Alexander Grothendieck

Techniques de construction en géométrie analytique. IX. Quelques problèmes de modules

Séminaire Henri Cartan, tome 13, n° 2 (1960-1961), exp. n° 16, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1960-1961__13_2_A3_0>

TECHNIQUES DE CONSTRUCTION EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par Alexander GROTHENDIECK

IX. QUELQUES PROBLÈMES DE MODULES

Dans cet exposé, nous passons en revue quelques problèmes de "modules" typiques. Contrairement à notre intention première, nous ne démontrerons pas ici le théorème d'existence des espaces modulaires de Hilbert, nous bornant à renvoyer à l'exposé assez détaillé [3], IV, dans le cadre des schémas, qui s'applique aussi en principe en géométrie analytique ([2], VIII, 3). C'est ce théorème qui sera l'outil essentiel dans l'exposé suivant pour la construction de l'espace de Teichmüller défini dans [2], I ; nous n'utiliserons donc que le n° 1 du présent exposé.

1. Les espaces modulaires de Hilbert.

Soient X un espace analytique sur un autre S, $\mathcal{E}$ un Module cohérent sur X ; posons, pour tout espace analytique T au-dessus de S,

$$\mathfrak{F}(T) = \text{ensemble des Modules cohérents quotients de } \mathcal{E}_T \text{ qui sont plats sur } T \text{, et à support propre sur } T ,$$

où on pose comme d'habitude $X_T = X \times_S T$, $\mathcal{E}_T$ = image inverse de $\mathcal{E}$ sur X_T. Le cas le plus important est celui où X est propre sur S, donc X_T est propre sur T, et où donc $\mathfrak{F}(T)$ est simplement l'ensemble des Modules cohérents quotients de $\mathcal{E}_T$ qui sont plats sur T. Intuitivement, on regarde $\mathfrak{F}(T)$ comme l'ensemble des "familles de Modules cohérents quotients de $\mathcal{E}$", paramétrées par T. Lorsque T varie dans la catégorie $\underline{(An)}_{/S}$ des espaces analytiques sur S, $\mathfrak{F}(T)$ est un foncteur contravariant en T, à valeurs dans la catégorie des ensembles, comme il résulte de [2], VI, 2.4.

CONJECTURE 1. - Le foncteur contravariant $\mathfrak{F}$ sur $\underline{(An)}_{/T}$ est représentable.

Lorsqu'il l'est, nous désignerons l'espace analytique sur S qui représente ce foncteur par $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/X/S}$. Le cas le plus important est celui où $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$, donc $\mathfrak{F}(T)$ = ensemble des sous-espaces analytiques fermés de X_T, qui sont propres et plats sur T, qu'on interprète intuitivement comme l'ensemble des familles de sous-espaces analytiques propres de X/S paramétrés par T/S. On pose alors

$$\underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_{X/S} = \underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{O}_X/X/S} \qquad ,$$

et l'espace analytique représentatif est appelé <u>l'espace modulaire de Hilbert de</u> X/S .

Nous admettrons ici le théorème suivant, (comparer [3], IV) :

THÉORÈME 1.1. - Si X est projectif sur S , en particulier si X est S-isomorphe à un sous-espace analytique fermé de $\underset{\sim}{P}^r_S = S \times \underset{\sim}{P}^r$, alors pour tout Module cohérent $\mathcal{E}$ sur X , $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/X/S}$ existe. En particulier $\underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$ existe.

Le cas général de ce théorème se ramène assez facilement au cas où $X = \underset{\sim}{P}^r_S$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^N_X$, grâce à [2], VIII, 3.1. Utilisant [2], IV, 3.1, on est donc ramené au cas où S est l'espace analytique final, réduit à un point, et $X = \underset{\sim}{P}^r$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^N_{\underset{\sim}{P}^r}$. On a alors construit dans [3], IV, un schéma de modules, somme d'une suite de schémas projectifs sur $\underset{\sim}{C}$ (ou même sur $\underset{\sim}{Z}$, si on y tient), et il résulte de [2], VIII, 3.1, que l'espace analytique associé à ce schéma est une solution du problème.

En pratique, on a à considérer des sous-foncteurs $\mathfrak{F}'(T)$ du foncteur $\mathfrak{F}(T)$, qu'on se propose de représenter ; le critère habituel [2], IV, 5.9, permet souvent de s'assurer que le foncteur $\mathfrak{F}'$ est représentable par une partie ouverte de l'espace analytique $\underset{\sim}{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{E}/X/S}$ qui représente $\mathfrak{F}$. Ainsi :

COROLLAIRE 1.2. - Sous les conditions de 1.1, les sous-foncteurs suivants du foncteur de Hilbert $T \rightsquigarrow \mathfrak{F}(T)$ sont représentables par des ouverts de l'espace modulaire de Hilbert $\underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_{X/S}$:

a. $\mathfrak{F}_1(T)$ = ensemble des sous-espaces analytiques fermés de X_T qui sont <u>simples</u> sur T .

b. $\mathfrak{F}_2(T)$ = ensemble des sous-espaces analytiques fermés de X_T <u>simples sur</u> T et dont les fibres ont exactement n <u>composantes connexes</u>.

c. $\mathfrak{F}_3(T)$ = ensemble des sous-espaces analytiques fermés de X_T plats sur T dont les fibres sont toutes de <u>dimension</u> m .

d. $\mathfrak{F}_4(T)$ = ensemble des sous-espaces analytiques fermés de X_T plats sur T dont les fibres ont un genre arithmétique donné χ .

Le cas (a) résulte du fait que si Z est plat sur T , l'ensemble des points de Z qui sont simples sur leur fibre, i. e. en lesquels Z est simple sur T ([2], VI, 3.1 (i)) est ouvert, donc si Z est propre sur T l'ensemble des $t \in T$, dont la fibre est simple, est ouvert. Le cas (b) résulte du fait que si Z est simple et propre sur T, le nombre des composantes connexes de Z_t est une fonction localement constante en t ; c'est là une conséquence des résultats de [2], VIII, 1, mais qui dans le cas qui nous occupe où Z est projectif sur S, peut se déduire grâce à [2], VIII, 3, du fait analogue connu en géométrie algébrique, et qui s'obtient en remarquant que dans la factorisation de Stein $Z \to T' \to T$ de $Z \to T$, $T' \to T$ est un revêtement étalé de T ([1], III, 7), donc le nombre des points de T' sur t est une fonction localement constante en t. Le cas (c) résulte du fait que si Z est propre et plat sur T, la fonction $t \rightsquigarrow \dim Z_t$ sur T est localement constante ; ici encore, il suffit de l'établir quand Z est projectif sur T, où cela résulte du fait analogue déjà connu en géométrie algébrique ([1], IV). Enfin le cas (d) est une conséquence de [2], VIII, 1.7 ; en l'occurrence, il suffit d'ailleurs encore d'invoquer le résultat correspondant en géométrie algébrique, démontré dans [1], III, 7.

En conjuguant des conditions sur des éléments de $\mathfrak{F}(T)$, dont chacune s'exprime par un ouvert dans l'espace modulaire de Hilbert, on trouve évidemment une condition exprimée par l'ouvert intersection. Donc conjuguant les cas (b), (c), (d) précédents, avec $n = 1$, $m = 1$, on trouve :

COROLLAIRE 1.3. - Sous les conditions de 1.1, le sous-foncteur suivant $\mathfrak{G}$ du foncteur de Hilbert $\mathfrak{F}$ est représentable par un ouvert de l'espace modulaire de Hilbert : $\mathfrak{G}(T)$ = ensemble des sous-espaces analytiques fermés Z de X_T qui sont des "courbes de genre g" au-dessus de T, au sens suivant : Z est simple et propre sur T, à fibres connexes, de dimension 1 et de genre g (i. e. de genre arithmétique $1 - g$).

(N. B. - Pour $g \neq 1$, c'est la notion utilisée dans l'exposé [2], 1.1).

Nous renvoyons à [3], IV, 4, pour d'autres cas, où des foncteurs remarquables sont représentés par des ouverts dans un espace modulaire de Hilbert, tels les espaces modulaires $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$, $\prod_{X/S} Z$, $\underline{\mathrm{Isom}}_S(X , Y)$, $\underline{\mathrm{Imm}}_S(X , Y)$, etc, tous d'usage fréquent en pratique. Nous renvoyons également à [3], IV, 5, pour l'étude différentielle des espaces modulaires de Hilbert, permettant de reconnaître parfois si l'espace modulaire de Hilbert est simple sur S en un de ses points. Nous allons ici au contraire donner un exemple d' un phénomène cité dans [3], IV, 5, d'une surface projective non singulière X et d'un point z de $\underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_X = H$, correspondant à une courbe non singulière Z sur X, tel que z soit isolé dans H et que son anneau local dans H soit un anneau (nécessairement artinien) <u>non réduit</u>, i. e. l'espace tangent de Zariski de H en z est $\neq 0$ (Dans la terminologie classique, $\{z\}$ est alors une famille algébrique maximale de diviseurs sur X, et le "système linéaire caractéristique" de la famille en z n'est pas complet). Notre exemple est inspiré d'un exemple plus compliqué de ZAPPA.

Soient Y un espace analytique projectif, $\mathcal{E}$ un Module cohérent localement libre sur Y, $X = \underset{\sim}{P}(\mathcal{E})$ le fibré projectif associé ([2], V, 2.2), $f : X \to Y$ son morphisme structural, g une section de X sur Y, défini donc par un Module quotient inversible $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$, et soit Z le sous-espace analytique fermé de X défini par l'immersion $g : Y \to X$. Donc le morphisme $Z \to Y$ induit par f est un isomorphisme. Il en résulte facilement que les points z' sur $H' = \underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_X$ voisins du point z défini par Z correspondent à des sous-espaces analytiques Z' de X ayant la même propriété, à savoir que le morphisme $Z' \to Y$ induit par f est un isomorphisme (comparer [2], VIII, 2.2, où il suffit de remplacer les mots "immersion fermée" par "isomorphisme", la démonstration étant encore analogue à [2], VIII, 2.2, et en fait plus simple). Donc pour z' voisin de z, Z' est défini par une section g' de X sur Y, i. e. par un Module inversible quotient $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{E}$. Supposons pour simplifier que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y$ (cas auquel on peut d'ailleurs toujours se ramener en tensorisant $\mathcal{E}$ par $\mathcal{L}^{\otimes -1}$, ce qui ne change pas X), alors pour z' voisin de z, le point u' de l'espace modulaire de Picard $P = \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X$ (cf. n° 3) défini par $\mathcal{L}'$ est voisin de l'origine u, pour z' voisin de z (En fait, on a un morphisme de l'ouvert $H' = \underset{\sim}{\prod_{Y/C}} X/Y$ de H représentant les sections de X sur Y, dans l'espace modulaire de Picard P, comme on voit sur les foncteurs associés). Soit $\mathcal{F}$ le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathcal{E} \to \mathcal{L} = \mathcal{O}_Y$; on a une suite exacte canonique

$$0 \to \mathcal{O}_Y \to \check{\mathcal{E}} \to \check{\mathcal{F}} \to 0 \quad ,$$

d'où une suite exacte en tensorisant avec $\mathcal{L}'$:

$$0 \to \mathcal{L}' \to \check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{L}' \to \check{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{L}' \to 0 \quad .$$

La donnée de z', i. e. de g', équivaut à la donnée d'un $\mathcal{L}'$ (correspondant à un $u' \in P$ voisin de u) et à un homomorphisme surjectif $\mathcal{E} \to \mathcal{L}'$, défini donc par une section φ' de $\check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{L}'$. Supposons maintenant, pour simplifier, Y

connexe et non singulier, et qu'on ait :

a. Pour u' voisin de u et distinct de u, $\Gamma(Y, \check{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{L}') = 0$,

b. $\dim \Gamma(Y, \check{\mathcal{E}}) = 1$,

c. $\Gamma(Y, \check{\mathcal{F}}) \neq 0$.

Les conditions (a) et (b) impliquent alors que z est point isolé de H, car si z' voisin de z correspond à $u' \in P$ et à une section φ' de $\check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{L}'$, cette dernière sera en vertu de (a) une section de $\mathcal{L}'$, donc serait nulle si on avait $u' \neq u$; (car $\mathcal{L}'$ sera algébriquement équivalent à 0 pour u' voisin de u, donc ne peut alors avoir de section non nulle que si $\mathcal{L}$ est le faisceau trivial) ; cela montre donc qu'on a $\mathcal{L}' \cong \mathcal{O}_Y$, donc en vertu de (b) la section φ' est proportionnelle à φ, donc définit le même quotient de $\mathcal{E}$ que φ, d'où $z' = z$. D'autre part un calcul facile montre que l'image inverse par la section g du Module $\mathcal{G}_{X/Y}$ tangent à X relativement à Y est isomorphe à $\check{\mathcal{F}} \otimes \check{\mathcal{L}} \cong \check{\mathcal{F}}$ (c'est par exemple un cas particulier de la formule générale qui fait suite à [3], IV, 5.3, donc l'espace tangent de Zariski à H en z, interprété comme l'ensemble des morphismes dans H de l'espace analytique D réduit à un point avec l'anneau local $\underset{\sim}{C}[t]/(t^2)$, est canoniquement isomorphe (en vertu de la définition de H et de [2], VII, 5.3, à $\Gamma(Y, \check{\mathcal{F}})$, qui est $\neq 0$ d'après l'hypothèse (c).

Il reste à expliciter un cas où les hypothèses (a), (b), (c) sont vérifiées. Je dis qu'il suffit de prendre pour $\mathcal{E}$ une <u>extension non triviale de $\mathcal{O}_Y$ par $\mathcal{O}_Y$</u>, de sorte que $\mathcal{L} \cong \mathcal{F} \cong \mathcal{O}_Y$. L'argument précédent montre que (a) est vérifié, de plus (c) est trivialement vérifié, et enfin (b) est vérifié, car une section de $\mathcal{E}$ qui ne proviendrait pas d'une section de $\mathcal{F}$, donc définirait une section non nulle de $\mathcal{E}/\mathcal{F} = \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_Y$, définirait un splittage de l'extension $\mathcal{E}$, contrairement à l'hypothèse que cette extension n'est pas triviale. D'ailleurs il existe une extension non triviale de $\mathcal{O}_Y$ par lui-même si et seulement si $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \neq 0$. On peut donc prendre pour Y n'importe quelle courbe projective de genre $g \geqslant 1$, et pour X une surface réglée sur la courbe Y.

En conclusion, l'existence d'éléments nilpotents dans les anneaux locaux des espaces modulaires de Hilbert doit être considéré comme un phénomène très fréquent, se présentant dans des situations des plus simples et des plus classiques. Ce n'est qu'en tenant compte de ces éléments nilpotents qu'on parvient à une compréhension de la structure infinitésimale de ces espaces modulaires.

2. Variétés de modules locales.

Dans les problèmes de "variétés de modules locales", on se propose de représenter un foncteur, défini non sur une catégorie $(\underline{An})$ ou $(\underline{An})_{/S}$, mais sur la catégorie des germes d'espaces analytiques ([2], VI, 1), ou des germes d'espaces analytiques au-dessus d'un germe donné. Nous formulerons ici le cas le plus simple, inspiré par KODAIRA-SPENCER.

Soit X_o un espace analytique compact. Pour tout germe d'espace analytique (S , s), soit $\mathfrak{F}(S , s)$ l'ensemble des classes d'espaces analytiques X propres et plats sur un voisinage ouvert U de s, (dépendant de X), munis d'un isomorphisme

$$\varphi : X_o \to X_s \qquad ;$$

étant entendu que pour deux tels objets (U , X , φ) et (U' , X' , φ') on appelle le isomorphisme de l'un sur l'autre tout germe de S-isomorphisme en s de X avec X', compatible avec φ et φ', (défini par suite par la donnée d'un voisinage ouvert $U'' \subset U \cap U'$ de a et d'un U''-isomorphisme $u : X|U'' \xrightarrow{\sim} X'|U''$ tel que $u\varphi = \varphi'$). Il est évident que $\mathfrak{F}(S , s)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des germes d'espaces analytiques, dans la catégorie des ensembles.

On dit que X_o admet une variété des modules locale, si le foncteur précédent $(S , s) \rightsquigarrow \mathfrak{F}(S , s)$ est représentable, et le germe d'espace analytique (M , x) qui le représente est appelé la variété des modules locale de X_o (On notera cependant qu'elle peut fort bien ne pas être une variété, i. e. x peut être un point singulier de M).

Rappelons que si D désigne l'espace analytique réduit à un point, d'anneau local $\underline{C}[t]/(t^2)$, le groupe des D-automorphismes de X_o qui induisent l'identité sur X_o s'identifie à $H^0(X_o , \mathcal{G}_{X_o})$ ([2], VII, 5.3), c'est pourquoi on appelle aussi ce groupe le groupe des transformations infinitésimales (il vaudrait mieux dire : automorphismes infinitésimaux) de X_o. Notons :

PROPOSITION 2.1. - Si $H^0(X_o , \mathcal{G}_{X_o}) = 0$, alors pour tout espace analytique X propre et plat sur un autre S, tout $s \in S$ tel que la fibre X_s soit isomorphe à X_o, et tout S-automorphisme u de X qui induit l'identité sur X_s, il existe un voisinage ouvert U de s tel que u induise l'identité sur $U|S$.

Comme X est propre sur S, il suffit de prouver que u est l'identité sur un voisinage de X_s, ou encore qu'il induit l'endomorphisme identique dans les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x}$ pour $x \in X_s$. Comme ces derniers se plongent injectivement dans leurs complétés, on est ramené (remplaçant S par les spectres des anneaux artiniens $\mathcal{O}_s/m_s^{n+1}$) au cas où S est réduit à un point, à anneau local artinien, soit A. Raisonnant par récurrence sur l'entier n le plus petit tel que $m_s^{n+1} = 0$, on est ramené au cas où on suppose déjà que u réduit modulo m_s^n est l'identité. Mais l'ensemble des S-automorphismes de X qui se réduisent ainsi forment un ensemble en correspondance biunivoque avec $H^0(X_s, \mathfrak{G}_{X_s}) \otimes (m_s^n/m_s^{n+1})$ ([2], VII, 5.3), et est donc réduit à un seul élément. Donc u est l'identité.

C. Q. F. D.

En d'autres termes, pour tout germe (S, s) d'espace analytique, les structures sur (S, s) qu'on se propose de classifier (déformations de X_0 paramétrées par (S, s), dans la terminologie de KODAIRA-SPENCER) n'ont pas d'automorphisme non trivial. Cela conduit à poser la conjecture suivante :

CONJECTURE 2. - Soit X_0 un espace analytique compact sans automorphismes infinitésimaux, i. e. tel que $H^0(X_0, \mathfrak{G}_{X_0}) = 0$, alors X_0 admet une variété des modules locale.

PROPOSITION 2.2. - Supposons X_0 compacte et non singulière, et supposons que X_0 admette une variété des modules locale (M, x). Alors l'espace tangent de Zariski de M en x est canoniquement isomorphe à $H^1(X_0, \mathfrak{G}_{X_0})$.

En effet, il est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des morphismes de D dans (M, x), et notre assertion résulte alors de la définition de (M, x) et de [2], VII, 6.3.

COROLLAIRE 2.3. - Sous les conditions de 2.2, on a

$$\dim(M, x) \leq \dim H^1(X_0, \mathfrak{G}_{X_0}) ,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si le germe (M, x) est non singulier.

Par définition, $\dim(M, x)$ est la dimension de Krull de l'anneau local $\mathcal{O}_{M,x}$, qui est majorée par la dimension de m_x/m_x^2 et lui est égale si et seulement si l'anneau local est régulier, d'où 2.3 compte tenu de 2.2.

COROLLAIRE 2.4. - Sous les conditions de 2.2, si l'on a

$$H^2(X_o\ ,\ \mathfrak{G}_{X_o}) = 0 \qquad ,$$

alors le germe $(M\ ,\ x)$ est non singulier, et de dimension égale à $\dim H^1(X_o\ ,\mathfrak{G}_{X_o})$.

En effet, le fait que M soit alors simple en x résulte du critère infinitésimal de simplicité ([2], VI, 3.1 (iv bis)) et de [2], VII, 6.3.

REMARQUES 2.5. - Le corollaire 2.4 explique le succès des méthodes de KODAIRA-SPENCER [4] dans le cas où $H^2(X_o\ ,\ \mathfrak{G}_{X_o}) = 0$, et dans ce cas seulement, puisque les définitions Kodaira-Spencer sont adaptées exclusivement au cas d'une variété des modules <u>non singulière</u> (Il est très plausible que en général la variété locale des modules n'est pas même réduite, et qu'il peut se présenter des cas, comme dans l'exemple à la fin du n° 1, où x serait point isolé de $(M\ ,\ x)$, i. e. la variété des modules est de dimension 0 , mais où l'anneau local de x n'est pas réduit à $\underset{\sim}{C}$, i. e. où on a néanmoins $H^1(X_o\ ,\ \mathfrak{G}_{X_o}) \neq 0$). On fera attention qu'il n'est pas prouvé (mais certainement vrai) que la "famille modulaire" construite dans [5], dans le cas où X_o est non singulière et $H^o(X_o\ ,\ \mathfrak{G}_{X_o}) = H^2(X_o\ ,\ \mathfrak{G}_{X_o}) = 0$, définit bien une variété locale des modules pour X_o , au sens du présent exposé. Sauf erreur, il est connu seulement que le $(M\ ,\ x)$ construit dans [5] représente le foncteur F dans la catégorie des germes d'espaces analytiques <u>non singuliers</u>.

2.6. - La condition que $H^o(X_o\ ,\ \mathfrak{G}_{X_o}) = 0$, dans l'énoncé de la conjecture d'existence de la variété des modules locale, n'est pas surabondante, comme on le voit par exemple lorsque X_o est une "variété de Hirzebruch" (fibré non trivial en droites projectives sur $\underset{\sim}{P}^1$). Il est cependant possible, lorsque X_o admet des automorphismes infinitésimaux, en analogie avec l'exemple de problème de modules développé dans l'exposé I, de modifier le problème de modules initial en éliminant les automorphismes, par exemple par utilisation de points marqués en nombre suffisant, ou de tout autre procédé, et il est plausible qu'on obtienne des variétés de modules locales, munies alors de prégraphes d'équivalence (jouant le rôle de l'espace de Teichmüller muni de son groupe d'automorphismes), permettant de récupérer le foncteur $\mathfrak{F}$, et même la catégorie fibrée des déformations locales de X_o . Ces espaces modulaires locaux à prégraphe d'équivalence seront alors des invariants du problème de modules envisagé (défini en l'occurrence par X_o) dans la même mesure que les espaces modulaires à opérateurs $T_{\underset{\sim}{P}}$ associés aux foncteurs rigidifiants $\underset{\sim}{P}$ dans [2], I.

2.7. - D'autre part, il y a des cas bien connus ou la variété des modules locale pour X_o existe, bien que X_o admette des automorphismes infinitésimaux non triviaux. Il en est ainsi par exemple lorsque X_o est un tore complexe. La raison de la représentabilité de $\mathfrak{F}$ dans ces cas semble dû au fait que le foncteur $\mathfrak{F}$ est alors isomorphe à un foncteur $\mathfrak{F}'$ correspondant à la classification de structures sans automorphismes. Ainsi, dans le cas d'un tore complexe, choisissons un point a dans X_o , et posons $\mathfrak{F}'(S , s)$ = ensemble des classes à un isomorphisme près de déformations de X_o paramétrées par (S , s) , munies en plus d'un germe de section au-dessus de S en s , passant par le point marqué a . Utilisant le fait qu'une telle famille est un groupe au-dessus de (S , s) , on voit que $\mathfrak{F}$ est isomorphe à $\mathfrak{F}'$. D'autre part, les structures classifiées par $\mathfrak{F}'$ sont sans automorphismes (par exemple parcequ'un automorphisme infinitésimal de X_o , qui invarie a , i. e. un champ de vecteurs sur X_o nul en a , est nul). En conclusion, il semble que la condition vraiment naturelle pour l'existence d'une variété de modules locale classifiant les déformations d'une certaine espèce de structure complexe, soit bien l'absence d'automorphismes infinitésimaux d'icelle.

2.8. - La technique exposée dans [3], II, permet de prouver l'existence d'une variété formelle des modules pour un espace analytique compact X_o sans automorphismes infinitésimaux, i. e. d'une algèbre locale A sur $\underset{\sim}{C}$, quotient d'une algèbre de séries formelles, et telle que l'on ait un isomorphisme de foncteurs en la $\underset{\sim}{C}$-algèbre locale B , de rang fini sur $\underset{\sim}{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{C}\text{-algèbres}}(A , B) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{F}(\mathrm{Spec}(B)) \qquad ,$$

où Spec(B) est l'espace analytique réduit à un point d'anneau local B (Lorsque la variété locale des modules (M , x) existe, A n'est donc autre que le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{M,x}$ pour sa topologie $\mathfrak{m}_x$-adique). L'assertion analogue d'existence de variétés formelles de modules est d'ailleurs également valable pour les autres problèmes de modules envisagés dans le présent exposé. Il est possible que la clef d'une démonstration des conjectures 1 et 2, utilisant le résultat cité de géométrie formelle, se trouve dans une théorie générale de passage du formel à l'analytique, (malheureusement inexistante pour l'instant).

2.9. - Il est possible de donner une formule pour l'espace tangent de Zariski à la variété locale des modules (M , x) en x , généralisant 2.2 au cas où X_o n'est pas supposée simple. En d'autres termes, il faut déterminer l'ensemble des déformations de X_o paramétrées par $D = \operatorname{Spec} \underset{\sim}{C}[t]/(t^2)$. On trouve que c'est le sous-espace vectoriel de

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_o \times X_o}}(X_o \times X_o \,;\, \mathcal{J} \,,\, \mathcal{O}_X)$$

(où $\mathcal{J}$ est l'Idéal diagonal sur $X_o \times X_o$), formé des éléments dont l'image canonique dans $H^o(X_o \times X_o \,;\, \underset{\sim}{\operatorname{Ext}}^1_{\mathcal{O}_{X_o \times X_o}}(\mathcal{J} \,,\, \mathcal{O}_X)) = H^o(X_o \,,\, \underset{\sim}{\operatorname{Ext}}^2_{\mathcal{O}_{X_o \times X_o}}(\mathcal{O}_{X_o} \,,\, \mathcal{O}_{X_o}))$ correspond à des extensions commutatives du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X_o}$ par le noyau de carré nul $\mathcal{O}_{X_o}$.

2.10. - On peut essayer d'obtenir des théorèmes d'existence pour des variétés locales de modules par des techniques projectives, dans le cas où X_o est supposé un espace analytique projectif. La difficulté ici tient au fait que si X est propre et plat sur S, et si une fibre $X_o = X_s$ est algèbrique projective, il ne s'ensuit pas en général que les fibres voisines soient algébriques (Exemple : familles de tores complexes). Ces difficultés ne se présentent pas si $H^2(X_o \,,\, \mathcal{O}_{X_o}) = 0$, ou si X_o est simple de dimension n, et si le Module inversible $\underset{\sim}{\Omega}^n_{X_o}$ des différentielles de degré n sur X est ample, ou si son inverse est ample (on peut alors appliquer [2], VIII, 2.1). En l'absence de telles hypothèses, on peut plus généralement se proposer de trouver des variétés locales de modules pour un espace analytique X_o polarisé, (classifiant les déformations locales de X_o avec sa polarisation), lorsque X_o muni de sa polarisation n'a pas d'automorphisme infinitésimal non nul.

Il est plausible que dans ces cas, une construction par des méthodes projectives, utilisant l'espace modulaire de Hilbert, soit possible.

3. Espaces modulaires de Picard.

Soient X un espace analytique sur S, $f : X \to S$ son morphisme structural. On appelle groupe de Picard relatif de X sur S le groupe

$$\operatorname{Pic}(X/S) = H^o(S \,,\, R^1 f_*(\mathcal{O}_X^*)) \qquad ,$$

où $\mathcal{O}_X^*$ est le faisceau multiplicatif des unités du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$. Comme $R^1 f_*(\mathcal{O}_X^*)$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \rightsquigarrow H^1(f^{-1}(U)\ ,\ \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(f^{-1}(U))$$

sur S, (où pour tout espace analytique Z, $\mathrm{Pic}(Z) = H^1(Z\ ,\ \mathcal{O}_Z^*)$ désigne le groupe des classes, à un isomorphisme près, de Modules inversibles sur Z, qu'on peut appeler le groupe de Picard absolu de Z), on voit qu'un élément de $\mathrm{Pic}(X/S)$ est donné par un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de S, et des Modules inversibles $\mathcal{L}_i$ dans les $f^{-1}(U_i)$, tels que pour tout couple $(i\ ,\ j)$, les Modules $\mathcal{L}_i|f^{-1}(U_i \cap U_j)$ et $\mathcal{L}_j|\ f^{-1}(U_i \cap U_j)$ soient localement isomorphes relativement à $U_i \cap U_j$, i. e. tout $s \in U_i \cap U_j$ a un voisinage ouvert $V \subset U_i \cap U_j$ tel que $\mathcal{L}_i|f^{-1}(V)$ soit isomorphe à $\mathcal{L}_j|f^{-1}(V)$. Nous supposerons par la suite que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme, donc que

$$(*) \qquad \mathcal{O}_S^* \xrightarrow{\sim} f_*(\mathcal{O}_X^*) \quad ;$$

alors la suite spectrale de Leray pour f et le faisceau $\mathcal{O}_X$ donne une suite exacte en basses dimensions :

$$0 \to \mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X/S) \to H^2(S\ ,\ \mathcal{O}_S^*) \quad ,$$

reliant les groupes de Picard absolus de X de S au groupe de Picard relatif, donnant en particulier une inclusion :

$$\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}(S) \subset \mathrm{Pic}(X/S) \quad .$$

En général cette dernière n'est pas un isomorphisme, car dans la description donnée ci-dessus d'un élément de $\mathrm{Pic}(X/S)$, on ne peut en général prendre un recouvrement de S réduit au seul ouvert S. Néanmoins, lorsque X admet une section g sur S, l'inclusion précédente est un isomorphisme, car on vérifie facilement alors que $\mathrm{Pic}(X/S)$ est aussi en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes à un isomorphisme près de Modules inversibles $\mathcal{L}$ sur S, munis d'une "trivialisation au-dessus de g", i. e. d'un isomorphisme $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{L})$. On notera que l'isomorphisme $(*)$ implique que tout automorphisme d'un tel $\mathcal{L}$, respectant l'isomorphisme $\mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{L})$, est l'identité, donc dans le cas envisagé $\mathrm{Pic}(X/S)$ classifie les objets à un isomorphisme près d'une certaine espèce de structure sans automorphismes. Cela explique le rôle des hypothèses précédentes dans le théorème d'existence énoncé ci-dessous ; on notera que lorsqu'on ne suppose pas que X admet une section localement au-dessus de S (condition qui est vérifiée en tous cas si X est simple sur S, ou s'il est simple sur S en un point au moins de chaque fibre), il y a lieu de modifier la définition du groupe de Picard relatif donné ici, de façon à obtenir encore des théorèmes d'existence pour l'espace modulaire de Picard. Une telle définition modifiée est importante surtout en géométrie algébrique, où on rencontre couramment des schémas algébriques sur un corps k, n'ayant aucun point rationnel sur k, i. e. aucune section sur $\mathrm{Spec}(k)$. Nous ne la donnerons pas ici, ne désirant pas entrer dans des détails techniques.

Soit maintenant T un espace analytique variable au-dessus de S, et posons comme d'habitude $X_T = X \times_S T$. Alors

$$T \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X_T/T)$$

est un foncteur contravariant en T, à valeurs dans la catégorie des ensembles. S'il est représentable par un espace analytique sur S, ce dernier prend le nom d'espace modulaire de Picard de X sur S. On notera d'ailleurs que le foncteur $T \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X_T/T)$ est en fait un foncteur à valeurs dans les groupes commutatifs, et non seulement dans les ensembles ; en d'autres termes, si l'espace modulaire de Picard existe, c'est un groupe commutatif dans la catégorie des espaces analytiques sur S, ou comme nous dirons simplement, un groupe analytique commutatif au-dessus de S. Ce fait ne joue pas d'ailleurs de rôle dans la construction projective de l'espace modulaire de Picard.

Bien entendu, lorsque $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe, alors pour tout changement de base $S' \to S$, $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X'/S'}$ existe et est isomorphe à $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S} \times_S S'$ ([2], IV, 3.7); en particulier, la fibre de $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, en $s \in S$, est l'espace modulaire de Picard "absolu" (i. e. relativement à l'espace analytique final, réduit à un point) de la fibre X_s. Classiquement, on s'était borné au cas où S était l'espace analytique final, et le plus souvent au cas où, de plus, X est compacte et non singulière, de préférence kählérienne ; ce qu'on appelait alors communément la "variété de Picard" de X, n'est autre alors que la composante connexe de l'élément neutre dans $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$, cf. 3.3 ci-après. Il importe cependant dans de nombreuses questions de travailler avec $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ tout entier comme un espace analytique, c'est pourquoi nous avons dû nous écarter de la terminologie reçue. On notera d'ailleurs que dans le cas où S est quelconque (i. e. intuitivement lorsqu'on étudie les espaces modulaires de Picard d'une famille d'espaces analytiques paramétrée par S), il n'est nullement certain que les composantes connexes des fibres de $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ forment un sous-ensemble raisonnable, disons ouvert, de $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$; l'assertion analogue en géométrie algébrique, en caractéristique $p > 0$, est en tous cas fausse. Il est par suite très douteux que la définition classique de la variété de Picard comme une variété connexe, puisse s'étendre aux familles. Il serait plus raisonnable sans doute de prendre l'ensemble $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}^{\tau}_{X/S}$ des points de $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ qui correspondent à des Modules inversibles sur X_s dont la classe de Chern rationnelle est nulle (en géométrie algébrique, on dirait : qui définit un élément de torsion dans le groupe de Néron-Severi), qui a de bonnes propriétés en théorie des schémas (il est ouvert, et probablement de type fini sur S).

Nous indiquerons, à titre d'exemple, le théorème d'existence suivant, qui est en fait un théorème de théorie des schémas, et se démontre sans difficulté à l'aide de 1.1, et des sorites de [2], IV :

THÉORÈME 3.1. - Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces analytiques ayant les propriétés suivantes :

a. f est plat et projectif (exposé n° 15, définition, p. 6).

b. L'homomorphisme $\mathcal{O}_S \to f_*(\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme, et le reste par extension de la base (on montre que moyennant (a), il suffit pour ceci que les homomorphismes $\underset{\sim}{C} \to H^0(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ soient des isomorphismes).

c. X admet localement une section sur S .

Sous ces conditions, $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ existe.

Voici l'idée de la démonstration. La question étant locale sur S , on peut supposer que X admet une section g sur S , donc interpréter $\mathrm{Pic}(X_T/T)$ comme $\mathrm{Pic}(X_T)/\mathrm{Pic}(T)$ grâce à (b). Soit $F(T)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Pic}(X_T/T)$ défini par les Modules inversibles $\mathcal{L}$ sur X_T qui sont très amples relativement à T , et tels que, pour tout $t \in T$, on ait $H^i(X_t , \mathcal{L}/m_t \mathcal{L}) = 0$ pour $i > 0$. On notera que cette condition est stable par extension de la base ; que si elle est vérifiée en un point t , elle l'est dans tout un voisinage, et que d'autre part pour tout Module inversible $\mathcal{L}$ sur X_T et tout ouvert relativement compact U de T , il existe un entier n_0 tel que $n \geq n_0$ implique que $\mathcal{L}(n)$ satisfait au-dessus de U à la condition qu'on vient d'envisager, i. e. définit un élément de $\mathfrak{F}(U)$. De ceci et des sorites de [2], IV, 5, on déduit facilement que $T \rightsquigarrow \mathrm{Pic}(X_T/T)$ est représentable si et seulement si le foncteur $T \rightsquigarrow \mathfrak{F}(T)$

l'est, et alors $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est somme d'une suite croissante d'ouverts tous isomorphes à l'espace analytique sur S représentant $\mathfrak{F}$. D'autre part, à tout élément ξ de $\mathfrak{F}(T)$, représenté par un Module inversible $\mathcal{L}$, correspond canoniquement un fibré projectif $P_\xi = \mathbb{P}(f_{T*}(\mathcal{L}))$, et on peut se borner à établir la représentabilité du sous-foncteur $\mathfrak{F}_r(T)$ de $\mathfrak{F}(T)$ formé par les ξ tels que la dimension relative de P_ξ sur S soit r partout (car $\mathfrak{F}$ sera représenté par l'espace analytique somme de ceux qui représentent les $\mathfrak{F}_r$). Soit $\mathfrak{G}(T)$ l'ensemble des couples (ξ, u), où $\xi \in \mathfrak{F}(T)$, et où u est un isomorphisme $u : P_\xi \xrightarrow{\sim} \underset{\sim}{P}^r_T$. C'est un foncteur contravariant en T, et on a un homomorphisme fonctoriel

$$\mathfrak{G} \to \mathfrak{F}_r \quad .$$

D'autre part, on constate aussitôt que $\mathfrak{G}(T)$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des T-immersions $i : X_T \to \underset{\sim}{P}^r_T$ telles que l'image inverse de $\mathcal{O}_{\underset{\sim}{P}^r_T}(1)$ sur X_T définisse un élément de $\mathfrak{F}_r(T)$, et que l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_T^{r+1} = h_*(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{P}^r_T}(1)) \to f_{T*}(i^*(\mathcal{O}_{\underset{\sim}{P}^r_T}(1))$ soit un isomorphisme. Utilisant le théorème d'existence 1.1, on en conclut que $\mathfrak{G}$ est représentable par un ouvert Q de l'espace modulaire de Hilbert $S \times \underset{\sim}{\mathrm{Hilb}}_{P^r}$. En vertu de [2], IV, 4, Q est muni d'un graphe d'équivalence provenant du morphisme $\mathfrak{G} \to \mathfrak{F}_r$, et qui s'obtient d'ailleurs aussi à l'aide des opérations évidentes du groupe projectif $\Gamma = \underset{\sim}{\mathrm{GP}}(r, \underset{\sim}{C})$ sur Q via ses opérations évidentes sur $\mathfrak{G}$ (compte tenu du fait que Γ est le groupe des automorphismes de $\underset{\sim}{P}^r$), comme image du morphisme correspondant suivant, qui est un monomorphisme :

$$Q \times \Gamma \to Q \times Q \quad .$$

Il résulte alors de [2], IV, 4.7, que $\mathfrak{F}_r$ est représentable si et seulement si le quotient $P = Q/I$ existe, et si Q est un fibré principal homogène sur P, de groupe Γ ; et alors $\mathfrak{F}_r$ est représenté par P. Or le passage au quotient peut se faire ici sans difficulté, en définissant convenablement des ouverts Q_i de Q stables par Γ, recouvrant Q, et qui sont Γ-isomorphes à des produits $Z_i \times \Gamma$.

On fera attention que, sous les conditions de 3.1, l'espace modulaire n'est en général pas séparé sur S, par exemple à cause de la possibilité de fibres exceptionnelles de X sur S, ayant plus de composantes irréductibles que les fibres générales. On peut montrer que lorsque dans 3.1, les fibres de X sur S sont des schémas algébriques intègres, alors $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_{X/S}$ est séparé sur S, et de façon plus précise l'espace analytique sur S représentant le foncteur $\mathcal{G}$ introduit ci-dessus est alors l'espace somme d'une suite d'espaces analytiques sur S définis par des préschémas quasi-projectifs sur S. Pour le voir, on représente cet espace comme un quotient d'un espace modulaire classifiant certains diviseurs (qu'on construit à l'aide de 1.1), par une relation d'équivalence plate et propre, exprimant l'équivalence linéaire des diviseurs, et on applique un résultat de [3], III.

Comme nous l'avons déjà signalé, même en restant essentiellement dans le cadre de la géométrie algébrique, les conditions de 3.1 ne sont pas les seules naturelles pour obtenir un théorème d'existence d'espaces modulaires de Picard. Ainsi, on peut montrer que tout schéma algébrique X projectif sur un corps quelconque k admet un schéma de Picard, donc si le corps de base est $\underset{\sim}{C}$, il admet un espace modulaire de Picard au sens analytique complexe. Du point de vue de la "géométrie formelle", l'hypothèse naturelle pour l'existence d'un espace modulaire de Picard semblerait la suivante : X est propre sur S, plat sur S, et $\mathcal{O}$ est "cohomologiquement plat sur S en dimension 0", i. e. $f_*(\mathcal{O}_X)$ est localement libre et sa formation commute à l'extension de la base (cette dernière condition signifiant aussi simplement que les homomorphismes $f_*(\mathcal{O}_X)_s \to H^0(X_s , \mathcal{O}_{X_s})$ sont surjectifs). Ces conditions sont vérifiées par exemple si X est compact et si S est réduit à l'espace analytique final ; on va voir que dans ce cas $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X$ existe effectivement.

Considérons la suite exacte classique de groupes analytiques

$$0 \to \underset{\sim}{Z} \to \underset{\sim}{C} \to \underset{\sim}{C}^* \to 0 \quad ;$$

pour tout espace analytique X, elle donne naissance à une suite exacte pour les faisceaux de germes de morphismes de X dans $\underset{\sim}{Z}$, $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{C}^*$, i. e. à une suite exacte

$$0 \to Z_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0 \quad ,$$

où Z_X désigne le faisceau constant des entiers sur X, d'où une suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(X , Z) \to H^0(X , \mathcal{O}_X) \to H^0(X , \mathcal{O}_X^*) \to H^1(X , Z) \to H^1(X , \mathcal{O}_X) \to H^1(X , \mathcal{O}_X^*) \to \dots .$$

De même, pour tout morphisme $f : X \to S$, on a une suite exacte de faisceaux sur

S faisant intervenir les foncteurs $R^i f_*$ pour les $\mathbb{Z}_X$, $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_X^*$. Ceci permet d'aborder l'étude de l'espace modulaire de Picard, par voie typiquement transcendante.

Nous utiliserons la proposition suivante, qui m'a été signalée par J.-P. SERRE :

PROPOSITION 3.2. - Soit X un espace analytique compact, alors l'homomorphisme canonique

$$H^1(X , \mathbb{R}) \to H^1(X , \mathcal{O}_X)$$

(composé des homomorphismes canoniques $H^1(X , \mathbb{R}) \to H^1(X , \mathbb{C}) \to H^1(X , \mathcal{O}_X)$) est <u>injectif</u> ; a fortiori, l'homomorphisme canonique

$$H^1(X , \mathbb{Z}) \to H^1(X , \mathcal{O}_X)$$

est injectif et a une <u>image fermée</u> (puisque $H^1(X , \mathbb{R}) \simeq H^1(X , \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$).

Soit X_0 le sous-espace analytique réduit de X ayant même espace topologique sous-jacent que X ; il existe (i. e. le faisceau des éléments nilpotents de $\mathcal{O}_X$ est cohérent), en vertu d'un théorème connu de OKA. On a un diagramme commutatif d'homomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} H^1(X , \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(X , \mathcal{O}_X) \\ \Big\downarrow r & & \Big\downarrow \\ H^1(X_0 , \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^1(X_0 , \mathcal{O}_{X_0}) \end{array} \quad ,$$

qui montre qu'il suffit de prouver l'assertion pour X_0 , i. e. qu'on peut supposer X <u>réduit</u>. On peut évidemment aussi le supposer <u>connexe</u>. Comme X est réduit, l'ensemble des points où il n'est pas simple est un ensemble fermé rare, d'où on conclut facilement que toute fonction analytique f sur un ouvert de X , telle que $df = 0$, est localement constante. On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathbb{C}_X \to \mathcal{O}_X \to d\mathcal{O}_X \to 0 \quad ,$$

où $d\mathcal{O}_X$ est le sous-faisceau de Ω_X^1 des 1-formes analytiques qui sont localement des différentielles exactes (N. B. - Dans le cas où X est simple, c'est le faisceau des formes différentielles fermées). On en conclut une suite exacte de cohomologie :

$$0 \to \Omega \to H^1(X\ ,\ \mathbb{C}) \to H^1(X\ ,\ \mathcal{O}_X) \qquad ,$$

où Ω est l'espace des 1-formes différentielles sur X qui sont localement des différentielles exactes (Le fait qu'on puisse mettre un 0 sur la gauche provient du fait que X est compact réduit, donc $H^0(X\ ,\ \mathbb{C}) \to H^0(X\ ,\ \mathcal{O}_X)$ est surjectif). Compte tenu de cette suite exacte et de l'inclusion $H^1(X\ ,\ \mathbb{R}) \to H^1(X\ ,\ \mathbb{C})$, on voit que 3.2 équivaut à l'énoncé suivant, dû à BLANCHARD : *une 1-forme différentielle analytique sur X qui est localement une différentielle exacte, et qui est à périodes réelles, est nulle.*

Rappelons la démonstration de BLANCHARD : Soit X' le revêtement universel de X , et ω' la forme sur X' image inverse de la forme donnée ω sur X' . Comme ω' est localement une différentielle exacte, et X' est simplement connexe, on a $\omega' = df'$, où f' est une fonction analytique sur X' (définie à une constante près). L'hypothèse que les périodes de ω sont réelles signifie que la partie imaginaire $J(f')$ de f' est invariante par le groupe fondamental π_1 de X opérant sur X' , donc provient d'une fonction continue g sur X . Cette dernière est localement la partie imaginaire d'une fonction analytique sur X , d'où on conclut qu'elle ne peut prendre son maximum qu'en un point au voisinage duquel elle est constante. Comme X est compacte et connexe, il s'ensuit que g est constante, donc f' est constante, donc $\omega' = 0$, donc $\omega = 0$,

C. Q. F. D.

THÉORÈME 3.3. - Soient X un espace analytique compact, alors $\underline{\mathrm{Pic}}_X$ existe. Posons

$$P = \mathrm{Coker}(H^1(X\ ,\ \mathbb{Z}) \to H^1(X\ ,\ \mathcal{O}_X))$$

$$Q = \mathrm{Ker}(H^2(X\ ,\ \mathbb{Z}) \to H^2(X\ ,\ \mathcal{O}_X)) \qquad ,$$

et munissons P et Q de leurs structures naturelles de groupes analytiques (celle de P étant connexe, celle de Q discrète). On a une suite exacte canonique de groupes analytiques :

$$0 \to P \to \underline{\mathrm{Pic}}_X \to Q \to 0 \qquad .$$

En particulier, P est isomorphe à la composante connexe de l'élément neutre de $\underline{\mathrm{Pic}}_X$.

DÉMONSTRATION. - Pour tout espace analytique T , posons $X_T = X \times T$, et soit $f_T : X_T \to T$ le morphisme structural. D'après les généralités précédant 3.2, on a une suite exacte de faisceaux sur T :

(1) $$\cdots \to R^1 f_T(\mathbb{Z}_{X_T}) \to R^1 f_T(\mathcal{O}_{X_T}) \to R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X_T}) \to R^2 f_T(\mathbb{Z}_{X_T}) \to R^2 f_T(\mathcal{O}_{X_T}) \cdots ,$$

d'autre part on vérifie facilement qu'on a des isomorphismes

$$R^i f_T(\mathcal{O}_{X_T}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_T(V^i) = \mathcal{O}_T \otimes_{\underset{\sim}{C}} V^i$$

$$R^i f_T(\mathbb{Z}_{X_T}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_T(\Gamma^i) = \Gamma^i_T$$

avec

$$V^i = H^i(X , \mathcal{O}_X)$$

$$\Gamma^i = H^i(X , \underset{\sim}{Z}) .$$

Notant que l'image de l'homomorphisme canonique $\Gamma^1 \to V^1$ est fermée, soit P son conoyau, et Q le noyau de $\Gamma^2 \to V^2$. Ce sont des groupes analytiques, et la suite exacte précédente prend la forme

(2) $$0 \to \mathcal{O}_T(P) \to R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X_T}) \to \mathcal{O}_T(Q) \to 0 ,$$

suite qui est fonctorielle en T . Or soient h_P et h_Q les foncteurs sur (An) , à valeurs dans les groupes abéliens, représentés par P et Q , et F le foncteur $T \rightsquigarrow \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}(X_T/T)$. On a donc une suite exacte d'homomorphismes

(3) $$0 \to h_P \to F \to h_Q .$$

Pour voir que F est représentable, il suffit de prouver qu'il est représentable relativement à h_Q [2], IV, 3.7, i. e. que pour tout espace analytique T , et tout élément $\eta \in h_Q(T) \simeq H^0(T , \mathcal{O}_T(Q))$, le foncteur F sur $\underset{\sim}{(An)}_{/T}$ qui associe à tout T' sur T l'ensemble $F_\eta(T')$ des sections de $R^1 f_{T'}(\mathcal{O}^*_{X_{T'}})$ sur T' dont l'image dans $H^0(T' , \mathcal{O}_{T'}(Q))$ est l'image inverse de η par $T' \to T$, est un foncteur représentable. Or soit M le sous-faisceau d'ensembles de $R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X_T})$ image inverse de η par le morphisme $R^1 f_T(\mathcal{O}^*_{X_T}) \to \mathcal{O}_P(Q)$. A cause de l'exactitude de (2), c'est un faisceau principal homogène sous $\mathcal{O}_T(P)$, et à ce titre il définit un fibré principal homogène analytique M sur T , de groupe P . Il est alors immédiat de vérifier que ce dernier représente F . Cela prouve donc l'existence de $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X$, de plus la suite exacte d'homomorphismes (3) définit une suite d'homomorphismes

$$0 \to P \to \underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X \to Q \to 0 \quad ,$$

dont on vérifie aussitôt qu'elle est exacte, et de façon précise P est le noyau de $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X \to Q$, et $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X$ est un fibré principal homogène sur Q de groupe P . Cela signifie en effet que pour tout espace analytique T , la suite exacte correspondante de faisceaux sur T :

$$0 \to \mathcal{O}_T(P) \to \mathcal{O}_T(\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X) \to \mathcal{O}_T(Q) \to 0$$

est exacte, or cette suite n'est autre que (2).

Bien entendu, cette démonstration ne prouve pas que, lorsque X provient d'un schéma algébrique propre sur $\underset{\sim}{C}$, alors $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X$ provient également d'un schéma en groupes sur $\underset{\sim}{C}$, comme le montre la théorie algébrique du schéma de Picard. D'autre part, une adaptation de 3.3, au cas d'un espace de base quelconque S , qui engloberait le théorème d'existence 3.1, se heurte à des difficultés de passage au quotient d'un S-groupe analytique par un sous-groupe analytique discret. Ces difficultés disparaissent lorsqu'on suppose que X est fibré localement trivial sur S du point de vue topologique, et que $\mathcal{O}_X$ est cohomologiquement plat sur S en dimension 0 et 1 : on trouve que dans ce cas, $\underset{\sim}{\mathrm{Pic}}_X$ existe, et est une extension d'un S-groupe Q à fibres discrètes, par un S-groupe P , au quotient d'un fibré vectoriel associé du dual de $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ par un "réseau" discret $R^1 f_*(\underset{\sim}{Z}_X)$, qui est un fibré localement trivial sur S du point de vue topologique. Le détail de la démonstration, calquée sur celle de 3.3, est laissé au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIEUDONNÉ (J.) et GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, I-II. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1961 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 4 et 8) ; III et IV (à paraître).

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction en géométrie analytique,

I-VIII., Séminaire Cartan, t. 13, 1960/61, n° 7-15.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I-II., Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, n° 190 et 195 ; III-IV., Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 212 et 221.

[4] KODAIRA (K.) and SPENCER (D. C.). - On deformations of complex analytic structures, Annals of Math., Series 2, t. 67, 1958, p. 328-460.

[5] KODAIRA (K.), NIRENBERG (L.) and SPENCER (D. C.). - On the existence of deformations of complex analytic structures, Annals of Math., Series 2, t. 68, 1958, p. 450-459.