Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. VII. Étude locale des morphismes : éléments de calcul infinitésimal

Séminaire Henri Cartan, tome 13, nº 2 (1960-1961), exp. nº 14, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A1_0>

Séminaire Henri CARTAN
13e année, 1960/61, n° 14

6 et 20 mars 1961 [1]

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

VII. ÉTUDE LOCALE DES MORPHISMES : ÉLÉMENTS DE CALCUL INFINITÉSIMAL

INTRODUCTION. - Nous développons ici un formalisme utile, valable pour des espaces analytiques quelconques. La possibilité d'utiliser des espaces annelés à éléments nilpotents est particulièrement agréable pour pouvoir formuler géométriquement, et sans contorsions, les notions fondamentales, la géométrie infinitésimale d'un espace analytique X apparaissant comme l'étude de diverses constructions géométriques au-dessus de certains espaces analytiques à éléments nilpotents canoniquement associés à X, cf. n° 2. Nous nous bornons à développer quelque peu les énoncés qui nous seront utiles par la suite, en particulier (en plus des fonctorialités indispensables des n° 2 et 4) le critère jacobien de simplicité, et les questions de prolongement infinitésimal de morphismes et de structures complexes, qu'on retrouve sous une forme plus ou moins identique dans toutes les questions de "modules". Parmi les développements passés sous silence, et qui se traiteraient avantageusement dans le point de vue adopté ici, signalons : formes différentielles de degré quelconque et différentielle extérieure, opérateurs différentiels d'un Module dans un autre, les opérations Θ_X associées à une transformation infinitésimale X, les phénomènes spéciaux à la caractéristique du corps de base. Enfin, le lecteur constatera que la nature très formelle des définitions et démonstrations données dans le présent exposé permet de les transcrire pratiquement sans changement dans d'autres cadres que celui envisagé ici, en particulier dans la théorie des schémas.

1. Invariants normaux d'une immersion.

Soit

$$i : Y \to X$$

un morphisme d'espaces annelés qui soit une immersion, ou plus généralement tel que l'homomorphisme correspondant

$$i^{-1}(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_Y$$

soit surjectif. Soit $\mathfrak{I}$ l'Idéal noyau de cet homomorphisme. Nous appellerons <u>voisinage infinitésimal d'ordre</u> n <u>de</u> Y <u>dans</u> X (relativement à i) l'espace annelé

$$Y_i^{(n)} = (Y\ ,\ i^{-1}(\mathcal{O}_X)/\mathfrak{I}^{n+1}) \quad .$$

On a un morphisme canonique

$$i^{(n)}\ :\ Y_i^{(n)} \to X$$

et une immersion fermée canonique

$$i^{(n,o)}\ :\ Y \to Y_i^{(n)}$$

dont le composé avec $i^{(n)}$ est i . Plus généralement, si $m \geqslant n$, on a un morphisme canonique d'immersion fermée

$$i^{(m,n)}\ :\ Y_i^{(n)} \to Y_i^{(m)}$$

dont le composé avec $i^{(m)}$ est $i^{(n)}$, et d'autre part on a un isomorphisme canonique

$$Y_i^{(o)} = Y$$

compatible avec $i^{(o)}$ et i , par lequel nous identifierons Y à $Y_i^{(o)}$, voisinage infinitésimal d'ordre 0 de Y dans X . Le faisceau structural

$$\mathcal{O}_{Y_i}(n) = i^{-1}(\mathcal{O}_X)/\mathfrak{I}^{n+1}$$

est un faisceau d'anneaux sur Y , <u>augmenté vers</u> $\mathcal{O}_Y$, qu'on pourra appeler le <u>n-ième invariant conormal de</u> Y <u>dans</u> X ; sa connaissance équivaut à celle de $Y_i^{(n)}$. On notera que <u>ce n'est pas un faisceau d'Algèbres sur</u> $\mathcal{O}_Y$.

Lorsque Y est un sous-espace annelé fermé d'un ouvert V de X , défini par un Idéal $\mathcal{J}$ sur V , alors $Y_i^{(n)}$ s'identifie au sous-espace annelé de X défini par l'idéal $\mathcal{J}^{n+1}$ sur V , et les $i^{(m,n)}$ sont les immersions canoniques entre ces sous-espaces annelés.

Lorsque i est un morphisme d'espaces analytiques, alors l'hypothèse implique que i est localement une immersion fermée ([3], VI, 1.9). Il en résulte aussitôt que les $Y_i^{(n)}$ sont également des espaces analytiques. De plus tous les morphismes envisagés $i^{(n)}$, $i^{(m,n)}$ sont des morphismes d'espaces analytiques.

Nous aurons surtout à utiliser le voisinage infinitésimal du premier ordre. Le noyau de l'homomorphisme d'augmentation

$$\mathcal{O}_{Y_i^{(1)}} \to \mathcal{O}_Y$$

est un idéal de carré nul, canoniquement isomorphe à $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. On l'appellera le <u>faisceau conormal</u> de Y dans X (pour i) ; notation

$$\mathcal{N}_i = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}_{Y_i^{(1)}} \to \mathcal{O}_Y) \quad .$$

Lorsque Y est défini comme plus haut par un Idéal $\mathcal{J}$ dans V, on a aussi un isomorphisme canonique

$$\mathcal{N}_i \xrightarrow{\sim} i^*(\mathcal{J}) \xrightarrow{\sim} i^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)$$

qui montre en particulier que <u>lorsque</u> X <u>et</u> Y <u>sont des espaces analytiques</u>, (donc i une immersion locale), <u>alors le faisceau conormal est de type fini, et même cohérent</u> (en utilisant le fait que $\mathcal{O}_X$ est cohérent).

Le même résultat s'applique aussi aux composantes homogènes $\mathrm{gr}^n(i)$ de $i^*(\mathcal{O}_X)$ filtré par les puissances de $\mathfrak{J}$ (dont le faisceau conormal est un cas particulier, en faisant $n = 1$).

La donnée d'une structure de $\mathcal{O}_Y$-algèbre sur $\mathcal{O}_{Y_i^{(n)}}$, compatible avec l'augmentation, équivaut à la donnée d'un morphisme

$$Y_i^{(n)} \to Y$$

induisant l'identité sur Y. Un tel morphisme s'obtient par exemple à l'aide d'un morphisme

$$p : X \to Y$$

tel que $pi = \mathrm{id}_Y$, en prenant $p \circ i^{(n)}$. Alors les homomorphismes canoniques $\mathcal{O}_{Y^{(m)}} \to \mathcal{O}_{Y^{(n)}}$ sont des <u>homomorphismes de $\mathcal{O}_Y$-algèbres augmentées</u>. Si i est un morphisme d'espaces analytiques, <u>les</u> $\mathcal{O}_{Y_i^{(n)}}$ <u>sont des Modules de type fini et même cohérents sur</u> Y , car munis d'une filtration finie dont les quotients $\mathrm{gr}^n(i)$ le sont.

Supposons qu'on ait un carré commutatif

(D)
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & X \\ Y' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i'"] & X' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

où i et i' satisfont aux conditions envisagées plus haut. On en déduit, pour tout n , un diagramme commutatif

(D')
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i^{(o,n)}"] & Y_i^{(n)} \arrow[r, "i^{(n)}"] & X \\ Y' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i'^{(o,n)}"'] & Y_{i'}'^{(n)} \arrow[u] \arrow[r, "i'^{(n)}"'] & X' \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale médiane est déterminée de façon unique par cette condition. On a donc commutativité dans les diagrammes

$$\begin{tikzcd} Y_i^{(n)} \arrow[r] & Y_i^{(m)} \arrow[r] & X \\ Y_{i'}'^{(n)} \arrow[u] \arrow[r] & Y_{i'}'^{(m)} \arrow[u] \arrow[r] & X' \arrow[u] \end{tikzcd} ,$$

et de plus une propriété de transitivité que le lecteur explicitera, et qu'on peut exprimer en disant que $i \rightsquigarrow Y_i^{(n)}$ est <u>fonctoriel</u> en i .

PROPOSITION 1.1. - Supposons que i soit une immersion et que le carré D soit cartésien. Il en est alors de même des carrés dans (D').

L'hypothèse signifie que, si Y est défini par un Idéal $\mathcal{J}$ sur un ouvert V de X, Y' est défini par l'idéal $g^*(\mathcal{J})\,\mathcal{O}_{V'}$ sur $V' = g^{-1}(V)$. Comme on a évidemment

$$(g^*(\mathcal{J})\,\mathcal{O}_{V'})^{n+1} = g^*(\mathcal{J}^{n+1}).\mathcal{O}_{V'}$$

il en résulte bien que le carré droit dans (D') est cartésien, donc aussi le carré gauche puisque le rectangle composé l'est. Plus généralement les carrés

$$\begin{array}{ccc} Y_i^{(n)} & \longrightarrow & Y_i^{(m)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ Y'^{(n)}_{i'} & \longrightarrow & Y'^{(m)}_{i'} \end{array}$$

sont également cartésiens.

Des morphismes $Y'^{(n)}_{i'} \to Y_i^{(n)}$, on déduit des **i-morphismes de Modules** (également fonctoriels)

$$\underline{gr}^n(i) \longrightarrow \underline{gr}^n(i')$$

et en particulier des morphismes fonctoriels pour les faisceaux conormaux :

$$\mathcal{N}_i \to \mathcal{N}_{i'}$$

ou ce qui revient au même :

$$f^*(\mathcal{N}_i) \to \mathcal{N}_{i'} \quad .$$

Il n'est pas vrai en général, même sous les conditions de 1.1, que ce soit là un isomorphisme. C'est vrai cependant (comme il résulte facilement des définitions) lorsque $g : X' \to X$ est plat, et également dans le cas suivant :

COROLLAIRE 1.2. - Considérons un diagramme commutatif cartésien d'espaces analytiques

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ Y' & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

soit i une section de X sur Y , i' la section image réciproque de X' sur Y' , définie par $if = gi'$. Alors pour tout entier n , le carré correspondant

$$\begin{tikzcd} Y'^{(n)}_i \arrow[r] \arrow[d] & Y^{(n)}_i \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien.

En effet, il en est ainsi du carré (D), donc aussi du carré droit dans (D'), donc aussi du rectangle suivant, composé de deux carrés cartésiens :

$$\begin{tikzcd} Y'^{(n)}_{i'} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{(n)}_i \arrow[d] \\ X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ce qui achève la démonstration.

Considérons alors $\mathcal{O}_{Y^{(n)}_i}$ et $\mathcal{O}_{Y'^{(n)}_{i'}}$ comme des Algèbres sur Y , resp. Y' , le carré commutatif dans la conclusion de 1.2 définit alors un f-homomorphisme d'Algèbres de l'une dans l'autre, ou encore un homomorphisme

$$(*) \qquad f^*(\mathcal{O}_{Y^{(n)}_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'^{(n)}_i}) \quad .$$

Ceci dit, la conclusion précédente s'exprime aussi par le

COROLLAIRE 1.3. - Sous les conditions de 1.2, l'homomorphisme précédent est un isomorphisme.

En effet, comme les anneaux locaux de $Y^{(n)}_i$ sont finis sur ceux de Y on a vu ([3], III, 3.2) que les anneaux locaux du produit fibré de $Y^{(n)}_i$ et Y' sur Y sont des produits tensoriels d'anneaux locaux, ce qui signifie précisément que (*)

est un isomorphisme.

Pour $n = 1$, $\mathcal{O}_{Y_i^{(1)}}$ s'identifie comme Algèbre sur Y à la somme

$$\mathcal{O}_{Y_i^{(1)}} \simeq \mathcal{O}_Y + \mathcal{N}_i$$

où $\mathcal{N}_i$ est considéré comme un Idéal de carré nul. On a la formule analogue pour Y' , et le corollaire précédent prend la forme :

COROLLAIRE 1.4. - Sous les conditions de 1.2, l'homomorphisme canonique

$$f^*(\mathcal{N}_i) \to \mathcal{N}_i',$$

est un isomorphisme.

2. Invariants différentiels d'un morphisme d'espaces analytiques.

Soit

$$p : X \to Y$$

un morphisme d'espaces analytiques, faisant donc de X un espace analytique au-dessus de Y , et considérons le morphisme diagonal, noté diag_p ou $\mathrm{diag}_{X/Y}$

$$X \to X \times_Y X \qquad .$$

C'est un morphisme d'immersion ([3], III, 2.6), et les réflexions du numéro précédent s'appliquent. Nous noterons $\Delta_p^{(n)}$ ou $\Delta_{X/Y}^{(n)}$ le voisinage infinitésimal d'ordre n de X dans $X \times_Y X$ pour le morphisme diag_p ; son faisceau structural s'appellera <u>l'invariant différentiel d'ordre</u> n <u>du morphisme</u> p . On peut considérer que la géométrie infinitésimale d'ordre n de X relativement à Y , est l'étude de l'espace analytique $\Delta_p^{(n)}$ et des espaces analytiques au-dessus de $\Delta_p^{(n)}$.

On a deux morphismes pr_1 et pr_2 inverses à gauche de diag_p , d'où sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\Delta_p^{(n)}}$ sur l'espace X deux structures d'Algèbres augmentées au-dessus de $\mathcal{O}_X$, i. e. on a deux homomorphismes

$$pr_1^* , pr_2^* : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\Delta_p^{(n)}}$$

inverses à droite de l'homomorphisme d'augmentation, d'ailleurs transformés l'un de l'autre par l'automorphisme de symétrie de $\mathcal{O}_{\Delta_p^{(n)}}$ (induit par la symétrie de $X \times_Y X$). Par la suite, on considérera $\mathcal{O}_{\Delta_p^{(n)}}$ comme un faisceau d'Algèbres pour $\mathcal{O}_X$ grâce à pr_1^*, et on l'appellera aussi algèbre des parties principales d'ordre n de X relativement à Y, ou simplement algèbre des parties principales d'ordre n lorsque $Y = \underset{\sim}{E}^0$ est l'objet final de $(\underset{\sim}{An})$. On le notera aussi $\mathcal{P}_p^{(n)}$ ou $\mathcal{P}_{X/Y}^{(n)}$:

$$\mathcal{P}_{X/Y}^{(n)} = \mathcal{O}_{\Delta_{X/Y}^{(n)}}$$

On fera attention qu'avec cette convention, pr_2^* n'est évidemment pas un homomorphisme linéaire en général, (puisque cela signifierait $pr_1^* = pr_2^*$) ; on le note parfois aussi $d_p^{(n)}$ ou $d_{X/Y}^{(n)}$ ou simplement $d^{(n)}$. Il joue le rôle d'un "opérateur différentiel d'ordre n " universel sur X (relativement à Y). Nous n'aurons guère à nous servir que du calcul différentiel d'ordre 1. La structure d'algèbre envisagée sur $\mathcal{O}_{\Delta_{X/Y}^{(1)}}$ définit un isomorphisme

$$(*) \qquad \mathcal{P}_{X/Y}^{(1)} = \mathcal{O}_{\Delta_{X/Y}^{(1)}} \simeq \mathcal{O}_X + \underset{\sim}{\Omega}_{X/Y}^1$$

où $\underset{\sim}{\Omega}_{X/Y}^1$ est le faisceau conormal à X dans $X \times_Y X$ pour l'immersion $diag_{X/Y}$. On l'appelle aussi faisceau des 1-différentielles relatives pour p, ou de X au-dessus de Y, et on le note aussi $\underset{\sim}{\Omega}_{X/Y}^1$. C'est donc un faisceau de type fini et même cohérent sur X, isomorphe aussi au faisceau image inverse par $diag_{X/Y}$ de $\mathcal{J}$ ou $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$, où $\mathcal{J}$ est un Idéal sur une partie ouverte V de $X \times_Y X$ qui définit le sous-espace analytique diagonal. Nous poserons

$$pr_2^* - pr_1^* = d$$

de sorte que d est un homomorphisme de faisceaux additifs

$$d_{X/Y} = d_p = d \ : \ \mathcal{O}_X \longrightarrow \underset{\sim}{\Omega}_{X/Y}^1 \quad .$$

La formule précédente s'écrit également

$$pr_2^* = pr_1^* + d$$

i. e. elle détermine l'homomorphisme $pr_2^* = d^{(1)}$ par la formule

$$d^{(1)}(f) = pr_2^*(f) = f + df$$

(formule qui utilise l'identification (*)). Ecrivant que pr_2^* est un homomorphisme d'Anneaux, on trouve

$$d(1) = 0 \ , \qquad d(fg) = fdg + gdf$$

i. e. d est une <u>différentielle</u>. La formule $d(1) = 0$ se généralise en

$$d(p^*(h)) = 0$$

pour toute section h de $\mathcal{O}_Y$ sur un ouvert, formule qui résulte du fait que pr_1^* et pr_2^* sont tous deux linéaires pour $p^{-1}(\mathcal{O}_Y)$.

Les propriétés fonctorielles des invariants différentiels d'un morphisme résultent aussitôt de celles du n° 1. Considérons un carré commutatif de morphismes d'espaces analytiques

(a)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "p'"] \\ Y & Y' \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

on en conclut un diagramme commutatif

(b)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\mathrm{diag}_p"'] & X' \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{diag}_{p'}"] \\ X \times_Y X \arrow[d, "pr_i"'] & X' \times_{Y'} X' \arrow[l] \arrow[d, "pr_i"] \\ X & X' \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

$(i = 1 , 2)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{(n)}_{X/Y} \arrow[d] & \Delta^{(n)}_{X'/Y'} \arrow[l] \arrow[d] \\
X \times_Y X \arrow[d, "pr_i"'] & X' \times_{Y'} X' \arrow[l] \arrow[d, "pr_i"] \\
X & X' \arrow[l, "f"']
\end{tikzcd}$$

et en particulier

$$(c) \qquad \begin{tikzcd}
\Delta^{(n)}_{X/Y} \arrow[d, "p_i"'] & \Delta^{(n)}_{X'/Y'} \arrow[l] \arrow[d, "p_i"] \\
X & X' \arrow[l, "f"']
\end{tikzcd} ,$$

d'où en particulier, faisant $i = 1$, un homomorphisme d'Algèbres

$$(c') \qquad \mathcal{P}^{(n)}_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{P}^{(n)}_{X'/Y'} .$$

Lorsque le carré (a) est cartésien, on voit "formellement" qu'il en est de même des carrés dans (b), donc en vertu de 1.2 il en est de même du carré (c), i. e. en vertu de 1.3 l'homomorphisme

$$(c'') \qquad f^*(\mathcal{P}^n_{X/Y}) \longrightarrow \mathcal{P}^n_{X'/Y'}$$

est un isomorphisme. Explicitant le cas $n = 1$, on trouve par 1.4 :

PROPOSITION 2.1. - Supposons que le carré de morphismes (a) **soit** cartésien, alors l'homomorphisme canonique

$$f^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}) \longrightarrow \underset{\sim}{\Omega}^1_{X'/Y'}$$

est un isomorphisme.

En particulier, prenant pour Y' le sous-espace analytique **réduit** de Y **réduit** à un point y, on voit :

COROLLAIRE 2.2. - Soit X un espace analytique sur un espace analytique Y. Pour tout point y de Y, le Module induit par $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}$ sur la fibre X_y est canoniquement isomorphe au faisceau $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X_y}$ des 1-différentielles "absolues" de X_y.

Le résultat analogue est vrai, d'après ce qui précède, pour les Algèbres de parties principales. Intuitivement, on peut dire que la théorie relative développée ici est la théorie des invariants **différentiels** "le long des fibres de X au-dessus de Y ".

REMARQUE 2.3. - La commutativité de (c), pour $i = 2$, s'exprime en disant que <u>les homomorphismes canoniques</u> (c') <u>sont compatibles avec les opérateurs différentiels</u> $d^{(n)}_{X/Y}$ <u>et</u> $d^{(n)}_{X'/Y'}$. Pour $n = 1$, cela signifie que <u>l'homomorphisme de faisceaux</u>

$$\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y} \to \underset{\sim}{\Omega}^1_{X'/Y'}$$

<u>est compatible avec les différentielles</u> $d_{X/Y}$ <u>et</u> $d_{X'/Y'}$. Ces conditions suffisent à déterminer l'homomorphisme (c'), resp. $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y} \to \underset{\sim}{\Omega}^1_{X'/Y'}$, car on montre que $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}$ est engendré comme $\mathcal{O}_X$-Module par l'image de $d^{(n)}_{X/Y}$. Pour le voir, on note que le sous-Module engendré par cette image est une sous-algèbre augmentée, et comme l'Idéal d'augmentation $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}$ est nilpotent, on est ramené à montrer que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est engendré par les éléments de la forme df, et il suffit pour ceci de prouver que l'Idéal diagonal dans $X \times_Y X$ est engendré par les germes de la forme $pr_1^*(f) - pr_2^*(f)$, ce qui exprime simplement que le germe du sous-espace analytique diagonal de $X \times_Y X$ en un de ses points est le noyau du couple des deux morphismes de germes pr_1 et pr_2.

PROPOSITION 2.4. - Soient X un espace analytique sur Y, s une section de X sur Y. On a un isomorphisme canonique

$$s^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Y_s^{(n)}}$$

(où le deuxième membre désigne l'invariant normal d'ordre n de l'immersion s).

En effet, la section s peut être considérée comme déduite, par extension de la base $s : Y \to X$, de la section diagonale de $X \times_Y X$ sur X (qui joue le rôle de "section universelle"), conformément au diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"'] & X \times_Y X \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[d, "pr_2"'] & X \arrow[l, "(id_X\,,\, sp)"'] \arrow[d, "p"'] \\
Y & X \arrow[l, "p"] \arrow[u, dashed, bend right, "diag_{X/Y}"'] & Y \arrow[l, "s"'] \arrow[u, dashed, bend right, "s"']
\end{tikzcd} ,$$

d'où, grâce à 1.2 appliqué au carré cartésien de droite et aux sections $diag_{X/S}$ et s , l'isomorphisme voulu 2.4. On notera que l'isomorphisme envisagé transforme $s^*(d^{(n)}_{X/Y}(f))$ en $f \bmod \mathfrak{J}^{n+1}$ (où $\mathfrak{J}$ est l'Idéal de l'immersion s).

COROLLAIRE 2.5. - Pour tout point x de X au-dessus d'un point s de Y , on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_s,x}/\mathfrak{m}^{n+1}_{X_s,x}$$

(où $k(x) = k$ est le corps résiduel en x , X_s est la fibre de X au-dessus de s , et $\mathfrak{m}_{X_s,x}$ l'idéal maximal de son anneau local en x).

On conjugue le fait que l'homomorphisme de changement de base (c") est un isomorphisme, ce qui ramène au cas où Y est l'espace analytique final, réduit à un point s , et on applique 2.4 à la section de X sur Y définie par le point x . Les énoncés 2.4 et 2.5 donnent une justification intuitive du nom : Algèbre des parties principales d'ordre n , que nous avions donné à $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}$. Pour $n = 1$, on trouve les cas particuliers suivants :

COROLLAIRE 2.6. - Pour toute section s de X sur Y , on a un isomorphisme canonique

$$s^*(\Omega^1_{X/Y}) \xrightarrow{\sim} \pi_s \qquad ,$$

où $\mathcal{N}_s$ désigne le faisceau conormal à l'immersion s.

COROLLAIRE 2.7. - Pour tout point x de X au-dessus d'un point s de Y, on a un isomorphisme canonique

$$(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \xrightarrow{\sim} m_{X_s,x}/m^2_{X_s,x} \quad .$$

L'isomorphisme 2.7 fait correspondre à la valeur de df en x la classe de $f_x - \varepsilon_x(f_x) \bmod m^2_{X_s,x}$.

PROPOSITION 2.8. - Soit $X = \underset{\sim}{E}^n$ et soient z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ les fonctions coordonnées. Alors $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/k}$ est un Module libre ayant pour base les dz_i (N. B. - On désigne par $\Omega^1_{X/k}$ ou $\underset{\sim}{\Omega}^1_X$ les Modules des différentielles de X au-dessus de l'espace analytique final).

Comme l'Idéal diagonal de $X \times X$ est engendré par les $pr_1^*(z_i) - pr_2^*(z_i)$, on voit que les dz_i engendrent $\underset{\sim}{\Omega}^1_X$. Il reste à montrer que si on a des sections f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathcal{O}_X$ sur un ouvert U, telles que $\sum f_i \, dz_i = 0$, alors les f_i sont nulles. Or pour tout $x \in U$, posant $z'_i = z_i - \varepsilon_x(z_i) \in m_x$, d'où $dz'_i = dz_i$, on aura en vertu de 2.7

$$f_i \, z'_i \equiv 0 \bmod m_x^2$$

d'où $f_i(x) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, puisque les z'_i forment une base de m_x/m_x^2 sur k. Comme x était arbitraire, on en conclut $f_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On laisse au lecteur le soin de déterminer de même les Algèbres de parties principales de $X = \underset{\sim}{E}^n$.

Utilisant 2.1 et le critère de simplicité (VI, 3.1, (iii)) par exemple, on en conclut :

COROLLAIRE 2.9. - Soit $p : X \to Y$ un morphisme simple. Alors $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}$ est un Module localement libre sur X, son rang en tout point $x \in X$ est égal à la dimension relative de X sur Y en x.

3. Caractérisation différentielle des immersions locales, des espaces analytiques simples.

PROPOSITION 3.1. - Soient $p : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques, et

$x \in X$ au-dessus de $s \in Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) p est une immersion locale en x .

(ii) $\mathcal{O}_{X_s,x} \cong k(x)$

(iii) $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}$ est nul en x (donc au voisinage de x).

DÉMONSTRATION. - (i) $\Longrightarrow$ (iii), car si p est une immersion, alors le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est un isomorphisme donc le faisceau conormal est nul. (iii) $\Longrightarrow$ (ii), car en vertu de 2.7, l'anneau local de la fibre X_s en x satisfait à $m_{X_s,x}/m^2_{X_s,x} = 0$, donc il est réduit à son corps résiduel. (ii) $\Longrightarrow$ (i) en vertu de (VI, 1.9) (N. B. - En géométrie algébrique, on a encore l'équivalence de (ii) et (iii), qui sont alors des conditions moins fortes que (i) et expriment seulement que p est "non ramifié" en x).

COROLLAIRE 3.2. - Soient X un espace analytique, $x \in X$, f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ des sections de $\mathcal{O}_X$, définissant un morphisme $f : X \to \underset{\sim}{E}^n$. Pour que p soit une immersion locale en x , il faut et il suffit que les df_i engendrent $\underset{\sim}{\Omega}^1_X$ en x .

C'est un cas particulier de l'équivalence de (i) et (iii) ci-dessus, compte tenu de la formule 4.2 plus bas. Une démonstration directe est facile, par utilisation de (VI, 1.9).

COROLLAIRE 3.3 (Critère jacobien de simplicité). - Soient X un espace analytique, x un point de X et $n = \dim \mathcal{O}_{X,x}$. Conditions équivalentes :

(i) X est simple en x , i. e. $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local régulier (cf. VI, 1.10)

(ii) $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X,x}$ admet un système de n générateurs.

(iii) $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X,x}$ est libre de rang n .

On a (i) $\Longrightarrow$ (iii) en vertu de 2.9, (iii) $\Longrightarrow$ (ii) trivialement, prouvons (ii) $\Longrightarrow$ (i). En effet le nombre minimum de générateurs de $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X,x}$ est égal à la dimension de $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$, donc égal à la dimension de m_x/m_x^2 en vertu de 2.7 donc ne peut être $\leqslant$ dimension de Krull de $\mathcal{O}_{X,x}$ que si ce dernier anneau est régulier.

C. Q. F. D.

REMARQUE 3.4. - On peut prouver que lorsque la caractéristique de k est nulle, on peut remplacer la condition (iii) par la condition plus faible en apparence : $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X,x}$ est libre. Cela n'est plus vrai en caractéristique $p > 0$, comme on le voit sur le cas de l'espace analytique X réduit à un seul point x, d'anneau local $k[t]/(t^p)$.

4. Deux suites exactes canoniques.

PROPOSITION 4.1. - Soient X un espace analytique sur un autre Y, Z un sous-espace analytique de X, défini par un Idéal de présentation finie $\mathcal{J}$ sur un ouvert de X, $i : Z \to X$ l'immersion canonique, n un entier ≥ 0. Alors $\mathcal{P}^{(n)}_{Z/Y}$ est canoniquement isomorphe, comme $\mathcal{O}_Z$-Algèbre augmentée, au quotient de $i^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y})$ par l'Idéal engendré par $d^{(n)}_{X/Y}(\mathcal{J})$.

Ce quotient est aussi le quotient de $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}$ par l'Idéal engendré par $\mathcal{J}$ et $d^{(n)}_{X/Y}(\mathcal{J})$, i. e. par $p_1^*(\mathcal{J})$ et $p_2^*(\mathcal{J})$, où les p_i sont les deux homomorphismes d'Anneaux $\mathcal{O}_X \to \mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}$ définis par les deux projections $pr_i : X \times_Y X \to X$. Notons qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] & Z \arrow[l, "i"'] \arrow[d] \\ X \times_Y X & Z \times_Y Z \arrow[l, "i \times_Y i"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes diagonaux, qui est cartésien, car i est un monomorphisme. En vertu de 1.1, on en déduit un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \Delta^n_{X/Y} \arrow[d, "\pi_X"'] & \Delta^n_{Z/Y} \arrow[l] \arrow[d, "\pi_Z"] \\ X \times_Y X & Z \times_Y Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

qui montre que $\Delta^n_{Z/X}$ est le sous-espace analytique de $\Delta^n_{X/Y}$ image inverse par π_X du sous-espace analytique $Z \times_Y Z$ de $X \times_Y X$. Or ce dernier sous-espace analytique est défini par l'Idéal $pr_1^*(\mathcal{J}) + pr_2^*(\mathcal{J})$ (où les pr_i désignent les projections de $X \times_Y X$ sur ces facteurs, et où pour simplifier les notations, on suppose $\mathcal{J}$ défini sur tout X, ce qui est loisible). L'image inverse de ce dernier Idéal dans $\Delta^n_{X/Y}$ n'est autre, en vertu des définitions, que $p_1^*(\mathcal{J}) + p_2^*(\mathcal{J})$, et il s'ensuit que $\Delta^n_{Z/Y}$ s'identifie au sous-espace analytique de $\Delta^n_{X/Y}$ défini par cet Idéal.

C. Q. F. D.

Faisant $n = 1$ et interprétant le résultat obtenu en termes de formes différentielles, on trouve :

COROLLAIRE 4.2. - Soit $\mathcal{N}_i = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ le Module conormal à Z dans X, on a alors une suite exacte de Modules sur Z :

$$\mathcal{N}_i \to i^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}) \to \underset{\sim}{\Omega}^1_{Z/Y} \to 0 \qquad ,$$

où la deuxième flèche est l'homomorphisme canonique défini par le Y-morphisme i (cf. n° 2), et la première est déduite par passage au quotient de l'homomorphisme $\mathcal{J} \to \underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}$ induit par l'opérateur d.

REMARQUE 4.3. - On fera attention que la première flèche dans 4.2 n'est en général pas injective. On peut montrer qu'il en est cependant ainsi si X et Z sont simples sur Y.

PROPOSITION 4.4. - Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des morphismes d'espaces analytiques, et n un entier ≥ 0. Considérons les homomorphismes fonctoriels (définis au début du n° 2)

$$\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y} \leftarrow \mathcal{P}^{(n)}_{X/Z} \leftarrow f^*(\mathcal{P}^{(n)}_{Y/Z}) \qquad ;$$

alors ces homomorphismes définissent un isomorphisme de $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}$ avec le quotient de l'Algèbre $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Z}$ par l'Idéal engendré par l'image de $f^*(\mathcal{P}^{(n)+}_{Y/Z})$ (où le signe $+$ désigne l'Idéal d'augmentation).

Considérons en effet le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X \times_Y X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d, "j'"] \\
X \times_Z X \arrow[r, "f \times_Z f"'] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

où i , j' et ji sont des morphismes diagonaux, u étant le morphisme structural. On lit sur la première colonne que le n-ième invariant normal $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}$ de l'immersion i est le quotient du n-ième invariant normal $\mathcal{P}^{(n)}_{X/Z}$ de l'immersion ji par l'Idéal définissant l'immersion j . Comme le carré inférieur du diagramme est cartésien, cet Idéal est aussi l'image inverse par u de l'Idéal diagonal définissant j' , ce qui implique qu'on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n_{X/Y} \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
\Delta^n_{X/Z} \arrow[r] & \Delta^n_{Y/Z}
\end{tikzcd} .$$

La proposition en résulte.

Faisant $n = 1$, l'énoncé précédent peut se mettre sous la forme suivante :

COROLLAIRE 4.5. - On a une suite exacte

$$f^*(\Omega^1_{Y/Z}) \to \Omega^1_{X/Z} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

(où les homomorphismes sont ceux définis au n° 2).

REMARQUE 4.6. - On fera attention qu'en général la première flèche de ce diagramme n'est pas injective. Il en est cependant ainsi si f est un morphisme simple.

5. Prolongements infinitésimaux de morphismes.

Soient $p : X \to Y$ un espace analytique X au-dessus d'un autre Y , $q : Y' \to Y$ un espace analytique au-dessus du même Y , Y'_0 un sous-espace analytique de Y défini par un Idéal de type fini $\mathcal{J}$; on suppose

$$\mathcal{J}^{n+1} = 0 \quad ,$$

i. e. que Y' est dans le voisinage infinitésimal d'ordre n de Y'_o. Soit $f : Y' \to X$ un Y-morphisme, et $f_o : Y'_o \to X$ sa restriction à Y'_o, de sorte qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] & Y'_o \arrow[l, "f_o"'] \arrow[d, "i"] \\ Y & Y' \arrow[l, "q"] \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd} \quad .$$

Nous nous proposons de déterminer les Y-morphismes $f' : Y' \to X$ ayant même restriction f'_o à Y'_o que f, c'est-à-dire $f' i = fi$. Pour ceci, introduisons

$$X' = X \times_Y Y' \ , \quad X'_o = X \times_Y Y'_o = X' \times_{Y'} Y'_o \quad ,$$

et utilisons la correspondance biunivoque canonique entre les Y-morphismes de Y' (resp. Y'_o) dans X, et les sections de X' sur Y' (resp. de X'_o sur Y'_o). A f, f_o correspondent donc des sections g de X' sur Y' et sa restriction g_o, section de X'_o sur Y'_o, et notre question initiale devient équivalente à celle de déterminer les sections g' de X' sur Y' ayant même restriction à Y'_o que g, savoir g_o. Donc ensemblistement g' doit coïncider avec g, et par suite est donné par un homomorphisme de faisceaux de k-algèbres $g^{-1}(\mathcal{O}_{X'}) \to \mathcal{O}_{Y'}$. Ce dernier s'annule sur la puissance n-ième de l'homomorphisme composé de précédent avec l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{O}_{Y'_o}$, et a fortiori sur la puissance n-ième du noyau de l'homomorphisme $g^{-1}(\mathcal{O}_{X'}) \to \mathcal{O}_{Y'}$ défini par g lui-même. On peut exprimer ce fait en disant que g' se factorise nécessairement par le voisinage infinitésimal d'ordre n de l'immersion $g' : Y' \to X'$, que nous dénoterons par $Y'^{(n)}$. Considérant $Y'^{(n)}$ comme un espace analytique au-dessus de Y' grâce au morphisme induit par la projection $X' \to Y'$, et introduisant de même le voisinage infinitésimal d'ordre n de g_o, soit $Y'^{(n)}_o$, qui s'identifie à $Y'^{(n)} \times_{Y'} Y'_o$ en vertu de 1.1, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y'^{(n)} \arrow[d] & Y'^{(n)}_o \arrow[l] \arrow[d] \\ Y' \arrow[u, dashed, bend right, "g^{(n)}"'] & Y'_o \arrow[l, "i"] \arrow[u, dashed, bend right, "g_o^{(n)}"'] \end{tikzcd}$$,

où $g^{(n)}$ et $g_o^{(n)}$ sont les morphismes induits par g , g_o , et nous sommes ramenés maintenant à trouver les sections $g'^{(n)}$ de $Y'^{(n)}$ sur Y' ayant même restriction $g_o^{(n)}$ que $g^{(n)}$. Or ici les espaces topologiques sous-jacents aux quatre espaces analytiques en présence sont les mêmes, et nous sommes ramenés à une question de faisceaux de k-algèbres sur Y' . Pour la formuler, remarquons qu'en vertu de 2.4 et de l'assertion de compatibilité qui précède 2.1, on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{Y'}$ -Algèbres augmentées

$$\mathcal{O}_{Y'}(n) \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X'/Y'}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \qquad ,$$

et de même

$$\mathcal{O}_{Y'_o}(n) \xrightarrow{\sim} f_o^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \xrightarrow{\sim} f^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'_o}$$

avec

$$\mathcal{O}_{Y'_o} = \mathcal{O}_{Y'}/\mathcal{J} \qquad .$$

Considérons donc le diagramme de faisceaux sur Y'

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{Y'_o} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{J}f^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \arrow[r] & f^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \arrow[r] & f_o^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad ,$$

qui est commutatif et dont les deux lignes sont exactes, on a de plus un homomorphisme d'augmentation de $\mathcal{O}_{Y'}$-Algèbres

$$u = g^{(n)*} \ : \ f^*(\mathcal{P}^{(n)}_{X/Y}) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}$$

induisant

$$u_o = g_o^{(n)*} : f_o^*(\mathcal{P}_{X/Y}^{(n)}) \to \mathcal{O}_{Y'_o} \quad .$$

Ceci posé, on a donc :

PROPOSITION 5.1. - Les notations étant celles du début du numéro, l'ensemble $E(f_o)$ des Y-morphismes $f' : Y' \to X$ qui sont tels que $f' i = f_o$, est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{O}_{Y'}$-algèbres

$$v : f^*(\mathcal{P}_{X/Y}^{(n)}) \to \mathcal{O}_{Y'}$$

tels que le morphisme déduit par réduction mod $\mathcal{J}$

$$v_o : f_o^*(\mathcal{P}_{X/Y}^{(n)}) \to \mathcal{O}_{Y'_o}$$

soit égal à l'augmentation u_o .

Le cas le plus important est celui où on se donne aussi une rétraction de Y' sur Y'_o , i. e. un morphisme $j : Y' \to Y'_o$ tel que $ji = \mathrm{id}_{Y'_o}$ ou ce qui revient au même un homomorphisme de faisceaux de k-algèbres

$$\mathcal{O}_{Y'_o} \to \mathcal{O}_{Y'}$$

relevant l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Y'} \to \mathcal{O}_{Y'_o}$, de sorte que $\mathcal{O}_{Y'}$ <u>devient une $\mathcal{O}_{Y'_o}$-algèbre augmentée</u>. Etant donné alors un Y-morphisme $f_o : Y'_o \to X$, il y a une façon canonique de le relever par $f = f_o j$, et on suppose que f a été choisi ainsi. Alors, posant pour abréger

$$(*) \qquad \mathcal{O}_{Y'_o} = \mathcal{C}_o \ , \quad \mathcal{O}_{Y'} = \mathcal{A} \ , \quad f_o^*(\mathcal{P}_{X/Y}^{(n)}) = \mathcal{B}_o \ , \quad f^*(\mathcal{P}_{X/Y}^{(n)}) = \mathcal{B} \qquad ,$$

on aura un isomorphisme de $\mathcal{C}$-Algèbres augmentées :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_o \otimes_{\mathcal{C}_o} \mathcal{A}$$

(résultant des définitions et de $f = f_o j$). Donc les homomorphismes des $\mathcal{A}$-Algèbres v de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ correspondent biunivoquement aux homomorphismes de $\mathcal{A}_o$-Algèbres w de $\mathcal{B}_o$ dans $\mathcal{A}$, et l'homomorphisme $v_o : \mathcal{B}_o \to \mathcal{A}_o$ déduit de v par réduction mod $\mathcal{J}$ n'est autre que le composé $\mathcal{B}_o \xrightarrow{w} \mathcal{A} \to \mathcal{A}_o$, où la deuxième flèche est l'homomorphisme canonique. On obtient ainsi :

COROLLAIRE 5.2. - Sous les conditions précédentes, l'ensemble $E(f_0)$ des Y-morphismes $f' : Y' \to X$ tels que $f' i = f_0$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{A}_0$-Algèbres $w : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{A}$ qui relèvent l'homomorphisme d'augmentation $\mathcal{B}_c \to \mathcal{A}_0$ (où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ sont définis dans (*) ci-dessus).

Cela ramène donc le problème géométrique de l'extension infinitésimale d'un morphisme d'espaces analytiques, à des questions standard de théorie des algèbres. Lorsque $n = 1$, 5.1 s'explicite de la façon suivante en termes des faisceaux de différentielles :

COROLLAIRE 5.3. - Sous les conditions de 5.1 (donc sans supposer l'existence d'une rétraction de Y' sur Y'_0), mais supposant en plus que $n = 1$, i. e. que $\mathcal{J}$ est de carré nul, l'ensemble $E(f_0)$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble

$$G = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(f_c^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}), \mathcal{J}) \quad ,$$

et est donc muni d'une structure de groupe, et a fortiori d'ensemble principal homogène sous le groupe G. Cette dernière structure ne dépend pas du choix du prolongement f de f_0 en un Y-morphisme $Y' \to X$, (lequel choix a uniquement pour rôle de "fixer l'origine" dans l'ensemble principal homogène obtenu).

On laisse au lecteur la vérification de cette invariance. On notera que sous les conditions de 5.2, l'ensemble principal homogène envisagé ici a en outre une origine naturelle, savoir $f = f_0 j$.

Si on part de f_c, mais qu'on ne sait pas a priori s'il existe une extension f de f_0 en un Y-morphisme $Y' \to X$, il y a lieu d'envisager le faisceau $\mathcal{E}(f_0)$ sur Y' des germes d'extensions de f_0 en des Y-morphismes $f : Y' \to X$. Appliquant 5.1, on voit que le faisceau

$$\mathcal{G} = \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{Y'_0}}(f_c(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}), \mathcal{J})$$

opère de façon naturelle sur le faisceau $\mathcal{E}(f_0)$, et que pour tout ouvert $U \subset Y'$, $\Gamma(U', \mathcal{E}(f_0)) = E(f_0|U)$ est vide ou un ensemble principal homogène sous $\Gamma(U, \mathcal{G})$. On dit sous ces conditions que $\mathcal{E}(f_0)$ est un faisceau <u>formellement</u>

<u>principal homogène sous le faisceau en groupes</u> $\mathcal{G}$. On a ainsi obtenu :

COROLLAIRE 5.4. - Sous les conditions de 5.3 le faisceau $\mathcal{E}(f_o)$ des germes de prolongements de f_o un Y-morphisme $Y' \to X$ est un faisceau formellement principal homogène sous le faisceau $\mathcal{G}$. En particulier, si le prolongement est possible localement, par exemple si X est <u>simple</u> sur Y (VI, 3.1, (iv)), $\mathcal{E}(f_o)$ est un faisceau principal homogène sous $\mathcal{G}$, donc donne lieu à une classe de cohomologie canonique

$$c(f_o) \in H^1(Y'_c\ ,\ \mathcal{G}) \qquad ,$$

dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour l'existence d'un prolongement global de f_o en un Y-morphisme $f : Y' \to X$.

Rappelons d'ailleurs que lorsque X est simple sur Y , alors d'après 2.9, $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}$ est un Module localement libre sur X , et on peut écrire aussi

$$\mathcal{G} = f_o(\mathfrak{G}_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'_c}} \mathcal{J} \qquad ,$$

avec

$$\mathfrak{G}_{X/Y} = \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X/Y}\ ,\ \mathcal{O}_X) \qquad .$$

Ce dernier faisceau sur X , qui est défini d'ailleurs pour tout espace analytique X sur un autre Y , est appelé <u>faisceau des dérivations de</u> X <u>sur</u> Y , ou le <u>faisceau tangent de</u> X <u>relativement à</u> Y , ou le <u>faisceau des automorphismes infinitésimaux de</u> X <u>sur</u> Y .

Nous renvoyons le lecteur à [4], III, n° 5 pour diverses variantes utiles qui se déduisent formellement de 5.3 et 5.4, permettant dans certains cas de construire de proche en proche des prolongements infinitésimaux de f_o d'ordre arbitraire.

6. <u>Prolongement infinitésimal de structures complexes.</u>

PROPOSITION 6.1. - Soient $p : X \to Y$ un espace analytique X sur un autre Y , Y_o un sous-espace analytique de Y défini par un Idéal $\mathcal{J}$ de type fini tel que $\mathcal{J}^2 = 0$, $X_o = X \times_Y Y_o$ et $p_c : X_o \to Y_c$ le morphisme structural. Alors le faisceau sur X des germes de Y-automorphismes de X induisant l'identité sur X_o est canoniquement isomorphe à

$$\mathcal{S} = \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{X_o}}(\underset{\sim}{\Omega}^1_{X_o/Y_o} , \mathcal{J}.\mathcal{O}_X) \quad .$$

Il suffit d'appliquer 5.3 en y remplaçant X , Y , Y' , Y'_o par X , Y , X , X_o , et f par le morphisme identique id_X . Lorsque $\underset{\sim}{\Omega}^1_{X_o/Y_o}$ est localement libre sur X_o (ce qui est le cas en particulier si X_o est simple sur Y_o , et a fortiori si X est simple sur Y), ou si $\mathcal{J}.\mathcal{O}_X$ est localement libre sur X_o , on peut aussi écrire

$$\mathcal{S} = \mathcal{G}_{X_o/Y_o} \otimes_{\mathcal{O}_{X_o}} \mathcal{J}.\mathcal{O}_X \quad ,$$

où $\mathcal{G}_{X_o/Y_o}$ est le faisceau tangent de X_o sur Y_o ; enfin si X est plat sur Y (en particulier si X est simple sur Y), on a aussi $\mathcal{J}.\mathcal{O}_X = p^*(\mathcal{J})$ d'où

$$\mathcal{J}.\mathcal{O}_X = p_o^*(\mathcal{J}) \quad .$$

Sous les conditions de 6.1, et supposant X simple sur Y , considérons l'ensemble $E(X_o)$ des classes, à un isomorphisme près, d'espaces analytiques X' simples sur Y , __munis__ d'un Y_o-isomorphisme

$$X_o \xrightarrow{\sim} X' \times_Y Y_o \quad ;$$

étant entendu qu'on tient compte de cette donnée pour la notion d'isomorphisme envisagée. En vertu de [3], VI, 3.1, (iii) un tel X' est "localement isomorphe" à X sur l'espace X_o . D'après un principe général bien connu, l'ensemble $E(X_o)$ est donc en correspondance biunivoque avec l'ensemble $H^1(X_o , \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est le faisceau des Y-automorphismes de X pour la structure envisagée, i. e. des Y-automorphismes de X qui induisent l'identité sur X_o . Nous venons précisément de déterminer ce faisceau. Donc :

COROLLAIRE 6.2. - L'ensemble $E(X_o)$ des classes, à un isomorphisme près, d'espaces analytiques X' simples sur Y , munis d'un Y_o-isomorphisme $X' \times_Y Y_o \xrightarrow{\sim} X_o$, est en correspondance biunivoque avec $H^1(X_o , \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est le faisceau sur X_o défini dans 6.1.

Cet ensemble est donc muni d'une structure d'__ensemble principal homogène sous le groupe__ $H^1(X_o , \mathcal{S})$, et on constate que cette structure ne dépend pas du choix de la solution X choisie du problème d'extension de structures complexes simples sur la base (ce choix consistant simplement à fixer une origine dans l'ensemble principal homogène envisagé). Nous en laissons la vérification au lecteur.

Un raisonnement à peu près formel développé dans [4], III, 6.3, permet de tirer de 6.1 l'énoncé suivant plus complet que 6.2 :

PROPOSITION 6.3. - Soient Y un espace analytique, Y_o un sous-espace analytique défini par un Idéal de type fini $\mathcal{J}$ tel que $\mathcal{J}^2 = 0$, X_c un espace analytique simple et séparé au-dessus de Y_o, $E(X_o)$ et $\mathcal{G}$ l'ensemble défini dans 6.2 et le faisceau défini dans 6.1. Alors :

(i) Il existe une classe d'obstruction canonique dans $H^2(X_o, \mathcal{G})$, dont l'annulation est nécessaire et suffisante pour qu'on ait $E(X_o) \neq \emptyset$.

(ii) Si cette classe est nulle, alors $E(X_o)$ est de façon naturelle un ensemble principal homogène sous le groupe $H^1(X_o, \mathcal{G})$.

REMARQUES 6.4. - Dans [4] on utilise un recouvrement de X_o par des ouverts affines U_i, tels que dans chaque U_i un prolongement infinitésimal de U_i en un schéma simple sur Y existe. Si on ne veut pas utiliser la théorie des espaces de Stein (remplaçant les schémas affines), on peut faire intervenir un argument de paracompacité, dont le détail est laissé au lecteur, pour choisir des ouverts U_i recouvrant X_o tels que dans chaque $U_i \cap U_j$ les deux structures induites par les prolongements infinitésimaux choisis de U_i et U_j soient isomorphes (et non seulement localement isomorphes) (cf. le livre de GODEMENT [2], Chap. II, lemme 3.8.1). Ce procédé est d'ailleurs artificiel et l'hypothèse de séparation de X_o relativement à Y_o certainement inutile, comme nous l'avions déjà noté dans [4], III, 6.4.

6.5. - Nous nous somme bornés ici à l'étude des questions de prolongements infinitésimaux de morphismes, ou de structures complexes, lorsqu'on fait des hypothèses de simplicité relative, assurant que "localement" les choses se passent bien. Il importerait cependant de faire aussi une étude détaillée du prolongement infinitésimal dans des cas où on ne fait plus de telles hypothèses. Par exemple, une étude géométrique de la compactification naturelle (sans doute celle de BAILY-SATAKE) des espaces modulaires d'échelon n pour les courbes de genre g, est certainement liée à l'étude des familles de courbes de genre g pouvant avoir des singularités (dont les types peuvent d'ailleurs se préciser par des arguments heuristiques). L'étude infinitésimale des déformations de telles courbes singulières devrait nous indiquer par exemple si (pour un n assez grand) cette compactification est non singulière, ou permettre de déterminer quand l'espace modulaire local pour les déformations d'une courbe donnée est non singulier. Il y aurait lieu également de préciser les phénomènes d'obstruction supérieure liés au procédé des prolongements infinitésimaux de proche en proche.

7. Linvariant de Kodaira-Spencer.

Soit $p : X \to Y$ un morphisme simple d'espaces analytiques. Considérons le voisinage infinitésimal du premier ordre $\Delta^1 = \Delta^1_Y$ de la diagonale de $Y \times Y$, et ses deux projections

$$p_1 \, , \, p_2 : \Delta^1 \to Y \qquad ,$$

posons

$$X_i = X \times_Y (\Delta^1 \, , \, p_i) \qquad \text{pour } i = 1 \, , \, 2 \qquad ,$$

d'où deux espaces analytiques simples sur Δ^1, dont les restrictions à Y sont canoniquement isomorphes à X. En vertu de 6.2, l'obstruction à l'existence d'un Δ^1-isomorphisme $X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$ induisent l'identité sur $X = X_i \times_{\Delta^1} Y$, est un élément bien déterminé

$$c(X/Y) \in H^1(X \, , \, \mathfrak{G}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\Omega^1_Y)) \qquad ,$$

qu'on appellera la classe de Kodaira-Spencer de X sur Y. Elle est définie ici sans hypothèse de régularité locale sur Y. Considérons l'image canonique de $c(X/Y)$:

$$c'(X/Y) \in \Gamma(Y \, , \, R^1 \, p_*(\mathfrak{G}_{X/Y}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\Omega^1_Y)) \qquad ,$$

son annulation en un point $y \in Y$ est évidemment nécessaire et suffisante pour l'existence d'un voisinage ouvert U de y dans Δ^1 tel qu'il existe un U-isomorphisme $X_1|U \xrightarrow{\sim} X_2|U$ induisant l'identité sur $X|U$.

Lorsque X est "trivial sur Y", i. e. est Y-isomorphe à un espace analytique $Y \times Z$, où Z est un espace analytique, alors $c(X/Y)$ est évidemment nul, car alors $X \times Y$ et $Y \times X$ sont $Y \times Y$-isomorphes (car $Y \times Y$-isomorphes à $Y \times Y \times Z$), donc a fortiori leurs restrictions à Δ^1 sont Δ^1-isomorphes. De même $c'(X/Y)$ est nulle lorsque X est "localement trivial sur Y", i. e. lorsque tout point de Y a un voisinage ouvert U sur lequel X soit trivial.

Rappelons que la réciproque de ce dernier fait est vraie, d'après KODAIRA-SPENCER, lorsqu'on est sur le corps des complexes, si on suppose Y simple et X propre sur Y, [1]. Dans le cas d'ailleurs où Y est simple, donc $\underset{\sim}{\Omega}^1_Y$ est localement libre et isomorphe au dual du faisceau localement libre $\mathfrak{G}_X$ des dérivations de Y, on a un isomorphisme canonique

$$R^1\, p_*(\mathfrak{G}_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y} (\underset{\sim}{\Omega}^1_Y)) \xrightarrow{\sim} \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(\mathfrak{G}_Y\,,\, R^1\, p_*(\mathfrak{G}_{X/Y})) \qquad ,$$

de sorte qu'on peut aussi considérer $c'(X/Y)$ comme un homomorphisme

$$c'(X/Y)\ :\ \mathfrak{G}_Y \to R^1\, p_*(\mathfrak{G}_{X/Y}) \qquad ;$$

c'est le point de vue de KODAIRA-SPENCER, adopté dans [1].

J'ignore si l'annulation de $c'(X/Y)$ est encore suffisante pour la locale trivialité de X sur Y en supposant seulement X propre sur Y, sans hypothèse de non singularité sur Y ; le premier cas à regarder serait celui où Y est réduit à un point d'anneau local artinien, i. e. le cas d'une déformation infinitésimale d'une structure complexe. Une autre question suggérée par la définition de $c'(X/Y)$ adoptée ici est la suivante : On suppose que Y est au-dessus d'un espace analytique S, et on trouve alors par le procédé précédent une classe

$$c(X/Y/S) \in H^1(X\,,\, \mathfrak{G}_{X/Y} \otimes p^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{Y/S})) \qquad ,$$

d'où une classe

$$c'(X/Y/S) \in \Gamma(Y\,,\, R^1\, p_*(\mathfrak{G}_{X/Y} \otimes p^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{Y/S}))) \qquad ,$$

qui sont d'ailleurs images des classes précédentes $c(X/Y)$ et $c'(X/Y)$ par les homomorphismes canoniques évidents. L'annulation de $c'(X/Y/S)$ est nécessaire pour que X soit localement au-dessus de Y isomorphe à l'image inverse d'un espace analytique simple sur S. Sous quelles conditions a-t-on encore une réciproque, généralisant le théorème cité de Kodaira-Spencer ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] DOUADY (Adrien). - Déformations régulières, Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 3, 8 p.

[2] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris,

Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction en géométrie analytique, I-VI., Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 7-13.

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Séminaire de géométrie algébrique, n° III. - Paris, Institut des Hautes Etudes scientifiques, 1960/61.