Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I.

Par *Alexandre Grothendieck*, Nancy.

§ 1. Introduction.

1. Sujet et plan. Cet article est destiné à apporter quelques généralisations et compléments à l'article de G. Köthe sur le même sujet (c. f. [7][1])). Il a été conçu néanmoins de façon indépendante, à la suite de la lecture du travail [11] de J. Silva, dont une mise au point s'imposait. Toutesfois, il convient de signaler que l'essentiel du § 6 a été inspiré par la lecture du travail de M. G. Köthe, que ce dernier avait eu l'amabilité de me communiquer.

Ce travail comprend trois parties. Les deux premières (Ia, Ib), assez élémentaires, ne s'appuient que sur les techniques générales exposées dans [4]. Dans la dernière partie II (§§ 7 et 8) au contraire nous sommes plusieurs fois obligés de nous appuyer sur des résultats non encore publiés (mais que je compte publier prochainement). Voici un sommaire des trois parties annoncées.

I a. Nous donnons d'abord deux paragraphes préliminaires (§§ 2 et 3), sans prétention à l'originalité, sur les fonctions holomorphes à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe arbitraire E. Le premier, qui donne les définitions et quelques propriétés élémentaires constamment utilisées des fonctions holomorphes, est indispensable pour la compréhension de la suite. Le second paragraphe donne les critères d'holomorphie relatifs aux espaces E les plus importants.

Ib. Les trois paragraphes suivants (§§ 4, 5, 6) constituent un développement, en langage moderne et avec la généralité qui lui appartient, de l'idée de J. Silva. Cette généralisation se fait dans plusieurs directions.

1. Au lieu d'envisager des espaces de fonctions holomorphes ordinaires et leurs applications linéaires, nous envisageons d'emblée des espaces de fonctions holomorphes à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe E.

2. Nous obtenons plus de symétrie et même de simplicité dans l'exposé, en considérant deux parties complémentaires Ω_1 et Ω_2 non vides *quelconques* de la sphère de Riemann, et un accouplement entre les espaces $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$ des fonctions holomorphes locales sur Ω_1 et Ω_2, à valeurs respectivement dans E et son dual E', — au lieu de supposer Ω_1 ouvert, Ω_2 fermé, et de distinguer entre ces deux cas. D'ailleurs, les très nombreux espaces vectoriels topologiques de fonctions holomorphes locales qu'on obtient ainsi jouissent de propriétés aussi simples que ceux pour lesquels Ω_1 est ouvert ou fermé (comme nous le montrerons au § 8).

3. Nous donnons une représentation intégrale pour toutes les applications linéaires *bornées* d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe complet quelconque (§ 5), le passage de la détermination des *formes* linéaires continues à cas général se faisant par une méthode de transposition assez standard.

[1]) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

4. Au § 6, nous obtenons un théorème de structure pour *toutes* les applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe complet *quelconque*, grace à une extension de la notion de fonction holomorphe locale, extension qui pourra ne pas sembler simple à certains, mais qui, comme nous le montrons, devient très simple dans les cas particuliers les plus importants.

5. Enfin, nous donnerons ailleurs quelques indications montrant comment la théorie de J. Silva peut se généraliser à une vaste classe d'équations elliptiques sur une variété[2]), grâce au formalisme des noyaux-distributions introduit par L. Schwartz.

II. La dernière partie de ce travail — étude topologique des espaces de fonctions holomorphes introduits précédemment — est sans doute la plus originale et la plus importante. Plus encore que dans les paragraphes précédents, les méthodes empoyées sont susceptibles de généralité. Malheureusement, sauf le théorème 5 du § 7 et l'essentiel du § 8, N°s 1 et 3, ces méthodes ne sont pas élémentaires, i. e. ne sont pas encore de technique courante; elles s'appuient en partie sur des résultats non publiés que nous sommes obligés d'admettre.

Le § 7 est consacré à l'exposé des propriétés topologiques des espaces $H(O, E)$ de fonctions holomorphes sur une variété holomorphe quelconque O (à une ou plusieurs dimensions complexes), à valeurs dans l'espace vectoriel localement convexe E. Nous dégageons d'abord, des paragraphes 3 et 4, une importante propriété topologique intrinsèque de l'espace $H(O)$ des fonctions holomorphes complexes sur O, propriété qui reste valable même si O n'est pas, comme dans les paragraphes précédents, un ouvert de la sphère de Riemann. Pour énoncer cette propriété, nous avons besoin d'une notion de produit tensoriel topologique, que nous esquissons rapidement. Il apparait alors que $H(O)$ appartient à une importante classe d'espaces, que j'appelle *espaces nucléaires*, ayant entre autres des propriétés analogues à celles qui apparaissent dans certains espaces de fonctions indéfiniment différentiables dans la théorie de L. Schwartz (par exemple les espaces $(\mathfrak{E})$ et $(\mathfrak{S})$ (c. f. [9]). La proposition 7 et son raffinement, proposition 9, indispensables pour la suite (et que nous admettons ici) en résultent; elles semblent essentiellement nouvelles. Tous les résultats ultérieurs du § 7 pourraient s'énoncer en termes abstraits dans la théorie des espaces nucléaires. Nous donnons en particulier: un critère de compacité dans $H(O, E)$ (qui n'est autre que le classique et élémentaire théorème de Montel), et de faible compacité (th. 5 et 6), d'où un critère pour que $H(O, E)$ soit un espace (M), resp. réflexif; la détermination du bidual de $H(O, E)$, et une condition pour que cet espace soit distingué dans le sens de [4] (th. 8 et 9). Ces derniers théorèmes sont obtenus ici en plongeant $H(O, E)$ dans l'espace de Schwartz $\mathfrak{E}(O, E)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur O à valeurs dans E, dont les formes linéaires peuvent se représenter concrètement par les méthodes de L. Schwartz. Nous esquissons rapidement les propriétés essentielles des espaces $\mathfrak{E}(O, E)$ (§ 7, N° 2). Comme conséquence, nous obtenons aussi une caractérisation simple de la topologie faible sur une partie bornée de $\mathfrak{E}(O, E)$, s'appliquant de façon évidente aux sous-espaces vectoriels fermés de $\mathfrak{E}(O, E)$, et en particulier à $H(O, E)$ (th. 7).

Enfin, le § 8, qui donne l'étude topologique interne des espaces $P(\Omega_1, E)$ (Ω_1 étant une partie arbitraire de la sphère de Riemann) se rattache de nouveau directement au § 4, et est pour l'essentiel de nature plus élémentaire que le § 7. Il se termine par un exemple très simple montrant que les hypothèses faites dans l'énoncé des propositions qui précédaient ne sont pas superflues.

---

[2]) Voir: Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, 1953. M. *J. Dieudonné* avait de son côté aperçu la possibilité d'une généralisation de cette nature.

2. Notations. De façon générale, nous suivons la terminologie des «Eléments» de N. Bourbaki. Plus particulièrement, nous supposons une bonne connaissance de [2]. — Tous les espaces vectoriels topologiques envisagés seront localement convexes et séparés; nous utilisons constamment les notations et techniques de dualité générale de l'article fondamental [4]. En particulier, si E est un espace vectoriel topologique, on désignera par E' son dual, et par $\langle x, x' \rangle$ le produit scalaire de $x \in E$ par $x' \in E'$.

Les lettres grasses $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{C}$ désignent respectivement le corps des réels et des complexes.

3. Rappels sur l'intégrale faible. Soit M un espace localement compact muni d'une mesure de Radon μ. Une fonction f définie sur M, à valeurs dans l'espaces vectoriel localement convexe E, est dite *scalairement intégrable*, si pour tout $x' \in E'$, la fonction $\xi \to \langle f(\xi), x' \rangle$ est sommable. La somme de cette dernière dépend alors linéairement de x', c'est donc une forme linéaire sur E', c'est à dire un élément du complété faible $\hat{E}$ de E. Soit X cet élément on pose: $X = \int f(\xi)\, d\mu(\xi)$, et on l'appelle intégrale de la fonction f. Avec cette définition, les propriétés élémentaires usuelles de l'intégration se vérifient trivialement.

Le critère le plus important qui permette d'affirmer que $X \in E$ (et non seulement $X \in \hat{E}$) s'obtient ainsi: on montre d'abord par une application facile du «théorème des bipolaires» ([4], prop. 1) le

Lemme 1. *Si μ est bornée, de norme $\|\mu\|_1$ (masse totale si μ est positive) on a*

$$\int f(\xi)\, d\mu(\xi) \in \|\mu\|_1 \cdot K$$

où K est l'enveloppe convexe cerclée faiblement fermée dans $\hat{E}$ de l'ensemble des valeurs prises par f.

On en déduit aussitôt le

Lemme 2. *Si f est fonction continue à support compact, μ quelconque et si on suppose que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble compact soit compacte, alors f est faiblement intégrable, et son intégrale est dans E.*

La propriété envisagée ici sur E, savoir que l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact soit compacte, s'introduit ainsi naturellement chaque fois qu'on se propose d'intégrer des fonctions continues à valeurs dans E. Elle est pratiquement assez peu restrictive; entre autres, tous les espaces complets la possèdent.

§ 2. Généralités sur les fonctions holomorphes à valeurs vectorielles.

Théorème 1. *Soit f une fonction définie dans une partie ouverte O du plan complexe à valeurs dans l'espace vectoriel localement convexe E. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *Pour tout $x' \in E'$, la fonction $z \to \langle f(z), x' \rangle$ est holomorphe.*

2) *$f(z)$ est faiblement continue, et pour tout chemin rectifiable fermé simple Γ dans O dont l'intérieur soit contenu dans O, on a*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0. \tag{1}$$

3) *$f(z)$ est faiblement continue, et pour tout chemin rectifiable fermé simple Γ dans O dont l'intérieur soit contenu dans O, et tout point z intérieur à ce contour, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}. \tag{2}$$

Nous dirons alors que f est fonction holomorphe dans O. Il suffit, pour que f soit holomorphe, que l'on ait

4) *$f(z)$ est faiblement dérivable dans O,*

et cette condition est nécessaire si dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte[3]*). Dans ce cas, $f(z)$ est même indéfiniment fortement différentiable, et on a pour tout $z \in O$*

$$(3) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \qquad z \text{ et } \Gamma \text{ comme dans } 3).$$

De plus, sous ces conditions, on a:

5) *Autour de tout point $z \in O$, on a le développement taylorien*

$$(4) \qquad f(z+h) = \sum_{0}^{\infty} a_n h^n \qquad \left(a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)\right)$$

la série du second membre étant uniformément sommable pour $|h| \leqq r$, où r est un quelconque nombre positif strictement inférieur à la distance de z à $\complement O$. Réciproquement, si f admet autour de chaque point $z \in O$ un développement comme ci-dessus, la série étant faiblement convergente vers $f(z+h)$ pour h assez petit, alors f est holomorphe dans O.

Démonstration. L'équivalence de 1), 2) et 3) resulte trivialement de la définition de l'intégrale faible et des propriétés correspondantes pour fonctions à valeurs complexes. De même le fait que 4) implique l'holomorphie. Montrons la réciproque sous les conditions envisagées dans l'énoncé. De toutes façons, $f(z)$ est faiblement indéfiniment différentiable dans le complété faible $\hat{E}$ de E (espace de *toutes* les formes linéaires sur E') car cela signifie exactement, comme on vérifie tout de suite, que pour tout $x' \in E'$ la fonction $z \to \langle f(z), x' \rangle$ est fonction indéfiniment différentiable. $f^{(n)}(z)$ est alors la forme linéaire sur E' définie par

$$\langle f^{(n)}(z), x' \rangle = \frac{d^n}{dz^n} \langle f(z), x' \rangle.$$

De cette formule resulte que *dans $\hat{E}$*, on a

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}},$$

à cause de la formule analogue pour fonctions complexes. Reste à montrer que les $f^{(n)}(z)$ sont tous $\in E$ (d'où resultera que $f(z)$ est indéfiniment faiblement différentiable *dans E*) puis que $f(z)$ est même fortement indéfiniment différentiable. Pour le premier point, à cause de la formule intégrale pour $f^{(n)}(z)$ et l'hypothèse faite sur E, il suffit de montrer que $f(\xi)$ est fonction fortement continue. Soit donc $z \in O$, et $r > 0$ tel que $|h| \leqq r$ implique $z + h \in O$, soit K l'enveloppe convexe cerclée fermée dans $\hat{E}$ de l'ensemble des valeurs des $f'(z+h)$ pour ces valeurs de h. On a pour $|h| \leqq r$:

$$f(z+h) - f(z) = \int_{z}^{z+h} f'(\xi)\, d\xi$$

d'où (par la formule de la moyenne généralisée) $f(z+h) - f(z) \in h \cdot K$. Comme le premier membre est dans E, on peut dans cette formule remplacer K par $K \cap E$, qui est une partie bornée de E (car évidemment faiblement bornée). La continuité de f au point z en resulte immédiatement.

[3]) Il nous arrivera par la suite le parler des dérivées d'une fonction holomorphe à valeurs dans E, sans supposer que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact soit forcément compacte. Nous sous-entendrons alors qu'on considère les dérivées comme fonctions holomorphes à valeurs dans le *complété* de E (dans lequel la condition relative aux enveloppes est vérifiée).

Reste à montrer que $f(z)$ est même fortement indéfiniment différentiable. Par récurrence, puisque les $f^{(n)}(z)$ sont elles mêmes des fonctions holomorphes à valeurs dans E, on est ramené à montrer que $f(z)$ est fortement différentiable. Mais on a

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)=\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h}(f'(\xi)-f'(z))\,d\xi$$

par suite le premier membre est contenu dans l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble des valeurs $f'(\xi)-f'(z)$ quand ξ varie sur le segment $(z, z+h)$. Mais comme $f'(\xi)$ est fonction fortement continue parce que holomorphe, il suit aussitôt que le premier membre tend vers zéro fortement si h tend vers zéro, c. q. f. d.[4]).

Sous ces conditions, démontrons 5). Tout d'abord, il resulte de la propriété analogue pour les fonctions complexes que l'on a bien convergence faible de la somme infinie (4) vers $f(z+h)$, il faut montrer qu'on a en fait sommabilité forte et uniforme pour $|h|\leqq r$. Soit Γ une circonférence de centre z, de rayon $R > r$ avec $R <$ distance de z à $\complement O$. On a

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)^{n+1}},\quad \text{d'où}\quad a_n\in\frac{2\pi R}{2\pi}\frac{1}{R^{n+1}}K,$$

où K est l'enveloppe convexe cerclée fermée de $f(\Gamma)$, donc compact. Le terme général de la somme (4) est donc élément de $\lambda^n K$, où $\lambda = r/R < 1$. La sommabilité uniforme de la somme infinie (4) en resulte immédiatement (la série est même *absolument convergente* dans l'espace normé obtenu en munissant l'espace $\boldsymbol{C}\cdot K$ engendré par K de la topologie définie par la «boule» K). — Enfin la réciproque est évidente, car si f est donnée par un développement taylorien faiblement convergent au voisinage de tout point de O, il en sera de même des fonctions scalaires $\langle f(z), x'\rangle$, qui seront donc holomorphes, donc f sera holomorphe. Le théorème 1 est donc complétement démontré.

Remarque 1. Si on suppose que dans E l'enveloppe cerclée fermée d'un compact est compacte, pour vérifier qu'une fonction $f(z)$ est holomorphe, il suffit de vérifier qu'elle est continue, et que pour quelque partie *totale* $M \subset E'$, $x' \in M$ implique que $\langle f(z), x'\rangle$ est fonction holomorphe. Car pour un chemin rectifiable Γ donné, on sait déjà que l'intégrale $\int_\Gamma f(z)\,dz$ est élément de E, et pour vérifier que cette intégrale est nulle, il suffit de vérifier que son produit scalaire par toute $x' \in M$ l'est.

Comme application de cette remarque, supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E (pas nécessairement fermé), muni d'une topologie localement convexe propre plus fine que la topologie induite par E, et pour laquelle l'axiome relatif aux enveloppes convexes cerclées fermées soit vérifié. Alors les applications holomorphes de O dans F muni de cette topologie, sont identiques aux applications continues *dans F*, qui sont applications holomorphes *dans E*.

D'ailleurs, rappelons à ce propos que pour vérifier que f est continue, il est souvent plus commode de vérifier que l'ensemble des valeurs prises par f sur un compact est compact, et que $\langle f(z), x'\rangle$ est fonction continue de z pour tout $x' \in M$ (mais ce dernier fait resultera déjà de l'holomorphie de cette fonction).

Ces remarques seront constamment utilisées dans nos exemples ultérieurs.

---

[4]) Ces deux raisonnements valent plus généralement pour prouver p. ex. que *a*) si une fonction f sur un ouvert O de $\boldsymbol{R}^n$ ou de $\boldsymbol{C}^n$, à valeurs dans E, est faiblement continûment différentiable *dans* $\hat{E}$ (i. e. si pour tout $x' \in E'$ la fonction $\langle f(\xi), x'\rangle$ est continûment différentiable) alors f est fortement continue, et *b*) si de plus $f'(\xi)$ est $\in E$ et application continue dans E, alors elle est dérivée *forte* de f. (Ce dernier fait, dû à L. Schwartz, est constamment utilisé dans son travail [10].) Notons encore dans cet ordre d'idées qu'on démontre de façon toute analogue (ou à partir de ce qui précède) que si E est *complet* et f est m fois faiblement continûment différentiable *dans* $\hat{E}$, alors elle est $m-1$ fois *fortement* continûment differentiable *dans* E.

Remarque 2. Pour que $f(z)$ soit fonction holomorphe, il faut (et il suffit évidemment) que pour tout $z \in O$ existe un voisinage U de z dans O et un ensemble borné convexe cerclé K dans E (qu'on peut même choisir comme enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact) tel que $f(z)$ soit holomorphe en tant qu'application de U dans l'espace *normé* $\boldsymbol{C} \cdot K$ muni de la norme définie par la boule K.

Ce fait est par exemple contenu dans la dernière partie de la démonstration du théorème 1, du moins quand l'axiome des enveloppes est vérifié. Mais on s'assure immédiatement de la validité générale de ce fait en passant au complété de E. En fait, on peut même prendre pour U n'importe quel voisinage compact de z dans O, limité pour fixer les idées par un contour rectifiable Γ, et pour K l'enveloppe convexe cerclée fermée de $f(\Gamma)$.

Comme application, on voit que si deux topologies localement convexes sur E donnent les mêmes parties bornées (par exemple), elles définissent la même notion de fonction holomorphe. (D'ailleurs, le fait que dans la définition même de la notion de fonction holomorphe, seule la topologie faible de E intervient en fait, est un cas particulier de cette remarque). Exemple: Soit E un espace $(\mathfrak{F})$ (ou plus généralement un espace tonnelé ou complet —c. f. [3]), F un espace localement convexe arbitraire, $f(z)$ une fonction de la variable complexe z, à valeurs dans l'espace $L(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F. Alors il revient au même de dire que $f(z)$ est fonction holomorphe, qu'on munisse $L(E, F)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E («topologie uniforme» quand E et F sont des espaces de Banach) ou de la topologie de la convergence simple; il faut et il suffit pour cela que $\langle f(z) \cdot x, y' \rangle$ soit fonction holomorphe de z pour tout $x \in E$, $y' \in F'$ (le dual de $L(E, F)$ muni de la convergence simple est en effet l'ensemble des combinaisons linéaires des formes du type $u \to \langle u \cdot x, y' \rangle$).

Remarque 3. Si $f(z)$ est fonction holomorphe dans O, on a $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$ chaque fois que Γ est un contour rectifiable qui soit le «bord» (au sens algébrique) d'un domaine U d'adhérence compacte contenue dans O. Cela resulte en effet immédiatement du fait analogue pour les fonctions holomorphes complexes.

Remarque 4. La somme de deux fonctions holomorphes dans O est évidemment holomorphe. On a un énoncé analogue pour le «produit» de deux fonctions holomorphes, sous les conditions générales suivantes. Soient E, F, H, des espaces localement convexes, $B(x, y)$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans H, continue par rapport à chaque variable, soit $f(z)$ (resp. $g(z)$) une application holomorphe de l'ouvert O dans E (resp. dans F). Alors on peut affirmer que l'application $B(f(z), g(z))$ est holomorphe quand l'une des conditions suivantes est vérifiée:

a) Dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte, ou dans E' l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble compact — pour la topologie de Mackey $\tau(E', E)$ par exemple — est compacte.

b) Pour tout $z \in O$, il existe un voisinage U de z dans O tel que l'enveloppe convexe cerclée fermée de $f(U)$ soit compacte.

La démonstration est standard. Appliquant la définition des fonctions holomorphes, on est ramené de suite au cas où H est le corps complexe. Alors B est une forme bilinéaire séparément continue, qui s'identifie donc à une application faiblement continue de F dans E'. Il faut donc prouver l'holomorphie de la fonction $\langle f(z), B \cdot g(z) \rangle$, on est donc ramené au cas où $F = E'$, B étant la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$. On peut supposer par raison de symétrie, si a) est vérifié, que c'est dans E que l'axiome des enveloppes est vérifié. On est donc ramené à l'hypothèse moins restrictive b). Nous voulons montrer que la fonction $\langle f(z), g(z)\rangle$ admet la dérivée $\langle f(z), g'(z)\rangle + \langle f'(z), g(z)\rangle$. En effet, on a

$$\frac{1}{h}\left(\langle f(z+h), g(z+h)\rangle - \langle f(z), g(z)\rangle\right) = \left\langle \frac{f(z+h)-f(z)}{h}, g(z+h)\right\rangle + \left\langle f(z), \frac{g(z+h)-g(z)}{h}\right\rangle.$$

Si $h \to 0$, le deuxième terme tend vers $\langle f(z), g'(z)\rangle$, il faut donc montrer que la différence du premier terme et de $\langle f'(z), g(z)\rangle$ tend vers 0. D'ailleurs on peut dans cette différence remplacer $\langle f'(z), g(z)\rangle$ par $\langle f'(z), g(z+h)\rangle$, car de l'hypothèse résulte que $f'(z) \in E$, et d'autre part $g(z+h)$ tend vers $g(z)$ faiblement. Il faut donc montrer que

$$\left\langle \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z),\ g(z+h)\right\rangle$$

tend vers 0 avec h. Mais de l'hypothèse sur f résulte qu'il existe un compact K *convexe cerclé* tel que $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z) \in h \cdot K$ pour h assez petit. D'autre part, $g(z+h)$ reste dans un borné A de E' pour h assez petit. Comme l'ensemble des $\langle x, x'\rangle$, où $x \in K$, $x' \in A$, est alors borné d'après le théorème de Mackey sur les bornés, la conclusion voulue suit aussitôt.

Remarque 5. Les définitions et remarques de ce paragraphe s'étendent de façon évidente au cas de plusieurs variables complexes. Comme de plus la notion d'holomorphie est purement locale, on a une notion évidente de fonction holomorphe sur une variété holomorphe (à une ou plusieurs dimensions complexes).

§ 3. Exemples divers de fonctions holomorphes vectorielles.

a) E est l'espace des fonctions complexes continues sur un espace localement compact M, avec la topologie de la convergence compacte: les applications holomorphes $f(z)$ de O dans E s'identifient aux fonctions continues $f(z, t)$ définies sur l'espace produit $O \times M$, telles que pour tout $t \in M$, $z \to f(z, t)$ soit fonction holomorphe.

En effet, dans cet énoncé on a exprimé d'une part la continuité de l'application $f(z)$, d'autre part l'holomorphie des fonctions $z \to \langle f(z), x'\rangle$ où x' parcourt une partie totale du dual de E — savoir l'ensemble des «masses ponctuelles» sur M. La remarque 1 du § 2 s'applique effectivement, car l'espace E est ici complet.

De la même façon, on traite l'exemple

b) $E = (\mathfrak{E}^m)$, espaces des fonctions m fois continûment différentiables sur $\boldsymbol{R}^n$ $(0 \leqq m \leqq +\infty)$ avec la topologie usuelle de la convergence uniforme des dérivées d'ordre $\leqq m$ (voir [9]). Les applications holomorphes de O dans E s'identifient aux fonctions $f(z, t)$ sur l'espace produit $O \times \boldsymbol{R}^n$, telles que 1) pour tout $z \in O$, $f(z, t)$ est fonction m fois continûment différentiable de t, et ses dérivées d'ordre $\leqq m$ sont fonctions continues sur l'espace produit $O \times \boldsymbol{R}^n$, et 2) pour tout $t \in \boldsymbol{R}^n$, $f(z, t)$ est fonction holomorphe de z.

Dans ce critère, on peut bien entendu remplacer $\boldsymbol{R}^n$ par un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$, ou au contraire par une adhérence d'ensemble ouvert. On aurait encore des énoncés tout analogues en remplaçant $\boldsymbol{R}^n$ par une variété, les espaces fonctionnels par des espaces de champs tensoriels etc. On peut aussi supposer dans les deux exemples précédents que E, au lieu d'être un espace de fonctions complexes, est un espace de fonctions à valeurs dans un espace localement convexe quelconque.

Du critère a) et à l'aide de la remarque 1 du § 2, on tire facilement d'autres critères d'holomorphie lorsque E est un quelconque espace de fonctions continues. Ainsi, la caractérisation simple connue des parties compactes des espaces $(\mathfrak{S})$ (resp. $(\mathfrak{O}_M)$) des fonctions indéfiniment différentiables sur $\boldsymbol{R}^n$ et à décroissance rapide (resp. à croissance lente) (c. f. [9], vol. 2) donne aussitôt:

c) Les applications holomorphes de O dans $(\mathfrak{S})$ (resp. $(\mathfrak{O}_M)$) s'identifient aux fonctions $f(z, t)$ sur $O \times \boldsymbol{R}^n$ telles que 1) pour tout $z \in O$, $f(z, t)$ est fonction indéfiniment différentiable de t, 2) pour tout $t \in \boldsymbol{R}^n$, $f(z, t)$ est fonction holomorphe de z, et 3) pour tout compact $K < O$ il existe une suite de fonctions positives $(h_m) \in (\mathfrak{S})$ (resp. $\in (\mathfrak{O}_M)$) sur $\boldsymbol{R}^n$, telles que pour tout indice de dérivation p d'ordre m, on ait $|D^p f(z, t)| \leqq h_m(t)$ pour $z \in K$ et quel que soit t.

Pour les espaces de distributions qui ne sont pas des fonctions continues, on a des critères d'un autre type, resultant de la remarque 2 du § 2. Par exemple la structure connue des ensembles bornés dans l'espace $(\mathfrak{D}')$ de toutes les distributions sur $\boldsymbol{R}^n$ (c. f. [9], t. 1, p. 85—86) donne aussitôt:

d) Pour que l'application $f(z)$ de O dans $(\mathfrak{D}')$ soit holomorphe, il faut et il suffit que pour tout ouvert O_1 relativement compact dans O, et tout ouvert relativement compact $U < \boldsymbol{R}^n$, existe une fonction $F(z, t)$ continue sur $O_1 \times U$, holomorphe en z, et un indice de dérivation fixe p sur $\boldsymbol{R}^n$, tel qu'on ait pour tout $z \in O$:

$$f(z) = D^p_{(t)} F(z, t) \quad \textit{dans } U.$$

Un peu moins évident est le cas où E est un espace L^p construit sur un espace localement compact M à l'aide d'une mesure positive μ:

e) Pour qu'une application $f(z) = f(z, t)$ de O dans $L^p (1 \leqq p \leqq +\infty)$ soit holomorphe, il faut et il suffit qu'elle soit continue, et que en modifiant au besoin pour tout $z \in O$ la fonction $f(z, t)$ sur un ensemble localement négligeable (dépendant de z), la fonction $f(z, t)$ soit holomorphe en z pour tout $t \in M$.

Démonstration. 1) *Suffisance.* Il suffit de voir que pour toute forme linéaire sur L^p définie par une $g \in L^{p'}$, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, la fonction de z

$$\langle f(z), g \rangle = \int f(z, t)\, g(t)\, d\mu(t)$$

est holomorphe (car dans tous les cas, $L^{p'}$ est une partie totale du dual de L^p). Posons $h(z, t) = f(z, t)\, g(t)$, on est ramené à ceci: soit $h(z, t)$ une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé, avec $p = 1$; montrer que $\int h(z, t)\, d\mu(t)$ est fonction holomorphe de z. Il faut donc montrer que pour tout chemin rectifiable fermé simple Γ dont l'intérieur est contenu dans O, on a $\int\limits_\Gamma dz \int h(z, t)\, d\mu(t) = 0$. Tout revient à montrer qu'on peut intervertir les signes d'intégration, c'est à dire (comme on a déjà $\int\limits_\Gamma |dz| \int |g(z, t)|\, d\mu(t) < +\infty$) que $g(z, t)$ est mesurable sur l'espace produit $\Gamma \times M$ (Γ étant muni de la mesure dz). Cela resulte du lemme suivant, qui a son intérêt propre:

Lemme. *Soit O un espace métrisable localement compact, M un espace localement compact muni d'une mesure μ, $f(s, t)$ une fonction complexe définie sur $O \times M$, telle que pour tout $s \in O$, $f(s, t)$ soit fonction mesurable de t, et que pour tout $t \in M$, $f(s, t)$ soit fonction continue de s. Alors quelle que soit la mesure ν sur O, $f(s, t)$ est mesurable sur $O \times M$ pour la mesure produit $\nu \otimes \mu$, et de façon plus précise: pour tout compact $B < M$, tout compact $A < O$ et tout $\varepsilon > 0$, existe un compact $K < B$ tel que $\mu(B \cap \complement K) < \varepsilon$, et que $f(s, t)$ soit continue sur $A \times K$* (de sorte que le critère de Lusin se trouve vérifié sur $O \times M$).

Démonstration du lemme. En vertu du critère de Lusin, le lemme signifie que l'application $t \to f_t$ (où $f_t(s) = f(s, t)$) de M dans l'espace $C(A)$ des fonctions complexes continues sur A (muni de la topologie de la convergence uniforme) est *fortement* mesurable. Comme $C(A)$ est séparable, on sait (Pettis) qu'il suffit de vérifier que cette application est *faiblement* mesurable, i. e. que pour toute mesure de Radon ν sur A, l'application $t \to \nu(f_t)$ est mesurable. Mais cela resulte du fait que (A étant métrisable) ν est limite *vague* d'une *suite* de mesures «discrètes» $\nu^{(n)} = \sum_{1 \leq i \leq m_n} c_i^{(n)} \varepsilon_{s_i^{(n)}}$ (où ε_s désigne la masse $+ 1$ placée au point s) de sorte que l'application $t \to \nu(f_t)$ est limite d'une *suite* d'applications mesurables, donc elle-même mesurable.

2) *Nécessité des conditions de l'énoncé* e). O est réunion d'une suite de cercles U_i tels que $U_i < O$ pour tout i. Supposons que nous avons démontré la proposition pour tout U_i, donc que pour tout indice i on ait une fonction $g_i(z, t)$ définie dans $U_i \times M$, telle que pour tout $t \in M$ elle soit fonction holomorphe dans U_i, et que pour tout $z \in U_i$, on ait

$$g_i(z, t) = f(z, t)$$

localement presque partout. Pour tout couple d'indices i, j, tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, soit $(z_{i,j}^{(n)})_n$ une suite extraite de $U_i \cap U_j$ tendant vers une limite dans cet ouvert. Soit $N_{ij}^{(n)}$ l'ensemble des $t \in M$ tels que $g_i(z_{i,j}^{(n)}, t) \neq g_j(z_{i,j}^{(n)}, t)$, il est localement négligeable par hypothèse, soit N la réunion de tous les $N_{ij}^{(n)}$, il est aussi localement négligeable. Si alors $t \in \complement N$, $g_i(z, t)$ et $g_j(z, t)$ sont des fonctions holomorphes qui coïncident dans la partie commune de leurs domaines de définition, (si partie commune il y a), car elles y coïncident déjà aux points d'une suite $(z_{i,j}^{(n)})_n$ s'accumulant en un point de $U_i \cap U_j$. Pour $t \in \complement N$ donné, il existe donc une fonction holomorphe $g(z, t)$ définie dans tout O et prolongeant les $g_i(z, t)$. Enfin, pour $t \in N$, posons $g(z, t) = 0$. Alors par construction $g(z, t)$ est fonction holomorphe en t, et pour tout $z \in O$, $f(z, t)$ et $g(z, t)$ sont égales localement presque partout.

Nous sommes donc ramenés au cas où O est un cercle ouvert, et où $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un voisinage de l'adhérence de O. Supposons que O soit le cercle $|z| < r$, et que $f(z)$ soit en fait définie pour $|z| < r'$ (où $r' > r$). On a alors pour $|z| < r'$ le développement taylorien

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n \tag{1}$$

la convergence étant absolue. Prenons un représentant-fonction $a_n(t)$ pour tout a_n. La série $\sum_1^\infty a_n r^n$ étant absolument convergente dans L^p, on sait (Lebesgue) que la série $\sum_1^\infty a_n(t)\, r^n$ converge absolument pour $t \in \complement N$, où N est un ensemble localement négligeable. A fortiori, si $t \in \complement N$, la série $\sum_1^\infty a_n(t)\, z^n$ converge absolument pour $|z| < r$ vers une fonction holomorphe $g(z, t)$. Posons enfin $g(z, t) = 0$ si $t \in N$. La fonction $g(z, t)$ est holomorphe en z, et d'autre part pour tout $z \in O$ donné, $f(z, t)$ et $g(z, t)$ coïncident localement presque partout à cause de (1). Notre proposition e) est complètement démontrée.

Dans cet énoncé, on aurait encore pu remplacer les espaces L^p usuels par l'espace des fonctions à valeurs dans un espace de Banach et «de puissance p. ème sommable».

Rappelons enfin

f) Si E est l'espace des fonctions holomorphes dans un ouvert $U < \boldsymbol{C}$, avec la topologie de la convergence compacte, alors les applications holomorphes de O dans E s'identifient aux fonctions holomorphes complexes sur $O \times U$.

La démonstration est triviale en vertu de la remarque 1 du § 2. Ici encore, on pourrait remplacer E par un espace de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles. De plus, la généralisation à plusieurs variables complexes (tant dans U que dans O) est évidente. D'ailleurs dans *tous* les exemples précédents, on aurait pu sans modification essentielle des raisonnements, traiter de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, ou définies plus généralement sur des variétés holomorphes à une ou plusieurs dimensions complexes.

§ 4. Le Théorème de Dualité pour espaces de fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann.

1. Généralités sur les espaces vectoriels topologiques $\mathfrak{H}(O, E)$. Les définitions et les propriétés élémentaires qui suivent sont évidemment valables pour fonctions holomorphes définies sur des variétés holomorphes à une où plusieurs dimensions complexes. Pour simplifier le langage, nous nous limitons ici au cas des fonctions holomorphes définies sur un ouvert O du plan complexe (ou de la sphère de Riemann, ce qui revient au même).

Si E est un espace localement convexe, O un ouvert du plan complexe, on désigne par $\mathfrak{H}(O, E)$ l'espace des fonctions holomorphes dans O à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. En vertu de la formule de Cauchy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \tag{1}$$

on voit que cette topologie est identique à la topologie, plus fine en apparence, de la convergence compacte de *f et de toutes ses dérivées* (dérivées qui pourraient ne pas exister dans E, mais qui existent sûrement dans le complété $\hat{E}$ de E — voir note de la page 38 —. Mais il est évident que $\mathfrak{H}(O, E)$ peut être considéré comme sous-espace vectoriel topologique de $\mathfrak{H}(O, \hat{E})$, sur lequel la «topologie de la convergence compacte de f et de ses dérivées» est défini sans ambiguité). Car de façon précise soit $U\colon |z - z_0| \leqq r$ un cercle compact contenu dans O, soit r' un nombre intermédiaire entre r et la distance de z_0 à $\complement O$, soit Γ la circonférence de centre z_0, de rayon r'. Alors la formule (1) est valable pour toute $f \in \mathfrak{H}(O, E)$ et pour $z \in U$, d'où

$$f^{(n)}(z) \in \frac{n!}{2\pi}\, 2\pi r' \frac{1}{(r' - r)^{n+1}} K_f = \lambda K_f \qquad (z \in U)$$

où K_f est l'enveloppe convexe cerclée fermée de l'ensemble $f(\Gamma)$. Il en resulte bien que si $f \to 0$ dans $\mathfrak{H}(O, E)$, alors $f_n(z) \to 0$ uniformément quand z parcourt U, donc aussi uniformément quand z parcourt un compact $O_1 < O$ (car O_1 peut être recouvert par un nombre fini de cercles de l'espèce précédente).

Toute application de O dans E qui limite uniforme sur tout compact d'applications holomorphes est holomorphe, comme on vérifie immédiatement, soit directement à l'aide de la condition 2 du théorème-définition 1, soit en passant au cas scalaire. En particulier, $\mathfrak{H}(O, E)$ est sous-espace vectoriel *topologique fermé* de l'espace $C(O, E)$ des applications continues de O dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. Il en resulte aussi que si E est complet, $\mathfrak{H}(O, E)$ est complet. Il est d'ailleurs évident aussi que si E est métrisable, $\mathfrak{H}(O, E)$ est aussi métrisable (de même d'ailleurs que $C(O, E)$). Par suite si E est un espace $(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{H}(O, E)$ est un espace $(\mathfrak{F})$. D'ailleurs les réciproques de ces trois remarques sont vraies, car $\mathfrak{H}(O, E)$ contient un sous-espace *fermé* isomorphe à E, savoir le sous-espace formé des applications constantes de O dans E.

Si O est une partie ouverte de la sphère de Riemann, on désigne encore par $\mathfrak{H}(O, E)$ l'espace des fonctions holomorphes sur O à valeurs dans E, muni de la topologie de la convergence compacte. Les propriétés élémentaires que nous venons d'exposer sont encore vraies, sauf que, si $\infty \in O$, la dérivation d/dz n'est plus définie pour les éléments de $\mathfrak{H}(O, E)$, et il faut la remplacer par un autre «champ de dérivations» pour exprimer les propriétés qui la faisaient intervenir.

2. Les espaces $P(\Omega_1, E)$, $P(\Omega_2, E)$, et leur accouplement. Dans toute la suite de ce travail, nous considérons le corps complexe comme une partie ouverte de la sphère de Riemann Ω, variété holomorphe compacte obtenue à partir de C par adjonction du point ∞. Si O est une partie ouverte de Ω, on désignera (en suivant la notation de [7]) par $P(O, E)$ l'espace des fonctions holomorphes sur O à valeurs dans E qui s'annulent au point ∞ si $\infty \in O$. Si $\infty \notin O$, on a donc $P(O, E) = \mathfrak{H}(O, E)$, autrement c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{H}(O, E)$ qu'on obtient (hyperplan si $E = \mathbf{C}$). $P(O, E)$ sera bien entendu muni de la topologie de la convergence compacte.

Nous aurons besoin, pour un emploi ultérieur, des définitions très générales suivantes. Soit Ω_1 une partie quelconque d'un espace topologique Ω, E un ensemble. Si on considère l'ensemble des applications de voisinages (variables) de Ω_1 dans E, la relation: «f et g coïncident dans un voisinage de Ω_1» est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence pour cette relation sera dite une «fonction locale sur Ω_1, à valeurs dans E». Si f est une fonction locale sur Ω_1 on définit évidemment $f(z)$ pour $z \in \Omega_1$, mais il ne suffit pas de connaitre les $f(z)$ ($z \in \Omega_1$) pour que f' soit déterminée. C'est seulement dans le cas où Ω_1 est ouvert que les fonctions locales sur Ω_1 s'identifient aux fonctions ordinaires sur Ω_1. — Si E est un espace vectoriel (resp. une algèbre etc.) l'ensemble des fonctions locales sur Ω_1 à valeurs dans E est muni de façon évidente d'une structure d'espace vectoriel (resp. d'algèbre etc.). Pour l'instant, nous avons besoin du cas où E est un espace vectoriel localement convexe, Ω la sphère de Riemann; on peut alors considérer les applications locales de Ω_1 dans E qui proviennent de fonctions *holomorphes* définies au voisinage de Ω_1, elles forment un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications locales de Ω_1 dans E. On les appellera des «fonctions localement holomorphes sur Ω_1». On désignera encore par $P(\Omega_1, E)$ l'ensemble des applications localement holomorphes de Ω_1 dans E qui s'annulent au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$. Si donc Ω_1 est ouvert, cette notation est bien compatible avec la notation précédente.

Soient maintenant Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de Ω, et soient E, E' deux espaces vectoriels en dualité séparée. Nous allons, sous des conditions très générales, définir alors une dualité séparante entre les espaces $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$, (E et E' étant considérés comme topologisés par exemple par la topologie faible, ce qui fixe la signification de $P(\Omega_1, E')$ et $P(\Omega_2, E)$). Soit $f \in P(\Omega_1, E)$, $g \in P(\Omega_2, E')$, $\bar{f}$ (resp. $\bar{g}$) un représentant de f (resp. g), $\bar{f}$ étant définie sur l'ouvert U_1, $\bar{g}$ sur l'ouvert U_2. On peut supposer $\infty \notin U_1 \cap U_2$. Posons $K_2 = \complement U_2$, et considérons un ouvert U tel que $K_2 \subset U \subset \bar{U} \subset U_1$, et que la frontière de U soit une courbe rectifiable (formée par exemple d'arcs de cercle en nombre fini — il est facile de vérifier par le lemme de Borel-Lebesgue qu'un tel U existe). Soit alors Γ «le bord» de $\bar{U}$ (au sens algébrique, donc muni du sens de parcours positif autour de $\bar{U}$).

On pose alors

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \langle \bar{f}(\xi), \bar{g}(\xi) \rangle \, d\xi. \tag{1}$$

Cette définition se justifie ainsi. Sous des conditions extrêmement générales, la fonction $\langle \bar{f}(\xi), \bar{g}(\xi) \rangle$ sera holomorphe dans $U_1 \cap U_2$: nous avons vu (c. f. § 2 remarque 4) qu'il suffit par exemple de supposer que dans E (ou dans E') l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un ensemble compact est compact (et dans l'énoncé de cette condition, on peut remplacer la topologie faible par toute autre topologie donnant le même dual); ou, si on ne suppose *rien* sur E, que pour tout $\xi \in U_1 \cap U_2$, il existe un voisinage V de ξ dans cet ensemble tel que $\bar{g}(V)$ ait dans E' une enveloppe convexe cerclée fermée *compacte*. Alors l'intégrale dans (1) a un sens, et elle ne dépend pas du choix particulier de U qu'on a pu faire, en vertu du théorème de Cauchy appliqué à la fonction holomorphe $\langle \bar{f}(\xi), \bar{g}(\xi) \rangle$ dans $U_1 \cap U_2$

(c. f. § 2 remarque 3 [5])). On en déduit aussitôt que l'on trouverait encore la même valeur de l'intégrale en prenant deux autres représentants f_1 et g_1 de $\bar{f}$ et $\bar{g}$, car alors on prendra un contour Γ contenu dans la partie commune des ouverts où f et f_1, resp. g et g_1, coïncident. On a donc le droit de poser (1).

Remarquons que si on échangeait les rôles de E et E', on trouverait le même produit scalaire changé de signe — car il suffit de changer l'orientation sur le contour Γ pour trouver le «bord» algébrique de l'adhérence de l'ouvert $U' = \complement \bar{U}$ (ouvert qui satisfait bien aux conditions $K_1 < U' < \bar{U}' < U_2$ — où $K_1 = \complement U_1$ —).

Supposons maintenant pour fixer les idées un instant que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact soit compacte. Alors (1) est défini quels que soient $\bar{f}$ et $\bar{g}$, et c'est évidemment une forme bilinéaire sur $P(\Omega_1, E) \times P(\Omega_2, E')$. Nous allons voir qu'elle est séparante, en précisant comment on peut par exemple retrouver une $\bar{g} \in P(\Omega_2, E')$ à partir de la forme linéaire u qu'elle définit. Soit en effet g un représentant de $\bar{g}$ défini dans l'ouvert $U_2 > \Omega_2$ nous allons d'abord, pour $\xi \in \Omega_2$ donné, $\xi \neq \infty$, établir une expression des $g^{(n)}(\xi)$ à l'aide de u. Soit $x \in E$, et considérons la fonction $\frac{x}{(z-\xi)^{n+1}}$ de z, elle est holomorphe dans un voisinage $U_1 = \complement\{\xi\}$ de Ω_1, nulle à l'infini si $\infty \in \Omega_1$, elle définit donc un élément de $P(\Omega_1, E)$. Je dis qu'on a

$$\text{(2)} \qquad \langle x, g^{(n)}(\xi)\rangle = -u_z\left(\frac{n!\,x}{(z-\xi)^{n+1}}\right) = -\left\langle \frac{n!\,x}{(z-\xi)^{n+1}}, \bar{g}\right\rangle_z$$

(où l'indice z indique que la forme linéaire u, resp. le produit scalaire $\langle\ \rangle$, s'applique à des fonctions de z). Explicitant, (2) s'écrit en effet, en introduisant la fonction holomorphe complexe $h(z) = \langle x, g(z)\rangle$ définie dans l'ouvert $U_2 \cap \complement\{\xi\}$:

$$h^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)\,dz}{(z-\xi)^{n+1}}$$

où conformément aux définitions générales, on peut prendre ici pour Γ une circonférence centrée sur ξ de rayon assez petit pour que le cercle V qu'elle délimite soit contenu dans U_2, Γ étant orienté dans le *sens direct autour de* V (et non autour de $\complement \mathring{V}$, à cause du signe — que nous avons supprimé). Nous sommes donc ramenés à la formule de Cauchy classique.

Si $\xi \in \Omega_2$, mais $\xi = \infty$, les expressions $g^{(n)}(\xi)$ n'ont plus de sens, mais introduisons alors la fonction $g_1(z) = g(1/z)$, qui est holomorphe au voisinage de l'origine. On montre alors comme ci-dessus qu'on a la formule

$$\text{(3)} \qquad \langle x, g_1^{(n+1)}(0)\rangle = u_z(z^n \cdot x) = \langle z^n \cdot x, \bar{g}\rangle_z \quad \text{pour } n \geqq 0.$$

D'autre part, on a $g_1(0) = g(\infty) = 0$. Des formules (2) et (3) resulte bien que si on connait la forme linéaire u définie par $\bar{g}$, alors les représentants g de $\bar{g}$ sont connus au voisinage de tous les points de Ω_2, donc $\bar{g}$ est lui-même parfaitement déterminé.

En résumé, nous pouvons donc énoncer la

Proposition 1. *La formule* (1) *définit une dualité séparante entre les espaces* $P(\Omega_1, E)$ *et* $P(\Omega_2, E')$ (*lorsqu'on suppose que dans* E *l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte*).

---

[5]) Nous admettrons de plus le résultat suivant, que nous énonçons pour des variétés de dimension n: Soit U_1 une variété orientée à n dimensions, K une partie compacte de U_1 (K_2 dans les notations précédentes). Alors pour une partie ouverte relativement compacte U contenant K, et ayant pour frontière une variété à $n-1$ dimensions, la classe d'homologie *dans* $U_1 \cap \complement K$ du bord algébrique ∂U de U ne dépend pas de U. — En effet, si on remplace U par un ouvert analogue U', $\partial U - \partial U'$ est le bord de la „chaine" $U - U'$, et on vérifie aussitôt qu'on peut remplacer cette chaine par une chaine portée par $\complement K$.

Evidemment, la démonstration et par suite la conclusion subsiste si on ne suppose plus rien sur E, mais en restreignant l'un des espaces, par exemple $P(\Omega_2, E')$, à l'espace formé des fonctions holomorphes locales sur Ω_2 qui ont «localement une image équicontinue», par quoi nous entendons: il existe un représentant g de $\bar{g}$ défini dans U tel que pour tout $z \in U$ existe un voisinage U' de z dans U tel que $g(U')$ soit partie équicontinue de E' (pour quelque topologie localement convexe supposée donnée sur E, et donnant pour dual E'). C'est dans ce cas que nous nous plaçons dans la suite de ce paragraphe.

3. Le théorème de dualité pour $P(O, E)$, O ouvert.

Théorème 2 (*J. Silva*). *Soit O une partie ouverte de la sphère de Riemann, non vide et distincte de Ω, E un espace vectoriel localement convexe. Alors le dual de l'espace vectoriel localement convexe $P(O, E)$ s'identifie, par la dualité définie plus haut (formule (1)), au sous-espace de $P(\complement O, E')$ formé des fonctions holomorphes locales ayant localement une image équicontinue* (voir la définition fin du numéro précédent).

Remarquons d'ailleurs que si g est fonction holomorphe à valeurs dans E', elle transforme un compact en une partie de E' qui est compacte pour toute topologie sur E' donnant pour dual E (en particulier pour la topologie faible, et même pour la topologie $\tau(E', E)$ de Mackey). Dans les cas usuels (notamment si E est un espace $(\mathfrak{F})$, plus généralement si c'est un espace «tonnelé» — c. f. [3] —) une telle partie de E' est forcément équicontinue, de sorte que l'énoncé du théorème se simplifie alors: le dual de $P(O, E)$ s'identifie à tout l'espace $P(\complement O, E')$.

Démonstration du théorème 2. Soit $\bar{g} \in P(\complement O, E')$ ayant une image localement équicontinue, et g un représentant de $\bar{g}$, défini dans l'ouvert U. On peut supposer, à cause de la *compacité* de $\complement O$, que $g(U)$ est déjà une partie équicontinue de E'. Montrons que

$$\langle f, \bar{g} \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \langle f(\xi), g(\xi) \rangle \, d\xi$$

est forme linéaire continue sur $P(O, E)$, c'est à dire bornée sur un voisinage de l'origine. Mais soit $V = (g(U))^0$ le polaire de $g(U)$, c'est donc un voisinage de O dans E. Si donc $f(\Gamma) \subset V$, on a (formule de la moyenne) $|\langle f, \bar{g} \rangle| \leqq \frac{l}{2\pi}$, l étant la longueur de Γ. Mais O étant ouvert, Γ peut être choisi indépendant de f, et l'ensemble des $f \in P(O, E)$ tels que $f(\Gamma) \subset V$ est un voisinage de l'origine. Donc toute $\bar{g}$ du type envisagé définit bien une forme linéaire continue sur $P(O, E)$, et on a vu (proposition 1) que l'application qui à toute $\bar{g}$ fait correspondre la forme linéaire qu'elle définit, est linéaire et biunivoque. Reste à montrer que *toute* forme linéaire continue u sur $P(O, E)$ peut s'obtenir par une $\bar{g}$ comme ci-dessus.

Par hypothèse, il existe un ensemble compact $K \subset O$ et un voisinage V de l'origine dans E (que nous prendrons convexe cerclé) tels que

$$f(K) \subset V \text{ implique } |u(f)| \leqq 1. \tag{4}$$

Soit alors O_1 un ensemble ouvert tel que $K \subset O_1 \subset \bar{O}_1 \subset O$, et pour toute $f \in P(O, E)$ soit $\tilde{f}$ sa restriction à O_1. L'application $f \to \tilde{f}$ est évidemment une application linéaire continue de $P(O, E)$ dans $P(O_1, E)$. Soit H l'image de $P(O, E)$ par cette application, il est immédiat d'après (4) que $u(f) = 0$ si $\tilde{f} = 0$, de sorte que l'on peut poser $u(f) = \tilde{u}(\tilde{f})$, où $\tilde{u}$ est une forme linéaire sur H. On *a* alors $|\tilde{u}(f)| \leqq 1$ pour toute $\tilde{f} \in H$ telle que $\tilde{f}(K) \subset V$. L'ensemble de *toutes* les fonctions $\in P(O_1, E)$ qui appliquent K dans V étant un voisinage convexe cerclé de l'origine dans cet espace, il resulte du théorème de Hahn-Banach qu'on peut prolonger $\tilde{u}$ en une forme linéaire v définie dans tout l'espace, et en module $\leqq 1$ sur ce voisinage, on a donc

$$u(f) = v(\tilde{f}) \text{ où } |v(F)| \leqq 1 \text{ si } F(K) < V(F \in P(O_1, E)). \tag{5}$$

Soit maintenant O_2 un ouvert tel que $\bar{O}_1 < O_2 < \bar{O}_2 < O$, et dont la frontière soit une courbe rectifiable. Si Γ est le «bord» algébrique de $\bar{O}_2$, on a, pour toute $f \in P(O, E)$, la formule de Cauchy

$$f(z) = \tilde{f}(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \text{ pour } z \in O_1. \tag{6}$$

Nous allons mettre cette formule sous la forme globale

$$\tilde{f} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma f(\xi) \otimes \varphi_\xi d\xi \quad (\text{intégrale faible dans } P(O_1, E)) \tag{7}$$

avec les conventions suivantes. Posons pour $\xi \in \complement O_1$

$$\varphi_\xi(z) = \frac{1}{\xi - z} \text{ si } \xi \neq \infty; \quad \varphi_\infty(z) = 0 \text{ si } \infty \in \complement O_1 \tag{8}$$

en considérant φ_ξ comme un élément de l'espace $P(O_1)$ des fonctions holomorphes complexes sur O_1. L'application $\xi \to \varphi_\xi$ de $\complement O_1$ dans $P(O_1)$ est continue (vérification triviale) et holomorphe dans $\complement \bar{O}_1$ (ce deuxième point resulte aussitôt, en vertu de la remarque 1 du § 2, du fait que $\varphi_\xi(z)$ est, pour z fixe, fonction holomorphe de ξ). D'autre part, si φ est un élément quelconque de $P(O_1)$ et $a \in E$, posons

$$a \otimes \varphi(z) = \varphi(z)\, a \tag{9}$$

on a donc $a \otimes \varphi \in P(O_1, E)$. L'application $(a, \varphi) \to a \otimes \varphi$ de $E \times P(O_1)$ dans $P(O_1, E)$ est bilinéaire et continue par rapport à chaque variable. Par suite, l'application $\xi \to f(\xi) \otimes \varphi_\xi$ est holomorphe dans $O \cap \complement \bar{O}_1$ (remarque 4 du § 2, qui s'applique ici, $P(O_1)$ étant un espace complet). Par suite l'intégrale faible du deuxième membre de (7) existe — c'est tout au moins un élément du complété de $P(O_1, E)$, donc si veut un élément F de $P(O_1, \bar{E})$ où $\bar{E}$ désigne le complété de E. Qu'on ait alors bien $F = \tilde{f}$, ou, ce qui revient au même, $F(z) = \tilde{f}(z)$ pour $z \in O_1$ n'est autre que la formule (6).

La formule (7) étant ainsi expliquée et établie, on peut écrire, d'après la définition de l'intégrale faible

$$u(f) = v(\tilde{f}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma v(f(\xi) \otimes \varphi_\xi)\, d\xi \text{ pour toute } f \in P(O, E). \tag{10}$$

Mais $v(a \otimes \varphi)$ est une forme bilinéaire sur $E \times P(O_1)$, continue par rapport à chaque facteur, on a par suite

$$v(a \otimes \varphi) = \langle a, L(\varphi) \rangle \tag{11}$$

où L est une application linéaire faiblement continue de $P(O_1)$ dans E'. Posons

$$g(\xi) = L(\varphi_\xi) \tag{12}$$

alors (10) s'écrit, en vertu des deux formules précédentes

$$u(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \langle f(\xi), g(\xi) \rangle\, d\xi.$$

Dans cette formule, $g(\xi)$ est une fonction holomorphe dans $\complement \bar{O}_1$, (qui est un voisinage de $\complement O$) et nulle à l'infini si $\infty \in \complement O$, comme il résulte aussitôt de la définition (12). Il reste à démontrer que g applique un voisinage de $\complement O$ dans une partie équicontinue de E'. Soit en effet U un voisinage de $\complement O$ ne rencontrant pas $\overline{O}_1$, montrons que $g(U) \subset MV^0$ pour un nombre $M > 0$ convenable. Il revient au même de dire que $|\langle x, g(\xi)\rangle| \leqq M$ si $x \in V$, $\xi \in U$, or on a par définition ((11) et (12)):

$$\langle x, g(\xi)\rangle = v(x \otimes \varphi_\xi),$$

d'où, en vertu de (5) $|\langle x, g(\xi)\rangle| \leqq \lambda$ avec $\lambda = \sup_{z \in K} |\varphi_\xi(z)|$. Mais si ξ parcourt U, λ reste borné supérieurement par un nombre M inverse de la distance de U à K. Le théorème 2 est donc complètement démontré.

De plus, on se convainc aisément que le même raisonnement, appliqué simultanément aux formes linéaires de tout un ensemble de formes, donne le critère suivant, qui sera essentiel pour la suite:

Proposition 2. *Sous les conditions du théorème* 2, *pour qu'une partie du dual de* $P(O, E)$ *soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle provienne d'un ensemble* A *de fonctions holomorphes définies dans un même voisinage* U *de* $\complement O$, *et tel que* $\bigcup_{g \in A} g(U)$ *soit une partie équicontinue de* E'.

4. Sur une extension du théorème de dualité. On peut se demander si le raisonnement du théorème 2 ne donnerait pas les applications linéaires u de $P(O, E)$ dans un *espace de Banach* F. A première vue se présente la difficulté suivante: l'application linéaire $\tilde{u}$ qu'on définirait sur le sous-espace H de $P(O_1, E)$ ne pourra à priori plus être prolongée à tout l'espace, car le théorème de Hahn-Banach ne s'appliquera plus. Cette difficulté disparaitrait pourtant *si* H *était dense dans* $P(O_1, E)$, car alors $\tilde{u}$ se prolongerait simplement par continuité en une application linéaire continue définie sur $P(O_1, E)$. On aura même encore la formule (3) par passage à la limite, car si $F \in P(O_1, E)$ applique K dans V, comme par hypothèse elle peut être approchée uniformément sur tout compact par des $\tilde{f} \in H$, on voit aussitôt qu'elle peut même être approchée par des $\tilde{f} \in H$ appliquant K dans V (car K est lui-même un compact $\subset O_1$). Mais il est possible de montrer que par un *choix convenable* de O_1, on peut supposer effectivement que H est dense dans $P(O_1, E)$; de façon précise:

Lemme. *Soit* O *un ouvert non vide de la sphère de Riemann* Ω, *distinct de* Ω, K *un compact* $\subset O$. *Alors il existe un ouvert* O_1 *tel que* $K \subset O_1 \subset \overline{O}_1 \subset O$, *et tel que l'image canonique de* $P(O, E)$ *dans* $P(O_1, E)$ y *soit dense* (*quel que soit d'ailleurs l'espace localement convexe* E).

Montrons qu'il suffit en effet de prendre O_1 avec une frontière assez simple (formée par exemple d'un nombre fini d'arcs de courbe dérivables sans points doubles), et tel que, si Γ_i désignent les éventuels contours simples *intérieurs* de la frontière de O_1 (nous supposons $\infty \notin O$ pour fixer les idées), il y ait au moins un point z_i de $\complement O$ dans l'intérieur U_i du contour Γ_i (cela est loisible, car sinon on rajouterait à O_1 les adhérences des U_i qui mettraient cette hypothèse en défaut). — En effet, soit alors $F \in P(O_1, E)$, on sait que F est somme de fonctions holomorphes F_i définies respectivement dans $\complement \overline{U}_i$, et d'une fonction holomorphe F_0 définie dans l'ouvert U_0 des points intérieurs au contour extérieur Γ_0 de la frontière de O_1 (comme on voit élémentairement sur la formule de Cauchy donnant F par une intégrale sur un contour voisin de la frontière de O_1). Il faut montrer que F_0 et les F_i peuvent s'approcher uniformément sur tout compact $K_1 \subset O_1$ par des fonctions $\tilde{f} \in H$. On est donc ramené au problème suivant: Etant donnés une fonction holomorphe à valeurs vectorielles $G(z)$ définie à l'extérieur d'un contour dérivable fermé γ sans points doubles du plan complexe (G étant holomorphe aussi au point ∞), un point ξ à l'intérieur et un compact K à l'extérieur de ce contour; approcher G uniformément sur K par des fonctions holomorphes dans $\complement\{\xi\}$. (Le cas de la fonction F_0 se ramène évidemment à celui-ci par transformation $z \to 1/z$). En premier lieu, on tire facilement de la formule de Cauchy (valable pour $G(\infty) = 0$, ce qu'on peut évidemment supposer),

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{G(\eta)\,d\eta}{\eta - z},$$

que $G(z)$ peut s'approcher uniformément sur K par des fonctions du type $H(z) = \dfrac{a}{\eta - z}$, où $a \in E$, $\eta \in \gamma$. On est donc ramené à approcher une fonction *complexe* du type $\dfrac{1}{\eta - z}$, par des fonctions holomorphes dans $\complement\{\xi\}$. Mais cela est facile: on démontre par exemple que l'ensemble des $\xi \in \complement K$ qui sont tels que $\dfrac{1}{\eta - z}$ puisse s'approcher uniformément sur K par des fonctions holomorphes dans $\complement\{\xi\}$, est à la fois ouvert et fermé dans $\complement K$. Comme il contient η, donc des points intérieurs au contour γ, il doit contenir *tout* l'intérieur (connexe) de ce contour, c. q. f. d.

Grâce à ce lemme, le raisonnement du théorème 1 permet aussi de déterminer les applications linéaires continues de $P(O, E)$ dans un espace de Banach quelconque. Mais nous exposerons cette extension au § 5 par une autre méthode, qui consiste à se ramener au cas où F est le corps complexe, et qui semble susceptible d'une plus grande généralité. Néanmoins, la possibilité de faire le raisonnement directement est peut-être digne de remarque.

5. Les espaces vectoriels topologiques $P(\Omega_1, E)$ pour Ω_1 quelconque, et le théorème de dualité général. Si Ω_1 est maintenant une partie *quelconque* de Ω, non vide et distincte de Ω, E un espace localement convexe, il est naturel de chercher une topologie localement convexe sur $P(\Omega_1, E)$ qui permette d'étendre le théorème 2. Nous allons procéder de façon analogue à celle de M. Köthe (c. f. [7]): pour tout ouvert O contenant Ω_1 et distinct de Ω, considérons l'application linéaire naturelle ψ_{O,Ω_1} de $P(O, E)$ dans $P(\Omega_1, E)$ (opération de «restriction» d'une fonction locale). Il existe sur $P(\Omega_1, E)$ une topologie localement convexe T qui est la plus fine de toutes celles qui rendent continues toutes les applications ψ_{O,Ω_1}: c'est celle dont les voisinages convexes cerclés de l'origine sont les ensembles convexes cerclés V tels que pour tout ouvert O contenant Ω_1, $\psi^{-1}_{O,\Omega_1}(V)$ soit voisinage de l'origine dans $P(O, E)$. Cette notion peut se ramener à celle de limite inductive dans un sens généralisé (généralisation évidente de la définition donnée dans [4]): Soit H_O l'image de $P(O, E)$ dans $P(\Omega_1, E)$, les H_O forment une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels dont la réunion est $P(\Omega_1, E)$, et la topologie T est la limite inductive généralisée de ces sous-espaces, quand chaque H_O est muni de la topologie quotient de celle de $P(O, E)$ par le noyau de ψ_{O,Ω_1}. Mais on fera attention que si $O_1 < O_2$, la topologie induite sur H_{O_2} par H_{O_1} n'est en général pas la topologie propre de H_{O_2} (on peut seulement dire qu'elle est moins fine) de sorte que, même si Ω_1 admet une *suite* fondamentale de voisinages O_i, on n'est pas en droit d'appliquer les résultats de [4]. Nous verrons pourtant ultérieurement que bien des resultats relatifs aux espaces $(\mathfrak{LF})$ sont éncore valables ici (§ 8).

On se convainc facilement que la topologie T est séparée, car elle est plus fine que la «topologie de la convergence compacte de f et de toutes ses dérivées partielles», topologie qui pourrait se définir de façon évidente, et qui est localement convexe, séparée et rend continues les applications ψ_{O,Ω_1}. Mais le fait que $P(\Omega_1, E)$ est séparé resultera de la détermination de son dual, qui se trouvera être séparant (théorême 2 bis).

Dorénavant, le symbole $P(\Omega_1, E)$ désignera l'espace vectoriel *topologique* que nous venons de définir,même si ultérieurement nous serons amenés à y définir d'autres topologies, en vue de les comparer à la topologie T. Remarquons encore que pour E donné, les espaces $P(\Omega_1, E)$ correspondants aux diverses parties de Ω sont essentiellement distincts, car chacun d'eux est défini par celles des fonctions du type $\frac{x}{z-z_0}$ qu'il «contient»: ce sont celles pour lesquelles $z_0 \in \complement\Omega_1$.

Le resultat final de ce paragraphe sera le

Théorème 2 bis. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de la sphère de Riemann, E un espace vectoriel localement convexe. Le dual de $P(\Omega_1, E)$ est alors encore donné par l'énoncé du théorème* 2.

Démonstration. On vérifie tout de suite, en vertu de la définition de la topologie T, que pour qu'une application linéaire u de $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe quelconque soit continue, il faut et il suffit que pour tout ouvert $O \supset \Omega_1$, l'application composée $u \circ \psi_{O,\Omega_1}$ soit continue. Il resulte alors du théorème 2 que la forme linéaire definie par une $\bar{g} \in P(\Omega_2, E')$ ayant localement une image équicontinue, est continue. De plus, la proposition 1 montre encore que l'application qui à $\bar{g}$ fait correspondre la forme linéaire sur $P(\Omega_1, E)$ qu'elle définit, est linéaire et *biunivoque*. Reste à montrer que toute forme linéaire continue u sur $P(\Omega_1, E)$ peut s'obtenir ainsi. Soit K un compact $\subset \Omega_2$, O son complémentaire, $u \circ \psi_{O,\Omega_1}$ est alors une forme linéaire continue sur $P(O, E)$, elle provient donc (théorème 2) d'une $\overline{g_K} \in P(K, E')$ bien déterminée. On vérifie aussitôt que si $K_1 \subset K_2$ sont deux compacts contenus dans Ω_2, alors $\overline{g_{K_1}}$ est la restriction de $\overline{g_{K_2}}$ à K_1 (car cette restriction définit bien la forme $u \circ \psi_{O_1,\Omega_1}$ sur $P(O_1, E)$). Il suffit maintenant que nous demontrions l'existence d'une fonction holomorphe $g(z)$ sur un ouvert $U \supset \Omega_2$, à valeurs dans E', ayant localement une image équicontinue, et telle que pour tout compact $K \subset \Omega_2$, la «restriction» de g à K soit $\overline{g_K}$. Car alors u sera bien la forme linéaire définie par l'élement de $P(\Omega_2, E')$ défini par g, comme il resulte trivialement des définitions. — L'existence d'une telle g, évidente dans le cas où Ω_2 est ouvert, donc Ω_1 fermé, nécessite une démonstration spéciale dans le cas général. Notons d'abord qu'il est inutile de supposer que g ait localement une image équicontinue. Car s'il n'en était pas ainsi, comme pour tout $\xi \in \Omega_2$, $\overline{g_\xi}$ a localement une image équicontinue, donc provient d'une $g_\xi(z)$ holomorphe définie dans un voisinage ouvert U_ξ de ξ, telle que $g_\xi(U_\xi)$ soit partie équicontinue de E' — en restreignant g à la réunion des U_ξ, la propriété voulue sera vérifiée. Nous sommes donc en définitive ramené à établir le lemme suivant, qui nous sera encore utile par ailleurs:

Lemme 1. *Soit A une partie de Ω, non vide et distincte de Ω, F un espace vectoriel localement convexe. Supposons que pour tout compact $K \subset A$, on se soit donnée une $\overline{g_K} \in P(K,F)$ de telle façon que $K_1 \subset K_2$ implique que $\overline{g_{K_1}}$ soit la restriction de $\overline{g_{K_2}}$ à K_1. Alors il existe une fonction holomorphe $g(z)$ définie dans un ouvert $U \supset A$, telle que pour tout compact $K \subset A$, $\overline{g_K}$ soit la restriction de g à K.*

Il revient évidemment au même de dire que pour tout $\xi \in A$, $\overline{g_\xi}$ est la restriction de g à ξ. Pour tout $\xi \in A$, soit g_ξ un représentant de $\overline{g_\xi}$ défini sur un voisinage U_ξ de ξ. Montrons qu'il existe un voisinage $V_\xi \subset U_\xi$ tel que $\eta \in V_\xi \cap A$ implique que $\overline{g_\eta}$ soit la restriction de g_ξ à η. Autrement en effet, il existerait une suite $(\xi_i)_i$ d'éléments de $U_\xi \cap A$ tendant vers ξ, et telle que l'on ait $\overline{g_{\xi_i}} \neq$ restriction de g_ξ à ξ_i. Mais soit alors K le compact réunion de ξ et des ξ_i, et g_K un représentant de $\overline{g_K}$ défini dans un voisinage U de K. La restriction de g_K à ξ étant $\overline{g_\xi}$, g_K et g_ξ coïncident dans un voisinage V de ξ, et pour $\xi_i \in V$, $\overline{g_{\xi_i}}$ est d'après l'hypothèse la restriction de g_K à ξ_i, donc aussi celle de g_ξ, ce qui implique contradiction.

Par suite, pour tout $\xi \in A$, existe un $r_\xi > 0$ et un représentant $g_\xi(z)$ de $\overline{g_\xi}$ défini dans le cercle V_ξ des z tels que $\| z - \xi \| < r_\xi$, de telle sorte que $\eta \in V_\xi \cap A$ implique que $\overline{g_\eta}$ est la restriction de g_ξ à η. (Pour commodité, nous posons $\| z - \xi \| =$ distance des points z, ξ lorsque Ω est supposé plongé dans $\boldsymbol{R}^3$ de la façon usuelle.) Soit alors W_ξ le cercle $\| z - \xi \| < \frac{1}{2} r_\xi$, il est immédiat que si ξ, $\eta \in A$, g_ξ et g_η coïncident dans $W_\xi \cap W_\eta$. Il existe par suite une fonction holomorphe dans $U = \bigcup_{\xi \in A} W_\xi$ qui prolonge les g_ξ, et le lemme est démontré.

Le théorème 2 bis se trouve par là complètement établi. Nous aurons encore besoin par la suite du resultat plus précis suivant:

Proposition 2 bis. *Pour qu'une partie du dual de $P(\Omega_1, E)$ soit équicontinue, il faut et il suffit qu'elle provienne d'un ensemble A de fonctions holomorphes définis dans un même voisinage U de Ω_2, tel que pour tout compact $K < U$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ soit une partie équicontinue de E'.*

Cette proposition se déduisant de la proposition 2 analogue exactement comme le théorème 2 bis se déduit du théorème 2, nous nous dispensons d'en répéter la démonstration. Notons seulement qu'on est ramené à établir une forme plus générale du lemme précédent, relative au cas de la donnée simultanée de divers systèmes $(\overline{g_K})_K$, sans que d'ailleurs rien dans la démonstration soit changé.

§ 5. Structure des application linéaires bornées d'espaces $P(\Omega_1, E)$.

1. Le théorème général. Une application linéaire d'un espace localement convexe H dans un autre F sera dite bornée, si elle transforme un voisinage convenable de l'origine dans H en une partie bornée de F. Une telle application est à fortiori continue. D'ailleurs, si H *ou* F est normable, toute application linéaire continue de H dans F est bornée (car dans le premier cas, elle transforme une *boule* de H dans une partie bornée de F, et dans le second cas l'image inverse d'une *boule* de F est un voisinage de l'origine dans H); mais c'est là un fait special à ce cas: l'application identique d'un espace vectoriel localement convexe sur lui-même est bornée si et seulement si il admet un voisinage borné de l'origine, c'est à dire s'il est normable. Mais rappelons encore le cas important bien connu suivant: si H est un espace $(\mathfrak{F})$, et si F est le dual faible G' d'un espace $(\mathfrak{F})$ G, alors toute application linéaire continue de H dans F est bornée (et à fortiori continue même si on munit $F = G'$ de la topologie forte). Le plus souvent, on énonce ce resultat sous la forme équivalente: toute forme bilinéaire sur le produit $H \times G$ de deux espaces $(\mathfrak{F})$, qui est continue par rapport à chaque facteur, est continue. Un résultat analogue vaut pour les formes bilinéaires sur le produit de deux duals E', F' d'espaces $(\mathfrak{F})$ E, F (c. f. [4] § 14), résultat qu'on peut énoncer ainsi: toute application faiblement continue de E' dans F est bornée pour les topologies fortes.

Dans ce paragraphe nous déterminons les applications linéaires bornées d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe F complet quelconque. Si donc F est un espace de Banach; ou si Ω_1 est ouvert, E un espace $(\mathfrak{F})$ et F un dual d'espace $(\mathfrak{F})$ — nous obtiendrons *toutes* les applications linéaires continues de $P(\Omega_1, E)$ dans F. Mais il n'en sera plus ainsi dans le cas général, et dans *aucun* cas nous n'obtenons ainsi *tous* les *endomorphismes* de l'espace $P(\Omega_1, E)$ — car cet espace n'est jamais normable.

Nous aurons encore besoin d'une généralisation de l'accouplement entre $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Omega_2, E')$ construit dans le paragraphe précédent. Soient E_1 et E_2 deux espaces localement convexes, B une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans un troisième espace localement convexe F, continue par rapport à chaque facteur. On suppose que dans F l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte, de façon à permettre l'intégration de fonctions continues à valeurs dans F. Soient enfin Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de Ω. Alors pour $f \in P(\Omega_1, E_1)$, $\bar{g} \in P(\Omega_2, E_2)$, on pose

$$B(f, \bar{g}) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma B(f(\xi), g(\xi))\, d\xi \tag{1}$$

en précisant comme dans le § 3 la signification du deuxième membre. Pour simplifier l'exposé, nous supposons dans toute la suite que E_1 (qui deviendra plus bas E) satisfait à la condition a) de la remarque 4 du § 2, condition qui assure l'holomorphie de la fonction sous le signe somme. Cette condition n'est pas plus essentielle dans le théorème 3 qui suit que dans le théorème 2, mais mettra peut-être le lecteur plus à l'aise.

Supposons maintenant l'accouplement B séparant dans E_2, i. e. que $B(x_1, x_2) = 0$ pour tout $x_1 \in E_1$ implique $x_2 = 0$. Alors on montre exactement comme dans le § 4 que l'accouplement entre $P(\Omega_1, E_1)$ et $P(\Omega_2, E_2)$ est séparant dans ce deuxième espace.

Ces considérations permettent de construire des applications linéaires de $P(\Omega_1, E)$ dans F, puisque pour $\bar{g}$ donnée l'application $f \to B(f, \bar{g})$ est linéaire. On obtient manifestement le plus grand choix possible d'applications linéaires en prenant $E_2 = \mathfrak{L}_s(E_1, F)$ espace de toutes les applications linéaires continues de E_1 dans F, muni de la topologie de la convergence simple, avec l'accouplement naturel $B(x, u) = u \cdot x$ pour $x \in E$, $u \in \mathfrak{L}_s(E, F)$ (désormais, nous remplaçons E_1 par E). Sous ces conditions, si $f \in P(\Omega_1, E)$, $\bar{L} \in P(\Omega_2, \mathfrak{L}_s(E, F))$, nous écrirons la formule (1) sous la forme

$$\bar{L} \cdot \bar{f} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma L(\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

D'après ce qui précède, on obtient ainsi une application linéaire *biunivoque* de $P(\Omega_2, \mathfrak{L}_s(E, F))$ dans l'espace de toutes les applications linéaires de $P(\Omega_1, E)$ dans F. Comme nous l'avons annoncé, on n' obtient en général pas ainsi toutes les applications linéaires continues, mais du moins les applications linéaires bornées lorsque E est complet. On a en effet le

Théorème 3. *Soient E et F deux espaces localement convexes, on suppose que F est complet, et que dans E l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte. Soient Ω_1 et Ω_2 deux parties complémentaires non vides de la sphère de Riemann. Alors les applications linéaires bornées de $P(\Omega_1, E)$ dans F correspondent biunivoquement, par la formule* (2), *aux fonctions holomorphes locales $\bar{L}$ sur Ω_2 à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, qui s'annulent à l' ∞ si $\infty \in \Omega_2$, et satisfont à l'hypothèse qui suit: il existe un représentant L de $\bar{L}$ défini dans un voisinage U_2 de Ω_2, et un borné A dans F, tels que pour tout compact $K < U_2$ existe un voisinage V_K de O dans E, tel que $\bigcup_{u \in L(K)} u(V_K) < A$.*

Remarques. L'hypothèse supplémentaire sur $\bar{L}$ signifie aussi que si on considère l'espace normé $F_A = \boldsymbol{C} \cdot A$ engendré par A — muni de la topologie définie par la «boule» A — (il est évidemment possible de supposer A convexe cerclé fermé), alors $L(K)$ est une partie équicontinue de l'espace $\mathfrak{L}_s(E, F_A)$ pour tout compact $K < U_2$; donc, si on veut, que L a localement une image équicontinue, en tant qu'application dans $\mathfrak{L}_s(E, F_A)$. Cette hypothèse sera d'ailleurs superflue dans le cas important où E est un espace $(\mathfrak{F})$ et F un espace de Banach ou un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, car alors toute partie bornée de $\mathfrak{L}_s(E, F)$ applique un voisinage de l'origine dans E en une même partie bornée de F (ce qui est une forme renforcée bien connue d'un resultat rappelé au début de ce paragraphe). — Remarquons enfin que dans tous les cas il resulte de la remarque 2 du § 2 que $L(\xi)$ sera application holomorphe *en tant* qu'application dans l'espace $\mathfrak{L}_b(E, F_A)$ muni de la topologie de la convergence bornée (à fortiori, c'est une application holomorphe dans l'espace $\mathfrak{L}_b(E, F)$). Comme d'autre part une application *bornée* d'un espace $P = P(\Omega_1, E)$ dans F revient évidemment à une application *continue* de P dans un espace normé $C \cdot A$ [6]) (A partie convexe cerclée fermée de F), on voit qu'en fait l'énoncé du théorème 3 est relatif aux applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un *espace de Banach*. Une méthode de démonstration directe pour ce cas quand Ω_1 est ouvert avait été indiqué d'ailleurs au § 4, No 4. La démonstration suivante consiste à se ramener au cas du théorème 2 bis.

Démonstration du théorème 3. Remarquons d'abord que dire qu'une application linéaire u d'un espace P dans un espace F est bornée, signifie qu'il existe un ensemble A borné convexe cerclé fermé dans F tel que $n^{-1}(A)$ soit voisinage de l'origine dans P. Mais cela équivaut encore à dire que quand y' parcourt le polaire A^0 de A dans F', les formes linéaires $y' \circ u$ forment un ensemble équicontinu de formes linéaires sur E. En effet, toutes ces formes linéaires sont majorées en module par 1 sur $n^{-1}(A)$, la condition est donc nécessaire; elle est suffisante, car alors le polaire dans E de l'ensemble des formes $y' \circ u$ $(y' \in A^0)$ sera un voisinage de l'origine, or on vient de dire qu'il est contenu dans $n^{-1}(A)$.

Montrons alors en premier lieu que si $L(\xi)$ est comme dans l'énoncé du théorème 3, alors l'application linéaire qu'elle définit est bornée. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des formes linéaires $\bar{f} \to \langle \bar{L} \cdot \bar{f}, y' \rangle$ sur $P(\Omega_1, E)$ est borné quand y' parcourt le polaire A^0 du borné $A < F$ défini dans l'énoncé du théorème. Or on a

$$\langle \bar{L} \cdot \bar{f}, y' \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \langle L(\xi) \cdot f(\xi), y' \rangle \, d\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \langle f(\xi), {}^tL(\xi) \cdot y' \rangle \, d\xi$$

soit, en posant

$$g_{y'}(\xi) = {}^tL(\xi) \cdot y' \tag{3}$$

$$\langle \bar{L} \cdot \bar{f}, y' \rangle = \langle \bar{f}, \overline{g_{y'}} \rangle \tag{4}$$

où $\overline{g_{y'}}$ est l'élément de $P(\Omega_2, E')$ induit par $g_{y'}$. Pour prouver l'équicontinuité de l'ensemble des formes linéaires définies par les $g_{y'} \in P(U, E')$ quand y' parcourt A^0 il suffit (proposition 2 bis) de montrer que pour tout compact $K < U$, $\bigcup_{y' \in A^0} g_{y'}(K)$ est partie équicontinue de E'. En fait, nous allons voir qu'elle est contenue dans V_{K^0} (V_K étant défini comme dans l'énoncé). Il faut donc vérifier que $y' \in A^0$, $\xi \in K$ implique $g_{y'}(\xi) \in V_{K^0}$, i. e. $|\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle| \leqq 1$ pour tout $x \in V_K$. Mais par définition (3), on a $\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle = \langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle$ et par définition de V_K, on a $L(\xi) \cdot x \in A$ si $\xi \in K$, $x \in V_K$, d'où resulte bien l'inégalité voulue.

Supposons maintenant donnée une application linéaire bornée u de $P(\Omega_1, E)$ dans F, il existe donc un ensemble borné convexe cerclé fermé $A < F$ tel que ${}^tu(A^0)$ soit partie équicontinue du dual de $P(\Omega_1, E)$. Par suite (proposition 2 bis) les formes de ${}^tu(A^0)$ proviennent d'un ensemble B de fonctions holomorphes définies dans un même ouvert $U \supset \Omega_2$, à valeurs dans E', telles que pour tout compact $K < U$, l'ensemble $\bigcup_{g \in B} g(K)$ soit une partie équicontinue M_K de E'. D'ailleurs, en diminuant au besoin U, on peut supposer que U est réunion de cercles ouverts centrés sur les points de Ω_2. Soit alors $y' \in F'$, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda y' \in A^0$, donc ${}^tu(\lambda y')$ et par suite ${}^tu(y')$ lui-même provient d'une fonction holo-

---

[6]) On montre d'ailleurs que les espaces F_A sont complets si F l'est. En fait, il suffit même que les parties A bornées et fermées de F soient complètes. Il suffirait donc de faire cette hypothèse sur F dans l'énoncé du théorème 3.

morphe définie dans U. Mais en vertu de l'hypothèse faite sur U, cette fonction holomorphe est unique, car deux fonctions holomorphes dans U qui induisent les mêmes éléments de $P(\Omega_2, E')$ sont forcément identiques. Soit donc $g_{y'}$ la fonction holomorphe sur U qui correspond à la forme ${}^t u(y')$, il resulte aussitôt de ce qui précède que l'application $y' \to g_{y'}$ est application *linéaire* de F' dans $P(U, E')$ définie par

$$(5) \qquad \langle u(\bar{f}), y' \rangle = \langle \bar{f}, \overline{g_{y'}} \rangle$$

(où $\overline{g_{y'}}$ désigne l'élément de $P(\Omega_2, E')$ induit par $g_{y'}$); et de plus $y' \in A^0$ implique $g_{y'} \in B$. — Pour tout $\xi \in U$, $g_{y'}(\xi)$ est donc une application linéaire $l(\xi)$ de F' dans E'. Nous allons montrer plus bas qu'elle est faiblement continue, admettons le pour l'instant. Soit alors $L(\xi)$ la transposée de l'application $l(\xi)$. Montrons que conformément à l'enoncé du théorème 3, pour tout compact $K < U$ existe un voisinage V_K de 0 dans E tel que $\bigcup_{\xi \in K} L(\xi)(V_K) < A$. On prendra en effet $V_K = (M_K)^0$, il faut montrer que $\xi \in K$, $x \in (M_K)^0$, implique $L(\xi) \cdot x \in A$, i. e. $|\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle| \leqq 1$ pour tout $y' \in A^0$. Mais par définition

$$\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle = \langle x, g_{y'}(\xi) \rangle,$$

et par définition de M_K on a $g_{y'}(\xi) \in M_K$ si $\xi \in K$, $y' \in A^0$, d'où resulte bien l'inégalité voulue. — En particulier, pour tout $\xi \in U$, on a $L(\xi) \in \mathfrak{L}_s(E, F)$, montrons que l'application $\xi \to L(\xi)$ est bien holomorphe. Il suffit de montrer que pour tout $x \in E$ et $y' \in F'$, $\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle$ est fonction holomorphe, or on a bien $\langle L(\xi) \cdot x, y' \rangle = \langle x, g_{y'}(\xi) \rangle$.

Reste à voir que l'application linéaire $l(\xi)$ de F' dans E' est bien faiblement continue, donc que pour $x \in E$ donné, $\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle$ est forme linéaire sur F' provenant d'un élément de F. Mais quand y' parcourt A^0, l'ensemble des $g_{y'}(\xi)$ est une partie équicontinue de E', donc $\langle x, g_{y'}(\xi) \rangle$ reste borné sur A^0. C'est donc une forme linéaire *fortement continue* sur F', c'est à dire un élément du bidual F'' de F. Supposant fixé x une fois pour toutes, nous désignons par $h(\xi)$ cet élément de F''. Cet $h(\xi)$ est application faiblement holomorphe de U dans F'', puisque par définition on a

$$(6) \qquad \langle h(\xi), y' \rangle = \langle x, g_{y'}(\xi) \rangle \qquad \text{pour } y' \in F'.$$

Nous voulons montrer que $h(\xi)$ prend en fait ses valeurs dans F. Notons d'abord que $h(\xi)$ est même holomorphe quand on munit F'' de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de F' (topologie qui induit sur F la topologie propre de F). En effet, si $\ddot{A} = A^{00}$ désigne le bipolaire de A *dans* F'', il est immédiat de vérifier que pour tout compact $K < U$, $h(K)$ est contenu dans $\lambda\ddot{A}$ pour un $\lambda > 0$ convenable, d'où suit (§ 2, remarque 2) que h est application holomorphe dans l'espace $C \cdot \ddot{A}$ engendré par $\ddot{A}$, et muni de la topologie définie par la «boule» $\ddot{A}$. A fortiori, $\ddot{A}$ étant manifestement une partie bornée de F'', $h(\xi)$ sera application holomorphe dans F''. — Utilisons maintenant le fait que U est réunion de cercles U_η centrés sur les points η de Ω, il suffit de montrer que dans chaque U_η, h est application *dans* F. Prenons $\eta \neq \infty$ pour fixer les idées. F étant complet donc sous-espace *fermé* de F'', il suffit de montrer que $h^{(n)}(\eta) \in F$ pour tout entier $n \geqq 0$. Mais si $y' \in F'$, on a

$$\langle h^{(n)}(\eta), y' \rangle = \frac{d^n}{d\eta^n} \langle h(\eta), y' \rangle = \frac{d^n}{d\eta^n} \langle x, g_{y'}(\eta) \rangle = \langle x, g_{y'}^{(n)}(\eta) \rangle.$$

La formule (2) du § 4 donne alors

$$\langle h^n(\eta), y' \rangle = \langle \frac{n!\, x}{(z-\eta)^{n+1}}, \overline{g_{y'}} \rangle_z,$$

soit en vertu de (5):

$$\langle h^{(n)}(\eta), y' \rangle = \langle u_z\left(\frac{n!\, x}{(z-\eta)^{n+1}}\right), y' \rangle \text{ d'où } h^{(n)}(\eta) = u_z\left(\frac{n!\, x}{(z-\eta)^{n+1}}\right) \in F.$$

Bien entendu, la démonstration analogue vaut si $\eta = \infty$, en faisant une inversion $z \to 1/z$ et en appliquant la formule (3) du § 4. Le théorème 3 est ainsi démontré.

Remarque 1. Il resulte de la démonstration du théorème 3 que si u est une application linéaire de $P(\Omega_1, E)$ dans F qui transforme un voisinage de l'origine en une partie bornée B de F, le borné A qui figure dans l'énoncé du théorème 3 peut être pris identique à B. Cela resulte d'ailleurs aussi directement du théorème 3 appliqué aux applications linéaires bornées dans $\boldsymbol{C} \cdot B$.

Remarque 2. Nous dirons qu'un ensemble M d'applications linéaires d'un espace localement convexe P dans un autre F est *uniformément borné*, s'il existe un voisinage V de l'origine dans P tel que $\bigcup_{u \in M} u(V)$ soit partie bornée de F. Nous laissons alors au lecteur le soin de se convaincre de la validité de l'énoncé suivant généralisant le théorème 3:

Les ensembles uniformément bornés d'applications linéaires de $P(\Omega_1, E)$ dans F sont ceux qui proviennent d'un ensemble (L_i) d'applications holomorphes $L_i(\xi)$ définies dans un même voisinage U de Ω_2, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, et telles que pour tout compact $K \subset U$, l'ensemble des $L_i(\xi)$ ($\xi \in K$, i quelconque) soit partie uniformément bornée de $\mathfrak{L}_s(E, F)$.

2. Autres théorèmes de structure d'applications linéaires bornées, et exemples. Pour établir le théorème 3, nous nous sommes ramenés par transposition au problème facile de déterminer certaines applications linéaires de F' dans $P(\Omega_2, E')$. Enonçons dans cet ordre d'idées les deux propositions suivantes, dont la démonstration est évidente:

Proposition 3. *Si O est une partie ouverte non vide de Ω distincte de Ω, E et G deux espaces localement convexes, alors les applications linéaires continues de G dans $P(O, E)$ correspondent biunivoquement aux applications holomorphes $L(\xi)$ de O dans $\mathfrak{L}_s(G, E)$, s'annulant à l'infini si $\infty \in O$, et telles que pour tout compact $K \subset O$, $L(K)$ soit partie équicontinue de $\mathfrak{L}_s(G, E)$, par la formule*

$$u(y)(\xi) = L(\xi) \cdot y \tag{7}$$

(notons que si G est «tonnelé», i. e. toute partie bornée de son dual équicontinue — c. f. [3] — alors toute partie bornée de $\mathfrak{L}_s(G, E)$ est équicontinue, de sorte que la restriction faite sur $L(\xi)$ est alors inutile).

Proposition 3 bis. *Soit $\Omega_1 \neq \Omega$ une partie non vide de Ω, E et G deux espaces localement convexes, u une application linéaire de G dans $P(\Omega_1, E)$ appliquant un voisinage V de l'origine en une partie de $P(\Omega_1, E)$ qui provient d'une partie bornée A d'un $P(O, E)$, où O est un voisinage ouvert de Ω_1.* (A borné signifie que pour tout compact $K \subset O$, $\bigcup_{f \in A} f(K)$ est partie bornée de E). *Alors il existe un voisinage U de Ω_1 et une application holomorphe $L(\xi)$ de U dans $\mathfrak{L}_s(G, E)$, s'annulant au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$, telle que pour tout compact $K \subset U$, $\bigcup_{\xi \in K} L(\xi) \cdot (V)$ soit partie bornée de E, et qu'on ait*

$$u(y) = \text{restriction à } \Omega_1 \text{ de } \xi \to L(\xi) \cdot y. \tag{7 bis}$$

(Ici, on prend pour U une réunion de cercles ouverts centrés sur les points de Ω_1, et contenu dans O.) Cette proposition est surtout intéressante lorsque toute partie bornée de $P(\Omega_1, E)$ est contenue dans l'image canonique d'une partie bornée d'un $P(O, E)$, auquel cas on obtient *toutes* les applications linéaires bornées de G dans $P(\Omega_1, E)$. Nous verrons plus bas que c'est notamment le cas si E est un espace de Banach, ou plus généralement un sous-espace fermé d'un dual fort d'espace ($\mathfrak{F}$) (prop. 12).

Comme application de ce qui précède, déterminons par exemple sous des conditions générales les endomorphismes *bornés* d'un espace $P(\Omega_1, E)$ ou plus généralement les applications linéaires bornées d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace $P(\Sigma_1, F)$, où Σ_1 est une autre partie de Ω, non vide et distincte de Ω, F un deuxième espace localement convexe. On suppose soit que Σ_1 est ouvert, soit que F est un sous-espace vectoriel fermé d'un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$, et de toutes façons nous supposons F complet, pour que $P(\Sigma_1, F)$ soit complet (c. f. § 8, prop. 15). Soit donc u une application linéaire appliquant un voisinage de l'origine de $P(\Omega_1, E)$ dans une partie bornée A de $P(\Sigma_1, F)$. On peut trouver un voisinage V_1 de Σ_1, réunion de cercles ouverts centrés sur les points de Σ_1 pour que la restriction de $P(V_1, F)$ à $P(\Sigma_1, F)$ soit application biunivoque, et une partie bornée B de $P(V_1, F)$, telle que A soit l'image canonique de B. B étant bornée, pour tout compact $K_1 < U_1$, $\bigcup_{f \in B} f(K) = M_{K_1}$ est une partie bornée de F. — D'après le théorème 3 et la remarque 1 qui le suit, à u correspond une application holomorphe $L(\xi)$ d'un voisinage U_2 de Ω_2 dans $\mathfrak{L}_s(E, P(\Sigma_1, F))$, telle que pour tout compact $K_2 < U_2$, existe un voisinage W_{K_2} de l'origine dans E tel que $\bigcup_{\xi \in K_2} L(\xi) \cdot (W_{K_2}) < A$. En particulier, si $\xi \in K_2$, $L(\xi)$ étant une application linéaire de E dans $P(\Sigma_1, F)$ appliquant le voisinage W_{K_2} de l'origine dans la partie bornée A, il lui correspond (proposition 3 bis) une application holomorphe $\eta \to L(\xi, \eta)$ de V_1 dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, telle que pour tout compact $K_1 < V_1$, on ait $\bigcup_{\eta \in K_1} L(\xi, \eta) \cdot W_{K_2} \in M_{K_1}$ et que l'on ait

$$L(\xi) \cdot x = \text{restriction à } \Sigma_1 \text{ de } \eta \to L(\xi, \eta) \cdot x.$$

On aura de plus $L(\xi, \eta) = 0$ si $\xi = \infty \in \Omega_2$ ou $\eta = \infty \in \Sigma_1$. D'autre part, $L(\xi, \eta)$ est holomorphe dans $U_2 \times V_1$, ce qui signifie: pour tout $x \in E$, $L(\xi, \eta) \cdot x$ est application holomorphe de $U_2 \times V_1$ dans F. Il revient en effet au même de dire que l'application $\xi \to L(\xi, \eta) \cdot x$ de U_2 dans $P(V_1, F)$ est holomorphe. Soit donc $\xi_0 \in U_2$, et soit K_2 un voisinage compact de ξ_0 dans U_2; comme l'application $\xi \to L(\xi) \cdot x$ de U_2 dans $P(\Sigma_1, F)$ est holomorphe et applique K_2 dans une partie λA $(\lambda > 0)$, elle est même holomorphe au voisinage de ξ_0 en tant qu'application dans l'espace normé $\boldsymbol{C} \cdot A$ muni de la topologie définie par la «boule» A (§ 2, remarque 2). Par suite $\xi \to L(\xi) \cdot x$ est application holomorphe de U_2 dans $\boldsymbol{C} \cdot A$. Remarquons maintenant que l'application linéaire qui à toute $\tilde{f} \in \boldsymbol{C} \cdot A$ fait correspondre la $f \in P(V_1, F)$ dont elle est l'image, est continue, car elle transforme la boule A dans le borné B. Mais l'application $\xi \to L(\xi, \eta) \cdot x$ est l'application composée de l'application holomorphe $\xi \to L(\xi) \cdot x$ et de l'application linéaire précédente, elle est donc holomorphe.

Si nous explicitons maintenant u à partir de $L(\xi, \eta)$, nous trouvons aussitôt, pour une $\tilde{f} \in P(\Omega_1, E)$ ayant un représentant f défini dans le voisinage U_1 de Ω_1:

$$(8) \qquad u \cdot \tilde{f} = \text{restriction à } \Sigma_1 \text{ de } \eta \to \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma L(\xi, \eta) \cdot f(\xi)\, d\xi$$

où le contour Γ satisfait aux conditions usuelles relativement aux voisinages ouverts U_1 et U_2 de Ω_1, Ω_2. Comme nos raisonnements étaient évidemment réversibles, on obtient en définitive l'énoncé:

Proposition 4. *Soient (Ω_1, Ω_2) et (Σ_1, Σ_2) deux couples de parties complémentaires non vides de Ω, E et F deux espaces localement convexes, on suppose que Σ_1 est ouvert et F complet, ou que F est un sous-espace fermé d'un dual fort d'espace $(\mathfrak{F})$. Alors toute application linéaire bornée u de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Sigma_1, F)$ est définie grâce à la formule* (8) *ci-dessus, par une fonction holomorphe $L(\xi, \eta)$ dans le produit d'un voisinage ouvert U_2 de Ω_2 par un voisinage ouvert V_1 de Σ_1, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, ayant localement une image uniformément bornée, et telle que $L(\xi, \eta) = 0$ si $\xi = \infty \in \Omega_1$ ou si $\eta = \infty \in \Sigma_1$. Réciproquement, pour toute fonction holomorphe $L(\xi, \eta)$ telle que ci-dessus, la formule* (8) *définit une application linéaire* *bornée de $P(\Omega_1, E)$ dans $P(\Sigma_1, F)$. Deux telles fonctions holomorphes définissent la même application linéaire si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de $U_2 \times V_1$.*

Supposons pour simplifier que E et F sont tonnelés, alors (théorème 2 bis) les duals de $P(\Omega_1, E)$ et $P(\Sigma_1, F)$ sont respectivement $P(\Omega_2, E')$ et $P(\Sigma_2, F')$. Le lecteur vérifiera alors aisément que l'application linéaire transposée de l'application linéaire définie par la formule (8) est donnée par la formule analogue à la formule (8), où le «noyau» $L(\xi, \eta)$ est remplacé par le «noyau transposé» $(\eta, \xi) \to {}^tL(\xi, \eta)$

$$(9) \qquad {}^tu \cdot \bar{h} = \text{restriction à } \Omega_2 \text{ de } \xi \to \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma {}^tL(\xi, \eta) \cdot h(\eta)\, d\eta.$$

Remarquons encore que dans certains cas, par exemple si on se borne à étudier les endomorphismes bornés de l'espace $P(O)$ (O, partie ouverte de Ω), la formule intégrale (8) permet de développer une théorie spectrale d'un opérateur u toute analogue à la théorie de Fredholm. Cela peut être considéré comme une conséquence d'une théorie de Fredholm abstraite, que je publierai ailleurs.

§ 6. Détermination des applications linéaires continues quelconques d'espaces $P(\Omega_1, E)$.

1. Applications linéaires continues d'espaces $P(H, E)$, H compact. Reprenons la formule (2) du § 5

$$(1) \qquad L \cdot f = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma L(\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi.$$

En général, les applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1, E)$ dans un espace localement convexe F ne peuvent être définies toutes à l'aide des fonctions holomorphes locales sur Ω_2, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$. Pourtant, si Ω_1 est *fermé*, à la très élémentaire proposition 3 correspond ici la proposition «duale»

Proposition 5. *Soit $K \neq \Omega$ une partie compacte non vide de la sphère de Riemann Ω, E et F deux espaces localement convexes, on suppose que dans E et dans F l'enveloppe convexe cerclée fermée d'un compact est compacte. Alors les applications linéaires continues de $P(K, E)$ dans F s'identifient par la formule* (1) *aux applications holomorphes $L(\xi)$ de $O = \complement K$ dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, s'annulant au point ∞ si $\infty \in O$, et telles que pour tout compact $K_1 \subset O$, l'ensemble $L(K_1)$ soit une partie équicontinue de $\mathfrak{L}_s(E, F)$.*

On vérifie d'abord que l'application linéaire u définie par une fonction holomorphe $L(\xi)$ dans O à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$ est continue si et seulement si la condition supplémentaire envisagée sur $L(\xi)$ dans l'énoncé est satisfaite. Il faut en effet exprimer que l'application transposée u' transforme toute partie équicontinue B de F' en une partie équicontinue du dual de $P(K, E)$, dual qui d'après le théorème 2 bis peut se plonger dans l'espace $P(O, E')$. Mais avec cette identification, la transposée u' est évidemment donnée par

$$u' \cdot y'(\xi) = {}^tL(\xi) \cdot y'$$

et en vertu de la proposition 2 bis, il reste à exprimer que pour tout compact $K_1 \subset O$, l'ensemble des ${}^tL(\xi) \cdot y'$ ($y' \in B$, $\xi \in K_1$) est partie équicontinue de E'. Mais cela signifie que quand ξ parcourt un compact $K_1 \subset O$, les ${}^tL(\xi)$ transforment toute partie équicontinue B de F' en une partie équicontinue de E', ce qui est une autre manière d'exprimer que l'ensemble des $L(\xi)$ ($\xi \in K_1$) est équicontinu.

Montrons enfin que toute application linéaire continue u de $P(K, E)$ dans F peut s'obtenir ainsi. En effet, considérons l'application transposée u', qui est une application linéaire de F' dans $P(O, E')$. Munissons E' de la topologie faible, alors $P(O, E'_f)$ a pour dual $P(K, E)$ (théoreme 2 bis) donc l'application u' est faiblement continue de F' dans

$P(O, E'_f)$, et par suite continue si on munit F' de la topologie de Mackey $\tau(F', F)$. Donc (proposition 3) elle est définie par la formule

$$u' \cdot y'(\xi) = l(\xi) \cdot y'$$

où $l(\xi)$ est une application holomorphe de O dans $\mathfrak{L}_s(F'_\tau, E'_f)$. De plus, le fait que u est continue, i. e. que u' transforme toute partie équicontinue B de F' en une partie équicontinue de $P(O, E')$, s'exprime encore comme ci-dessus par la condition que quand ξ parcourt un compact $K_2 < O$, l'ensemble des $l(\xi)$ transforme toute partie équicontinue de F' en une partie équicontinue de E', ce qui signifie aussi que les $l(\xi)$ sont transposées d'applications linéaires $L(\xi)$ de E dans F, équicontinues dans leur ensemble. Il est évident de plus que $L(\xi)$ est application holomorphe de O dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$. Enfin, u est bien l'application linéaire L définie par la formule (1); car on a déjà dit que la transposée de cette dernière est $y' \to {}^tL(\xi) \cdot y'$, c'est dire précisément u'.

2. Applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1)$ dans un espace complet F. Soit toujours Ω_1 une partie non vide de la sphère de Riemann Ω, distincte de Ω, E et F deux espaces localement convexes. Au § 4, nous avons déterminé les applications linéaires continues de $P(\Omega_2, E)$ dans F lorsque F est un espace de Banach: elles correspondent biunivoquement aux fonctions localement holomorphes L sur $\Omega_2 = \complement\Omega_1$, à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, s'annulant au point ∞ si $\infty \in \Omega_2$, et qui ont localement une image équicontinue. Nous allons en déduire une reprèsentation pour *toutes* les applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1)$ dans un espace F *complet quelconque*, à l'aide d'une généralisation adéquate de la notion de fonction holomorphe locale employée jusqu'ici.

Soit d'abord F un espace localement convexe séparé quelconque (pas nécessairement complet), $\mathfrak{B}$ un système fondamental de voisinages convexes cerclés fermés de l'origine dans F. Pour tout $V \in \mathfrak{B}$, soit F_V l'espace de Banach qu'on obtient en munissant F de la topologie définie par l'unique voisinage V, en passant à l'espace normé séparé correspondant (quotient de F par le sous-espace des $x \in F$ tels que $\lambda x \in V$ quel que soit $\lambda > 0$) et complétant ce dernier espace. Il y a une application linéaire continue canonique φ_V de F dans F_V, dont l'image est partout dense, d'où une application linéaire continue canonique $\varphi(x) = (\varphi_V x)_{V \in \mathfrak{B}}$ de F dans le produit topologique $\mathfrak{F} = \prod_{V \in \mathfrak{B}} F_V$ des espaces F_V; cette application est un isomorphisme vectoriel topologique dans, de sorte que F s'identifie à un sous-espace vectoriel F_0 de $\mathfrak{F}$. — Si $V, W \in \mathfrak{B}$, $V < W$, on a aussi une application linéaire continue naturelle $\varphi_{V,W}$ de F_V dans F_W définie par la condition $\varphi_{V,W}\, \varphi_V x = \varphi_W x$ pour $x \in F$. Par suite, si $X = (X_V)_{V \in \mathfrak{B}} \in F_0$, on a

$$(2) \qquad \varphi_{V,W} X_V = X_W \qquad (V < W).$$

Par continuité, on a donc $\varphi_{V,W} X_V = X_W$ dès que $X \in \overline{F_0}$. Montrons que les relations (2) caractérisent les éléments de $\overline{F_0}$, donc qu'on a le

Lemme 1. *Si F est un espace localement convexe séparé, $\mathfrak{B}$ un système fondamental de voisinages de l'origine, alors, avec les notations précédentes, pour que l'élément $X = (X_V)_{V \in \mathfrak{B}}$ de $\mathfrak{F} = \prod_{V \in \mathfrak{B}} F_V$ appartienne à l'adhérence de l'image canonique F_0 de F dans $\mathfrak{F}$, il faut et il suffit que pour $V, W \in \mathfrak{B}$, $V < W$, on ait* (2).

Corollaire. *La relation* (2) *caractérise les éléments de F_0 si F est complet* (*et dans ce cas seulement*).

En effet, $\mathfrak{F}$ étant complet et F_0 isomorphe à F, F est complet si et seulement si F_0 est sous-espace *fermé* de $\mathfrak{F}$.

La démonstration très élémentaire de ce lemme vaudrait d'ailleurs pour démontrer un résultat analogue pour des structures uniformes quelconques. — Il reste à démontrer seulement que si on a (2) alors tout voisinage de X rencontre F_0. Mais un voisinage de X dans $\mathfrak{F}$ est défini comme l'ensemble des $Y = (Y_V)_{V \in \mathfrak{V}}$ tels que $\| Y_{V_i} - X_{V_i} \| \leqq \varepsilon$ pour tout i, où $\varepsilon > 0$ et où les V_i $(1 \leqq i \leqq n)$ forment une suite finie d'éléments de $\mathfrak{V}$. Il faut donc montrer qu'il existe $x \in F$ tel que $\| X_{V_i} - x_{V_i} \| \leqq \varepsilon$ pour tout i. Mais soit $V_0 \in \mathfrak{V}$ tel que $V_0 < \bigcap_i V_i$, on a par hypothèse $X_{V_i} = \varphi_{V_0, V_i} X_{V_0}$, et aussi $x_{V_i} = \varphi_{V_0, V_i} x_{V_0}$, d'où

$$X_{V_i} - x_{V_i} = \varphi_{V_0, V_i}(X_{V_0} - x_{V_0}).$$

Comme $\| \varphi_{V_0, V_i} \| \leqq 1$, il suffit qu'on ait $\| X_{V_0} - x_{V_0} \| \leqq \varepsilon$, ce qui est possible, l'image de F par φ_{V_0} dans F_{V_0} étant partout dense.

Le lemme précédent permet, si F est complet, de ramener dans une certaine mesure la détermination des applications linéaires continues d'un espace localement convexe P dans F, à la détermination de ses applications linéaires continues dans les espaces F_V. En effet, une application linéaire continue de P dans F peut être regardée comme une application linéaire continue de P dans $\mathfrak{F} = \prod_{V \in \mathfrak{V}} F_V$, et à ce titre s'identifie à une famille $(u_V)_{V \in \mathfrak{V}}$ d'applications linéaires continues de P dans les F_V. Réciproquement, un tel système définit une application linéaire continue de P qui est une application dans F si et seulement si pour tout $f \in P$, on a $(u_V \cdot f)_{V \in \mathfrak{V}} \in F$, i. e. d'après le lemme qui précède si et seulement si $V, W \in \mathfrak{V}$, $V < W$ implique $\varphi_{V, W}(u_V \cdot f) = u_W \cdot f$, ou enfin si on a

$$\varphi_{V, W} \circ u_V = u_W \quad \text{pour } V < W. \tag{3}$$

Supposons maintenant que P soit un espace $P(\Omega_2, E)$. Alors la donnée d'une application linéaire continue u_V de $P(\Omega_2, E)$ dans F_V revient à la donnée d'une fonction holomorphe locale $\overline{L_V}$ sur Ω_1 à valeurs dans $\mathfrak{L}_s(E, F)$, ayant localement une image équicontinue, nulle au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$. La condition de cohérence (3) s'écrit ici

$$\overline{L_W} = \varphi_{V, W} \circ \overline{L_V} \quad \text{pour } V < W \tag{4}$$

en définissant de façon évidente le symbole $\varphi_{V, W} \circ \overline{L_V}$ (dont un représentant est $\xi \to \varphi_{V, W} L_V(\xi)$, si $L_V(\xi)$ est un représentant de $\overline{L_V}$).

Pour raccourcir un peu ce déjà trop long exposè, limitons nous maintenant au cas, le plus intéressant d'ailleurs, où $E = C$, alors $\mathfrak{L}_s(E, F_V)$ s'identifie à F_V, et la formule (4) s'interprète en regardant $\varphi_{V, W} \circ \overline{L_V}$ comme un élément de $P(\Omega_2, E_W)$, dont un représentant est $\xi \to \varphi_{V, W}(L_V(\xi))$, $L_V(\xi)$ étant un représentant de $\overline{L_V}$. Ceci conduit à poser la

Définition. Soit Ω_1 une partie non vide d'un espace topologique Ω, F un espace vectoriel localement convexe, $\mathfrak{V}_0$ le système de ses voisinages de l'origine convexes, cerclés et fermés. On appelle *fonction locale au sens large* sur Ω_1, à valeurs dans F, tout système $(\overline{L_V})_{V \in \mathfrak{V}_0}$ de fonctions locales sur Ω_1, à valeurs respectivement dans les espaces F_V définis plus haut, qui satisfasse aux conditions de cohérence (4). Si Ω est une variété holomorphe, on appelle *fonction holomorphe locale au sens large* sur Ω_1, à valeurs dans F, une fonction locale au sens large $(\overline{L_V})_V$ telle que les $\overline{L_V}$ soient des fonctions holomorphes locales.

Si $L = (\overline{L_V})_V$ est une fonction locale au sens large sur Ω_1, il y a lieu de considérer pour tout $\xi \in \Omega_1$ l'élément $(\overline{L_V(\xi)})_{V \in \mathfrak{V}_0}$, qui est un élément du complété de F en vertu du lemme 1 — donc un élément de F si F est complet — qu'on note $L(\xi)$. — Par la suite nous supposons que Ω est la sphère de Riemann, et nous désignons par $Q(\Omega_1, F)$ l'espace des fonctions holomorphes locales aux sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'annulant au point ∞ si $\infty \in \Omega_1$. Bien entendu, sur l'ensemble $Q(\Omega_1, E)$ il y a lieu de considérer la structure vectorielle induite par le produit des $P(\Omega_1, F)$ (pour $V \in \mathfrak{V}_0$) — il y aurait même lieu de considérer la topologie induite par le produit topologique, mais nous ne nous en servirons pas par la suite. De plus, on vérifie trivialement que l'espace $Q(\Omega_1, F)$ est isomorphe canoniquement à l'espace analogue qu'on construit en se bornant à un *système fondamental* $\mathfrak{B}$ de voisinages convexes cerclés fermés de l'origine dans F; de façon précise, la projection du produit $\prod_{V \in \mathfrak{B}_0} P(\Omega_1, F)$ sur le produit partiel $\prod_{V \in \mathfrak{B}} P(\Omega_1, F)$ induit un isomorphisme de $Q(\Omega_1, F)$ sur l'espace des élements du second produit qui satisfont à la condition de cohérence (4). Notons aussi dans cet ordre d'idées que si F est normé complet, ou Ω_1 ouvert, alors $P(\Omega_1, F)$ et $Q(\Omega_1, F)$ peuvent s'identifier de façon naturelle. Mais dans le cas général (notamment si on suppose que F est un espace $(\mathfrak{F})$) on a seulement un isomorphisme naturel de $P(\Omega_1, E)$ *dans* $Q(\Omega_1, F)$, qui n'est pas forcément un isomorphisme sur.

Enfin, il y a encore lieu de remarquer que si $\infty \in \Omega_1$, F complet, alors pour une fonction holomorphe, locale au sens large sur Ω_1, $L = (\overline{L_V})_V$ donnée, et pour tout entier $n \geqq 0$, le système des $\overline{L}_V^{(n)}$ satisfait aux conditions de cohérence (4), c'est donc une fonction holomorphe locale au sens large sur Ω_1, qu'on désignera naturellement par $L^{(n)}$. On vérifie aussitôt que L est complètement déterminée quand on connait tous les $L^{(n)}(\xi)$, pour n entier $\geqq 0$ quelconque et $\xi \in \Omega_1$. D'ailleurs, même si $\infty \in \Omega_1$, on peut pour $\xi \in \Omega_1$, $\xi \neq \infty$, et tout entier $n \geqq 0$, considérer l'élément $L^{(n)}(\xi) = ((\overline{L}_V^{(n)}(\xi))_{V \in \mathfrak{B}_0} \in F$.

Les réflexions qui ont précédé la définition donnée plus haut permettent d'énoncer le

Théorème 4. *Soit $\Omega_1 \neq \Omega$ une partie non vide de la sphère de Riemann Ω, F un espace localement convexe complet. Alors les applications linéaires continues de $P(\Omega_1)$ dans F correspondent biunivoquement aux éléments de $Q(\Omega_2, F)$, — applications holomorphes locales au sens large $L = (\overline{L}_V)_V$ de $\Omega_2 = \complement\Omega_1$ dans F —, par la formule*

$$\varphi_V(u \cdot \bar{f}) = \overline{L_V} \cdot \bar{f} = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma L_V(\xi) \cdot f(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

(où f est un représentant de $\bar{f}$, L_V un représentant de $\overline{L_V}$, et où le contour Γ est défini comme usuellement).

Si u est l'application linéaire qui correspond à $L \in Q(\Omega_2, F)$, on a la formule

$$L^{(n)}(\xi) = u_z\left(\frac{n!}{(z-\xi)^{n+1}}\right) \quad \text{si } \xi \in \Omega_2,\ \xi \neq \infty,\ n \geqq 0, \tag{6}$$

qui détermine L à l'aide de u au moins dans le cas où $\infty \notin \Omega_2$, plus généralement si ∞ n'est pas point isolé de Ω_2. Pour vérifier (6), il suffit de vérifier qu'on a bien $\varphi_V L^{(n)}(\xi) = \varphi_V u_z\left(\frac{n!}{(z-\xi)^{n+1}}\right)$ pour tout $V \in \mathfrak{B}_0$, mais le premier membre est par définition $\overline{L}_V^{(n)}(\xi)$ et le second est d'après (5) égal à $\overline{L_V} \cdot \left(\frac{n!}{(z-\xi)^{n+1}}\right)$, on est donc ramené à la formule (6) dans le cas où F est un espace de Banach. Mais dans ce cas elle a été établie au cours de la démonstration du théorème 3, et peut d'ailleurs se déduire alors directement de la formule analogue: formule (2) du § 4. — Si $\infty \in \Omega_2$, il y a lieu de compléter la formule (6) par la formule analogue à la formule (3) du § 4, que nous n'écrirons pas.

3. Exemples d'applications holomorphes locales au sens large. Le théorème 4 n'aurait guère d'intérèt si dans des cas particuliers importants, la notion de fonction holomorphe au sens large ne pouvait s'interprèter simplement (d'ailleurs, le théorème 4 a été inspiré précisément par une représentation plus concrète des endomorphismes d'un espace $P(O)$ donnée par G. Köthe — c. f. [7]). Nous allons donc donner quelques exemples, relatifs à des espaces F de divers types particulièrement fréquents.

a) Soit F l'espace des fonctions complexes continues sur un espace localement compact M, muni de la topologie de la convergence compacte. On suppose M réunion d'une *suite* de compacts («dénombrable à l'infini» avec la terminologie de [2]). Alors les fonctions holomorphes au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux classes de fonctions complexes continues $f(z, t)$, holomorphes en z, définies dans des voisinages ouverts (variables) U de la partie $\Omega_1 \times M$ de l'espace topologique $\Omega \times M$; deux telles fonctions étant mises dans la même classe si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de $\Omega_2 \times M$, i. e. si elles définissent la même fonction locale sur $\Omega_2 \times M$ (c.f. § 4, No 2).

Démonstration. On voit immédiatement que M sera même réunion d'une suite *croissante* de compacts K_i, tels que tout compact $K \subset M$ soit contenu dans l'un des K_i. Alors un système fondamental de voisinages de l'origine dans F est la suite $(V_n)_n$, où pour tout entier $n > 0$, V_n désigne l'ensemble des $f \in F$ telles que $|f(K_n)| \leqq \frac{1}{n}$. Alors F_{V_n} s'identifie à l'espace $C(K_n)$ des fonctions continues sur K_n, comme il resulte immédiatement du théorème de Tychonoff.

Soit alors $f(z, t)$ une fonction complexe continue définie dans le voisinage U de $\Omega_1 \times M$, holomorphe en z. Pour tout n, il existe un voisinage ouvert U_n de Ω_1 tel que $U_n \times K_n \subset U$. En effet, soit $\xi \in \Omega_1$, on a $\{\xi\} \times K_n \subset U$, d'où aussitôt l'existence d'un voisinage U_ξ de ξ tel que $U_\xi \times K_n \subset U$ (car $\{\xi\} \times K_n$ est compact), il suffit alors de poser $U_n = \bigcup_{\xi \in \Omega_1} U_\xi$. Alors la restriction de $f(z, t)$ à $U_n \times K$ s'identifie à une application holomorphe de U_n dans $F_{V_n} = C(K_n)$ (§ 3, ex. a)) que nous désignerons par $L_n(z)$. Soit $\overline{L_n}$ la fonction holomorphe locale sur Ω_1 (au sens strict) qu'elle définit, il est immédiat de vérifier que le système des $\overline{L_n}$ vérifie les conditions de cohérence (4), et définit donc une fonction holomorphe locale au sens large sur Ω_1 à valeurs dans F. Il est immédiat de plus que cette fonction locale ne change pas si on change les U_n. Enfin, on vérifie immédiatement que si $f(z, t)$ et $g(z, t)$ sont des fonctions complexes continues, holomorphes en z, définies respectivement dans des voisinages ouverts U et V de $\Omega_2 \times M$, alors les fonctions holomorphes locales au sens large qu'elles définissent sont identiques si et seulement si f et g coïncident dans un voisinage convenable de $\Omega_2 \times M$.

Il reste donc à montrer que toute fonction holomorphe locale au sens large $L = (\overline{L_n})_n$ peut s'obtenir de la façon précédente. Mais pour tout n, $\overline{L_n}$ provient d'une fonction holomorphe définie dans un voisinage U_n de Ω_1, à valeurs dans $C(K_n)$, qui elle-même s'identifie (§ 3, ex. a)) à une fonction $f_n(z, t)$ continue holomorphe en z définie sur $U_n \times K$. Les U_n sont en partie arbitraire, montrons de proche en proche que, en les remplaçant au besoin par des ouverts U'_n plus petits, on peut supposer que la suite des U_n est décroissante et que $m > n$, $z \in U_m$, $t \in K_n$ implique $f_m(z, t) = f_n(z, t)$. Alors nous poserons $U = \bigcup_n U_n \times \overset{\circ}{K}_n$, c'est là un voisinage de $\Omega_1 \times M$, et si $(z, t) \in U$, on pourra poser sans ambiguïté $f(z, t) = f_n(z, t)$ pour $z \in U_n$, $t \in K_n$; la fonction $f(z, t)$ ainsi construite satisfera bien aux conditions voulues. — Pour déterminer à partir des suites $(U_n)_n$, $(f_n)_n$, une suite décroissante $(U'_n)_n$ d'ouverts satisfaisant aux hypothèses de cohérence posées ci-dessus, on commence par poser $U'_1 = U_1$, puis supposant construite la suite décroissante $(U'_i)_i$ jusqu'au rang n, de telle façon que pour $i \leqq n-1$, $z \in U'_{i+1}$, $t \in K_i$, on ait $f_i(z, t) = f_{i+1}(z, t)$, on poursuit la récurrence en notant que la condition de cohérence (3) entre $\overline{L_n}$ et $\overline{L_{o+1}}$ s'interprète en effet par l'existence d'un voisinage ouvert $U'_{n+1} \subset U_{n+1} \cap U'_n$ de Ω_1 tel que $z \in U'_{n+1}$, $t \in K_n$ implique $f_n(z, t) = f_{n+1}(z, t)$. Par là, notre assertion se trouve complètement démontrée.

b) Soit F l'espace $\mathfrak{E}(\bar{O})$ des fonctions indéfiniment différentiables sur l'adhérence d'un ouvert relativement compact $O \subset \boldsymbol{R}^m$, muni de la topologie de la convergence uniforme de la fonction variable et de chacune de ses dérivées. Alors les fonctions holomorphes locales sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux classes de fonctions $f(z, t)$ définies dans le produit d'un voisinage ouvert U de Ω_1 par $\bar{O}$, holomorphes en z, et telles que pour tout entier $n \geqq 0$, existe un voisinage $U_n \subset U$ de Ω_1, tel que les dérivécs partielles par rapport à t, d'ordre $\leqq n$, existent et soient continues dans $U_n \times \bar{O}$; deux telles fonctions $f(z, t)$, $g(z, t)$ étant mises dans la même classe si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de la partie $\Omega_1 \times \bar{O}$ de $\Omega \times \bar{O}$.

La démonstration de cet énoncé est toute analogue à la précédente. Ici une suite fondamentale de voisinages de l'origine dans F est $(V_n)_n$; où pour tout entier $n \geqq 0$, V_n désigne l'ensemble des $f \in F$ telles que $\| D^p f \|_\infty \leqq \frac{1}{n}$ pour tout indice de dérivation multiple p d'ordre $|p| \leqq n$. F_{V_n} s'identifie ici de façon naturelle à l'espace $\mathfrak{E}^{(n)}(\bar{O})$ des fonctions n fois continûment différentiables sur $\bar{O}$, muni de la convergence de la convergence uniforme de la fonction et de ses dérivées d'ordre $\leqq n$. Soit alors $f(z, t)$ une fonction telle que envisagée dans l'énoncé, on voit comme précédemment, en vertu ce fois-ci de § 3, ex. b), que cette fonction définit bien une fonction holomorphe locale au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, car pour tout n, la restriction de $f(z, t)$ à $U_n \times \bar{O}$ s'identifie à une application holomorphe $L_n(z)$ de U_n dans $\mathfrak{E}^{(n)}(\bar{O})$, et la condition de cohérence (4) est encore trivialement satisfaite. De plus, on vérifie trivialement que la fonction holomorphe locale au sens large ainsi définie sur Ω_1 ne dépend pas du choix plus particulier des U_n, et que deux fonctions $f(z, t)$ et $g(z, t)$ définissent la même fonction holomorphe au sens large si et seulement si elles coïncident dans un ensemble $W \times \bar{O}$ (W, voisinage ouvert de Ω_1), ou, ce qui revient au même puisque $\bar{O}$ est compact, si elles coïncident dans un voisinage de $\Omega_1 \times \bar{O}$ dans $\Omega \times \bar{O}$.

Reste enfin à montrer que toute fonction holomorphe locale au sens large $(\overline{L_n})_n$ sur Ω_1 à valeurs dans F s'obtient ainsi. Soit $L_0(z)$ un représentant de $\overline{L_0}$, défini dans un voisinage ouvert $U_0 = U$ de Ω_1, cette fonction s'identifie (§ 3, ex. b)) à une fonction continue $f(z, t)$ sur $U \times \bar{O}$, holomorphe en z. Soit de même $L_n(z)$ un représentant de $\overline{L_n}$, défini dans un voisinage ouvert U_n de Ω_1, voisinage qu'on peut supposer contenu dans U. $L_n(z)$ s'identifie à une fonction continue $f_n(z, t)$ définie sur $U_n \times \Omega_1$, holomorphe en z et n fois continûment différentiable en t. Mais la condition de cohérence (4) signifie ici qu'en choisissant U_n assez petit, on doit avoir $f_n(z, t) = f(z, t)$ quel que soit $(z, t) \in U_n \times \Omega_n$. Il suit que $f(z, t)$ est n fois continûment différentiable en t dans $U_n \times O$. Enfin, il est évident que L est bien définie par la fonction $f(z, t)$.

Nous énoncerons sans en donner la démonstration les résultats analogues suivants:

c) Soit F l'espace de Schwarz $\mathfrak{E}(\boldsymbol{R}^m)$ des fonctions indéfiniment différentiables sur $\boldsymbol{R}^m$, muni de la topologie de la convergence compacte de la fonction et de chacune de ses dérivées. Les fonctions holomorphes locales au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux classes de fonctions continues $f(z, t)$ définies dans un voisinage ouvert U de la partie $\Omega_1 \times \boldsymbol{R}^m$ de l'espace topologique $\Omega \times \boldsymbol{R}^m$, holomorphes en z, et telles que pour tout entier $n \geqq 0$ existe un voisinage $U_n \subset U$ de $\Omega_1 \times \boldsymbol{R}^m$ tel qüe $f(z, t)$ soit n fois continûment différentiable en t dans $U_n \times \boldsymbol{R}^m$; deux telles fonctions étant mises dans la même classe si et seulement si elles coïncident dans un voisinage de $\Omega_1 \times \boldsymbol{R}^m$.

d) Soit F l'espace $\mathfrak{H}(O)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert O du plan complexe, muni de la topologie de la convergence compacte. Alors les fonctions holomorphes locales au sens large sur Ω_1, à valeurs dans F, s'identifient aux fonctions holomorphes locales (au sens strict) à valeurs complexes sur la partie $\Omega_1 \times O$ de la variété holomorphe $\Omega \times O$ (c. f. [7]).

Dans ce dernier exemple, O peut d'ailleurs être remplacé par n'importe quelle variété holomorphe. De même, dans tous les exemples précédents, Ω_1 peut être supposé une partie quelconque d'une variété holomorphe Ω quelconque, à une ou plusieurs dimensions complexes. On aurait aussi pu supposer plus généralement que les éléments des espaces F envisagés, au lieu d'être des fonctions complexes, étaient des fonctions à valeurs dans un espace de Banach donné E.

On pourrait multiplier les généralisations des exemples précédents et l'exhibition d'autres exemples, mais ce qui précède suffit sans doute à montrer comment dans chaque cas particulier le théorème 4 peut servir à une détermination «concrète» d'applications linéaires d'un espace $P(\Omega_1)$. Nous laissons aussi au lecteur le soin d'écrire les formules intégrales explicites pour les transformations linéaires définies par les fonctions holomorphes locales au sens large considérées dans les exemples précédents.

Dans tous ces exemples, F était un espace $(\mathfrak{F})$. Les méthodes employées ne sont plus valables pour des espaces tels que les duals fort d'espaces $(\mathfrak{F})$ non normables, et en particulier pour divers espace de distributions. Mais ici la question ne se pose pratiquement plus à priori, car les déterminations des applications linéaires continues d'un espace $P(\Omega_1)$ dans un espaces F n'ont guère d'intérèt pratique que si Ω_1 est fermé ou ouvert; dans le premier cas le problème est résolu par la proposition 5 de ce paragraphe, et dans le deuxième cas, $P(\Omega_1)$ étant un espace $(\mathfrak{F})$, ses applications linéaires continues dans un dual d'espace $(\mathfrak{F})$ sont bornées, de sorte qu'on peut appliquer le théorème 3 du § 5. D'ailleurs, en se basant sur cette dernière remarque, ou mieux directement par application du théorème de Baire, on peut montrer que si F est un dual d'espace $(\mathfrak{F})$, les notions d'application holomorphe locale, au sens large ou au sens strict, à valeurs dans F, sont les mêmes, ce qui résoud la question complètement.

Bibliographie.

1. *N. Bourbaki*, Algèbre Chap. III, Actual. Sc. et Ind. No. 1084, Hermann (Paris).
2. *N. Bourbaki*, Topologie Générale Chap. X, Act. Sc. et Ind. No. 1044, Hermann (Paris).
3. *N. Bourbaki*, Sur certains espaces vectoriels topologiques, Annales de Grenoble, t. 2, 1950.
4. *J. Dieudonné et L. Schwartz*, La dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$, Annales de Grenoble, t. 1, 1949.
5. *A. Grothendieck*, Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces $(\mathfrak{F})$, C. R. t. 230, p. 1561—1553, 1950.
6. *A. Grothendieck*, Critères dénombrables de compacité dans les espaces fonctionnels, Am. Journal of Math. vol. 74, 1952.
7. *G. Köthe*, Dualität in der Funktionentheorie, Crelles Journal, t. 191, 1953.
8. *G. Köthe*, Die Stufenräume, eine einfache Klasse vollkommener Räume, Mathematische Zeitschrift, t. 51, 1948.
9. *L. Schwartz*, Théorie des distributions, tomes 1 et 2, Actual. Sc. et Ind., Nos 1091 et 1122, Hermann (Paris).
10. *L. Schwartz*, Les équations d'évolution liées au produit de composition.
11. *J. Silva*, As Funções Analíticas e a Analíse Funcional, Port. Math., t 9, 1—130, 1950.

Eingegangen 7. November 1951