A. Grothendieck

Les théorèmes de structure fondamentaux pour les groupes algébriques affines

Séminaire Claude Chevalley, tome 1 (1956-1958), exp. nº 6, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__1__A6_0>

Séminaire C. CHEVALLEY
E.N.S., 1956/57
-:-:-:-

Exposé n° 6

LES THÉORÈMES DE STRUCTURE FONDAMENTAUX POUR LES GROUPES ALGÉBRIQUES AFFINES.

(Exposé de A. GROTHENDIECK, le 10.12.1956)

Un complément à l'exposé 4.

En raffinant la démonstration du corollaire 1 à la proposition 5, exposé 4, on trouve le résultat plus fort suivant :

COROLLAIRE 1 bis à la proposition 5 de l'exposé 4.- *Soient* G *un groupe algébrique linéaire,* M *un sous-groupe fermé de* G , M' *un sous-groupe fermé distingué résoluble de* M , g *un élément de* G *qui normalise* M *et* M' , $\sigma(g)$ *l'automorphisme de* M/M' *défini par* $m \to gmg^{-1}$. *On suppose ou bien que* g *est semi-simple et* $M' = M'_u$ *ou bien que* g *est unipotent et* $M' = M'_s$. *Alors tout élément de* M/M' *invariant par* $\sigma(g)$ *est image d'un élément de* M *qui commute à* g .

Une récurrence immédiate sur la longueur de la suite des dérivés successifs de M' nous ramène au cas où M' est commutatif. Soit H le groupe fermé engendré par g . Dans le cas où g est unipotent et la caractéristique nulle, H est connexe ; comme M' est diagonalisable (étant commutatif et composé d'éléments semi-simples), H opère trivialement sur M' . En vertu du corollaire 1 , il opère donc trivialement sur l'image réciproque de l'ensemble des éléments de M/M' invariants par $\sigma(g)$, ce qui prouve notre assertion dans ce cas. Ce cas étant écarté, H est l'adhérence d'une suite croissante (U_n) de groupes finis ; si g est semi-simple, donc H diagonalisable, cela résulte de la proposition 2, exposé 4, et si g est unipotent, cela résulte du fait que H est lui-même d'ordre fini égal à une puissance de p . Soit M_n l'ensemble des éléments de M invariants par U_n ; les M_n forment une suite décroissante de sous-groupes fermés de M dont l'intersection est l'ensemble des éléments de M invariants par H . Donc il existe un n tel que M_n soit l'ensemble des éléments de M qui commutent à g . Cela nous ramène à prouver ceci : si H

est un sous-groupe fini de G normalisant M et M' et si ou bien $H = H_s$, $M' = M'_u$ ou bien $H = H_u$, $M' = M'_s$, alors tout élément de M/M' invariant par H provient d'un élément de M invariant par H. Soit $m \in M$ tel que $hmh^{-1} = mf(h)$ pour $h \in H$, avec $f(h) \in M'$. Posant $\tau(h).m' = hm'h^{-1}$, on a $f(hh') = f(h)\,(\tau(h).f(h'))$ si h, $h' \in H$ et $f(e) = e$, i.e. f est un 1-cocycle normalisé de H à valeurs dans le groupe abélien M' où H opère. On cherche un $m' \in M'$ tel que mm' soit invariant par H, i.e. tel que $f(h) = m'(\tau(h).m')^{-1}$ pour tout h ; i.e. on veut prouver que le cocycle f est homologue à 0. Si $H = H_s$, tous les éléments de M' sont unipotents et ont par suite pour ordres des puissances de p, tandis que H est d'ordre premier à p ; on a donc $H^1(M, M') = 0$ dans ce cas. Si $H = H_u$, $M' = M'_s$, H est d'ordre une puissance de p, et on se ramène facilement au cas cyclique (qui suffit d'ailleurs pour établir le corollaire 1 bis). Il faut alors démontrer que tout élément de M' de "norme" 1 peut s'écrire $m'(\tau(h).m')^{-1}$, où h est un générateur de H. Comme M' est diagonalisable et comme l'ensemble N des éléments qui sont de norme 1, ainsi que l'ensemble N' des éléments de la forme $m'(\tau(h).m')^{-1}$, sont des sous-groupes fermés, on est ramené à prouver que l'ensemble N_n des éléments de N d'ordres divisant un entier donné n est contenu dans N', ce qui nous ramène au cas où M' est lui-même fini. Alors on a encore $H^1(M, M') = 0$ car l'ordre de H est premier à celui de M' ; ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 1 ter.- *Soient G un groupe algébrique affine, M un sous-groupe fermé résoluble et connexe de G, g un élément de G normalisant M ; on suppose ou bien que g est semi-simple et $M = M_u$ ou bien que g est unipotent et $M = M_s$. Alors l'ensemble des éléments de M qui commutent à g est connexe.*

Pour terminer ces compléments, remarquons qu'en modifiant légèrement les démonstrations données pour les deux corollaires précédents, on montrerait qu'ils sont encore valables si l'on y remplace g par un sous-groupe H de G normalisant M et M', H étant supposé résoluble et l'hypothèse $g = g_s$ ou $g = g_u$ étant remplacée par l'hypothèse correspondante sur H.

1.- LE THÉORÈME DE LIE-KOLCHIN.

THÉORÈME 1.- *Soit G un groupe algébrique d'automorphismes de l'espace vectoriel V. Si G est résoluble et connexe, il existe une base de V par rapport à laquelle les éléments de G s'expriment par des matrices triangulaires.*

Il revient au même de dire qu'il existe une suite de composition du G-module V dont les quotients successifs sont de dimension 1, i.e. un *drapeau* de V invariant sous G (exposé 5, 3). Comme G est un groupe résoluble connexe opérant dans la variété des drapeaux, qui est complète, l'assertion est un cas particulier du théorème de Borel (exposé 5, théorème 3).

COROLLAIRE 1.- *Un groupe algébrique affine résoluble et connexe admet une suite de composition dont les facteurs sont connexes et de dimension 1.*

Tout d'abord, ce résultat est immédiat pour le groupe $T(n)$ des matrices triangulaires de degré n : en effet, désignant par T_k $(1 \leq k < n)$ l'ensemble des matrices triangulaires qui n'ont que des 1 sur la diagonale principale, et dont les coefficients a_{ij} sont nuls si $i < j \leq i+k$, en posant $T_0 = T(n)$, on voit qu'on obtient ainsi une suite de composition dont les quotients successifs sont $T_i/T_{i+1} \simeq D(n) = \underline{k}^{*n}$ si $i = 0$, $T_i/T_{i+1} \simeq \underline{k}^{n-i}$ pour $1 \leq i < n$. Raffinant la suite de composition précédente, on obtient une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à $\underline{k}^*$ ou $\underline{k}$. Si G est affine résoluble connexe, il est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un $T(n)$ d'après le théorème 1, donc prenant la trace sur G d'une suite de composition convenable de $T(n)$, on trouve une suite de composition dont les facteurs L_i admettent des représentations rationnelles fidèles dans $\underline{k}^*$ ou $\underline{k}$, et sont donc de dimension 1. Remplaçant les L_i par les composantes connexes de l'unité dans les L_i, on trouve une suite de composition formée de sous-groupes connexes, à facteurs de dimension 1.

COROLLAIRE 2.- *Soit G un groupe algébrique affine résoluble connexe, alors l'ensemble G_u de ses éléments unipotents est un sous-groupe fermé invariant nilpotent, et G/G_u est commutatif.*

Comme G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe $T(n)$, il suffit de remarquer que les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux, et qu'une matrice triangulaire est donc unipotente si et seulement si sa diagonale se réduit à des 1. De plus, les T_i $(1 \leq i \leq n)$ forment une suite centrale pour $T(n)_u$, qui est donc nilpotent ; il en est donc de même de G_u.

COROLLAIRE 3.- Soit G un groupe algébrique résoluble connexe et soit H un sous-groupe de G formé d'éléments semi-simples. Alors H est commutatif ; son centralisateur et son normalisateur dans G sont identiques.

L'hypothèse implique que l'homomorphisme de H dans G/G_u induit par l'homomorphisme canonique est injectif ; comme G/G_u est commutatif, il en est de même de H. Soit $g \in G$ normalisant H ; on a donc, pour $h \in H$, $ghg^{-1}h^{-1} \in H$; or on a aussi $ghg^{-1}h^{-1} \in G_u$ en vertu du corollaire 2, d'où $ghg^{-1}h^{-1} = e$, et g centralise H.

REMARQUE.- Le fait que G soit connexe est évidemment essentiel pour la validité du théorème 1 (prendre G fini !). Cependant, on voit directement, par récurrence sur la longueur d'une suite de composition à quotients abéliens, et utilisant le fait qu'un caractère rationnel multiplicatif sur un groupe algébrique affine formé d'éléments unipotent est réduit au caractère identique, que si G est un groupe algébrique linéaire formé d'éléments unipotents et si G est résoluble (on verra en fait que la première hypothèse implique déjà que G est nilpotent), alors il existe une base par rapport à laquelle G soit triangulaire.

2.- Structure des groupes algébriques affines nilpotents.

THÉORÈME 2.- Soit G un groupe algébrique affine nilpotent. Si G est connexe, G_u et G_s sont des sous-groupes invariants fermés connexes, G_s est dans le centre de G, et G s'identifie au produit direct de G_s et G_u. En tous cas (G connexe ou non) deux éléments dont l'un au moins est semi-simple, et l'un au moins est dans G_o (composante connexe de l'unité), commutent.

Supposons d'abord G connexe, en vertu du théorème de Lie-Kolchin, on peut supposer que G est un sous-groupe fermé d'un groupe $T(n)$. On sait déjà que G_u est un sous-groupe fermé invariant (corollaire 2 au théorème 1). Prouvons que G_s est dans le centre de G par récurrence sur dim. G , l'assertion étant triviale pour dim. G = 0 . Supposons donc dim. $G > 0$, alors le centre de G est de dimension > 0 , soit C la composante connexe de l'unité dans le centre, on sait (exposé 4, théorème 4) que $C = C_s x C_u$. Si $C_s \neq (e)$, soit f une représentation linéaire de G de noyau C_s (exposé 4, corollaire au théorème 1), soit $G' = f(G)$; d'après l'hypothèse de récurrence, G'_s est central dans G' , de plus $f^{-1}(G'_s) = G_s$ puisque $f(G_s) = G'_s$ (exposé 4 , corollaire au théorème 3) et que $G_s = G_s C_s$; il en résulte que G_s est un sous-groupe fermé distingué de G , et comme il est formé d'éléments semi-simples, il est central (théorème 1, corollaire 3). Si $C_u \neq (e)$, soit f un homomorphisme rationnel de G ayant pour noyau C_u , soit G' son image, alors pour $s \in G_s$, f(s) est semi-simple dans G' , donc central par l'hypothèse de récurrence, donc pour $g \in G$ on a $gsg^{-1} = su$ $(u \in C_u)$; comme s et u commutent c'est là la décomposition canonique de gsg^{-1} en sa partie semi-simple et unipotente, et comme gsg^{-1} est évidemment semi-simple, on a $u = e$, d'où $gsg^{-1} = s$. G_s est donc bien central, c'est l'ensemble des matrices semi-simples du centre de G , ce qui prouve que c'est un sous-groupe fermé (exposé 4, théorème 4) évidemment invariant. L'application $(s , u) \rightarrow su$ de $G_s x G_u$ dans G est donc une représentation rationnelle, évidemment bijective ; pour montrer que c'est un isomorphisme il suffit de montrer que l'application $g \rightarrow g_s$ de G dans G_s est rationnelle. Mais comme G_s est commutatif, on peut trouver une base de l'espace $V = \underline{k}^n$ où opère G ,telle que par rapport à cette base, les matrices de G_s soient diagonales (exposé 4 , lemme 3) , de sorte que pour $g \in G$, g_s est la partie diagonale de g . Cela implique bien que $g \rightarrow g_s$ est rationnelle, donc que G est isomorphe à $G_s x G_u$, d'où on conclut (puisque G est connexe) que G_s et G_u sont connexes.

Démontrons la deuxième partie du théorème, en distinguant les deux cas possibles.

a) Prouvons que G_{os} est dans le centre de G . D'après ce qu'on a vu, G_{os} est un sous-groupe fermé central connexe de G_o , évidemment invariant par tout automorphisme de G_o , donc invariant dans G . Soit $g \in G$, l'automorphisme $s \rightarrow gsg^{-1}$ de G_{os} défini par g est d'ordre fini, puisqu'on aura $g^m \in G_o$ pour m convenable, d'autre part il résulte de la nilpotence de G qu'il existe une suite de composition de G formée de sous-groupes T_i, tels que int(g) induise l'identité dans les T_i/T_{i+1} (où int. g est l'automorphisme intérieur produit par g). Prenant les traces des T_i sur G_{os}, et appliquant le corollaire 2 à la proposition 5, exposé 4, on voit que int(g) est l'identité sur G_{os},

C.Q.F.D.

b) Tout élément semi-simple s de G centralise G_o. En effet, comme $G_o = G_{os} \times G_{ou}$, et que s centralise G_{os} d'après a), il suffit de montrer qu'il centralise G_{ou}. Pour ceci, reprenant les T_i comme ci-dessus, on applique le corollaire 1 à la proposition citée.

REMARQUE.- La structure des groupes algébriques affines connexes nilpotents est ainsi ramenée au cas d'un groupe unipotent connexe. Bien entendu cette structure est loin d'être bien connue (même dans le cas abélien). Signalons cependant que nous verrons qu'un groupe connexe unipotent de dimension 1 est isomorphe à $\underline{k}$, d'où il résulte facilement qu'un groupe unipotent connexe admet une suite de composition dont les facteurs sont isomorphes à $\underline{k}$. Appliquant un résultat de Rosenlicht (qui implique que la "fibration" d'un groupe algébrique par un sous-groupe fermé résoluble est toujours "localement triviale"), et le fait qu'un espace fibré algébrique localement trivial sur $\underline{k}$, de groupe $\underline{k}$, est trivial (car la base $\underline{k}$ est un espace algébrique affine), on trouve qu'un groupe algébrique affine nilpotent connexe unipotent est isomorphe, en tant que variété, à un $\underline{k}^n$ (et sa loi de composition est donc donnée par des polynômes). La réciproque a été prouvée par Lazard.

3.- Structure des groupes algébriques affines résolubles, connexes.

THÉORÈME 3.- Soit G un groupe algébrique affine résoluble connexe. Alors G_u est un sous-groupe distingué fermé connexe nilpotent, les tores maximaux de G sont conjugués par automorphismes intérieurs, et si T est un tel tore, G est le produit semi-direct de G_u par T.

(Cette dernière assertion signifie, par définition, que l'application $(s, u) \to su$ de $T \times G_u$ dans G est un isomorphisme d'ensembles algébriques).

Les assertions concernant G_u, sauf la connexité, sont déjà établies (corollaire 1 au théorème 1) ; le fait que G_u est connexe résultera aussitôt de la dernière partie du théorème. Le groupe G/G_u est un groupe affine commutatif (théorème 1 , corollaire 1) dont tous les éléments sont semi-simples (car un élément unipotent de G/G_u doit provenir d'un élément de G_u , (corollaire du théorème 3 de l'exposé 4), donc G/G_u est diagonalisable et connexe, c'est donc un tore Q (exposé 4). Nous voulons prouver : (i) l'extension G de Q par G_u est triviale, i.e. il existe un homomorphisme rationnel f de Q dans G dont le composé avec $G \to Q$ soit l'identité. Alors $T = f(Q)$ est un tore dans G , et le fait que T soit un tore maximal et conjugué à tout autre tore maximal revient alors à dire: (ii) pour tout tore S de G , il existe un $g \in G$ tel que $gSg^{-1} \subset T$. Au lieu de (ii), nous prouverons le résultat plus fort :

LEMME 1.- Soit G un groupe résoluble connexe produit semi-direct du tore T et de G_u , et soit S une partie semi-simple commutative de G , alors il existe $u \in G_u$ tel que $uSu^{-1} \subset T$.

Pour démontrer (i) , (ii) et le lemme 1 , on est ramené au cas où G_u est abélien, grâce aux deux lemmes suivants, qui se démontrent par une récurrence évidente :

LEMME 2.- Soit G un groupe algébrique, extension d'un groupe algébrique Q par un groupe algébrique U , soit $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de composition de U par des sous-groupes invariants dans G . Pour que l'extension soit triviale, il suffit que pour tout $0 \leq i \leq n-1$ et tout sous-groupe L de G tel que $L \cap U = U_i$, $L.U = G$, et tel que la bijection $L/U_i \to Q$ soit un isomorphisme, l'extention L/U_{i+1} de Q par U_i/U_{i+1} soit triviale.

LEMME 3.- Soit $G = T.U$ un groupe algébrique produit semi-direct du groupe algébrique T par le sous-groupe distingué U , et soit $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de composition de U par des sous-groupes invariants par T . Soit S une partie de G , V un sous-groupe de G . Pour qu'il existe un $v \in V$ tel que $vSv^{-1} \subset T$, il faut et il suffit que pour tout $0 \leq i \leq n-1$ et $v \in V$ tels que $vSv^{-1} \subset T.U_i$, l'image S' de vSv^{-1} dans G/U_{i+1} (identifié au produit semi-direct $T.(U_i/U_{i+1})$), soit conjuguée d'une partie de T à l'aide d'un $v' \in V'$ (où V' est l'image de V dans G/U_{i+1}).

Nous appliquerons ces lemmes en prenant $U = G_u$, et la suite de composition de G_u formée de G_u et des dérivés successifs de G , enfin

$V = G$ dans le lemme 3 (bien qu'on pourrait raffiner en prenant, avec Borel, le terme terminal de la suite centrale descendante de G). Nous supposerons donc G_u abélien (bien que cela ne nous serve pas pour prouver (i)). Montrons qu'il existe un tore T dans G appliqué <u>sur</u> Q , par récurrence sur la dimension n de G , l'assertion étant triviale si $n = 0$. Si Q opère trivialement sur G_u , G est nilpotent et notre assertion résulte du théorème 2. Sinon, il existe un élément de Q opérant non trivialement sur G_u , cet élément provient d'un élément semi-simple s de G , n'appartenant pas au centre. Donc le centralisateur $Z(s)$ de s est $\neq G$, d'autre part en vertu du complément à l'exposé 4 , (corollaire 1 <u>bis</u>) $Z(s)$ est appliqué <u>sur</u> $Q = G/G_u$, il en est donc de même de $Z(s)_o$. La dimension de $Z(s)_o$ étant $< n$, l'hypothèse de récurrence s'applique, ce qui prouve l'existence du tore T en question. Comme évidemment $T \cap G_u$ est réduit à (e) , G s'identifie au produit semi-direct $T.G_u$ en tant que groupe abstrait. Montrons enfin que l'application naturelle $(t , u) \rightarrow tu$ de $T \times G_u$ dans G est non seulement régulière, mais un isomorphisme pour les structures d'ensembles algébriques. Or, G étant identifié à un groupe algébrique triangulaire (théorème 1), cela se prouve comme dans le théorème 2. Cela prouve (i). Pour prouver le lemme 1, on peut supposer que S est un sous-groupe fermé de G , nécessairement diagonalisable, S est donc l'adhérence de la réunion d'une suite croissante de sous-groupes finis S_n . Soit M_n l'ensemble des $u \in G_u$ tels que $uS_n u^{-1} \subset T$, c'est une partie fermée de G_u , et les M_n forment une suite décroissante de parties fermées de G_u dont l'intersection M est l'ensemble des $u \in G_u$ tels que $uSu^{-1} \subset T$. Pour montrer que M est non vide, il suffit de le montrer pour chacun des M_n , on est donc ramené au cas où S est un groupe <u>fini</u>. Soit $G' = S.G_u$, $S' = T \cap G'$, G' est le produit semi-direct de S par G_u et de S' par G_u , et pour prouver que S et S' sont conjugués par un élément de G_u , il suffit comme bien connu de montrer que $H^1(S , G_u) = 0$ (où G_u est considéré comme groupe abélien sur lequel S opère). Or si la caractéristique est $p > 0$ chaque élément de G_u est d'ordre une puissance de p tandis que G est d'ordre premier à p , d'où la relation voulue, tandis que si la caractéristique est nulle, G_u est isomorphe à k^n et k étant de caractéristique 0 , on a encore $H^1(S , G_u) = 0$, C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1.- Soit G un groupe algébrique affine résoluble et connexe, S une partie de G semi-simple et commutative. Alors le centralisateur de S est connexe, et S est contenu dans un tore maximal T.

La dernière assertion résulte du lemme 1, supposons donc $S \subset T$, alors le centralisateur de S est identique à $T.G_u^S$, où G_u^S est l'ensemble des éléments de G_u qui commutent à S. D'après la remarque terminale du "complément à l'exposé" ci-dessus, G_u^S est connexe ; on peut d'ailleurs obtenir ce fait à l'aide du corollaire 1 bis dudit complément, en se ramenant comme ci-dessus au cas où S est fini, puis par récurrence sur le nombre d'éléments de S au cas où S est réduit à un élément, cas qui est envisagé dans le corollaire cité.

4.- Sous-groupes de Borel, théorèmes de conjugaison.

DÉFINITION 1.- Soit G un groupe algébrique. On appelle sous-groupe de Borel de G tout sous-groupe résoluble connexe maximal de G.

Bien entendu, tout sous-groupe résoluble connexe de G est contenu dans un sous-groupe de Borel de G (en particulier il existe des sous-groupes de Borel de G).

THÉORÈME 4.- Soit G un groupe algébrique affine connexe.

a) Les sous-groupes de Borel B de G sont conjugués.

b) G/B est une variété projective, et pour qu'un sous-groupe fermé H de G contienne un sous-groupe de Borel, il faut et il suffit que G/H soit une variété complète.

c) Les tores maximaux T de G sont conjugués dans G, un tore maximal de B est aussi un tore maximal de G.

DÉMONSTRATION.- On peut supposer que G est un sous-groupe fermé de $G\ell(V)$. Soit F la variété des drapeaux de V ; G opère sur F, il existe donc une orbite fermée $W = G.d$ (exposé 5, corollaire au lemme), où d est un drapeau convenable. Considérons le stabilisateur B_1 de d, c'est un sous-groupe fermé de G, résoluble puisqu'il est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe $T(n)$ (qui est résoluble, voir n° 1) ; soit B la composante connexe de l'élément neutre dans B_1. L'application $g \to g.d$ induit une application rationnelle de G/B dans W, telle que l'image réciproque d'un point de W ait toujours le même nombre d'éléments (savoir $[B_1 : B]$).

Comme W est projective, il en résulte que G/B est aussi projective (exposé 5, corollaire au théorème 2). Soit R un sous-groupe résoluble connexe de G, et soit H un sous-groupe fermé de G tel que G/H soit complète. Alors R, opérant sur G/H, admet un point fixe (exposé 5, théorème 3), ou ce qui revient au même, il existe $g \in G$ tel que $R.g.H = g.H$ i.e. $g^{-1}Rg \in H$. Appliquant ceci au cas où $H = B$ et où R est un sous-groupe de Borel, on voit qu'on doit avoir $g^{-1}Rg = B$, d'où résulte que B est un sous-groupe de Borel, et que les sous-groupes de Borel sont tous conjugués à B, ce qui prouve a). Prenant $R = B$, on voit ensuite que si G/H est complète, H contient un sous-groupe de Borel de G (savoir $g^{-1}Bg$). La réciproque est évidente, puisque G/B est complète, et qu'une image d'une variété complète par une application régulière est complète, ce qui prouve b). Soit T un tore maximal de B, soit T' un tore de G ; comme T' est résoluble il est conjugué à un sous-groupe de B, qui est encore un tore maximal de G et à fortiori de B, et est donc conjugué à T (théorème 3), ce qui prouve que T est aussi un tore maximal de G, et en même temps que deux tores maximaux de G sont conjugués, c'est l'assertion c).

COROLLAIRE 1.- *Tout élément* g *de* G *centralisant le sous-groupe de Borel* B *est dans le centre de* G.

En effet, l'application $x \longrightarrow xgx^{-1}$ de G dans G passe au quotient et définit une application régulière de G/B dans G, et G/B étant connexe et complète (théorème 4 b)) et G affine, cette application est réduite à une constante, ce qui signifie que g est dans le centre de G.

COROLLAIRE 2.- *Soient* B *un sous-groupe de Borel de* G, T *un tore maximal. Les conditions suivantes sont équivalentes* : a) G *n'a qu'un seul tore maximal,* b) T *est dans le centre de* G, c) G *est nilpotent,* d) B *est nilpotent. Et dans ce cas on a* $B = G$.

c) implique b) en vertu du théorème de structure des groupes nilpotents (théorème 2), b) $\Rightarrow$ a) en vertu de la conjugaison des tores maximaux, a) implique d) car les tores maximaux de B sont des tores maximaux de G, donc B n'a qu'un seul tore maximal, donc ce dernier est invariant dans B donc dans le centre de B (exposé 4, corollaire à la proposition 2), d'où il résulte que B est isomorphe au produit direct $T \times B_u$ (théorème 3), donc que B est nilpotent. Prouvons enfin que d) implique c), en prouvant que d) implique $G = B$, par récurrence sur dim. B. Si dim.$B = 0$, i.e. $B = (e)$, $G = G/B$ est complète, donc G étant affine connexe on a $G = (e)$. Si dim.$B = n > 0$, la composante connexe H du centre de B est de dim. > 0 (puisque B est connexe nilpotent) ; or H est dans le centre de G (corollaire 1) donc invariant dans G, B/H est un sous-groupe de Borel de G/H puisque c'est un sous-groupe résoluble connexe tel que $(G/H)/(B/H) = G/B$ soit complète, donc étant nilpotent est identique à G/H d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $B = G$, C.Q.F.D.

Signalons le cas particulier suivant du corollaire 2 (compte tenu théorème 2) :

<u>COROLLAIRE 3.- Pour que l'on ait</u> $T = (e)$, <u>il faut et il suffit que</u> G <u>soit nilpotent et identique à sa partie unipotente.</u>

<u>COROLLAIRE 4.- Soit</u> T <u>un tore maximal de</u> G. <u>Alors le centralisateur connexe</u> C <u>de</u> T <u>est identique à son normalisateur connexe, et</u> C <u>est son propre normalisateur connexe.</u> C <u>est un sous-groupe nilpotent de</u> G, <u>et tout sous-groupe de Borel contenant</u> T <u>contient</u> C.

Soit N le normalisateur de T ; T est invariant dans le groupe connexe N_o et est diagonalisable, donc est dans le centre de N_o (exposé 4, corollaire à la proposition 2) ce qui prouve l'identité du centralisateur connexe et du normalisateur connexe. T est un tore maximal de C, donc son unique tore maximal d'après c) appliqué aux tores de C, compte tenu que T est dans le centre de C. Donc tout $g \in G$ qui normalise C normalise T, la réciproque étant triviale, donc les normalisateurs de T et C coïncident, donc aussi leurs composantes connexes, ce qui prouve que $N(T)_o = C$ coïncide avec le normalisateur connexe $N(C)_o$ de C. Enfin T est un tore maximal de C et est dans le centre de C ; donc C est nilpotent en vertu du corollaire 2.

5.- <u>Théorèmes de densité.</u>

<u>LEMME 5.- Soient</u> G <u>un groupe algébrique connexe,</u> H <u>un sous-groupe fermé connexe,</u> N <u>son normalisateur,</u> $e = \dim (N/H)$. <u>A la réunion des conjugués</u>

de H . Alors A est une partie constructible de G de dimension $\leqslant \dim(G) - e$, et pour que sa dimension soit égale à $\dim(G) - e$, il faut et il suffit qu'il existe un $x \in H$ qui ne soit contenu que dans un nombre fini de conjugués de H .

(L'hypothèse de connexion sur G et H n'a été faite que parce que le Séminaire 1955/56 ne traitait que des variétés irréductibles). Soit X la partie de $G/N \times G$ formée des couples $(\bar{g}, x)$ ($\bar{g}$ désigne la classe de $g \in G$ dans G/N) tels que $x \in gHg^{-1}$ i.e. $g^{-1}xg \in H$, (condition qui ne dépend que de $(\bar{g}, x)$). Comme l'ensemble des (g, x) tels que $gxg^{-1} \in H$ est évidemment fermé, X est une partie fermée de $G/N \times G$. X est irréductible, car c'est l'image de la variété $G \times H$ par l'application régulière déduite par passage au quotient de l'application $(g, h) \to (g, ghg^{-1})$. Considérons la projection $X \to G/N$, c'est évidemment une application régulière surjective, dont les "fibres" sont isomorphes à H , d'où il résulte que X est de dimension égale à $\dim(G/N) + \dim(H) = \dim(G) - \dim(N) + \dim(H) = \dim(G) - e$. Soit f l'application de projection de X dans G , on a évidemment $A = f(X)$. Soit A_1 l'ensemble des points de A tels que $f^{-1}(x)$ soit fini. Il en résulte que A est constructible et de dimension $< \dim(X) = \dim(G) - e$, et que sa dimension est égale à $\dim(G) - e$ si et seulement si A_1 n'est pas vide. Si G/N est complet, on montre que $G/N \times G$ est complet au dessus de G (Séminaire 1955/56, exposé 6 , paragraphe 7) donc $f(X) = A$ est une partie fermée de G (loc. cité, exposé 8, théorème 1 bis). Cela prouve le lemme. Supposons maintenant $e = 0$, i.e. $H = N_0$, et que A_1 soit non vide, i.e. A est dense. En vertu d'un théorème de Chevalley (voir appendice II à l'exposé 5) compte tenu que G est normal, on trouve que A_1 est ouvert dense, et même le résultat :

COROLLAIRE.- G et H étant comme dans le lemme, supposons H identique à son normalisateur connexe, et qu'il existe un $g \in H$ qui ne soit contenu que dans un nombre fini de conjugués de H . Alors l'ensemble U des points $g \in G$ tels que l'ensemble $E(g)$ des conjugués de H contenant g soit fini non vide, est un ouvert dense. De plus, il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que pour tout $g \in U$, l'ensemble $E(g)$ ait au plus r éléments, et tel que l'ensemble V des $g \in G$ tels que $E(g)$ ait exactement r éléments soit un ouvert dense dans G .

THÉORÈME 5.- Soit G un groupe algébrique affine connexe, T un tore maximal C son centralisateur connexe, B un sous-groupe de Borel de G .

a) La réunion des conjugués de C contient un ouvert dense.

b) Tout élément de G est conjugué d'un élément de B, i.e. contenu dans un sous-groupe de Borel.

c) Tout élément semi-simple de G est conjugué d'un élément de T , i.e. est contenu dans un tore maximal.

d) L'intersection des tores maximaux de G est identique à la partie semi-simple du centre de G .

Pour prouver a), appliquons le lemme 5 avec $H = C$; on a $e = 0$ en vertu du corollaire au théorème 4 ; on est ramené à trouver un élément de C qui ne soit contenu que dans un nombre fini de conjugués de C ; nous allons même construire un $x \in T$ tel que tout $g \in G$ tel que $gxx^{-1} \in C$ normalise T donc C (ce qui implique que x n'est contenu que dans un seul conjugué de C). Comme T est isomorphe à $\underline{k}^{*n}$, il existe une suite filtrante croissante de sous-groupes finis cycliques U_m de T dont la réunion est dense (prendre n nombres premiers $q_1 , \dots , q_n$ distincts et distincts de la caractéristique, et pour tout entier m considérer le sous-groupe $Z/(q_1{}^m) \times \dots \times Z/(q_n{}^m)$ de $\underline{k}^{*n}$) . Le normalisateur de T est l'intersection des ensembles N_m formés des $g \in G$ tels que $gU_m g^{-1} \subset T$, et comme ces ensembles forment une suite décroissante de fermés, N est identique à l'un des N_m , de sorte qu'il suffira de prendre pour x un générateur de U_m (N.B. si on savait que $\underline{k}$ est de degré de transcendance assez grand sur son corps premier, on aurait pu prendre plus simplement pour x un élément de T engendrant un sous-groupe dense). Cela prouve a) .A fortiori la réunion des conjugués de B est dense (puisque l'un d'eux contient C) or il est fermé en vertu du même lemme, compte tenu que G/B est complet (théorème 4 , b) donc il est identique à G , d'où b). Soit $s \in G_s$, on vient de voir qu'il est contenu dans un groupe de Borel B , donc (corollaire du théorème 3) dans un tore maximal de B , qui est aussi un tore maximal dans G (théorème 4 c) , ceci prouve c). Soit s un élément semi-simple du centre de G , il est contenu dans un tore maximal comme on vient de voir, donc dans tous en vertu du théorème de conjugaison. L'intersection des tores maximaux est un sous-groupe invariant fermé diagonalisable, donc central puisque G est connexe, en vertu dé l'exposé 4, proposition 2 corollaire, d'où d) .

COROLLAIRE 1.- Soit R un sous-groupe résoluble connexe de G , x un élément du centralisateur de R , alors il existe un sous-groupe de Borel B de G contenant R et x .

Soit B un sous-groupe de Borel, il faut montrer qu'il existe un élément de G/B invariant à la fois par R et par x . Or l'ensemble X des éléments de G/B invariants par x est fermé et non vide puisque G/B est complète et que x est contenu dans un groupe résoluble connexe en vertu de c) , de sorte qu'il suffit d'appliquer exposé 5 , théorème 3 . Or X est invariant par R , de sorte qu'il suffit d'appliquer le même théorème pour trouver un élément de X invariant par R .

COROLLAIRE 2.- Soit S un tore de G et x un élément de son centralisateur, alors il existe un tore maximal contenant x et S .

D'après le corollaire 1, il existe un sous-groupe de Borel contenant x et S , et en vertu du théorème 3, corollaire, il existe dans ce dernier un tore maximal contenant x et S , d'où la conclusion.

6.- Théorèmes de centralisation et de normalisation.

THÉORÈME 6.- Soit G un groupe algébrique affine connexe.

a) Le centralisateur d'un tore S de G est connexe.

b) Soit T un tore maximal, son centralisateur C est connexe et identique à la composante connexe de l'unité dans le normalisateur N de T , donc $W = N/C$ est un groupe fini opérant fidèlement par automorphismes dans T .

c) C est un groupe nilpotent maximal identique à son normalisateur connexe.

d) Soit B un sous-groupe de Borel de G , alors $N \cap B = C$.

Soit g un élément du centralisateur d'un tore S , d'après le corollaire 1 au théorème 5 il existe un sous-groupe de Borel N de G contenant S et g , or le centralisateur de S dans B est connexe (corollaire au théorème 3) donc g appartient à un sous-groupe connexe du centralisateur de S dans G , donc ce dernier est connexe. Dans le cas où S est un tore maximal T, le corollaire au théorème 4 prouve donc b), ainsi que le fait que C est nilpotent. Soit M un groupe nilpotent contenant C, prouvons qu'il est égal à C ; on peut supposer M fermé, alors T est contenu dans la partie semi-simple de M_o ; donc est dans le centre de M (théorème 2) donc M est contenu dans le centralisateur C de M, d'où $M = C$, ce qui prouve c) compte tenu du corollaire 4 au théorème 4. Enfin d) résulte du corollaire 3 au théorème 1, appliqué au sous-groupe T de B.

COROLLAIRE 1.- Le centre de G est égal à celui de son sous-groupe de Borel B, et identique au centralisateur de B dans G.

Compte tenu du théorème 4 corollaire 1, il suffit de prouver que si g est dans le centre de G, il est dans B, or g appartient à un sous-groupe de Borel de G (théorème 5 b)) donc à tous en vertu du théorème de conjugaison (théorème 4 a)).

COROLLAIRE 2.- Soit $g \in G$, alors g est contenu dans le centralisateur connexe de sa partie semi-simple g_s. Si $s \in G_s$ et $u \in G_u$ commutent, u appartient au centralisateur connexe de s.

DÉMONSTRATION.- Pour la première assertion, on écrit $g = g_s g_u$, g_s est contenu dans un tore (théorème 5, c) donc est dans le centralisateur connexe de g_s, il reste à prouver la même chose pour g_u, ce qui nous ramène au deuxième énoncé. Si la caractéristique est 0, le groupe algébrique engendré par un élément unipotent u étant connexe (exposé 4, proposition 1)) u est contenu dans la composante connexe de e de tout groupe fermé le contenant, on est donc ramené au cas de caractéristique $p > 0$. Il existe un tore maximal T contenant s (théorème 5, c). Supposons d'abord que s normalise T ; alors l'ensemble des éléments de T qui commutent à u est connexe (exposé 4, proposition 5) donc est un tore S, u appartient au centralisateur de S qui est connexe (théorème 6, a)) et contenu dans le centralisateur H de s (puisque $s \in S$), donc u appartient à la composante connexe H_o de e de ce dernier. Dans le cas général, comme T est un tore maximal de H_o, ainsi que uTu^{-1}, il existe d'après le théorème de conjugaison appliqué à H_o un $v \in H_o$ tel que vu normalise T, on est ramené à prouver que $vu \in H_o$. Or $w = vu$ centralise s et normalise T, donc w_s et w_u ont les mêmes propriétés, on est ramené à prouver que w_s et w_u sont dans H_o. On l'a vu pour w_u, pour w_s on utilise le fait qu'il existe une puissance q de p telle que $w_s^q \in H_o$ (car, H' désignant le groupe algébrique engendré par H_o et u, les éléments w, donc w_s et w_u sont dans H', d'autre part H'/H_o est cyclique d'ordre une puissance de p). Il en résulte que $w_s \in H_o$, car de la structure connue des groupes diagonalisables résulte aisément le fait suivant : si M est un groupe algébrique affine, t un élément semi-simple de M et q une puissance de la caractéristique p, il existe un t' semi-simple <u>unique</u> dans M tel que $t'^q = t$.

<u>REMARQUE</u>.- Contrairement à ce que pourrait faire croire ce dernier corollaire, et le corollaire au théorème 3, il n'est pas vrai en général que le centralisateur d'un élément semi-simple de G soit connexe, (ni qu'une partie semi-simple commutative de G soit nécessairement contenue dans un tore), comme on voit par exemple en considérant la matrice diagonale $(-1, -1, +1, +1)$ dans $G = SO(4)$ (ou l'ensemble des matrices diagonales dans $SO(n)$).