Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. V. Fibrés vectoriels, fibrés projectifs, fibrés en drapeaux

Séminaire Henri Cartan, tome 13, nº 1 (1960-1961), exp. nº 12, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_1_A8_0>

Séminaire Henri CARTAN
13e année, 1960/61, n° 12

6 février 1961

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

V. FIBRÉS VECTORIELS, FIBRÉS PROJECTIFS, FIBRÉS EN DRAPEAUX

Remarques préliminaires. - Le lecteur pourra noter que les développements donnés ci-dessous sur les fibrés vectoriels, fibrés en drapeaux, etc, pourraient se déduire d'énoncés plus généraux valables pour des espaces annelés quelconques, qui se formuleraient à l'aide de la notion de "schéma relatif" X au-dessus d'un espace annelé S. Lorsque S est un espace analytique et X est un schéma relatif de type fini sur S, on peut lui associer un espace analytique sur S, soit X_{an}, de telle sorte qu'on ait pour tout espace analytique T sur S une bijection $\mathrm{Hom}_S(T, X_{an}) \simeq \mathrm{Hom}_S(T, X)$, fonctorielle en T, où le premier Hom est pris dans la catégorie (An) des espaces analytiques, et le deuxième dans la catégorie des espaces annelés en anneaux locaux. (Cf., dans le cas où S est une variété réduite à un point, [3] dans le cadre de SERRE, et un exposé en préparation [1] dans le cadre général avec éléments nilpotents). Ceci dit, les opérations : fibrés vectoriels, fibrés en drapeaux, etc. en géométrie analytique, se déduisent des opérations correspondantes dans la géométrie algébrique par application du foncteur $X \rightsquigarrow X_{an}$; et leurs propriétés formelles essentielles résultent alors trivialement des résultats de géométrie algébrique et des propriétés élémentaires du foncteur $X \rightsquigarrow X_{an}$. Le même procédé s'applique d'ailleurs à des constructions plus délicates (schémas de Hilbert, schémas de Picard, etc.), lorsqu'on est sur le corps C des complexes, grâce aux propriétés de fidélité du foncteur $X \rightsquigarrow X_{an}$ pour X projectif sur Y, exprimées dans un théorème fondamental de Grauert-Remmert (généralisant le résultat principal de [3]).

Faute d'avoir développé (comme il aurait fallu le faire dès le début dans [2]) le langage des schémas relatifs sur un espace annelé, nous devrons nous contenter provisoirement de travailler "en vase clos", en restant dans la catégorie des espaces analytiques. Du point de vue des fondements, ces remarques suggèrent cependant assez clairement la nécessité, pour la géométrie analytique également, de développer dès l'abord une théorie relative des espaces analytiques, au-dessus d'espaces annelés en anneaux topologiques S assez généraux. Lorsque S est une variété (analytique, différentiable) ou un espace topologique, cela donnerait la bonne formulation d'une famille analytique, ou différentiable, ou continue, d'espaces analytiques. Les théorèmes de finitude de Grauert et de Grauert-Remmert ne pourront être considérés comme complètement clarifiés qu'une fois étendus à la situation relative générale (où on ne connait pour l'instant que des résultats épars, très particuliers, de Kodaira-Spencer).

1. Fibrés vectoriels.

Soient S un espace analytique, et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique sur S. Pour tout espace analytique T sur S, désignons pas $\mathcal{E}_{(T)}$ l'image inverse du Module $\mathcal{E}$ par le morphisme structural $T \to S$. Lorsqu'on se donne un S-morphisme $f : T' \to T$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}_{(T')} \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{E}_{(T)}) \qquad ,$$

d'où, puisque f^* est un foncteur transformant $\mathcal{O}_T$ en $\mathcal{O}_{T'}$, une application canonique

$$f^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{O}_T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{T'}}(E_{(T')}, \mathcal{O}_{T'}) \qquad .$$

De cette façon, posant

$$F_{\mathcal{E}}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{O}_T) \qquad ,$$

$F_{\mathcal{E}}$ devient un foncteur contravariant de $(An)_{/S}$ dans (Ens). On notera qu'il dépend de façon contravariante de $\mathcal{E}$, de façon précise, $F_{\mathcal{E}}(T)$ est un bifoncteur en T, $\mathcal{E}$, variables respectivement dans la catégorie opposée à $(An)_{/S}$, et dans la catégorie opposée à la catégorie des Modules sur S.

PROPOSITION 1.1. - Supposons $\mathcal{E}$ de présentation finie. Alors le foncteur contravariant $F_{\mathcal{E}}$ sur $(An)_{/S}$ est représentable.

En effet, ce foncteur est évidemment de nature locale (exposé IV, 5.4), donc la question est de nature locale sur S (exposé IV, 5.7), et on peut donc supposer qu'il existe sur S une suite exacte

$$\mathcal{O}_S^m \to \mathcal{O}_S^n \to \mathcal{E} \to 0$$

(puisque par hypothèse, une telle suite exacte existe localement sur S). On en déduit pour tout T sur S une suite exacte

$$\mathcal{O}_T^m \to \mathcal{O}_T^n \to \mathcal{E}_{(T)} \to 0$$

(le foncteur image inverse étant exact à droite), d'où la suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{O}_T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^n, \mathcal{O}_T) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^m, \mathcal{O}_T) \qquad ,$$

évidemment fonctorielle en T . Or pour tout entier p , on a une bijection fonctorielle en T

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^p, \mathcal{O}_T) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_T, \mathcal{O}_T)^p \simeq \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^p$$

ce qui montre que pour T variable dans (An) , le foncteur en T exprimé par le premier membre est représentable par l'espace $\mathcal{E}^p$; donc (exposé IV, 3.1) pour T variable dans $(An)_{/S}$, ce même foncteur est représentable par $\mathcal{E}^p \times S$, considéré comme espace analytique sur S par la deuxième projection. Cela prouve donc (1.1), lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S^p$, et dans le cas général, la suite exacte écrite plus haut montre que le foncteur $F_{\mathcal{E}}$ est représenté par l'image inverse, par le morphisme

$$S \times \mathcal{E}^n \to S \times \mathcal{E}^m$$

qui représente l'homomorphisme α dans $(*)$, de la "section nulle" de $S \times \mathcal{E}^m$ (i. e. le morphisme section $S \to S \times \mathcal{E}^m$ qui correspond à l'élément nul de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^m, \mathcal{O}_S)$). Cela achève la démonstration.

DÉFINITION 1.2. - L'espace analytique sur S qui représente le foncteur $F_{\mathcal{E}}$ précédent est appelé le fibré vectoriel sur S défini par $\mathcal{E}$, et noté $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$.

REMARQUE 1.3. - Considérons le foncteur en T parcourant $(An)_{/S}$:

$$G_{\mathcal{E}}(T) = \Gamma(T, \mathcal{E}_{(T)})$$

(qui dépend de façon covariante de $\mathcal{E}$, contrairement à $F_{\mathcal{E}}$). Il est facile de montrer (supposant encore $\mathcal{E}$ de présentation finie) qu'il n'est représentable que si $\mathcal{E}$ est localement libre ; la représentabilité du dit foncteur en ce cas étant d'ailleurs contenu dans (1.1) appliqué au faisceau dual $\check{\mathcal{E}} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_S)$ (Cf. 1.9). Il était d'usage jusqu'à présent d'appeler fibré vectoriel défini par le faisceau localement libre $\mathcal{E}$, l'espace analytique sur S représentant $G_{\mathcal{E}}$, dont le faisceau des sections est donc isomorphe à $\mathcal{E}$ lui-même. Il semble préférable d'adopter la convention duale, qui permet de faire correspondre un "fibré vectoriel" à un faisceau de présentation finie quelconque. De tels fibrés vectoriels, et surtout les fibrés projectifs associés, se rencontrent effectivement en géométrie, par exemple dans l'étude des "variétés de Picard". Lorsque $\mathcal{E}$ est localement libre, ce que nous appelons ici fibré vectoriel sur S défini par $\mathcal{E}$, est ce qu'il était d'usage d'appeler le fibré vectoriel défini par $\check{\mathcal{E}}$.

1.4. - Le foncteur $F_{\mathcal{E}}$ est non seulement un foncteur à valeurs dans la catégorie des ensembles, mais même à valeurs dans la catégorie des espaces vectoriels sur le corps de base k. Conformément aux définitions générales, on peut donc dire que l'objet $X = \underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$ de la catégorie $\underset{\sim}{C}(An)_{/S}$ est un " k-espace vectoriel dans $\underset{\sim}{C}$ ", ce qu'on peut expliciter aussi en disant qu'on a une loi de composition

$$X \times_S X \to X$$

satisfaisant aux axiomes des groupes commutatifs, et que l'anneau k opère sur X/S, de façon précise qu'on a un homomorphisme de k dans l'anneau des endomorphismes de X considéré comme "groupe commutatif sur S ". Cela implique en particulier, pour les ensembles sous-jacents aux fibres de X sur S, des structures d'espaces vectoriels sur k, mis en évidence dans (1.8) ci-dessous.

Nous allons examiner les variances de $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$ avec $\mathcal{E}$ et S variables. Pour S fixé, $\mathcal{E}$ variable, il résulte des remarques du début que $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$ est un foncteur contravariant en le Module de présentation finie $\mathcal{E}$, à valeurs dans la catégorie $(An)_{/S}$. D'ailleurs :

PROPOSITION 1.5. - Soit $u : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un homomorphisme surjectif de Modules de présentation finie sur S. Alors le morphisme

$$\underset{\sim}{V}(u) : \underset{\sim}{V}(\mathcal{F}) \to \underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$$

est une immersion fermée.

En effet, la question étant locale sur S , on peut supposer que $\mathcal{E}$ est quotient du faisceau $\mathcal{O}_S^n$, et de plus que les noyaux des homomorphismes évidents de $\mathcal{O}_S^n$ dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont également des quotients de faisceaux de la forme $\mathcal{O}_S^m$. Alors on a des S-morphismes

$$\underset{\sim}{V}(\mathcal{E}) \to \underset{\sim}{V}(\mathcal{F}) \to \underset{\sim}{V}(\mathcal{O}_S^m) \quad ,$$

d'autre part la démonstration de (1.1) nous montre que les morphismes $\underset{\sim}{V}(\mathcal{F}) \to \underset{\sim}{V}(\mathcal{O}_S^n)$ et le morphisme composé $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E}) \to \underset{\sim}{V}(\mathcal{O}_S^n)$ sont des immersions fermées, il en est donc de même de $\underset{\sim}{V}(u)$.

REMARQUE 1.6. - Lorsque $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont localement libres, la situation de (1.5) n'est autre que celle d'un fibré vectoriel $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$ et d'un <u>sous-fibré vectoriel</u> $\underset{\sim}{V}(\mathcal{F})$ au sens courant du terme. On fera attention qu'il ne suffit pas, pour que $\underset{\sim}{V}(\mathcal{F})$ s'identifie à un sous-fibré vectoriel de $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$, que l'homomorphisme $\check{\mathcal{F}} \to \check{\mathcal{E}}$ soit injectif, même dans le cas classique où on suppose les faisceaux envisagés localement libres ; il faut alors exiger de plus que $\mathrm{Im}(\check{\mathcal{F}})$ soit localement facteur direct dans $\check{\mathcal{E}}$.

PROPOSITION 1.7. - Soit S' un espace analytique sur S , et posons $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{(S')}$. Alors on a un isomorphisme canonique

$$\underset{\sim}{V}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \underset{\sim}{V}(\mathcal{E}) \times_S S' \quad .$$

C'est un cas particulier de (exposé IV, 3.2).

COROLLAIRE 1.8. - Soit $s \in S$, alors la fibre $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})_s$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel dual de la fibre réduite $\mathcal{E}_s \otimes_{\mathcal{O}_s} k$, munie de sa structure canonique d'espace analytique (pour laquelle il devient isomorphe à un espace $\underset{\sim}{\mathcal{E}}^n$).

En effet, prenant pour S' le sous-espace analytique réduit de S défini par s , et notant que $\mathcal{E}'$ est donné alors par l'espace vectoriel $E = \mathcal{E}_s \otimes_{\mathcal{O}_s} k$, on est ramené au cas où S est réduit à un point, d'anneau local réduit à k . L'ensemble sous-jacent à $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$ s'identifie alors à l'ensemble des sections de $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})$ sur S , i. e. par définition à l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_S) \simeq \mathrm{Hom}(E, k)$. Sa structure d'espace analytique, i. e. son faisceau structural, s'explicite alors immédiatement comme dans la démonstration de (1.1), par choix d'une base de E .

PROPOSITION 1.9. - Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux Modules sur l'espace analytique S, et posons pour tout espace analytique T sur S

$$F(T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{F}_{(T)}) \quad ,$$

de sorte qu'on obtient un foncteur contravariant de la catégorie $(An)_{/S}$ dans la catégorie des ensembles. Si $\mathcal{E}$ est de présentation finie, et $\mathcal{F}$ localement libre de type fini, alors ce foncteur est représentable, et il est représenté par le fibré vectoriel $\underset{\sim}{V}(\check{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E})$.

En effet, on a une bijection, fonctorielle en T :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{F}_{(T)}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F}_{(T)}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{O}_T) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}((\check{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{E})_{(T)}, \mathcal{O}_T) \quad , \end{aligned}$$

d'où la conclusion par (1.1) et (1.2).

2. Fibrés en drapeaux, etc. : définition, quelques morphismes canoniques.

Soient S un espace annelé en anneaux locaux, $\mathcal{E}$ un Module sur S, et

$$m = (m_1, \ldots, m_p)$$

une suite croissante d'entiers $\geqslant 0$.

DÉFINITION 2.1. - On appelle <u>drapeau de type</u> m <u>dans</u> $\mathcal{E}$ une suite croissante de Modules quotients $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$ de $\mathcal{E}$, localement libres de rang respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$. L'ensemble de ces drapeaux est noté $\mathrm{Drap}_m(\mathcal{E})$. Lorsque $p = 1$, donc que la suite m est réduite à un seul entier $n \geqslant 0$, on écrit aussi $\mathrm{Grass}_n(\mathcal{E})$ au lieu de $\mathrm{Drap}_m(\mathcal{E})$. Lorsque de plus $n = 1$, on écrit $P(\mathcal{E})$ au lieu de $\mathrm{Grass}_1(\mathcal{E})$.

Ainsi, $\mathrm{Grass}_n(\mathcal{E})$ est l'ensemble des Modules quotients de $\mathcal{E}$ qui sont localement libres de rang n, et $P(\mathcal{E})$ l'ensemble des Modules quotients de $\mathcal{E}$ qui sont "inversibles", i. e. localement libres de rang 1 (Rappelons qu'on appelle Module localement libre de rang n, un Module localement isomorphe à $\mathcal{O}_S^n$).

Soit alors $S' \to S$ un morphisme d'espaces annelés en anneaux locaux, et soit $\mathcal{E}'$ l'image inverse de $\mathcal{E}$ sur S'. Comme le foncteur image inverse est exact à droite, et transforme Modules localement libres de rang n en modules localement libres de rang n, on trouve une application canonique :

$$\mathrm{Drap}_m(\mathcal{E}) \to \mathrm{Drap}_m(\mathcal{E}') \quad ,$$

et ces applications satisfont une propriété de transitivité évidente. Posant alors, pour tout espace annelé en anneaux locaux T sur S :

$$\underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})(T) = \mathrm{Drap}_m(\mathcal{E}_{(T)})$$

on voit que l'on obtient un foncteur contravariant en T, à valeurs dans la catégorie des ensembles, qu'on notera $\underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$. On obtient ainsi en particulier des foncteurs

$$\underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E})(T) = \mathrm{Grass}_n(\mathcal{E}_{(T)})$$

$$\underset{\sim}{P}(\mathcal{E})(T) = P(\mathcal{E}_{(T)}) \quad .$$

Notons maintenant que pour S fixé, et un homomorphisme <u>surjectif</u> $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ de Modules, on obtient une application canonique correspondante

$$\mathrm{Drap}_m(\mathcal{F}) \to \mathrm{Drap}_m(\mathcal{E})$$

puisqu'un faisceau quotient localement libre de rang n de $\mathcal{F}$ peut être considéré aussi comme un faisceau quotient de $\mathcal{E}$, localement libre de rang n. On a une propriété de transitivité évidente, qu'on peut exprimer en disant que $\mathrm{Drap}_m(\mathcal{E})$ est un foncteur contravariant en $\mathcal{E}$ dans la catégorie des Modules sur S, où on prend comme morphismes les homomorphismes surjectifs de Modules. On a aussi une application canonique

$$\mathrm{Drap}_m(\mathcal{E}) \to \prod_{1 \leq i \leq p} \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathcal{E})$$

puisque par définition le premier membre est un sous-ensemble du second. Notons maintenant que si on a un homomorphisme surjectif $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_1$, où $\mathcal{E}_1$ est localement libre de rang n , alors en prenant la puissance extérieure n-ième, on trouve un homomorphisme surjectif $\overset{n}{\wedge}\mathcal{E} \to \overset{n}{\wedge}\mathcal{E}_1$, où le deuxième membre est un Module inversible. De cette façon, on définit une application canonique (dite application de Plücker) :

$$\mathrm{Grass}_n(\mathcal{E}) \longrightarrow P(\overset{n}{\wedge}\mathcal{E}) \quad .$$

Enfin, si on a des homomorphismes surjectifs $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_1$, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_1$, avec $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{F}_1$ des Modules inversibles, on en déduit en tensorisant un homomorphisme surjectif $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F}_1$, où le deuxième membre est également un Module inversible. De cette façon, on obtient une application canonique (dite application de Segre) :

$$P(\mathcal{E}) \times P(\mathcal{F}) \to P(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \quad .$$

Notons maintenant que les quatre applications qu'on vient de définir sont compatibles avec la formation d'images inverses, donc définissent en fait des homomorphismes de foncteurs :

$$\underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{F}) \longrightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E}) \longrightarrow \prod_{1 \leq i \leq p} \underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_{m_i}(\mathcal{E})$$

$$\underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E}) \longrightarrow \underset{\sim}{P}(\overset{n}{\wedge}\mathcal{E})$$

$$\underset{\sim}{P}(\mathcal{E}) \times \underset{\sim}{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow \underset{\sim}{P}(\mathcal{E} \times \mathcal{F}) \quad .$$

A partir de maintenant, nous nous restreignons aux espaces annelés qui sont des espaces analytiques (Cf. Introduction). Nous montrerons :

PROPOSITION 2.1. - Supposons que le Module $\mathcal{E}$ sur l'espace analytique S soit de présentation finie. Alors le foncteur contravariant $\underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$ sur $(\mathrm{An})_{/S}$ est représentable.

On pourra donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 2.2. - L'espace analytique sur S qui représente $\underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$ sera noté $\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$, et appelé le <u>fibré des drapeaux de type</u> m de $\mathcal{E}$. En particulier, on notera $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E}) = \underline{\mathrm{Drap}}_n(\mathcal{E})$ l'espace analytique sur S qui représente le foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E})$, et $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \underline{\mathrm{Grass}}_1(\mathcal{E})$ l'espace analytique qui représente le foncteur $\underset{\sim}{\mathcal{P}}(\mathcal{E})$; cet espace s'appellera aussi le <u>fibré projectif</u> défini par $\mathcal{E}$.

Les quatre homomorphismes fonctoriels précédents définissent donc des S-morphismes canoniques :

$$\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$$

$$\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E}) \to \prod_{1\leq i\leq p} \underline{\mathrm{Grass}}_{m_i}(\mathcal{E})$$

$$\underline{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E}) \to \mathcal{P}(\bigwedge^n \mathcal{E})$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) \times \mathcal{P}(\mathcal{F}) \to \mathcal{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \quad .$$

On verra de plus :

PROPOSITION 2.2. - Les morphismes précédents sont des immersions fermées.

REMARQUES 2.3. - Comme dans le cas des fibrés vectoriels, les fibrés projectifs n'étaient considérés que pour des faisceaux localement libres, et la définition reçue est duale de celle que nous sommes obligés d'admettre ici pour les raisons signalées dans (1.3). On vérifie aussitôt sur la définition que si $\mathcal{E}$ est un faisceau quotient du faisceau structural $\mathcal{O}_S$ par un Idéal de type fini $\mathcal{J}$, donc l'extension à S d'un faisceau de la forme $\mathcal{O}_{S'}$, où S' est un sous-espace analytique fermé de S , alors $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ est S-isomorphe à S' . Cela montre en particulier que (même si S est non singulier de dimension analytique 1) les fibrés projectifs sur S peuvent avoir des éléments nilpotents dans leurs anneaux locaux.

2.4. - Il résulte encore de (exposé IV, 3.2) que pour tout espace analytique S' sur S , posant $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{(S')}$, on a un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E}') \simeq \underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E}) \times_S S'$$

d'où en particulier :

$$\underline{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E}') \overset{\sim}{\to} \underline{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E}) \times_S S' , \quad \mathcal{P}(\mathcal{E}') \overset{\sim}{\to} \mathcal{P}(\mathcal{E}) \times_S S' .$$

Prenant pour S' un espace analytique réduit à un point $s \in S$, dont l'anneau local est réduit à k, on voit que l'ensemble sous-jacent à la fibre $\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})_s$ est l'ensemble des drapeaux de type m dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}_s \otimes_{\mathcal{O}_s} k$ (fibre réduite de $\mathcal{E}$ en s). En particulier $\mathcal{P}(\mathcal{E})_s$ est l'ensemble des hyperplans dans la dite fibre réduite. D'autre part, si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S^N$, alors $\mathcal{E}$ est l'image inverse de $\mathcal{O}_e^N$ par l'unique morphisme $S \to e$ de S dans l'objet final e de (An), donc $\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$ est canoniquement isomorphe à $\underline{\mathrm{Drap}}_m(k^N) \times S$, où on pose, pour tout espace vectoriel V de dimension finie sur k, $\underline{\mathrm{Drap}}_m(V) = \underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est le Module sur e défini par V.

2.5. - Utilisant (2.2), on voit que $\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$ est isomorphe à un sous-espace analytique fermé de $\mathcal{P}(\mathcal{V})$, où $\mathcal{V}$ est le produit tensoriel de p copies de $\mathcal{E}$.

3. Démonstration du théorème d'existence et des théorèmes d'immersion.

Il est immédiat d'abord que le foncteur $\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$ est de nature locale (exposé IV, 5.4). Nous prouvons d'abord qu'il est représentable dans le cas particulier où $p = 1$, i. e. où on considère le foncteur $\underline{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E})$. En vertu de (exposé IV, 5.7), la question est locale sur S, donc on peut supposer que $\mathcal{E}$ est engendré par une famille de sections $(f_i)_{i\in I}$. Pour toute partie H de I, à n éléments, considérons l'homomorphisme

$$\varphi_H : \mathcal{O}_S^n \to \mathcal{E}$$

défini par les f_i, $i \in H$. Pour simplifier, pour tout espace analytique T sur S, nous désignerons encore par $\varphi_H : \mathcal{O}_T^n \to \mathcal{E}_{(T)}$ et par f_i, les objets sur T déduits de φ_H et des f_i par changement de base $T \to S$. On désignera alors par $F_H(T)$ la partie de $F(T) = \mathrm{Grass}_n(\mathcal{E})(T) = \mathrm{Grass}_n(\mathcal{E}_{(T)})$ formé des quotients localement libres $\mathcal{E}_1$ de rang n de $\mathcal{E}_{(T)}$ tel que le composé

$$\mathcal{O}_T^n \xrightarrow{\varphi_H} \mathcal{E}_{(T)} \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

soit surjectif, donc un isomorphisme (puisque les deux faisceaux en jeu sont localement libres de même rang). Comme le foncteur image inverse transforme épimorphismes en épimorphismes, on voit que $F_H(T)$ est un foncteur en T. Nous allons vérifier, pour le système des foncteurs F_H et les homomorphismes d'injection canonique $i_H : F_H \to F$, les conditions de (exposé IV, 5.6). Il reste à vérifier :

a. Chaque F_H est représentable. En effet, $F_H(T)$ s'identifie aussi à l'ensemble des homomorphismes $\mathcal{E}_{(T)} \to \mathcal{O}_T^n$ dont le composé avec $\varphi_H : \mathcal{O}_T^n \to \mathcal{E}_{(T)}$ est l'identité. On a donc une suite exacte d'ensembles

$$F_H(T) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E}_{(T)}, \mathcal{O}_T^n) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^n, \mathcal{O}_T^n)$$

où α est l'application $u \rightsquigarrow u \circ \varphi_H$, et où β est l'application constante de valeur l'endomorphisme identique de $\mathcal{O}_T^n$. Bien entendu, toutes les applications du diagramme sont fonctorielles en T. D'autre part, en vertu de (1.1) les deux derniers termes sont des foncteurs représentables en T, représentés respectivement par $\underset{\sim}{V}(\mathcal{E})^n$ et par $\underset{\sim}{V}(\mathcal{O}_T^n)^n$. Donc F_H est représentable, et est le noyau du couple (α, β).

b. Soit T un objet de $(An)_{/S}$ et soit $\eta \in F(T)$. Alors le foncteur contravariant $(F_H)_\eta$ sur $(An)_{/T}$ est représentable par un ouvert de T. Utilisant le critère [IV, 5.9], cela signifie ceci : étant donné un Module quotient $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{F}_{(T)}$, localement libre de rang n, l'ensemble U_H des points $t \in T$, tels que l'homomorphisme $k^n \to \mathcal{O}_{1,t} \otimes_{\mathcal{O}_t} k$ déduit de l'homomorphisme composé $\mathcal{O}_T^n \to \mathcal{E}_{(T)} \to \mathcal{E}_1$ soit surjectif, est <u>ouvert</u>, et égal à T seulement si le dit composé lui-même est surjectif. Or c'est là une conséquence du fait suivant, résultant du lemme de Nakayama : si $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un homomorphisme de Modules sur un espace annelé en anneaux locaux, $\mathcal{N}$ de type fini, et si u induit un homomorphisme surjectif pour les fibres réduites en un certain point t, alors u est un épimorphisme au voisinage de t.

c. Avec les notations précédentes, la réunion des U_H est T. En effet comme les f_i engendrent $\mathcal{E}_{(T)}$, leurs images dans $\mathcal{E}_1$ engendrent $\mathcal{E}_1$, et comme $\mathcal{E}_1$ est localement libre de rang n, on voit (par exemple en regardant la fibre réduite de $\mathcal{E}_1$) que pour tout point $t \in T$, il existe n éléments parmi les f_i qui engendrent $\mathcal{E}_1$ en t, donc t est contenu dans un U_H.

Cela prouve donc la représentabilité de $\underset{\sim}{\mathrm{Grass}}_n$. Dans le cas général, pour prouver que $\underset{\sim}{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$ est représentable et que le morphisme

$$F = \underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E}) \to G = \prod_i \underline{\mathrm{Grass}}_{m_i}(\mathcal{E})$$

une immersion fermée, il suffit, en vertu de (exposé IV, 3.13), de prouver que pour tout objet T de $(An)_{/S}$ et tout élément η de $G(T) = \prod_i \mathrm{Grass}_{m_i}(\mathcal{E}_{(T)})$, le foncteur contravariant F_η est représentable par un sous-espace analytique fermé de T . Changeant de notation, on peut supposer pour simplifier que $T = S$. On part donc de p faisceaux quotients $\mathcal{E}_i$ de $\mathcal{E}$, localement libres de rangs respectifs m_i , et on considère pour tout objet T de $(An)_{/S}$ l'ensemble des drapeaux de type m de $\mathcal{E}_{(T)}$ définis par les $\mathcal{E}_{i(T)}$; ensemble qui est vide ou réduit à un élément, ce dernier cas se présentant si et seulement si pour tout $1 \leq i < p$, $(\mathcal{E}_{i+1})_{(T)}$ majore $(\mathcal{E}_i)_{(T)}$. Utilisant le fait que le foncteur image inverse est exact à droite, et désignant par $\mathcal{F}_i$ le noyau de $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_i$, on voit que la condition envisagée pour i signifie aussi que l'homomorphisme composé

$$(\mathcal{F}_{i+1})_{(T)} \to \mathcal{E}_{(T)} \to (\mathcal{E}_i)_{(T)}$$

est nul. Cela signifie aussi que le morphisme structural $T \to S$ est majoré par le sous-espace analytique fermé S_i de S , image inverse de la section nulle du fibré vectoriel sur S qui représente le foncteur $T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}((\mathcal{F}_{i+1})_{(T)}, (\mathcal{E}_i)_{(T)})$ (cf. 1.9), par la section correspondant à l'homomorphisme composé $\mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_i$. Par suite, le foncteur F_η est représenté par le sous-espace analytique fermé de S , Inf des S_i pour $1 \leq i < p$.

On démontre de façon toute analogue que le morphisme $\underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{F}) \to \underline{\mathrm{Drap}}_m(\mathcal{E})$ correspondant à un épimorphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ de Modules de présentation finie sur S , est une immersion fermée. Il reste alors à prouver que les deux derniers morphismes envisagés dans (2.2) sont également des immersions fermées. Nous le ferons pour le morphisme de Plücker, la démonstration dans le cas du morphisme de Segre étant analogue et plus simple. La question étant locale sur S , on peut supposer que $\mathcal{E}$ est engendré par un nombre fini de sections, i. e. est quotient d'un faisceau de la forme $\mathcal{O}_S^m$. Ce qui précède nous ramène même au cas où on a $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S^m$. Pour toute partie H à n éléments de $I = [1, m]$, posant $\mathcal{E}_H = \mathcal{O}_S^H$, $H' = I - H$, on a une décomposition en somme directe $\mathcal{E} = \mathcal{E}_H + \mathcal{E}_{H'}$. Soit X_H (resp. Y_H) la partie ouvert de $X = \underline{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E})$ (resp. de $Y = \mathbb{P}(\mathcal{E})$) telle que pour tout espace analytique T sur S , $\mathrm{Hom}_S(T, X_H)$ soit l'ensemble des Modules quotients de $\mathcal{E}_{(T)}$ tels que l'homomorphisme canonique de $\mathcal{E}_{(T)}$ sur le quotient induise un isomorphisme de $(\mathcal{E}_H)_{(T)}$ sur le dit, et tel que $\mathrm{Hom}_S(T, Y_H)$ soit l'ensemble des Modules quotients de $(\bigwedge^n \mathcal{E})_{(T)} = \bigwedge^n \mathcal{E}_{(T)}$ tels que l'homomorphisme canonique de $\bigwedge^n \mathcal{E}_{(T)}$ sur le quotient induise un isomorphisme de $(\overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}_H)_{(T)} \to \mathcal{O}_T$ sur le dit. On a vu plus haut que l'on peut bien trouver de tels ouverts, d'autre part il est immédiat que X_H est l'image inverse de Y_H par le morphisme de Plücker $X \to Y$ (car pour qu'un homomorphisme $(\mathcal{E}_H)_{(T)} \to \mathcal{E}_1$, avec $\mathcal{E}_1$ localement libre de rang n, soit surjectif, il faut et il suffit que l'homomorphisme obtenu par élévation à la puissance extérieure n-ième le soit, comme on voit par exemple en regardant les fibres réduites). On est ramené à prouver que $X_H \to Y_H$ est une immersion fermée. Or de façon générale, considérons une décomposition en somme directe

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}''$$

avec $\mathcal{E}'$ localement libre de rang n ($\mathcal{E}''$ étant de présentation finie et par ailleurs quelconque, il n'est plus nécessaire pour ce qui suit que $\mathcal{E}$ soit localement libre). Soient $X = \underline{\mathrm{Grass}}_n(\mathcal{E})$, $Y = \mathbb{P}(\overset{n}{\Lambda}\mathcal{E})$, et soient X' et Y' les ouverts de X, Y définis à l'aide du sous-faisceau $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$, comme l'étaient plus haut X_H, Y_H à l'aide de $\mathcal{E}_H$. Nous allons expliciter le morphisme $X' \to Y'$ induit par le morphisme de Segre, ce qui montrera que c'est bien une immersion fermée. Notons que l'ensemble des sections de X' sur S, i. e. des Modules quotients $\mathcal{E}_1$ de $\mathcal{E}$ tels que le morphisme canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_1$ induise un isomorphisme $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$, est un correspondance biunivoque avec l'ensemble des projections de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$, lui-même en correspondance biunivoque avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$. De même, l'ensemble des sections de Y' sur S est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des projections de $\overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}$ sur le sous-Module $\overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}'$. Or on a un isomorphisme canonique :

$$\overset{n}{\Lambda}\mathcal{E} = \overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}' + \overset{n-1}{\Lambda}\mathcal{E}' \otimes \mathcal{E}'' + \dots + \overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}''$$

qui définit une décomposition de $\overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}$ en somme directe du sous-Module $\overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}'$, et du Module somme des autres termes du dernier membre. On en conclut une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sections de Y' sur S, et l'ensemble

$$(*) \qquad \prod_{1\leq i\leq n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\overset{n-i}{\Lambda}\mathcal{E}' \otimes \overset{i}{\Lambda}\mathcal{E}'', \overset{n}{\Lambda}\mathcal{E}') \quad .$$

L'application de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$ dans l'ensemble précédent, correspondant au morphisme $X' \to Y'$ qu'on veut étudier, associé à tout homomorphisme $u : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'$ la famille des homomorphismes

$$u_i : \overset{n-i}{\bigwedge} \mathcal{E}' \otimes \overset{i}{\bigwedge} \mathcal{E}'' \to \overset{n}{\bigwedge} \mathcal{E}' \qquad (i = 1 , \dots , n)$$

définis par la formule

$$(**) \qquad u_i(\xi' \otimes \eta'') = \xi' \wedge (\overset{i}{\bigwedge} u)(\eta'') \quad .$$

Notons maintenant que le premier terme dans (*) s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}'' , \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\overset{n-1}{\bigwedge} \mathcal{E}' , \overset{n}{\bigwedge} \mathcal{E}')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}'' , \mathcal{E}') \quad ,$$

et que moyennant cette identification, la formule (**) pour $i = 1$ donne

$$u_1 = u \quad .$$

En d'autres termes, identifiant (*) au produit de son premier facteur P par le produit Q des autres, on voit que l'application $X'(S) \to Y'(S)$ déduite du morphisme $X' \to Y'$ est injective et induit une bijection de $X'(S)$ sur la partie de $Y'(S) = P \times Q$, graphe d'une application $P \to Q$ explicitée par les formules (**).

Ces réflexions s'appliquent de même à la situation obtenue par un changement de base $T \to S$, toutes les applications considérées étant d'ailleurs manifestement fonctorielles en T . Désignant par $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{Q}$) le fibré vectoriel sur S qui représente le foncteur en $T \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{E}''_{(T)} , \mathcal{E}'_{(T)})$ (resp. le foncteur en $T \rightsquigarrow \prod_{2 \leq i \leq n} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}((\overset{n-i}{\bigwedge} \mathcal{E}' \otimes \overset{i}{\bigwedge} \mathcal{E}'')_{(T)} , (\overset{n}{\bigwedge} \mathcal{E}')_{(T)})$, on trouve donc que X' s'identifie à $\mathcal{P}$, Y' à $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, et le morphisme $X' \to Y'$ à étudier au morphisme-graphe d'un S-morphisme $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$. Comme $\mathcal{Q}$ est séparé sur S (comme on a vu implicitement dans le n° 1), il en résulte bien que $X' \to Y'$ est une immersion fermée.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Schémas et espaces analytiques, Séminaire de Géométrie algébrique. - Paris, Institut des hautes Études scientifiques, 1961 (à paraître).

[2] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Éléments de géométrie algébrique, I : Le langage des schémas. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 4).

[3] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.