qui précède, est laissée au lecteur : La structure algébrique induite sur les $P_{x'}$ est aussi celle associée à la structure d'espace affine bien connue sur $P_{x'}$; il en résulte en particulier que l'application $x \rightarrow \bar{x}$ de $V - (0)$ dans $P(V)$ est régulière. La topologie de $P(V)$ est la topologie quotient, en d'autres termes une partie de $P(V)$ est fermée si et seulement si son image réciproque dans $V - (0)$ l'est ; il en résulte que les parties fermées de $P(V)$ correspondent aussi biunivoquement aux cônes fermés non vides de V (les irréductibles correspondant aux cônes irréductibles, la partie vide au cône (0)) , où encore aux idéaux homogènes de l'anneau affine $k[V] = k[X_1, \ldots, X_n]$ de V, non identiques à $k[V]$, qui sont intersections d'idéaux homogènes premiers (ces derniers correspondant aux sous-variétés de $P(V)$ et à la partie vide de $P(V)$) . Une variété X est projective si et seulement si elle est isomorphe à une sous-variété (fermée) d'un espace projectif $P(V)$ (en effet, la définition par schémas signifie exactement, après traduction en langage compréhensible, que X est isomorphe à une variété $\overline{f(Y)}$, où Y est une sous-variété d'un espace vectoriel V et f l'application canonique de $V - (0)$ dans $P(V)$) . Les applications rationnelles d'un espace projectif dans un autre sont celles qui s'expriment, après introduction de coordonnées projectives, par des polynomes homogènes tous de même degré (et les points où une telle application est définie sont précisément ceux pour lesquels tous ces polynomes ne s'annulent pas simultanément) ; résultat analogue pour les applications rationnelles d'un produit d'espaces projectifs. Le produit de deux espaces projectifs $P(V)$ et $P(W)$ est une variété projective, et s'identifie même canoniquement à une sous-variété de $P(V \otimes W)$: il suffit de passer au quotient dans l'application $(x , y) \longrightarrow x \otimes y$ de $V \times W$ dans $V \otimes W$. Il en résulte que le produit de deux variétés projectives est une variété projective.

Définition des variétés grassmaniennes. Soit toujours V un espace vectoriel de dimension n, nous allons mettre sur l'ensemble $G_d(V)$ de ses sous-espaces vectoriels E de dimension d une structure de variété projective (pour tout d tel que $1 \leq d \leq n$). Nous pouvons supposer $1 < d < n$. Il est bien connu que pour tout E, le produit extérieur des éléments d'une base de E est bien défini à une multiplication par un scalaire près, et que l'application $f : G_d(V) \longrightarrow P(\Lambda^d V)$ ainsi obtenue est injective. L'image en est d'ailleurs une sous-variété fermée de $P(\Lambda^d V)$. Considérons en effet une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de V, soit E_o l'espace vectoriel sous-tendu par les e_i avec $1 \leq i \leq d$, F l'espace vectoriel sous-tendu par les autres e_j, U l'ouvert affine dans $P(\Lambda^d V)$ correspondant aux multivecteurs dont la composante suivant $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_d$ est $\neq 0$, il suffit de montrer que $U \cap f(G_d)$ est une sous-variété fermée de l'espace affine U (car les U en question recouvrent $P(\Lambda^d V)$). Or les $E \in G_d$ qui correspondent à des points de U sont ceux qui se projettent sur E_o par la projection parallèle à F, cette projection est donc un isomorphisme de E sur E_o. Soient alors $x_i(E)$ $(1 \leq i \leq d)$ les éléments de E images inverses des e_i $(1 \leq i \leq d)$. E est complètement déterminé quand on connait les $x_i(E)$, donc quand on connait leurs projections $y_i(E)$ sur F, et ses projections peuvent être prises arbitrairement : on aura alors $x_i(E) = e_i + y_i(E)$, d'où $f(E) = e_1 \wedge \ldots \wedge e_d + \sum_{1 \leq i \leq d} (-1)^{i+1} y_i(E) \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \hat{e}_i \ldots$ $\ldots \wedge e_d + \ldots$. Il en résulte, identifiant U à l'espace des multivecteurs dans $\Lambda^d V$ dont la composante suivant $e_1 \wedge \ldots \wedge e_d$ des 1, que les composantes de $f(E)$ peuvent s'exprimer comme polynomes bien déterminés en les composantes suivant les $e_j \wedge e_1 \wedge \ldots \hat{e}_i \wedge \ldots \wedge e_d$ (où $1 \leq i \leq d$, $d + 1 \leq j \leq n$) et que ces dernières (dont la donnée correspond à la donnée des $y_i(E)$) peuvent être choisis arbitrairement. Ainsi, identifiant U à un produit de deux espaces affines convenables R et S, $f(G_d) \cap U$ s'identifie au graphe d'une application polynome de R dans S , et est donc bien une sous-variété fermée (d'ailleurs isomorphe à un espace affine). Nous avons ainsi prouvé que $G_d(V)$ s'identifie à une sous-variété de $P(\Lambda^d V)$, (d'ailleurs "rationnelle", i.e. birationnellement équivalente à un espace affine) et nous munirons par suite $G_d(V)$ de la structure induite. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, si $1 \leq d \leq d' \leq n$; l'ensemble des $(F , E) \in G_d(V) \times G_{d'}(V)$ tels que $F \subset E$ est une sous-variété ferméedu produit, d'où résulte plus généralement que pour des entiers donnés $0 < d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_k < n$ l'ensemble des $(E_1 , \ldots , E_k) \in G_{d_1}(V) \times \ldots \times G_{d_k}(V)$ tels que $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k$ est une sous-variété fermée du produit, (il suffit de noter qu'elle est fermée, elle sera automatiquement irréductible et non singulière, puisque le groupe connexe $G\ell(V)$ y opère transitivement) ; on l'appelle la <u>variété des drapeaux de type</u> $(d_1 , \ldots , d_k)$. On appelle simplement <u>drapeau</u> dans V un $(1 , 2 , \ldots , n-1)$ drapeau de V , ils forment donc une variété projective appelée <u>variété des drapeaux de</u> V .

Rappelons enfin qu'une variété affine complète est réduite à un point (Séminaire 1956, exposé 5, numéro 4), et que l'image d'une variété complète par un morphisme est une variété complète (résulte du fait que cette image est fermée - Séminaire 1956, exposé 8, théorème 1 - et qu'un schéma dominé par un schéma complet est complet - trivial sur les définitions -).

4.- <u>Espaces de transformations.</u>

On appelle <u>espace de transformation algébrique</u> le système formé par un groupe algébrique G , un ensemble algébrique E , et une application régulière $G \times E \to E$, notée $(g , x) \to g.x$, satisfaisant les conditions bien connues $e.x = x$ et $g(g'.x) = (gg').x$. Si H est un sous-groupe invariant fermé de G qui opère trivialement sur E , alors par passage au quotient G/H opère sur E , et il résulte de ce qu'on n'a pas dit dans l'exposé 3 que l'application correspondante $G/H \times E \to E$ est encore régulière (quand on munit G/H de la structure de groupe algébrique décrite dans l'exposé 3), de sorte que E devient un espace de transformation algébrique de groupe G/H .

Soit (E , G) un espace de transformation algébrique, on appelle <u>orbite</u> d'un point $x \in E$ l'ensemble des $g.x$ $(g \in G)$.

<u>LEMME 4.- Une orbite est ouverte dans son adhérence.</u>

Soit f une application régulière d'un ensemble algébrique G dans un autre E, alors l'intérieur de $f(G)$ dans $\overline{f(G)}$ est dense dans $f(G)$: cela a été dit dans l'exposé 3 dans le cas où G et E sont irréductibles, et s'en déduit aisément dans le cas général. Prenons, dans le cas actuel, $f(g) = g.x$, on voit donc que l'intérieur de l'orbite de x dans son adhérence est non vide, or cet intérieur est évidemment invariant sous G, et comme G est transitif dans l'orbite, la conclusion voulue apparaît. Ainsi une orbite est un ensemble algébrique sur lequel G opère transitivement, c'est donc un espace de transformation algébrique transitif par G, en particulier tous ces points sont simples (et a fortiori normaux) (puisqu'il existe des points simples sur un ensemble algébrique), et toutes ces composantes irréductibles ont même dimension. Si l'orbite n'est pas fermée, alors son complémentaire dans son adhérence est une partie fermée de V, stable par G, de dimension strictement inférieure à celle de l'orbite. Il contient alors une orbite, nécessairement de dimension inférieure à celle de $G.x$, d'où :

<u>COROLLAIRE</u>.- Une orbite de dimension minima est fermée (en particulier, il existe des orbites fermées).

Le théorème suivant est l'outil technique essentiel de la théorie de Borel :

<u>THÉORÈME 3</u>.- Soit E un espace de transformation algébrique complet de groupe G <u>affine résoluble connexe</u>. Alors il existe au moins un point fixe sous G.

<u>DÉMONSTRATION</u>.- Soit H un sous-groupe distingué fermé de G, alors l'ensemble des points de V fixes par H est une partie fermée de E <u>stable par</u> G, par suite si elle n'est pas vide, c'est un espace de transformations algébrique sous G, et même sous G/H puisque H y opère trivialement, et tout point fixe de ce dernier par G/H est un point fixe de E par G. Considérant alors une suite de composition de G par des sous-groupes distingués connexes fermés à quotients successifs abéliens, et tenant compte qu'un groupe algébrique quotient d'un groupe algébrique affine est affine (cf. exposé 3), une récurrence immédiate sur la longueur de cette suite de composition nous ramène au cas où G est <u>abélien</u>. D'après le corollaire au lemme précédent, il existe une orbite fermée $X = G.x$, soit H l'ensemble des $g \in G$ tels que $g.x = x$, l'application $g \longrightarrow g.x$ définit alors une application régulière bijective de G/H sur X. Comme X est complète, il résulte du théorème 2, corollaire 3 (compte tenu que X est normale) que G/H est complète ; or H est un sous-groupe distingué du groupe affine (abélien) G, donc G/H est affine, et par suite est réduit à un point. Donc l'orbite X est réduite à un point, évidemment fixe par G. C.Q.F.D.

APPENDICE I. LOCALITÉS NON RAMIFIÉES.

Soit L/K une extension de type fini d'un corps K ; soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ des localités de L, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ leurs idéaux premiers maximaux, k et k' les corps $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ et $\mathcal{O}'/\mathfrak{m}'$. On suppose que $\mathcal{O}$ domine $\mathcal{O}'$; on dit que $\mathcal{O}$ est <u>non ramifié par rapport à</u> $\mathcal{O}'$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) le corps des fractions M de $\mathcal{O}$ est algébrique sur celui, M', de $\mathcal{O}'$;

b) le corps k est algébrique et séparable sur k' ;

c) l'ensemble $\mathfrak{m}'$ est un ensemble de générateurs de l'idéal $\mathfrak{m}$.

Dans ces conditions, $\mathcal{O}$ domine $\mathcal{O}'$ régulièrement (cf. séminaire 1955/56, exposé 11) ; il en résulte que $\mathcal{O}$ est anneau local d'un idéal premier maximal $\mathfrak{M}$ d'un anneau $\mathfrak{D}$ contenant $\mathcal{O}'$ et entier sur $\mathcal{O}'$ (séminaire 1955/56, exposé 12, théorème 1). L'anneau $\mathcal{O}'$ est anneau local d'un idéal premier d'une algèbre affine A' sur K ; la clôture intégrale A^* de A' dans M étant un A'-module de type fini, la clôture intégrale $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}'[A^*]$ de $\mathcal{O}'$ est un $\mathcal{O}'$-module de type fini, et il en est de même de $\mathfrak{D}$; il en résulte en particulier que k est de degré fini sur k'. L'anneau $\mathfrak{D}$ n'est en général pas déterminé de manière unique ; nous allons montrer que, sous les hypothèses faites, on peut toujours prendre $\mathfrak{D}$ de la forme $\mathcal{O}'[u]$ où u est un élément de $\mathcal{O}$ qui est racine d'un polynome unitaire F à coefficients dans $\mathcal{O}'$ tel que $F'(u) \notin \mathfrak{m}$ (où F' est le polynome dérivé de F). Puisque $\mathfrak{m}'$ engendre $\mathfrak{m}$, le transporteur $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}'\mathfrak{D} : \mathfrak{M}$ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{m}'\mathfrak{D}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{M}$; on a donc $\mathfrak{a} + \mathfrak{M} = \mathfrak{D}$; soit donc u un élément de $\mathfrak{a}$ tel que la classe $\bar{u}$ de u modulo $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}\mathcal{O}$ soit un générateur $\neq 0$ de l'extension k/k'. Posons $\mathfrak{D}_1 = \mathcal{O}'[u]$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{D}_1$; soient $\mathcal{O}_1$ l'anneau local de $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{M}_1\mathcal{O}_1$. Il est clair que $\mathcal{O}$ domine $\mathcal{O}_1$, est non ramifié par rapport à $\mathcal{O}_1$ et que $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathcal{O}_1/\mathfrak{m}_1$; on va montrer que $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$. Il suffira pour cela de montrer que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$. Tout idéal premier maximal $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{M}$ de $\mathfrak{D}$ contient $\mathfrak{m}'\mathfrak{D}$ et par suite aussi $\mathfrak{a}$, donc u, et engendre par suite l'idéal unité dans $\mathcal{O}_1[\mathfrak{D}]$ (car $u^{-1} \in \mathcal{O}_1$ puisque $u \notin \mathfrak{M}$). Comme $\mathcal{O}_1[\mathfrak{D}]$ est l'anneau des fractions de la partie $\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{M}_1$ de $\mathfrak{D}$, on voit que $\mathcal{O}_1[\mathfrak{D}]$ n'a qu'un idéal premier maximal, donc est un anneau local ; c'est l'anneau local d'un idéal premier maximal de $\mathfrak{D}$, qui ne peut être que $\mathfrak{M}$, d'où $\mathcal{O}_1[\mathfrak{D}] = \mathcal{O}$. De plus, on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \mathcal{O}_1/\mathfrak{m}_1$; il en résulte immédiatement que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathfrak{m}_1\mathcal{O}$. Comme $\mathcal{O}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_1$ (puisque $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1[\mathfrak{D}]$), il résulte de la formule $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 + \mathfrak{m}_1\mathcal{O}$ et du lemme de Nakayama que $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$. Comme

k est algébrique et séparable sur k' , il y a un polynome unitaire G à coefficients dans $\mathfrak{O}'$ tel que $G(u) \in \mathfrak{M}_1$, $G'(u) \notin \mathfrak{M}_1$. Puisque $u \in \mathfrak{a}$, on a $uG(u) \in \mathfrak{m}'\mathfrak{D}$ et, puisque $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{O}_1$, il y a des polynomes A , B à coefficients dans $\mathfrak{O}'$ tels que les coefficients de A soient dans $\mathfrak{m}'$, que $B(u) \notin \mathfrak{M}_1$ et que $uG(u)B(u) = A(u)$; on peut manifestement supposer B unitaire. Soit d le degré du polynome unitaire $XG(X)B(X)$; alors, si $\mathfrak{Z} = \mathfrak{O}' + \mathfrak{O}'u + \ldots + \mathfrak{O}'u^{d-1}$, on a $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{Z} + \mathfrak{m}'\mathfrak{D}_1$; appliquant à nouveau le lemme de Nakayama, on voit que $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{Z}$. Ceci montre qu'on peut supposer que A est de degré $< d$; si $F(X) = XG(X)B(X) - A(X)$, F possède les propriétés requises.

Soit réciproquement $\mathfrak{O}'$ une localité. Soit u un élément d'un sur-corps du corps des fractions de $\mathfrak{O}'$ qui est racine d'un polynome unitaire F à coefficients dans $\mathfrak{O}'$; s'il y a un idéal premier maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{O}'[u]$ qui ne contient pas $F'(u)$, l'anneau local $\mathfrak{O}$ de $\mathfrak{M}$ est une localité non ramifiée par rapport à $\mathfrak{O}'$. Soit en effet $\overline{G}$ le polynome minimal par rapport à $k' = \mathfrak{O}'/\mathfrak{m}'$ de la classe $\overline{u}$ de u modulo $\mathfrak{M}$, et soit $\overline{F}$ le polynome déduit de F par réduction des coefficients modulo $\mathfrak{m}'$. Il est clair que $\overline{F}$ est divisible par $\overline{G}$ mais que $\overline{F}'$ ne l'est pas ; soit G un polynome à coefficients dans $\mathfrak{O}'$ qui donne $\overline{G}$ par réduction modulo $\mathfrak{m}'$; il résulte alors de ce qu'on vient de dire qu'il y a un polynome H à coefficients dans $\mathfrak{O}'$ tel que $H(u) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}}$ et que $GH - F$ soit à coefficients dans $\mathfrak{m}'$; $G(u)$ est donc dans l'idéal $\mathfrak{m}'\mathfrak{O}$. Or il est clair que $\mathfrak{M}$ est engendré par $\mathfrak{m}'$ et par $G(u)$; on a donc $\mathfrak{m}'\mathfrak{O} = \mathfrak{m}$. Par ailleurs, comme $\overline{F}'(\overline{u}) \neq 0$, on a aussi $\overline{G}'(\overline{u}) \neq 0$ et il en résulte que $\overline{u}$ est séparable sur k' . Ceci montre bien que $\mathfrak{O}$ est non ramifié par rapport à $\mathfrak{O}'$.

Soit maintenant $\mathfrak{O}'$ une localité normale ; soit $\mathfrak{D}$ un anneau contenu dans un sur-corps du corps des fractions de $\mathfrak{O}'$, contenant $\mathfrak{O}'$ et entier sur $\mathfrak{O}'$; soient $\mathfrak{m}'$ l'idéal premier maximal de $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{M}_i$ $(1 \leq i \leq h)$ les idéaux premiers maximaux de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{O}_i$ leurs anneaux locaux. Pour que $\mathfrak{O}'$ ne soit pas ramifié dans le corps des fractions de $\mathfrak{D}$ au sens de l'exposé précédent, il faut et il suffit qu'aucune des localités $\mathfrak{O}_i$ ne soit ramifiée par rapport à $\mathfrak{O}'$. La condition est en effet nécessaire en vertu de ce qu'on a dit dans l'exposé précédent. Supposons la satisfaite. Le transporteur de $\mathfrak{M}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_h$ dans $\mathfrak{m}'\mathfrak{D}$ n'est alors contenu dans aucun des $\mathfrak{M}_i$ et contient par suite 1 , ce qui montre que $\mathfrak{m}'\mathfrak{D} = \mathfrak{M}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_h$, donc que

$\mathfrak{O}/\mathfrak{m}'\mathfrak{O}$ est somme directe des $\mathfrak{O}/\mathfrak{M}_i$ qui sont par hypothèse des extensions séparables de $\mathfrak{o}'/\mathfrak{m}'$; $\mathfrak{O}/\mathfrak{m}'\mathfrak{O}$ est donc une algèbre séparable, ce qui montre que $\mathfrak{o}'$ n'est pas ramifié.

Soient $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}'$ des localités telles que $\mathfrak{o}$ domine $\mathfrak{o}'$ et soit non ramifié par rapport à $\mathfrak{o}'$; soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{o}'$; alors $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ est non ramifié par rapport à $\mathfrak{o}'/\mathfrak{p}'$, et $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ non ramifié par rapport à $\mathfrak{o}'_{\mathfrak{p}'}$: cela résulte immédiatement du critère que nous avons établi plus haut.

On notera que la condition c) dans la définition des localités non ramifiées peut aussi se formuler comme suit : c') l'application naturelle de $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est surjective. En effet, il est clair que c) entraîne c') ; si c') est satisfaite, soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}'\mathfrak{o}$; on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^2$, d'où $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} + \mathfrak{m}^k$ pour tout k, et par suite $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

APPENDICE II .

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant, qui nous sera utile dans la suite :

PROPOSITION 1.- Soit f un morphisme d'une variété U dans une variété normale V tel que $f(U)$ soit dense dans V . Soit x un point de U qui est un point isolé de l'ensemble $f^{-1}(f(x))$. Alors l'image par f de tout voisinage de x dans U est un voisinage de $f(x)$ dans V .

En remplaçant U par sa normalisée (dans son corps de fonctions numériques lui-même), on se ramène immédiatement au cas où U est normale. Comme $f^{-1}(f(x))$ a une composante irréductible $\{x\}$ de dimension 0 , on a $\dim U = \dim f(U)$, d'où $\dim U = \dim V$; le corps F_U des fonctions numériques sur U est donc algébrique sur celui, F_V , des fonctions numériques sur V . Soit U' une normalisée de V dans F_U ; l'application f se factorise en $f' \circ g$, où f' est l'application canonique $U' \to V$ et g un morphisme birationnel $U \to U'$. Soit $x' = g(x)$; comme x est isolé dans $g^{-1}(x')$, il résulte du théorème principal de Zariski que l'anneau local de x est anneau local d'un idéal premier maximal d'un anneau entier sur l'anneau local de x' , donc est identique à ce dernier. La fonction sur U' à valeurs dans U réciproque de g est donc définie en x' , d'où il résulte tout de suite que g induit un isomorphisme d'une sous-variété ouverte convenable de U contenant x sur une sous-variété ouverte de U' . Il suffira donc de démontrer la proposition dans le cas où U est normalisée de V dans F_U . Dans ces conditions, l'image par f de toute partie fermée de U est fermée dans V (Séminaire 1955/56 , théorème 1, exposé 7 et théorème 1 bis, exposé 8). De plus, si Y , Y' sont des sous-variétés fermées de V telles que $Y \subset Y'$ et X une sous-variété fermée de U telle que $f(X) = Y$, il y a une sous-variété fermée X' de U contenant X et telle que $f(X') = Y'$. Soient en effet $\mathfrak{O}(X)$ et $\mathfrak{O}(Y)$ les anneaux locaux de X et Y ; $\mathfrak{O}(X)$ est donc l'anneau local d'un idéal premier maximal x de la fermeture entière $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{O}(X)$ dans F_U . La variété Y' est déterminée par un idéal premier $\mathfrak{y}'$ de $\mathfrak{O}(X)$; puisque $\mathfrak{O}(X)$ est un anneau normal, il y a un idéal premier $\mathfrak{x}'$ de $\mathfrak{D}$ contenu dans $\mathfrak{x}$ et tel que $\mathfrak{x} \cap \mathfrak{O}(x) = \mathfrak{y}'$ (Séminaire 1955/56, exposé 1, théorème 4), ce qui démontre notre assertion. Ceci dit, soit U_1 un voisinage ouvert de x dans U , et soit $A = U - U_1$; on a $f(U_1) = V - B$, où B est l'ensemble des y' tels que $f^{-1}(y') \subset A$; il suffira donc de montrer que $y = f(x)$ n'est pas adhérent à B . Or, supposons le contraire ; y est alors adhérent à une composante irréductible B_1 de B , dont l'adhérence est une sous-variété fermée Y de V passant par y . Comme $x \in f^{-1}(y)$, il y a une sous-variété fermée X de U passant par x

telle que $f(X) = Y$. Si X_o est une partie relativement ouverte de X , $f(X_o)$ contient une partie relativement ouverte Y_o de Y et rencontre par suite B_1 ; $X \cap \overline{f}^1(B_1)$ est donc dense dans X . Or on a $\overline{f}^1(B_1) \subset A$ et A est fermé ; on a donc $X \subset A$, d'où contradiction puisque $x \notin A$.