Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. I. Description axiomatique de l'espace de Teichmüller et de ses variantes

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 1 (1960-1961), exp. n° 7 et 8, p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A4_0>

19 décembre 1960
et 9 janvier 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

I. DESCRIPTION AXIOMATIQUE DE L'ESPACE DE TEICHMÜLLER ET DE SES VARIANTES

INTRODUCTION. - Notre objet, dans le présent exposé et dans les exposés ultérieurs, est le suivant :

(a) Dégager un mécanisme fonctoriel général pour une théorie globale des modules. De peur d'effrayer les auditeurs par une débauche de catégories abstraites, nous commençons par un cas typique, indiqué dans le titre de cet exposé. Il semble que même dans le cas des familles de courbes elliptiques, le formalisme auquel on arrive n'a pas été bien explicité dans la littérature.

(b) Dégager "la bonne formulation" d'un certain nombre de problèmes de "modules" dans le cadre des espaces analytiques. Pour l'instant, on ne peut guère faire mieux, dans les cas généraux, qu'avancer des conjectures de théorèmes d'existence raisonnables.

(c) Donner, moyennant des hypothèses convenables de "projectivité" pour les morphismes envisagés, des théorèmes d'existence utilisables pour les problèmes envisagés dans (b), qui incluront en particulier le théorème d'existence pour l'espace de Teichmüller.

(d) Chemin faisant, la nécessité deviendra manifeste de revoir les fondements de la Géométrie analytique, en s'inspirant de la théorie des schémas. En particulier, il importe d'admettre des éléments nilpotents dans les anneaux locaux des espaces analytiques. Ce n'est qu'à cette condition que les théorèmes peuvent s'énoncer simplement et dans toute leur force.

1. La catégorie fibrée des "courbes de genre g" au dessus d'espaces analytiques variables.

Dans cet exposé, nous admettrons provisoirement la notion d'espace analytique, qui sera défini avec la généralité qui convient dans le prochain exposé. En attendant, tous les énoncés resteront vrais (mais seront moins forts) en prenant ce

terme dans le sens ancien de SERRE ; la plupart seront vrais aussi en se limitant à des variétés complexes.

Un espace analytique au-dessus d'un espace analytique S est, conformément aux définitions générales dans les catégories, un espace analytique X muni d'un morphisme $f : X \to S$. Ils forment une catégorie de façon évidente, pour S fixé, soit $\underset{\sim}{A}_S$. Si on a un morphisme

$$S' \to S$$

on en déduit un foncteur

$$X \rightsquigarrow X \times_S S'$$

appelé "foncteur changement de base", de $\underset{\sim}{A}_S$ dans $\underset{\sim}{A}_{S'}$. Il a des propriétés évidentes de transitivité, explicitées dans [3], et [5].

Un espace analytique X est dit simple au-dessus de S si, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert U de $s = f(x)$, tel que V soit au-dessus de U, et soit U-isomorphe à un produit $U \times C$, où C est une variété complexe. Si, de plus, f est propre, on obtient la notion de "famille complexe de variétés complexes" de Kodaira-Spencer, mais sans restriction de non-singularité sur la base. Nous n'adopterons pas la terminologie "familles", trop pesante.

Une "courbe (algébrique) de genre g" au-dessus de S est, par définition, un espace analytique X sur S, propre et simple sur S, et dont les fibres (qui sont donc des variétés complexes compactes) sont connexes, de dimension complexe 1, et de genre g. On peut donc les considérer comme des courbes algébriques de genre g, d'où la terminologie. De plus, nous conviendrons dans tout cet exposé que $g \geqslant 1$, et lorsque $g = 1$, nous sous-entendons dans la notion de "courbe de genre $g = 1$ au-dessus de S", la donnée d'une section de X au-dessus de S (par quoi nous entendons évidemment : section morphique, i. e. un morphisme $s : S \to X$ tel que $fs = id_S$). Nous considérons les courbes de genre g au-dessus de S comme une catégorie $\mathfrak{F}_S$ dont les morphismes sont les S-isomorphismes, astreints dans le cas $g = 1$ à transformer la section marquée en la section marquée.

Un changement de base $S' \to S$ transforme une courbe de genre g au-dessus de S en une courbe de genre g au-dessus de S' (en convenant, pour $g = 1$, de prendre comme section marquée l'image inverse de la section marquée). De cette façon, les courbes de genre g sur des espaces analytiques variables forment une catégorie fibrée $\mathfrak{F}$.

Le but de la théorie est d'en déterminer la structure de façon simple, à une "équivalence de catégories fibrées" près.

Soit $\underset{\sim}{A}(S)$ l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, d'objets de $\mathfrak{F}_S$, i. e. de courbes de genre g au-dessus de S. C'est, pour S variable, un foncteur contravariant de la catégorie des espaces analytiques dans le catégorie des ensembles :

$$\underset{\sim}{A} : (An) \to (Ens) \quad ,$$

Si aucun objet de $\mathfrak{F}_S$ n'avait d'automorphisme non trivial, la catégorie $\mathfrak{F}_S$ serait connue, à une équivalence près, par la connaissance de l'ensemble $\underset{\sim}{A}(S)$; et si cette condition était vérifiée pour tout S, la catégorie fibrée $\mathfrak{F}$ serait connue à une équivalence près par la connaissance du foncteur $\underset{\sim}{A}$. Si de plus $\underset{\sim}{A}$ était un foncteur <u>représentable</u>, i. e. isomorphe à un foncteur de la forme $S \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(S , M)$, où M est un objet convenable de (An), alors la catégorie fibrée $\mathfrak{F}$ serait connue à une équivalence près par la donnée de cet objet M. On peut appeler une telle catégorie fibrée une "<u>catégorie fibrée représentable</u>".

En fait, les courbes de genre g peuvent avoir des automorphismes non triviaux, donc $\mathfrak{F}$ n'est pas une catégorie fibrée représentable. Nous verrons plus tard (§ 7) que l'existence de tels automorphismes empêche de même le foncteur $\underset{\sim}{A}$ d'être représentable.

Pour arriver à une théorie satisfaisante, il faut donc <u>éliminer les automorphismes</u> des structures considérées, par introduction de nouveaux éléments de structure, ayant pour effet de rendre "rigide" la structure initiale.

2. <u>Elimination des automorphismes : le foncteur $\underset{\sim}{P}(X/S)$ et ses variantes. Structures de Teichmüller, de Torelli, de Jacobi.</u>

Nous prouverons ultérieurement le résultat suivant (qui est bien plus que ce qu'il faut pour donner un sens aux définitions qui vont suivre) :

LEMME 2.1. - Soit X une courbe de genre g au-dessus d'un espace analytique S. Alors X est un fibré topologique localement trivial sur S.

La question étant locale sur S, il nous suffira par la suite de prouver que tout point de S a un voisinage ouvert tel que $X|U$ est isomorphe à l'image inverse d'une courbe de genre g au-dessus d'une <u>variété</u> complexe M par un morphisme $U \to M$. En effet, on sait qu'une "famille complexe de variétés complexes", paramétrée par une <u>variété</u>, est localement triviale du point de vue topologique.

Ce résultat, une fois admis, nous permet de construire divers revêtements principaux de S. De façon générale, soit X un espace topologique fibré localement trivial sur un espace topologique S, de fibre C_o un complexe simplicial fini. Soit G le groupe des homéomorphismes de C_o sur lui-même, modulo la relation d'homotopie pour les applications continues. Plus généralement, si C, C' sont deux espaces topologiques, désignons par $I(C, C')$ l'ensemble des homéomorphismes de C sur C', modulo l'homotopie des applications continues ; ainsi les éléments des ensembles $I(C, C')$ se composent de façon évidente, et G n'est autre que $I(C_o, C_o)$. Si C est homéomorphe à C_o, alors $I(C_o, C)$ est de façon évidente un ensemble principal homogène de groupe G. Revenant à X, on voit alors que l'ensemble réunion des $I(C_o, X_s)$ pour $s \in S$, où X_s est la fibre de X en s, est muni de façon naturelle d'une structure de <u>revêtement principal de</u> S, <u>de groupe</u> G, dont la description par changements de cartes est laissée au lecteur. Soit $\underset{\sim}{R}(X/S)$ ce revêtement principal de groupe G. On voit alors que pour C_o fixé, l'opération $\underset{\sim}{R}$ a les propriétés suivantes :

(i) Elle est fonctorielle en X pour S fixé ;

(ii) Elle est compatible avec le passage aux images inverses de fibrés.

Notons aussi que le groupe G opère sur les groupes d'homologie et de cohomologie de C_o ; prenant les fibrés associés sur S au revêtement principal $\underset{\sim}{R}(X/S)$ et aux opérations précédentes, on trouve précisément les systèmes locaux de l'homologie et de la cohomologie des fibres de X/S. Dans ces considérations, le groupe de coefficients était arbitraire.

Dans le cas où C_o est l'espace topologique sous-jacent d'une courbe de genre g (donc une surface topologique compacte de genre g), il est connu que le groupe G s'applique sur le groupe des automorphismes du groupe $H^2(C_o, \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}$, d'où dans G un sous-groupe d'indice 2, formé des classes d'homéomorphismes préservant l'orientation, soit γ. La donnée d'un système continu d'orientations sur les fibres de X_s est donc équivalente à la donnée d'une section du revêtement principal de S, de groupe $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$, associé à $\underset{\sim}{R}(X/S)$, ou encore à une restriction du groupe structural de G à γ. Il en résulte donc un revêtement principal sur S de groupe γ, que nous noterons $\underset{\sim}{P}(X/S)$.

DÉFINITION 2.1. - Soit C_o une courbe algébrique de genre g. On appelle <u>groupe de Teichmüller</u> pour C_o, et on notera γ, le groupe des classes (à une homotopie d'applications continues près) d'homéomorphismes de C_o sur lui-même préservant l'orientation. Si X est une courbe de genre g au-dessus d'un espace analytique, on appelle *revêtement de Teichmüller* de S associé à X, et on notera $\mathbf{P}(X/S)$, l'ensemble des classes (à une homotopie d'applications continues près) d'homéomorphismes préservant l'orientation de C_0 sur les fibres X_s de X sur S, cet ensemble étant considéré de la façon explicitée plus haut comme un revêtement principal de S, de groupe γ opérant à droite.

C'est a priori un revêtement topologique, mais nous pouvons le considérer aussi comme l'espace sous-jacent à un espace analytique au-dessus de S également noté $\mathbf{P}(X/S)$, défini à un isomorphisme près par la condition que la projection structurale soit un isomorphisme local. Le groupe γ opère alors par S-automorphismes de l'espace analytique $\mathbf{P}(X/S)$. (Cf. un exposé ultérieur).

La formation de $\mathbf{P}(X/S)$ satisfait aux conditions suivantes :

(i) Pour S fixé, elle est fonctorielle en X/S.

(ii) Elle est compatible avec le passage aux images inverses.

(iii) Tout automorphisme d'un $X \in \mathfrak{F}_S$ qui induit l'identité sur $\mathbf{P}(X/S)$, est l'identité.

Les conditions (i) et (ii) résultent trivialement des sorites, la condition (iii) sera vérifiée dans un exposé ultérieur. (C'est ici que la convention spéciale pour $g = 1$ est nécessaire).

DÉFINITION 2.2. - On appelle *structure de Teichmüller* sur une courbe X de genre g au-dessus de l'espace analytique S, toute section du revêtement de Teichmüller $\mathbf{P}(X/S)$ au-dessus de S.

Ici d'ailleurs, il y a correspondance biunivoque entre sections topologiques, et sections d'espaces analytiques. Comme γ opère à droite sur $\mathbf{P}(X/S)$, il opère à droite sur l'ensemble des structures de Teichmüller. Si S est connexe non vide, et si l'ensemble des structures de Teichmüller sur X/S est non vide, c'est un ensemble principal homogène dont le groupe est le groupe de Teichmüller γ. Une courbe de genre g au-dessus de S, munie d'une structure de Teichmüller, est appelée une *courbe de Teichmüller (de genre g) au-dessus de S*.

Les courbes de Teichmüller de genre g au-dessus de S fixé, forment une catégorie pour la notion évidente de S-isomorphisme de courbes de Teichmüller. En vertu de (iii) (et compte tenu du fait qu'un S-automorphisme d'un revêtement principal, qui laisse fixe une section, est l'identité), on voit *qu'un automorphisme* d'une courbe de Teichmüller est l'identité. Grâce à (ii), on a aussi une notion d'image inverse d'une courbe de Teichmüller au-dessus de S par un morphisme $S' \to S$. Ainsi, les courbes de Teichmüller de genre g forment une catégorie fibrée sur la catégorie (An) des espaces analytiques.

Les développements qui vont suivre, à commencer par le théorème principal d'existence, n'utilisent que les propriétés (i), (ii), (iii) de l'opération $P(X/S)$. D'autres opérations ayant les mêmes propriétés sont également utilisées par les géomètres. Posons à titre provisoire la

DÉFINITION 2.3. - Soit γ un groupe discret. Supposons donné, pour tout espace analytique S, un foncteur (covariant) de la catégorie $\mathfrak{F}_S$ des courbes de genre g au-dessus de S dans la catégorie des revêtements principaux de S de groupe γ, soit $X/S \rightsquigarrow P(X/S)$, et des isomorphismes de compatibilité pour le changement de base, de façon à obtenir un foncteur cartésien P (cf. [5]) de la catégorie fibrée des courbes de genre g dans la catégorie fibrée des revêtements principaux de groupe γ d'espaces analytiques. On dit que P est un foncteur rigidifiant si la condition (iii) ci-dessus est vérifiée, i. e. si tout automorphisme d'un objet de $\mathfrak{F}_S$ qui induit l'identité dans $P(X/S)$ est l'identité.

REMARQUES. - Les conditions un peu vagues (i) et (ii) signifient en réalité qu'on s'est donné un foncteur cartésien, au sens précis qui est explicité dans [5]. Noter aussi qu'on aura à considérer dans d'autres contextes des foncteurs rigidifiants plus généraux, car il n'est pas toujours possible de "rigidifier" par des revêtements, i. e. en fixant des suppléments de structure de nature essentiellement discrète. La possibilité de le faire ici tient au fait qu'une courbe algébrique de genre g n'a pas d'automorphisme infinitésimal non nul (qui pour $g = 1$ respecte le "point marqué", i. e. s'annule en ce point).

Si on s'est donné un foncteur rigidifiant P (pas nécessairement le foncteur de Teichmüller), on peut définir la notion de P-structure sur une courbe de genre g au-dessus de S comme étant une section de $P(X/S)$ au-dessus de S. Les remarques ci-dessus pour le cas du foncteur fibrant de Teichmüller restent valables manifestement dans le cas général. Ainsi, les courbes de genre g munies d'une P-structure, ou P-courbes, forment une catégorie fibrée, notée $\mathfrak{F}^{P}$, au-dessus de la catégorie des espaces analytiques. Un objet de $\mathfrak{F}_S^{P}$, i. e. une courbe au-dessus de S munie d'une P-structure, n'a pas d'automorphisme non trivial.

Il reste à donner quelques exemples. De façon générale, soit $\underset{\sim}{P}$ un foncteur rigidifiant relatif à un groupe γ, et considérons un homomorphisme de groupes $\gamma \to \gamma'$. Pour toute courbe X de genre g au-dessus d'un espace analytique S, posons

$$\underset{\sim}{P}'(X/S) = \underset{\sim}{P}(X/S) \times_{\gamma} \gamma' \quad .$$

Il est immédiat que de cette façon on obtient un foncteur fibrant de la catégorie fibrée des courbes de genre g dans la catégorie fibrée des revêtements principaux de groupe γ'. Lorsque le noyau de l'homomorphisme $\gamma \to \gamma'$ est assez petit, ce sera également un foncteur rigidifiant (cf. § 8). Dans les deux exemples suivants, $\underset{\sim}{P}$ sera le foncteur rigidifiant de Teichmüller, donc γ le groupe de Teichmüller. Nous montrerons au paragraphe 4 que tout foncteur rigidifiant peut d'ailleurs se déduire de cette façon du foncteur rigidifiant de Teichmüller.

Le groupe γ opère de façon évidente sur $H^1(C_o , Z)$, et il laisse d'ailleurs fixe la "forme intersection" sur ce groupe abélien libre de rang $2g$. Cette forme est une forme alternée non dégénérée sur $\underset{\sim}{Z}$, comme il résulte de la dualité de Poincaré. Prenant une base dans le H^1, on trouve donc une représentation

$$\gamma \to Sp(2g , \underset{\sim}{Z})$$

d'où un foncteur fibrant

$$X/S \rightsquigarrow \underset{\sim}{P}(X/S) \times_{\gamma} Sp(2g , \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{P}'(X/S) \quad .$$

$\underset{\sim}{P}'(X/S)$ est aussi le revêtement principal associé au système local des $H^1(X_s , \underset{\sim}{Z})$, considéré comme système local en groupes abéliens libres de rang g munis d'une forme alternée non dégénérée sur $\underset{\sim}{Z}$. On peut aussi remplacer le groupe de coefficients $\underset{\sim}{Z}$ par $\underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}$, où n est un entier, d'où un foncteur fibrant

$$X/S \rightsquigarrow \underset{\sim}{P}(X/S) \times Sp(2g , \underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{P}_n(X/S)$$

relatif au groupe <u>fini</u> $Sp(2g , \underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z})$, qui se déduit du précédent par "réduction mod n". Nous prouverons par la suite :

LEMME 2.4. - Il existe un entier $n > 0$ tel que le foncteur fibrant $\underset{\sim}{P}_n$ soit rigidifiant.

Cela impliquera a fortiori que le foncteur fibrant $\underset{\sim}{P}'$, et à plus forte raison le foncteur fibrant $\underset{\sim}{P}$ de Teichmüller, est rigidifiant.

Le foncteur $\underset{\sim}{P}'$ introduit ci-dessus pourrait s'appeler le foncteur fibrant de Torelli, et $\underset{\sim}{P}_n$ le foncteur fibrant de Jacobi d'échelon n .

REMARQUE. - Il semble que SERRE puisse montrer, en utilisant la théorie des anneaux d'endomorphismes des variétés abéliennes, que $\underset{\sim}{P}_n$ est rigidifiant dès que $n \geqslant 3$.

3. Le théorème fondamental d'existence : l'espace de Teichmüller et ses variantes. Opérations de γ sur T .

Par la suite, nous supposons fixé le genre $g \geqslant 1$, et un foncteur rigidifiant $\underset{\sim}{P}$ relatif à un groupe discret γ . Il lui correspond donc la catégorie fibrée $\mathfrak{F}^{\underset{\sim}{P}}$ des $\underset{\sim}{P}$**- courbes algébriques** au-dessus d'espaces analytiques variables. Nous avons fait ce qu'il fallait maintenant pour avoir une "catégorie fibrée représentable". De façon précise, nous prouverons dans un exposé ultérieur :

THÉORÈME 3.1. - Il existe un espace analytique T , et une $\underset{\sim}{P}$-courbe algébrique V au-dessus de T , qui soient universels au sens suivant : pour toute $\underset{\sim}{P}$-courbe algébrique X au-dessus d'un espace analytique S , il existe un morphisme et un seul g de S dans T , tel que X soit isomorphe (avec sa $\underset{\sim}{P}$-structure) à l'image inverse par g de V/T .

Bien entendu, T et V sont déterminés à un isomorphisme unique près par cette condition. On peut aussi exprimer ce théorème en introduisant le foncteur contravariant en l'espace analytique S :

$$\underset{\sim}{A}_P(S) = \text{ensemble à un isomorphisme près d'objets de } \mathfrak{F}^P_S$$

L'énoncé 3.1 signifie que ce foncteur est représentable, cf. [4].

REMARQUES 3.2. -

1° Nous prouverons en même temps que T est un espace topologique séparé, et est une variété complexe, de dimension $3g - 3$ en chacun de ses points si $g \geqslant 2$, de dimension 1 si $g = 1$.

2° Lorsque $\underset{\sim}{P}$ est le foncteur rigidifiant de Teichmüller, l'espace T introduit ci-dessus s'appelle l'espace de Teichmüller pour les courbes de genre g . On définit de même l'espace de Torelli et l'espace de Jacobi d'échelon n (n entier assez grand). On peut montrer que l'homomorphisme naturel du groupe de Teichmüller dans le groupe $Sp(2g , \underset{\sim}{Z})$ est surjectif, d'où il résulte que les espaces de

Torelli et de Jacobi sont des quotients de l'espace de Teichmüller par des sous-groupes du groupe de Teichmüller, opérant librement sur l'espace de Teichmüller (cf. § 8). Il est d'ailleurs facile de vérifier, utilisant au besoin un exposé de BERS [1], que l'espace introduit axiomatiquement ici (s'il existe, ce que nous prouverons), est isomorphe à l'espace de Teichmüller des analystes. Il en résulte que l'espace de Teichmüller est homéomorphe à une boule, et par suite contractile, en particulier connexe et simplement connexe. A fortiori, les espaces de Jacobi de tout échelon sont connexes, ainsi que l'espace des modules M introduit au paragraphe 5 comme un espace quotient de l'espace de Teichmüller. Il semble qu'il n'existe pas à l'heure actuelle de démonstration, par voie algébrico-géométrique, même du fait que l'espace des modules est connexe, (qui s'interprète en géométrie algébrique en disant que deux courbes algébriques de même genre g font partie d'une famille de courbes algébriques paramétrée par une variété algébrique connexe).

3° Il semble qu'on doive pouvoir montrer très élémentairement que la contractilité de l'espace de Teichmüller est équivalente à l'énoncé suivant, qui est un énoncé de topologie pure : Le groupe G des homéomorphismes différentiables d'une courbe algébrique C_0 sur elle-même, qui sont homotopes en tant qu'applications continues à l'identité, a tous ses groupes d'homotopie nuls (du moins si le genre est $g \geq 2$; dans le cas général il faudrait dire : a mêmes groupes d'homotopie que la composante connexe du groupe des automorphismes algébriques de C_0, i. e. le groupe projectif si $g = 0$, le tore de dimension 2 si $g = 1$, le groupe unité si $g \geq 2$). On peut espérer qu'on arrivera par là à éliminer un jour complètement l'Analyse de la théorie de l'espace de Teichmüller, qui devrait être purement géométrique. D'après CERF, même la connexité du groupe G n'est malheureusement pas connue des topologues.

Soit X un $\underset{\sim}{P}$-courbe au-dessus de S, et soit $u \in \gamma$. Nous désignerons par X^u la $\underset{\sim}{P}$-courbe déduite de X en appliquant l'opération u à la section de $\underset{\sim}{P}(X/S)$ définissant la $\underset{\sim}{P}$-structure de X. De cette façon, le groupe γ opère à droite sur l'ensemble $\underset{\sim}{A}_{\underset{\sim}{P}}(S)$ des classes à un isomorphisme près de $\underset{\sim}{P}$-courbes au-dessus de S. Ces opérations sont évidemment fonctorielles en S, et proviennent donc d'opérations à droite bien déterminées de γ sur l'espace analytique T. Si $u \in \gamma$, l'automorphisme $\bar{u}$ de T qui lui correspond est défini par la condition que, pour tout morphisme d'espaces analytiques $f : S \to T$, on ait un isomorphisme de $\underset{\sim}{P}$-courbes sur S :

$$(\overline{u} \circ f)^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(V)^u \quad .$$

Cet isomorphisme est alors nécessairement unique (puisque $\underset{\sim}{P}$ est rigidifiant). Prenant pour f le morphisme identique de T sur T, on obtient en particulier la relation suivante, qui suffit déjà à caractériser $\overline{u}$:

$$\overline{u}^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} V^u \quad .$$

Notons d'ailleurs que cet isomorphisme de courbes au-dessus de T, quand on y fait abstraction des $\underset{\sim}{P}$-structures, correspond à un morphisme $V \to V$, également noté $\overline{u}$, et qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\overline{u}} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\overline{u}} & T \end{array}$$

où les flèches verticales sont les projections structurales. De l'unicité signalée plus haut résulte que γ est également un groupe d'opérateurs à droite sur l'espace analytique sous-jacent à V.

Nous verrons dans les paragraphes suivants que l'espace analytique T, muni du groupe d'automorphismes γ, peut être considéré comme une solution satisfaisante du "problème des modules" pour les courbes de genre g, en ce qu'il permet de reconstituer complètement la catégorie fibrée de départ $\mathfrak{F}$, et de résoudre ainsi, du moins théoriquement, tous les problèmes qui peuvent s'exprimer en termes de cette catégorie fibrée.

Pour l'instant, bornons-nous à l'énoncé commode suivant :

PROPOSITION 3.3. - Soient X, X' deux $\underset{\sim}{P}$-courbes au-dessus de S, définies respectivement par des morphismes f, f' de S dans T. Supposons S connexe non vide. Alors l'ensemble des S-isomorphismes $X \xrightarrow{\sim} X'$ pour les courbes sous-jacentes (sans $\underset{\sim}{P}$-structures), est en correspondance biunivoque canonique avec l'ensemble des $u \in \gamma$ tels que $f' = \overline{u} \circ f$.

En effet, ils sont en correspondance biunivoque avec les u tels que X^u soit isomorphe à X' en tant que P-courbe sur S (compte tenu du fait qu'une $\underset{\sim}{P}$-courbe n'a pas d'automorphisme non trivial, et qu'en vertu de l'hypothèse de connexité de

S , l'ensemble des $\underset{\sim}{P}$-structures sur X est un ensemble principal homogène de groupe γ). Or, en vertu du théorème 3.1, ce sont les u tels que $f' = \bar{u} \circ f$.

COROLLAIRE 3.4. - Soit $t \in T$. Alors le groupe γ_t , stabilisateur de t dans γ , est canoniquement antiisomorphe (donc isomorphe, si on y tient) au groupe des automorphismes de la fibre V_t (considérée comme courbe de genre g , sans $\underset{\sim}{P}$-structure).

4. Reconstruction de la catégorie fibrée initiale $\mathfrak{F}$ en termes de (T , γ) - Détermination des foncteurs cartésiens sur $\mathfrak{F}$.

Soit X une courbe de genre g au-dessus de S , et posons $\underset{\sim}{P} = P(X/S)$. Ainsi P est un revêtement principal de S de groupe γ , et par suite le groupe γ opère également sur $X_P = X \times_S P$ et en fait un revêtement principal de X de groupe γ . On a $\underset{\sim}{P}(X_P/P) = \underset{\sim}{P}(X/S) \times_S P = P \times_S P$; il est donc muni d'une section canonique au-dessus de P , à savoir la section diagonale. Ainsi X_P est muni d'une P-structure canonique. D'ailleurs, si $u \in \gamma$, on a la formule

$$(X_P)^u \overset{\sim}{\to} u_P^{-1}(X_P/P)$$

(isomorphisme de $\underset{\sim}{P}$-courbes au-dessus de $\underset{\sim}{P}$), où u_P désigne l'opération dans l'espace analytique P définie par u . C'est là une identité entre sections de $P \times_S P$ dont la vérification est formelle à partir des définitions, et signifie simplement qu'on a commutativité dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} P \times_S P & P \times_S P \arrow[l, "\mathrm{id}_P \times_S u"'] \\ P \arrow[u, "\Delta_{P/S}"'] & P \arrow[l, "u"] \arrow[u, "{(u , \mathrm{id}_P)}"'] \end{tikzcd} .$$

Soit

$$f : P \to T$$

le morphisme d'espaces analytiques défini par la $\underset{\sim}{P}$-courbe X_P sur P . La formule écrite plus haut équivaut à $\bar{u} \circ f = f \circ u_P$, autrement dit f commute aux opérations de γ . D'ailleurs la connaissance du revêtement principal P de S de groupes γ , et du γ-morphisme $f : P \to T$, permet de reconstituer à un isomorphisme près, d'abord X_P/P et les opérations de γ sur X_P (comme image inverse par f de V/T et des opérations de γ sur V), donc, par passage au quotient X_P/γ , de retrouver X/S à un isomorphisme près. Enfin, on voit immédiatement que le couple (P , f) satisfaisant aux conditions qu'on vient d'énoncer peut être choisi arbitrairement (car du fait que γ opère librement sur P , il opérera aussi librement sur X_P , qui s'identifie donc à l'image inverse $(X_P/\gamma) \times_S P)$.

En résumé :

THÉORÈME 4.1. - Soit S un espace analytique. On a une équivalence naturelle de la catégorie $\mathfrak{F}_S$ des courbes de genre g au-dessus de S , avec la catégorie des couples (P , f) formés d'un revêtement principal homogène de S de groupe γ , et d'un γ-morphisme $f : P \to T$. Cette équivalence est compatible avec la formation d'images inverses.

La dernière assertion signifie qu'on a ainsi une <u>équivalence</u> de catégories fibrées (cf. [5]) de la catégorie fibrée $\mathfrak{F}$ des courbes de genre g , avec la catégorie fibrée des couples (P , f) , où P est un espace analytique sur lequel le groupe γ opère librement, et $f : P \to T$ un γ-morphisme, le foncteur-base étant $(P , f) \rightsquigarrow P/\gamma$. La vérification est facile.

Ce théorème nous permet, dans la suite, <u>d'oublier la signification géométrique précise des mots : "courbe de genre</u> g <u>au-dessus de</u> S ", <u>en interprétant les énoncés en termes de l'espace analytique à opérateurs</u> T .

Comme exemple, nous allons déterminer les foncteurs cartésiens de $\mathfrak{F}$ dans une catégorie fibrée $\mathfrak{G}$ sur (An) , soumise à la seule condition que les revêtements étales $P \to S$ de groupe γ soient des "morphismes de descente stricts" pour $\mathfrak{G}$ (cf. [5]). Condition d'ailleurs vérifiée pour les catégories fibrées considérées en pratique (faisceaux analytiques, resp. faisceaux analytiques cohérents, sur des espaces analytiques variables ; espaces analytiques au-dessus d'espaces analytiques variables ; sous-catégories fibrées diverses de celles-là, etc.). Il suffit par exemple que les morphismes d'objets d'un $\mathfrak{G}_S$, et les objets eux-mêmes, se "recollent bien" relativement à des recouvrements ouverts de S , condition bien familière et vérifiée dans la plupart des cas. Soit donc H un foncteur cartésien de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$; appliquons-le à la courbe universelle V/T : on trouve un objet $\xi = H(V/T)$ dans $\mathfrak{G}_T$. D'ailleurs, les opérations de γ dans V définissent des opérations de γ sur ξ , de façon précise définissent des isomorphismes

$$u^{-1}(\xi) \tilde{\to} \xi$$

satisfaisant à certaines conditions de transitivité que nous n'expliciterons pas, mais qui s'exprimeraient le plus commodément en disant qu'on a une section de la catégorie fibrée, image réciproque de $\mathcal{G}$ par le foncteur $(\gamma) \to (An)$, où (γ) désigne la catégorie à un seul objet définie par le groupe γ (γ étant le groupe des endomorphismes du dit objet), et le foncteur $(\gamma) \to (An)$ étant défini par les opérations de γ sur l'objet T de (An)). On voit d'autre part aisément qu'on récupère le foncteur H , à un isomorphisme unique près, par la connaissance de l'objet ξ de $\mathcal{G}_{\hat{T}}$ et des opérations de γ sur ξ , en procédant comme pour le théorème 4.1 : Si $X \in \mathcal{F}_S$ est défini par le couple (P , f) , alors l'image inverse par f de ξ est un objet de $\mathcal{G}_P$ sur lequel γ opère de façon compatible avec ses opérations sur P , et la connaissance d'un tel objet revient à la connaissance d'un objet de $\mathcal{G}_S$ (puisque $P \to S$ est un morphisme de descente strict pour la catégorie fibrée $\mathcal{G}$). De cette façon, on obtient l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4.2. - Soit $\mathcal{G}$ une catégorie fibrée sur la catégorie (An) des espaces analytiques, satisfaisant à la condition de descente précisée plus haut. Alors la catégorie des foncteurs cartésiens $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est équivalente à la catégorie des objets à groupe d'opérateurs γ de $\mathcal{G}$, au-dessus de l'objet à opérateurs (T , γ) de (An) .

EXEMPLES. - Prenons pour $\mathcal{G}$ la catégorie fibrée des fibrés principaux holomorphes, de groupe un groupe complexe G donné. On voit donc qu'on peut interpréter les espaces fibrés principaux analytiques sur T , de groupe structural G , et à groupe d'automorphismes γ opérant à droite de façon compatible avec les opérations sur T , en termes intrinsèques à la catégorie fibrée $\mathcal{F}$ (donc indépendants du choix du foncteur rigidifiant P servant à définir T), comme les foncteurs cartésiens de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$. En particulier, les fibrés principaux sur T , triviaux quand on fait abstraction des opérations de γ , définissables à l'aide des représentations de γ dans le groupe G , définissent de tels foncteurs cartésiens. D'ailleurs si G est discret, et si T est connexe et simplement connexe (i. e. T est l'espace de Teichmüller lui-même, cf. 3.2, 2°), alors on peut conclure qu'on obtient à un isomorphisme près tous les foncteurs cartésiens de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ à l'aide de représentations de γ dans G ; cela signifie donc que tout foncteur cartésien de $\mathcal{F}$ dans la catégorie fibrée des revêtements principaux de groupe G donné, est associé (comme il a été expliqué dans 2.2) au foncteur cartésien de Teichmüller, et à un homomorphisme

$\gamma \to G$. Dans le cas général, les γ-fibrés principaux de groupe G (groupe analytique complexe donné) qui sont triviaux en tant que fibrés principaux sans opérateurs γ , peuvent se définir par des "facteurs d'automorphie" de γ , ou 1-cocycles de γ à valeurs dans le groupe des morphismes de T dans G , sur lequel γ opère via ses opérations sur T (cf. [2] pour la situation générale des fibrés principaux à opérateurs). Cela soulève d'ailleurs la question de savoir si l'espace de Teichmüller est un espace de Stein. En effet, comme il est contractile, donc que tout fibré principal sur T est topologiquement trivial, il résulterait alors d'un théorème de Grauert que tout fibré principal holomorphe sur T est analytiquement trivial.

5. L'espace des modules $M = T/\gamma$ comme "invariant universel".

Nous verrons (cf. remarque 8.6, 1°) que le groupe γ opère "proprement" dans T , i. e. le morphisme $T \times \gamma \to T \times T$ défini par les opérations de γ sur T est propre. Cela signifie aussi (γ étant discret) que tout point $t \in T$ a un stabilisateur γ_t qui est un groupe fini, et admet un voisinage ouvert V (qu'on peut alors supposer stable par γ_t), tel que $u \in \gamma$ et $V \cap (V.u) \neq \emptyset$ impliquent $u \in \gamma_t$.

REMARQUE 5.1. - Ce phénomène est essentiellement lié à la finitude des groupes d'automorphismes des courbes de genre g (étant entendu, pour $g = 1$, qu'on se limite aux automorphismes laissant fixe le point marqué). On notera que le même fait sera valable en théorie des modules pour les variétés abéliennes polarisées ; par contre, dans la théorie des modules pour les tores complexes, l'existence de groupes d'automorphismes infinis montrera qu'on est en présence d'un groupe discret qui n'opère pas proprement, et en fait on ne peut alors passer au quotient de façon raisonnable, comme l'ont fait remarquer KODAIRA et SPENCER.

On voit donc ici que l'ensemble quotient $M = T/\gamma$ est muni de façon naturelle d'une structure d'espace analytique. Il est généralement appelé espace des modules pour les courbes de genre g . Il est obtenu ici en termes d'un foncteur rigidifiant $\underset{\sim}{P}$ choisi ; nous allons montrer cependant que l'espace des modules est déterminé intrinsèquement en termes de la catégorie $\mathfrak{S}$, et même en termes du foncteur $S \rightsquigarrow \underset{\sim}{A}(S)$.

Considérons une courbe de genre g au-dessus d'un S , définie en vertu de 4.1

à l'aide d'un revêtement principal P de S de groupe γ , et d'un γ-morphisme $f : P \to T$. Ce dernier définit par passage au quotient un morphisme

$$j_{X/S} : S = P/\gamma \to M = T/\gamma$$

qu'on appellera l'invariant universel, ou simplement l'invariant, de X/S . Il ne dépend évidemment que de la classe à un isomorphisme près de X/S , i. e. de l'élément de $\underset{\sim}{A}(S)$ qu'il définit ; de plus la formation de l'invariant est compatible avec le passage aux images inverses. En d'autres termes, on a ainsi défini un homomorphisme de foncteurs :

$$J : \underset{\sim}{A}(S) \to \mathrm{Hom}(S , M)$$

du foncteur $\underset{\sim}{A}(S)$ dans le foncteur représentable $h_M(S) = \mathrm{Hom}(S , M)$ défini par M . Ceci dit :

THÉORÈME 5.2. - L'homomorphisme précédent $J : \underset{\sim}{A} \to h_M$ est universel pour les homomorphismes du foncteur $\underset{\sim}{A}$ dans les foncteurs représentables. (ce qui caractérise donc l'espace des modules M à un isomorphisme unique près en termes du foncteur $\underset{\sim}{A}$).

De façon précise, cela signifie que si, pour tout espace analytique N , on pose

$$I(N) = \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{A} , h_N)$$

(où $I(N)$ peut être considéré comme l'ensemble des invariants relatifs à valeurs dans N pour les courbes de genre g) alors $I(N)$ est un foncteur covariant représentable de (An) dans la catégorie (Ens) , et l'espace analytique qui le représente n'est autre que l'espace des modules. En d'autres termes, pour tout $j \in I(N)$, il existe un homomorphisme unique $g : M \to N$ tel que l'on ait $j = g(J)$, où J est l'invariant universel.

La démonstration est immédiate, et laissée au lecteur. On notera d'ailleurs que cet énoncé est un cas particulier de 4.2, relatif au cas où $\mathcal{G}$ est la catégorie fibrée représentable définie par un espace analytique N .

REMARQUE 5.3. - Il résulte aussitôt de 3.3 que l'ensemble sous-jacent à M est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de courbes de genre g ordinaires (i. e. de base un point). Cela explique le nom donné à M et l'intérêt dont il est depuis longtemps l'objet. Ici, T étant non singulière donc normale, M est normale, mais a des singularités (du moins pour $g \geqslant 3$). Il importe de signaler qu'en tant qu'espace analytique, et même pour $g = 1$, M ne se prête pas lui-même à la classification, à un isomorphisme ou un isomorphisme local près, des "familles analytiques de courbes", comme certains auteurs semblent l'éspérer. Comme nous le verrons aux paragraphes 6 et 7, une telle classification ne peut être obtenue qu'au moyen d'espaces à opérateurs tels que T (que l'on pourrait tout au plus ramener à être une " V-variété" de Satake au-dessus de M ; mais cela compliquerait plutôt la situation).

6. Le groupe γ_o des automorphismes universels, et l'ouvert M' des points ordinaires de M.

Nous désignerons par γ_o le sous-groupe des éléments de γ qui opère trivialement sur T, par γ' le quotient γ/γ_o, de sorte que T devient un espace analytique où γ' opère fidèlement, et on a encore $M = T/\gamma'$. On désigne par T_{in} (in symbolisant "inertie") la partie de T formée des points dont le stabilisateur dans γ' n'est pas réduit à l'élément neutre ; c'est une partie stable par γ', donc image inverse d'une partie M_{in} de M. On pose :

$$T' = T - T_{in} , \qquad M' = M - M_{in} \qquad ;$$

les points de T' (resp. de M') sont appelés les points ordinaires ("smooth") des espaces de modules T, M. Remarquons tout de suite qu'il résulte de 3.4 que pour tout $t \in T$, la courbe correspondante V_t a un groupe d'automorphismes de cardinal $\geqslant \mathrm{card}\ \gamma_o$, et qu'on a égalité si et seulement si t est un point ordinaire.

Les définitions qui précèdent ne sont guère intéressantes que si T est connexe (rappelons que c'est le cas de l'espace de Teichmüller, et des quotients tels que l'espace de Torelli, ou les espaces de Jacobi des divers échelons). Si on ne veut pas supposer T connexe, il faudrait prendre une composante connexe de T au-dessus de chaque composante connexe de M, y faire opérer le stabilisateur dans γ de ladite composante connexe de T, et raisonner séparément sur les espaces à opérateurs ainsi obtenus.

PROPOSITION 6.1 Supposons T localement intègre (i. e. ses anneaux locaux intègres), et connexe. (N. B. c'est bien le cas pour l'espace de Teichmüller). Alors :

(i) Pour tout $t \in T$, la représentation naturelle du stabilisateur γ'_t de t dans γ' opère fidèlement sur l'anneau local de t.

(ii) M_{in} est une partie analytique de M distincte de M, donc T_{in} est une partie analytique de T distincte de T (donc ce sont des parties fermées rares de M (resp. T)).

L'assertion (i) provient du fait qu'un automorphisme de T qui laisse fixe un point t et qui induit l'identité sur son anneau local, induit l'identité sur un voisinage de t, donc est l'identité puisque T est irréductible et sans éléments nilpotents. Pour (ii), on peut grâce à ce qui précède et au fait que γ' opère proprement dans T, se ramener au cas où γ' est un groupe <u>fidèle fini</u>. Mais alors T_{in} est la réunion des ensembles de points fixes des $u \in \gamma'$, où $u \neq e$, et chacun d'eux est une partie analytique de T distincte de T, donc rare dans T puisque T est irréductible. Il en est donc de même de leur réunion.

REMARQUES 6.2. - Nous verrons que γ_o est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}/2\underset{\sim}{Z}$ pour $g = 1$ ou 2, et est réduit à l'élément neutre pour $g \geq 3$. (Dans le cas $g = 1$ ou 2, les courbes de genre g sont hyperelliptiques, i.e. admettent un automorphisme - nécessairement unique - qui induit la symétrie sur la jacobienne homogène, ce qui explique l'existence d'un élément non trivial dans γ_o). On peut montrer aussi que $T_{in} \neq \emptyset$ pour tout g.

Nous allons maintenant préciser le rôle de γ_o qui justifiera le nom qui lui est attribué dans le titre du paragraphe. Comme γ_o est invariant dans γ, le groupe γ opère à gauche sur γ_o par

$$\mathrm{int}(v)\, u = vuv^{-1} \qquad ;$$

soit donc γ_o^{int} le groupe γ_o considéré comme groupe admettant γ comme groupe d'automorphismes. Si alors X est une courbe de genre g sur S, on peut former le fibré associé à $\underset{\sim}{P}(X/S)$

$$\underset{\sim}{G}_o(X/S) = \underset{\sim}{P}(X/S) \times_{\gamma} \gamma_o^{int} \qquad .$$

C'est donc un revêtement étale (= non ramifié dans la terminologie courante) en groupes de S, à fibres isomorphes à γ_o. Sa formation en termes de X est fonctorielle et compatible avec les images inverses. On va faire opérer maintenant le fibré en groupes $G_o(X/S)$ à gauche sur X par un S-morphisme

$$G_o(X/S) \times_S X \to X$$

fonctoriellement en X , et de façon compatible avec les images inverses. Il revient au même de faire opérer pour tout X/S le groupe $\Gamma(\underset{\sim}{G}_0(X/S)/S)$ des sections de $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$ sur S par S-automorphismes sur X/S , de façon fonctorielle en X et compatible avec les images inverses. Pour ceci, on note que l'on a une immersion canonique

$$\underset{\sim}{P}(X/S) \times_{\gamma} \gamma_0^{\mathrm{int}} \to \underset{\sim}{P}(X/S) \times_{\gamma} \gamma^{\mathrm{int}}$$

déduite de l'immersion

$$\gamma_0^{\mathrm{int}} \to \gamma^{\mathrm{int}} \quad ,$$

et que le groupe des sections du deuxième membre sur S s'identifie au groupe des automorphismes de l'espace principal $\underset{\sim}{P}(X/S)$ de groupe γ ; celles du premier membre, i. e. les sections de $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$, *s'identifient alors aux* γ-*automorphismes de* $\underset{\sim}{P}(X/S) = P$ *qui induisent l'identité dans* P/γ_0 . En vertu du théorème 4.1, X est représenté à l'aide de l'espace principal P sur S et d'un γ-morphisme $f : P \to T$. Comme γ_0 opère trivialement sur T , il s'ensuit que f se factorise en

$$f : P \to P/\gamma_0 \to T \quad .$$

Donc le γ-automorphisme u de P défini par une section de $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$ satisfait $f\bar{u} = f$, donc, en vertu de 4.1, définit un S-automorphisme de X . On obtient bien ainsi une représentation de $\Gamma(\underset{\sim}{G}_0(X/S)/S)$ dans le groupe des S-automorphismes de X , évidemment injective. Ainsi :

PROPOSITION 6.3. - *Le revêtement étale en groupes* $\underset{\sim}{G}_0(X/S) = \underset{\sim}{P}(X/S) \times_{\gamma} \gamma_0^{\mathrm{int}}$ *opère sur* X/S *à gauche, et l'homomorphisme de groupes correspondant* :

$$\Gamma(\underset{\sim}{G}_0(X/S)/S) \to \mathrm{Aut}_S(X)$$

est injectif. Il est même bijectif si $S \neq \emptyset$, *et si l'invariant* j *de* X/S *satisfait à* $j(S) \subset M'$; *et la réciproque est vraie si* S *est une variété réduite a un point.*

Pour prouver que si $j(S) \subset M'$, l'homomorphisme de groupes précédent est bijectif, on est ramené, en faisant le changement de base $S' \to S$ avec $S' = P$, au cas où X est muni d'une $\underset{\sim}{P}$-structure : en effet les deux membres de l'homomorphisme considéré s'identifiant aux éléments invariants par γ dans les deux membres de l'homomorphisme analogue relatif à X'/S' . On peut donc supposer X **défini par un morphisme**

$f : S \to T$, et les S-automorphismes de X correspondent alors aux $u \in \gamma$ tels que $\bar{u} \circ f = f$. Or l'hypothèse sur j signifie que $f(S) \subset T'$, donc, comme $f(S) \neq \emptyset$, on ne peut avoir $\bar{u} \circ f = f$ que si $u \in \gamma_0$ (par définition de T'). On voit tout de suite que cela signifie que l'automorphisme envisagé de X/S provient de la section u^{-1} de $\underset{\sim}{G}_0(X/S) \simeq S \times \gamma_0$. Enfin la dernière assertion, relative au cas où S est une variété réduite à un point, résulte de la caractérisation donnée plus haut des points de M' .

REMARQUE 6.4. - Comme l'injectivité de l'homomorphisme 6.3 reste vraie encore après tout changement de base $S' \to S$, on peut dire que $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$ opère <u>fidèlement</u> sur X/S . En vertu de 6.3, lorsque $j(S) \subset M'$, on peut même interpréter $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$ comme l'espace analytique $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_S(X)$ des automorphismes de X/S (tel que nous le définirons de façon générale dans un exposé ultérieur). Dans le cas général, on peut encore montrer que $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$ est un sous-espace analytique fermé de $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_S(X)$, ce dernier espace analytique étant "fini sur S ".

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier la catégorie fibrée $\mathfrak{F}'$ des courbes X/S d'invariant j tel que $j(S) \subset M'$, qu'on appellera pour abréger les courbes <u>ordinaires</u>. Cette catégorie est donc décrite par l'énoncé analogue à 4.1, mais où l'espace à opérateurs T est remplacé par le sous-espace ouvert invariant T' (pour le même groupe γ). On notera que maintenant, T' <u>est un fibré principal sur</u> M' , <u>de groupe</u> $\gamma' = \gamma/\gamma_0$. Comme γ_0 opère trivialement sur T , pour un fibré principal à droite P sous γ , la donnée d'un γ-morphisme $f : P \to T$ est équivalente à la donnée d'un γ'-morphisme

$$f' : P/\gamma_0 \longrightarrow T'$$

de sorte qu'on aura un diagramme commutatif (où $S = P/\gamma$) :

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow & \\ P' = & P/\gamma_0 & \xrightarrow{f'} & T' \\ & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ & S & \xrightarrow{j} & M' \end{array} \quad .$$

On voit sur ce diagramme que le fibré principal P' de groupe γ' sur S est bien déterminé à un isomorphisme unique près par le morphisme "invariant" $j : S \to M'$; c'est l'image inverse par j du fibré principal T'/M' . On trouve ainsi la description suivante :

PROPOSITION 6.5. - La catégorie $\mathfrak{F}'(S)$ des courbes ordinaires sur S est équivalente à la catégorie des triplets (j , P , φ) , où $j : S \to M'$ est un morphisme (l'invariant de la courbe), P un fibré principal de groupe γ sur S , et φ un isomorphisme de fibrés principaux de groupe γ'

$$\varphi : P/\gamma_{)} \simeq j^{-1}(T'/M') \quad .$$

Cette équivalence est compatible avec la formation d'images inverses.

COROLLAIRE 6.6. - Supposons $\gamma_0 = (e)$ (ce qui est le cas si $g \geqslant 3$). Alors la catégorie $\mathfrak{F}'(S)$ est équivalente à la catégorie discrète (i. e. où les seuls morphismes sont les identités) définie par l'ensemble $\mathrm{Hom}(S , M')$. Cette équivalence est compatible avec la formation d'images inverses. A fortiori, le foncteur en S :

$\underset{\sim}{A}'(S)$ = ensemble des classes à un isomorphisme près de courbes ordinaires de genre g sur S

est représentable à l'aide de M' :

$$\underset{\sim}{A}'(M') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(S , M') \quad .$$

Dans le cas $\gamma_0 = (e)$, la situation est donc complètement clarifiée par le résultat précédent. La fin de ce paragraphe n'a d'intérêt que lorsque $\gamma_0 \neq (e)$ (donc en théorie des courbes, pour le genre 1 ou 2).

COROLLAIRE 6.7. - Soit $c \in H^1(M' , \gamma')$ la classe du revêtement principal T' de M' . Alors on a un isomorphisme fonctoriel en S entre $\underset{\sim}{A}'(S)$ et l'ensemble des couples (j , ξ) , avec

$$j \in \mathrm{Hom}(S , M') , \quad \xi \in H^1(S , \gamma) \quad \text{tels que } \Psi_*(\xi) = j^*(c)$$

où $\Psi_* : H^1(S , \gamma) \to H^1(S , \gamma')$ est induit par l'homomorphisme canonique $\Psi : \gamma \to \gamma'$.

En particulier :

COROLLAIRE 6.8. - Si S est simplement connexe, l'application canonique

$$\underset{\sim}{A}'(S) \to \mathrm{Hom}(S , M')$$

est bijective.

Le résultat suivant est également conséquence formelle de 6.5 :

PROPOSITION 6.9. - Soient X , X' deux courbes sur S , d'invariants j , j' . On suppose X ordinaire, i. e. $j(S) \subset M'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X et X' ont même invariant : $j = j'$.

(ii) Tout point de S a un voisinage ouvert U tel que $X|U$ soit isomorphe à $X'|U$.

(iii) Il existe un revêtement étale S' de S tel que $X \times_S S'$ et $X' \times_S S'$ soient S'-isomorphes.

(iv) Comme (iii), mais S'/S étant un revêtement étale fini de S , qu'on peut même supposer fibré principal sous le revêtement en groupes $G_o(X/S)$.

DÉMONSTRATION. - Les implications (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) sont triviales même sans l'hypothèse $j(S) \subset M'$; il reste à prouver (i) $\Longrightarrow$ (iv) moyennant cette hypothèse. C'est (compte tenu de 6.5) un petit exercice sur les revêtements étales : étant donnés deux revêtement principaux P , P' de S de même groupe γ , et un γ'-isomorphisme

$$\alpha : P/\gamma_o \xrightarrow{\sim} P'/\gamma_o$$

(où $\gamma' = \gamma/\gamma_o$) ; on définit un revêtement étale de S , principal homogène sous $G_o = P \times_\gamma \gamma_o^{\text{int}}$, qu'on notera $\underset{\sim}{\mathrm{Isom}}_{S,\gamma}(P , P') = S_1$, et un isomorphisme de fibrés principaux sur S_1 :

$$P_1 = P \times_S S_1 \xrightarrow{\sim} P'_1 = P' \times_S S_1$$

compatible avec l'isomorphisme

$$\alpha_1 : P_1/\gamma_o \xrightarrow{\sim} P'_1/\gamma_o$$

déduit de α par image réciproque, et ayant une propriété universelle évidente pour des changements de base quelconques $S' \to S$. Nous en laissons le détail au lecteur.

COROLLAIRE 6.10. - Soit X une courbe ordinaire de genre g sur S . Alors la catégorie des courbes sur S localement isomorphes à X est équivalente à la catégorie des fibrés principaux homogènes sous le fibré en groupes $\underset{\sim}{G}_o(X/S)$ sur

S , <u>ou, ce qui revient au même à la catégorie des faisceaux principaux homogènes sur</u> S <u>admettant pour faisceau structural le faisceau localement constant (de fibres isomorphes à</u> γ_0) <u>des sections de</u> $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$ <u>sur</u> S .

En effet, en vertu de 6.3, le faisceau en question s'identifie au faisceau des automorphismes de X sur S .

REMARQUES 6.11.

1° Il résulte de la remarque 6.2 que le groupe γ_0 est contenu dans le centre de γ , ce qui simplifie un peu certains énoncés, du fait que $\underset{\sim}{G}_0(X/S)$ s'identifie toujours au fibré trivial $S \times \gamma_0$. Nous n'avons pas voulu nous servir de ce fait, qui est spécial à la théorie des courbes.

2° On voit dans 6.10 que si $\gamma_0 \neq (e)$, alors le foncteur $\underset{\sim}{A}'$ n'est pas représentable, car pour certains S connexes non simplement connexes, il existe pour toute courbe "constante" sur S (et même pour toute courbe sur S en vertu de la remarque précédente) des courbes de même invariant qui ne lui sont pas isomorphes. Cependant il résulte de 6.5, ou 6.7 que si on a en vue la classification <u>locale</u> des courbes ordinaires sur S , i. e. si on introduit le foncteur $\underset{\sim}{A}'_{loc}(S)$ de S , dont la valeur en S est l'ensemble des sections sur S du faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow A'(U)$, on obtient un foncteur A'_{loc} qui est représenté par M' . Nous allons voir dans le paragraphe suivant que rien de tel n'est vrai lorsqu'on ne se borne pas à la considération de courbes ordinaires.

7. <u>Phénomènes liés aux points fixes de</u> γ' <u>dans</u> T , <u>i. e. aux automorphismes exceptionnels : non représentabilité de</u> $\underset{\sim}{A}$ <u>et</u> $\underset{\sim}{A}_{loc}$.

Comme pour le foncteur $\underset{\sim}{A}'(S)$ introduit au paragraphe précédent, nous allons faire correspondre au foncteur $\underset{\sim}{A}(S)$ le foncteur $\underset{\sim}{A}_{loc}(S)$ en S , où $\underset{\sim}{A}_{loc}(S)$ désigne l'ensemble des sections du faisceau sur S associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \underset{\sim}{A}(U)$ sur S . L'homomorphisme canonique $\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{h}_M$ se factorise alors de façon évidente en

$$\underset{\sim}{A} \to \underset{\sim}{A}_{loc} \to \underset{\sim}{h}_M$$

et le deuxième homomorphisme $\underset{\sim}{A}_{loc} \to \underset{\sim}{h}_M$ a encore le même caractère universel pour les homomorphismes de $\underset{\sim}{A}_{loc}$ dans les foncteurs représentables que celui exprimé pour $\underset{\sim}{A}$ dans le théorème 4.1, comme il résulte aussitôt dudit théorème. Si donc $\underset{\sim}{A}$ était représentable, il en serait a fortiori ainsi de $\underset{\sim}{A}_{loc}$, et l'un et l'autre foncteur seraient représentés par M . En fait, nous allons voir que déjà $\underset{\sim}{A}_{loc}$ n'est pas représentable, et de façon plus précise que l'homomorphisme

$$\underset{\sim}{A}_{loc}(S) \to \underset{\sim}{h}_M(S) = \mathrm{Hom}(S\ ,\ M)$$

n'est en général ni surjectif, ni injectif, pourvu que $T_{in} \neq \emptyset$: cela résultera de 7.1 et de 7.3.

PROPOSITION 7.1. - Soit $t \in M_{in}$. Alors pour aucun voisinage ouvert U de t , il n'existe de courbe sur U dont l'invariant soit l'injection canonique de U dans M .

Nous allons utiliser ici le fait que les anneaux locaux de T sont intègres (en fait ils sont simples), et la proposition 6.1, (ii). Notons que s'il existe une courbe sur un voisinage U de t, d'invariant l'injection canonique $U \to M$, on peut supposer (en rapetissant U) que c'est même une courbe munie d'une $\underset{\sim}{P}$-structure, donc déduite d'un morphisme $f : U \to T$. Par l'hypothèse sur l'invariant, f doit être une section de T au-dessus de U . Soit $s = f(t)$, soient A l'anneau local de t dans M , B celui de s dans T , G le stabilisateur de s dans γ' ; on sait qu'il opère fidèlement dans B qui est intègre, et que $A = B^G$. La section f définit un homomorphisme de B dans A qui est l'identité sur A . Or on a le lemme suivant :

LEMME 7.2. - Soient B un anneau intègre où le groupe fini G opère fidèlement, et soit $A = B^G$ l'anneau des invariants. S'il existe un homomorphisme $B \to A$ qui induit l'identité sur A , alors $G = (e)$.

En effet, soient L et K les corps des fractions de B , A ; on sait que $K = L^G$, et G opère fidèlement sur L car $B \subset L$. Un A-homomorphisme $B \to A$ définit alors par localisation un K-homomorphisme $L \to K$, d'où $K = L$, d'où $G = (e)$. Du lemme résulte donc que si T admet une section au-dessus d'un voisinage de t , alors $G = (e)$ i. e. $t \in M'$,

C. Q. F. D.

PROPOSITION 7.3. - Soit $t \in T_{in}$. Alors il existe un espace analytique S (réductible, mais sans éléments nilpotents) un $a \in S$, deux courbes X_1 et X_2 sur S (définies respectivement par deux morphismes f_1 , f_2 de S dans T tels que $f_1(a) = f_2(a) = t$), telles que X_1 et X_2 aient même invariant, mais ne soient isomorphes sur aucun voisinage U de a . De façon plus précise, pour tout morphisme ouvert $h : S' \to S$ et tout $a' \in S'$ tels que $h(a') = a$, les images inverses X'_1 , X'_2 de X_1 , X_2 sur S' sont non isomorphes.

Comme le stabilisateur G de t dans γ' opère non trivialement sur le voisinage de t dans T (6.1, (ii)), on conclut facilement qu'il existe un espace analytique V (non singulier de dimension 1 si on y tient, ou aussi $V = T$), un point b de V, et un morphisme

$$f : V \to T$$

tel que $f(b) = t$, et que

(*) $\quad \overline{g} \circ f \neq f$ dans tout voisinage de b pour $g \in G$, $g \neq e$.

Pour ceci, il suffit qu'on ait

(**) $\quad f(U) \not\subset T_{in}$ pour tout voisinage U de a .

On désigne par S la somme de deux copies V', V'' de V recollées en b, de sorte qu'on a deux morphismes d'immersion fermée

$$i' , i'' : V \rightrightarrows S$$

avec $i'(V) = V'$, $i''(V) = V''$, $i'(b) = i''(b) = a$. La donnée d'un morphisme $f : V \to T$ est équivalente à la donnée des deux morphismes

$$f' = fi' , \quad f'' = fi'' : V \rightrightarrows T$$

soumis à la deule condition

$$f'(b) = f''(b) \quad .$$

Ceci dit, on définira f_1 par

$$f_1' = f_1'' = f$$

et f_2 par

$$f_2' = f , \quad f_2'' = \overline{g} \circ f \qquad (\text{où } g \in G , \ g \neq e) \quad .$$

Les courbes X_1 et X_2 définies par f_1 et f_2 ont même invariant

$$j = p \circ f_1 = p \circ f_2$$

où $p : T \to M$ est l'application canonique. En effet, on a $pf_1' = pf_2'$, et $pf_1'' = pf_2''$ puisque $p \circ \overline{g} = p$. D'autre part X_1 et X_2 ne sont pas isomorphes au voisinage de a, car s'ils l'étaient il existerait en vertu de 3.3 un $u \in \gamma'$ tel que $f_2 = \overline{u}f_1$ au voisinage de a. On aurait évidemment $u \in G$, et

$$f_2' = \overline{u}f_1' , \quad f_2'' = \overline{u}f_1'' \quad \text{au voisinage de } a \quad .$$

La première de ces relations impliquerait $u = e$ en vertu de (*), et la seconde s'écrirait donc

$$\overline{g} \circ f = f \quad \text{au voisinage de } a \qquad ,$$

ce qui contredit (*). Le résultat analogue sera valable aussi après un changement de base $h : S' \to S$, car h étant ouvert, si on avait $(f_2\, h) = \overline{u}(f_1\, h)$ au voisinage de a', on en conclurait $f_2 = \overline{u}f_1$ au voisinage de a (du moins pour les applications ensemblistes sous-jacentes à ces morphismes, ce qui revient au même si S est sans éléments nilpotents), contrairement à ce qu'on vient de voir.

On a cependant un résultat positif quand on se borne aux espaces analytiques S dont les anneaux locaux sont intègres :

PROPOSITION 7.4. - *Soient S un espace analytique dont les anneaux locaux sont intègres, X_1 et X_2 deux courbes sur S, j_1 et j_2 leurs invariants. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X_1 et X_2 ont même invariant : $j_1 = j_2$.*

(ii) *X_1 et X_2 sont localement isomorphes au-dessus de S.*

(iii) *Il existe un revêtement étale $S' \to S$ tel que $X_1' = X_1 \times_S S'$ et $X_2' = X_2 \times_S S'$ soient isomorphes.*

(iv) *Comme (iii), mais S' étant un revêtement principal de groupe $\gamma \times \gamma$.*

Comme pour 6.9, il suffit de prouver (i) $\Longrightarrow$ (iv). On prendra

$$S' = \underset{\sim}{P}(X_1/S) \times \underset{\sim}{P}(X_2/S) \qquad ;$$

les images inverses X_1' et X_2' sont alors munies de $\underset{\sim}{P}$-structures naturelles, et notre assertion résulte de la suivante :

COROLLAIRE 7.5. - *Soient X_1, X_2 deux courbes munies de $\underset{\sim}{P}$-structures sur un espace analytique S réduit (i. e. sans éléments nilpotents) à composantes connexes irréductibles. Pour que les courbes X_1 et X_2 (sans leur $\underset{\sim}{P}$-structure) soient S-isomorphes, il faut et il suffit qu'elles aient même invariant.*

En effet, ces deux courbes sont définies par des morphismes f_1, $f_2 : S \to T$, et l'hypothèse sur l'invariant signifie que $pf_1 = pf_2$. Pour montrer que X_1 et X_2 sont isomorphes, on peut supposer S connexe non vide, donc irréductible. On est donc ramené en vertu de 3.3 à montrer qu'il existe un $u \in \gamma$ tel que $f_2 = \overline{u} \circ f_1$. Soit a un point de S ; alors $f_1(a)$ et $f_2(a)$ sont congrus mod γ, donc en remplaçant au besoin f_2 par un morphisme $\overline{u}f_2$, on peut déjà supposer $f_1(a) = f_2(a) = t$. Comme S est irréductible et T séparé, il suffit de trouver un u dans le stabilisateur G de t dans γ tel que $f_2 = \bar{u}f_1$ <u>au voisinage de</u> a, car alors cette relation sera vraie partout. Mais cela nous ramène à une question d'algèbre locale, et il suffit d'appliquer le lemme suivant :

LEMME 7.6. - <u>Soient</u> A <u>un anneau intègre,</u> B <u>un anneau muni d'un groupe fini</u> G <u>d'automorphismes,</u> B' <u>l'anneau des invariants de</u> G, u_1 <u>et</u> u_2 <u>deux homomorphismes de</u> B <u>dans</u> A <u>induisant le même homomorphisme de</u> B' <u>dans</u> A. <u>Alors il existe un</u> $g \in G$ <u>tel que</u> $u_2 = u_1 \circ g$.

Soient p_1, p_2 les idéaux premiers de B noyaux de u_1, u_2, ils induisent un même idéal premier p sur B'. Considérons les corps de fractions L_1, L_2, L, K de B/p_1, B/p_2, B'/p, A. Alors L_1, L_2, K sont des extensions de L, et on a des K-homomorphismes

$$u_i' : L_i \to K, \quad i = 1, 2$$

induits par u_1, u_2. Il est connu qu'il existe alors un $g \in G$ tel que $g(p_1) = p_2$, définissant donc un K-isomorphisme $g' : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$, et tel que

$$u_2' = u_1' g' \quad .$$

Comme A est intègre, donc plongé dans son corps des fractions K, on en conclut $u_2 = u_1 \circ g$,

C. Q. F. D.

REMARQUES 7.7.

1° On a utilisé dans la démonstration de 7.5 le fait que T est séparé : alors deux morphismes d'un espace analytique S réduit (i. e. sans éléments nilpotents) dans T, qui coïncident au voisinage d'un point, coïncident sur un sous-ensemble analytique fermé de S contenant ce voisinage (savoir l'image inverse par $(f_1, f_2) : S \to T \times T$ de la diagonale de $T \times T$, qui est un sous-espace analytique fermé). Si donc T est irréductible, on aura $f_1 = f_2$.

2° On peut montrer que si X_1, X_2 sont deux courbes sur S, et $s \in S$ est tel que pour tout quotient A de l'anneau local $\mathcal{O}_s$ de s par une puissance de l'idéal maximal, les courbes $X_i \times_S S'$ sont isomorphes, où S' est le sous-espace analytique de S (à éléments nilpotents, et réduit au point s) défini par A, alors X_1 et X_2 sont isomorphes au voisinage de s. On conclut donc de 7.3 que pour tout $j \in M_{in}$, il existe un anneau local A de rang fini sur $\underset{\sim}{C}$ et deux courbes X_1 , X_2 sur A , ayant même invariant, se réduisant suivant j , mais non isomorphes. Dans le cas $g = 1$ des courbes alliptiques, on peut expliciter des exemples très simples pour les deux valeurs exceptionnelles de l'invariant, A étant l'anneau des nombres duaux sur $\underset{\sim}{C}$.

8. Changement de foncteur rigidifiant.

Nous allons considérer des foncteurs rigidifiant $\underset{\sim}{P}$, $\underset{\sim}{Q}$, etc, sans supposer a priori connue l'existence des espaces modulaires correspondants $T_{\underset{\sim}{P}}$, $T_{\underset{\sim}{Q}}$, etc.

Soit $\underset{\sim}{P}$ un foncteur de la catégorie fibrée des courbes de genre g dans la catégorie des revêtements principaux de groupe donné γ . Soit $\gamma \to \lambda$ un homomorphisme de groupes. Pour toute courbe X de genre g sur un espace S , considérons le revêtement principal associé :

$$\underset{\sim}{Q}(X/S) = \underset{\sim}{P}(X/S) \times_{\gamma} \lambda \qquad .$$

Pour X/S variable, on trouve ainsi un foncteur de la catégorie fibrée des courbes de genre g dans la catégorie des revêtements principaux de groupe λ . On veut comparer les propriétés de $\underset{\sim}{P}$ et de $\underset{\sim}{Q}$. Soit ν le noyau de l'homomorphisme $\gamma \to \lambda$.

PROPOSITION 8.1. - Supposons que $\underset{\sim}{P}$ soit rigidifiant, et que $T_{\underset{\sim}{P}}$ existe. Pour que $\underset{\sim}{Q}$ soit rigidifiant, il faut et il suffit que ν opère librement sur $T_{\underset{\sim}{P}}$ (i. e. que $g \in \nu$, $g \neq e$ implique que g est sans point fixe). S'il en est ainsi, $T_{\underset{\sim}{Q}}$ existe, et on a un isomorphisme canonique d'espaces analytiques à groupe d'opérateurs :

$$T_{\underset{\sim}{Q}} \simeq T_{\underset{\sim}{P}} \times_{\gamma} \lambda \qquad .$$

On veut exprimer que pour toute courbe X de genre g sur une base S , tout S-automorphisme de X qui induit l'identité dans $\underset{\sim}{Q}(X/S)$ est l'identité. La question étant locale, on peut supposer que X est muni d'une $\underset{\sim}{P}$-structure, donc défini par un morphisme $f : S \to T_{\underset{\sim}{P}}$, et S connexe $\neq \emptyset$. Par suite l'automorphisme envisagé est défini par un élément u de γ tel que $f = \overline{u}f$. Comme $\underset{\sim}{P}(X/S)$ est trivialisé, il en est a fortiori de même du fibré associé $\underset{\sim}{Q}(X/S)$, qui s'identifie donc à $S \times \lambda$; on vérifie que l'automorphisme de $\underset{\sim}{Q}(X/S)$ déduit du S-automorphisme considéré de X n'est autre que la multiplication à gauche dans $S \times \lambda$ par l'image de u^{-1} dans λ . Dire que c'est l'automorphisme identique, signifie donc que cette image est l'élément neutre, i. e. que $u \in \nu$. On veut donc que pour tout morphisme f d'un espace analytique connexe $S \neq 0$ dans $\underset{\sim}{T}_P$, et tout élément u du noyau ν tel que $f = \overline{uf}$, on ait $u = e$. Il est évidemment suffisant pour ceci que ν opère librement sur $\underset{\sim}{T}_P$, et c'est aussi nécessaire comme on voit en prenant pour S une variété réduite à un point.

Supposons donc cette condition remplie. Alors le quotient $\underset{\sim}{T}_P/\nu = \underset{\sim}{T}_P \times_\gamma (\gamma/\nu)$ existe, donc aussi l'expression

$$\underset{\sim}{T}_P \times_\gamma \lambda = (\underset{\sim}{T}_P/\nu) \times_{(\gamma/\nu)} \lambda$$

(puisque $\gamma/\nu \to \lambda$ est injectif, de sorte que le dernier membre est isomorphe à la somme directe de $\lambda/\mathrm{Im}\,\gamma/\nu$ copies de $\underset{\sim}{T}_P/\nu$). On vérifie de plus immédiatement sur cette description le fait suivant : soit P un espace analytique où γ opère à droite de telle façon que ν opère librement, et soit $f : P \to \underset{\sim}{T}_P$ un morphisme d'espaces analytiques compatible avec les opérations de γ ; considérons le diagramme de morphismes correspondants :

$$\begin{tikzcd} \underset{\sim}{T}_P \arrow[r] & \underset{\sim}{T}_P \times_\gamma \lambda \\ P \arrow[u, "f"] \arrow[r] & P \times_\gamma \lambda = Q \arrow[u, "f \times_\gamma \lambda"'] \end{tikzcd},$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes canoniques. Ce diagramme est cartésien, i. e. définit un isomorphisme de P avec le produit fibré de $\underset{\sim}{T}_P$ et $P \times_\gamma \lambda$ sur $\underset{\sim}{T}_P \times_\gamma \lambda$. En effet, décomposant l'opération $\times_\gamma \lambda$ en deux opérations intermédiaires comme ci-dessus, on est ramené aux deux cas suivants :

1° $\gamma \to \lambda$ est surjectif, auquel cas c'est une assertion bien connue pour des fibrés principaux (tout S-morphisme de fibrés principaux de même groupe structural et de base S est un isomorphisme) ;

2° Le morphisme $\gamma \to \lambda$ est injectif, auquel cas la vérification est triviale.

Ceci posé, en vertu de 4.1, il résulte de la propriété universelle de $\underset{\sim}{T}_P$ que la donnée d'une courbe X de genre g sur une base S équivaut à la donnée d'un revêtement principal P de S de groupe γ, et d'un morphisme $f : P \to \underset{\sim}{T}_P$ compatible avec les opérations de γ. Avec cette description de X, $\underset{\sim}{Q}(X/S)$ n'est donc autre que $Q = P \times_\gamma \lambda$, et f induit un morphisme naturel

$$g : Q \to \mathbf{T}_P \times_\gamma \lambda$$

compatible avec opérations de λ. En vertu de la remarque faite plus haut, on récupère (à un isomorphisme unique près) le couple (P , f) à partir du couple (Q , g), puisqu'on récupère d'abord P en tant qu'espace analytique comme un produit fibré, en même temps que la flèche $f : P \to \mathbf{T}_P$ et la flèche $P \to Q$, d'où la flèche composée $P \to Q \to S$; d'autre part, les opérations de γ sur P se récupèrent également, si on tient compte du fait que γ opère par automorphismes sur le diagramme cartésien considéré (ses opérations sur Q et $\mathbf{T}_P \times_\gamma \lambda$ étant définies via les opérations de λ, grâce à $\gamma \to \lambda$), donc les opérations sur P se déduisent par transport de structure des opérations sur les autres sommets du carré. Enfin, si on part d'un espace fibré principal Q sur S de groupe λ, et d'un morphisme $g : Q \to \mathbf{T}_P \times_\gamma \lambda$ compatible avec les opérations de λ, le couple (Q , g) provient bien d'un couple (P , f) par la construction précédente. Pour ceci, on construit P (comme espace analytique à groupe d'opérateurs λ) comme un produit fibré à partir de $g : Q \to \mathbf{T}_P \times_\gamma \lambda$ et du morphisme canonique $\mathbf{T}_P \to \mathbf{T}_P \times_\gamma \lambda$; c'est un petit exercice de vérifier (compte tenu que ν opère librement sur T_P et λ opère librement sur Q) que γ opère alors librement sur P, et que le morphisme $P \to Q$ définit un isomorphisme $P \times_\gamma \lambda \to Q$. Cela implique que P est un revêtement principal de $Q/\lambda = S$, et achève la construction.

En résumé, on voit que la donnée d'une courbe X de genre g sur S équivaut à la donnée d'un revêtement principal Q de S de groupe λ, et d'un λ-morphisme $g : Q \to \mathbf{T}_P \times_\gamma \lambda = T'$, cette description étant d'ailleurs compatible avec la formation d'images inverses. De plus, dans cette description de X, $\mathbf{Q}(X/S)$ n'est autre que Q. Cela dit, une $\mathbf{Q}$-structure sur X n'est donc pas autre chose qu'une section de Q sur S, i. e. une trivialisation de Q sur S, $Q \simeq S \times \lambda$. La donnée d'une courbe de genre g sur S munie d'une $\mathbf{Q}$-structure est donc équivalente à la donnée d'un λ-morphisme $S \times \lambda \to T'$, ou ce qui revient au même d'un morphisme de S dans T'. Cela montre bien que T' représente le foncteur $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}$, et achève la démonstration.

COROLLAIRE 8.2. - <u>Pour que</u> γ <u>opère proprement sur</u> $\mathbf{T}_P$, <u>il faut et il suffit que</u> λ <u>opère proprement sur</u> $\mathbf{T}_Q$.

Cela résulte facilement de l'expression donnée de $\mathbf{T}_Q$ en termes de $\mathbf{T}_P$.

PROPOSITION 8.3. - *Supposons que Q soit rigidifiant. Alors P est rigidifiant. Si de plus T_Q existe, T_P existe également, et est isomorphe à l'image inverse de la section marquée de $Q(X_Q/T_Q)$ par le morphisme canonique de $P(X_Q/T_Q)$ dans ce revêtement.*

La première assertion est triviale, puisque tout automorphisme d'une courbe de genre g sur S, qui induit l'identité sur $P(X/S)$ induit aussi l'identité sur $Q(X/S) = P(X/S) \times_\gamma \lambda$. Supposons de plus que T_Q existe. Une courbe X de genre g sur S munie d'une P-structure, peut s'interpréter comme une courbe de genre g sur S munie d'une Q-structure (savoir l'image de la section marquée de $P(X/S)$ dans $Q(X'/S)$), soit X', plus une section du sous-fibré $P'(X'/S)$ de $P(X'/S)$, image inverse de la section marquée de $Q(X'/S)$. Or la donnée de X' équivaut à la donnée d'un morphisme $f : S \to T_Q$, et alors $P'(X'/S)$ n'est autre que l'image inverse par f du revêtement $P'(X_Q/T_Q)$ de T_Q. Donc la donnée d'une section de $P'(X'/S)$ sur S équivaut à la donnée d'un morphisme $g : S \to P'(X_Q/T_Q)$ qui relève f. Mais la donnée d'un tel couple (f, g) est évidemment équivalente à la donnée d'un morphisme quelconque $g : S \to P'(X_Q/T_Q)$. Cela prouve la proposition.

PROPOSITION 8.4. - *Soient P et Q deux foncteurs rigidifiants quelconques relatifs aux groupes γ, λ. Si T_P existe, il en est de même de T_Q. Si de plus γ opère proprement dans T_P, alors λ opère proprement dans T_Q.*

On considère le foncteur

$$P \times Q : X/S \rightsquigarrow P(X/S) \times_S Q(X/S)$$

de la catégorie fibrée $\mathfrak{F}$ dans la catégorie fibrée des revêtements principaux de groupe $\gamma \times \lambda$. Il est évident qu'il est rigidifiant, et qu'on a, avec les notations introduites plus haut :

$$P \simeq (P \times Q)/\lambda \quad , \qquad Q \simeq (P \times Q)/\gamma \quad .$$

Si T_P existe, alors en vertu de 8.3, $T_{P\times Q}$ existe, donc en vertu de 8.1, T_Q existe. La dernière assertion se prouve de même en utilisant le corollaire 8.2.

PROPOSITION 8.5. - *Supposons qu'il existe un foncteur rigidifiant P relatif à un groupe γ, tel que T_P existe, et que γ y opère proprement. Supposons de plus $M = T_P/\gamma$ connexe. Alors il existe un foncteur rigidifiant P_o tel que T_{P_o}*

(qui existe en vertu de 8.4) soit connexe et simplement connexe. Un tel foncteur rigidifiant est défini à un isomorphisme (non unique) près.

Soit T' une composante connexe de $T_{\underset{\sim}{P}}$, et soit γ' le sous-groupe de γ qui la stabilise. Pour une courbe X de genre g sur S, représenté par un couple (P, f) comme dans 4.1, soit $P'(X/S) = P$ le sous-ensemble de $P = \underset{\sim}{P}(X/S)$ image inverse de $T'_{\underset{\sim}{P}}$ par f. Comme $M = T_P$ est connexe, on voit que tout point de T_P est congru mod γ à un point de T', d'où il résulte que tout point de P est congru mod γ à un point P'. Il en résulte facilement que P' est un revêtement principal de S de groupe γ'. Soit T_o un revêtement universel de T' et soit γ_o le groupe opposé du groupe des automorphismes v de l'espace analytique T_o qui sont compatibles avec un automorphisme u (dépendant de v) provenant de γ'. (On sait que γ_o est une extension de γ' par le groupe des T'-automorphismes de T_o i. e. le groupe fondamental π de T'). Soit $f' : P' \to T'$ le morphisme induit par f, et posons

$$\underset{\sim}{P}_o(X/S) = \underset{\sim}{P}'(X/S) \times_{T'} T_o \quad .$$

Le groupe γ_o opère par transport de structure sur le produit fibré P_o, et comme γ' opère librement dans P', on voit immédiatement que γ_o opère librement sur P_o, et on aura $P' = P_o/\pi$ d'où $S = P_o/\gamma_o$, de sorte que P_o est un revêtement principal de S de groupe γ_o. On peut d'ailleurs considérer $P = \underset{\sim}{P}(X/S)$ comme associé à $P_o = \underset{\sim}{P}_o(X/S)$ grâce à l'homomorphisme composé $\gamma_o \to \gamma' \to \gamma$. Notre construction est d'ailleurs fonctorielle en X, et compatible avec la formation d'images inverses. Ainsi $\underset{\sim}{P}_o$ devient un foncteur de la catégorie fibrée $\underset{\sim}{F}$ dans la catégorie fibrée des revêtements principaux de groupe γ_o. Comme $\underset{\sim}{P}$ est rigidifiant, il en est a fortiori de même de $\underset{\sim}{P}_o$. Utilisant 8.3, on vérifie facilement que $T_{\underset{\sim}{P}_o}$ est isomorphe à T_o, donc est connexe et simplement connexe. Pour la propriété d'unicité, on note qu'en vertu de 4.2 et 8.1 tout autre foncteur rigidifiant $\underset{\sim}{Q}$ est défini à l'aide d'un homomorphisme de groupes $\gamma_o \to \gamma_1$ par

$$\underset{\sim}{P}_1 = \underset{\sim}{P}_o \times_{\gamma_o} \gamma_1$$

(le noyau de $\gamma_o \to \gamma_1$ devant opérer librement dans $T_{\underset{\sim}{P}_o}$). On voit sur 8.1, que $T_{\underset{\sim}{P}_1}$ est connexe si et seulement si l'homomorphisme $\gamma_o \to \gamma_1$ est surjectif, et qu'il est de plus simplement connexe si et seulement si, de plus, le noyau est réduit à l'élément neutre, i. e. si l'homomorphisme est un isomorphisme. D'où l'unicité annoncée.

REMARQUES 8.6.

1° Nous verrons que pour un entier n assez grand, le foncteur fibrant de Jacobi d'échelon n défini dans le paragraphe 2 est rigidifiant, et nous construirons l'espace modulaire correspondant, appelé "espace modulaire jacobien d'échelon n pour les courbes de genre g". Comme il correspond à un groupe fini $Sp(2g , \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, ce groupe opère évidemment proprement. Il résulte alors de 8.4 que l'espace de Teichmüller existe et que le groupe de Teichmüller y opère proprement.

2° La théorie transcendante classique montre que l'espace de Teichmüller est un espace topologique contractile, a fortiori connexe et simplement connexe. Donc l'espace de Teichmüller peut se caractériser, indépendamment de la notion de "structure de Teichmüller", grâce à 8.5. Le même phénomène (contractilité de l'espace modulaire défini à la Teichmüller) se reproduit d'ailleurs dans la théorie des familles de tores complexes, ou des familles de variétés abéliennes polarisées. On peut se demander si ces analogies sont fortuites ou non.

3° La définition d'une structure de Teichmüller, telle qu'elle est donnée dans 2.2, ne se traduit pas telle quelle en géométrie algébrique abstraite. On peut cependant, grâce à un théorème de NIELSEN, montrer l'équivalence de la notion de structure de Teichmüller sur une courbe de genre g (de base un point), et de la donnée d'un système de générateurs "privilégié" de son groupe fondamental (comme il a été expliqué dans un exposé antérieur). Sous cette forme, la définition peut s'adapter à la géométrie algébrique abstraite, et devra sans doute être utilisée pour la construction de schémas de modules divers sur l'anneau des entiers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERS (Lipman). - Uniformization and moduli, Contributions to function theory (Papers communicated to the International colloquium on function theory [1960. Bombay]) ; p. 41-49. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur le mémoire de Weil : Généralisation des fonctions abéliennes, Séminaire Bourbaki, 2e éd., t. 9, 1956/57, n° 141, 15 p.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorème d'existence en géométrie algébrique, I : Généralités, Descente par morphisme fidèlement plats, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190, 29 p.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorème d'existence en géométrie algébrique, II : Le théorème d'existence en théorie formelle des modules, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 195, 22 p.

[5] Séminaire GROTHENDIECK : Géométrie algébrique, 1960/61. - Paris, Institut des Hautes Etudes Scientifiques (à paraître).