Séminaire Henri Cartan

A. Grothendieck

Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents

Séminaire Henri Cartan, tome 9 (1956-1957), exp. n° 2, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SHC_1956-1957__9__A2_0>

Séminaire H. CARTAN, E.N.S., 1956/57.

Exposé n° 2

SUR LES FAISCEAUX ALGÉBRIQUES ET LES FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS.

(Exposés de A. GROTHENDIECK, les 4.2.1957 et 11.2.1957)

Le but de cet exposé est de généraliser certains théorèmes de SERRE. Il utilise de façon essentielle les techniques de Serre [1][2][3] .

1.- Généralités sur les faisceaux algébriques cohérents. (Rappels)

Soit X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$. Un faisceau de $\mathcal{O}$-modules A (ou simplement $\mathcal{O}$-module) est dit de type fini si sur tout ouvert assez petit il est isomorphe à un quotient d'un $\mathcal{O}^n$ (n entier fini $\geqslant 0$) , cohérent s'il est de type fini et si pour tout homomorphisme $\mathcal{O}^m \longrightarrow A$ sur un ouvert U de X , le noyau est de type fini. Si $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathcal{O}$-Modules, et si deux de ces modules sont cohérents, il en est de même du troisième ; le noyau, conoyau, image, coimage d'un homomorphisme de $\mathcal{O}$-modules cohérents est un $\mathcal{O}$-module cohérent. Si A et B sont des $\mathcal{O}$-modules cohérents, il en est de même du faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(A , B)$ des germes de homomorphismes de A dans B . Si $\mathcal{O}$ lui-même est cohérent, les $\mathcal{O}$-modules cohérents sont les $\mathcal{O}$-modules qui, sur les ouverts assez petits, sont isomorphes au conoyau d'un homomorphisme $\mathcal{O}^m \longrightarrow \mathcal{O}^n$. Pour tout ceci et d'autres propriétés élémentaires, cf [1 , chapitre 1, paragraphe 2].

Soit X un ensemble algébrique (sur un corps algébriquement clos $\mathfrak{k}$ pour fixer les idées ; mais les résultats de ce numéro et du suivant restent valables pour les schémas, et même les schémas arithmétiques généraux ...). On désigne par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des anneaux locaux de X , ses sections sur un ouvert $U \subset X$ sont les fonctions régulières sur U . C'est un faisceau d'anneaux, et même de k-algèbres.

THÉORÈME 1.- a) *$\mathcal{O}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

b) *Si X est affine d'anneau de coordonnées A(X) , alors pour tout $\mathcal{O}$-Module cohérent A sur X , les modules ponctuels A_x sont engendrés par l'image canonique de $\Gamma(X , A)$. De plus, $\Gamma(X , A)$ est un A(X)-module de type fini, et tout A(X)-module de type fini provient d'un $\mathcal{O}$-module cohérent, essentiellement unique.* (Rappelons que $\Gamma(X , A)$ désigne le module des sections de A au-dessus de X) .

c) Sous les conditions de b), on a $H^i(X , A) = 0$ pour $i > 0$.

Pour les démonstrations, très élémentaires, voir [1, chapitre 2, paragraphes2, 3, 4] , ou un exposé de Cartier au Séminaire Grothendieck 1957.

2.- Un théorème de dévissage.

DÉFINITION 1.- Soient C une catégorie abélienne, C' une sous-classe de C . On dit que C' est une sous-catégorie exacte si pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ dans C , dont deux termes sont dans C' , le troisième terme est aussi dans C' , et si tout facteur direct d'un $A \in C'$ est dans C' .

THÉORÈME 2.- Soit X un ensemble algébrique ; supposons donné pour toute partie irréductible Y de X un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent F_Y sur Y , ayant pour support Y . Soit $K(X)$ la catégorie abélienne des faisceaux algébriques cohérents sur X . Alors toute sous-catégorie exacte K de $K(X)$ contenant les F_Y est identique à $K(X)$.

DÉMONSTRATION.- Elle se fait par récurrence sur $n = \dim.X$, le cas $n = 0$ étant immédiat grâce à la deuxième condition de déf. 1. Supposons donc $n > 0$, et le théorème démontré en dimension $< n$. On peut considérer $K(Y)$ comme une sous-catégorie de $K(X)$ (Y étant une partie fermée donnée de X) , alors $K \cap K(Y)$ est une sous-catégorie de $K(Y)$ satisfaisant aux conditions du théorème 2, donc si $\dim.Y < n$ l'hypothèse de récurrence implique $K(Y) = K(Y) \cap K$ i.e. $K(Y) \subset K$.

LEMME 1.- Soient Y une partie fermée de X , A un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent tel que supp. $A \subset Y$. Soit $\mathfrak{I}_Y$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$ défini par Y , alors il existe un entier k tel que $\mathfrak{I}_Y^k A = 0$.

Par raison de "compacité", on est ramené au cas où X est affine, on utilise alors le théorème 1, b), en remarquant que si A est défini par le $A(X)$-module $M = \Gamma(X , A)$, alors l'idéal de supp. A est l'intersection des idéaux premiers minimaux associés à l'annulateur de M , d'où aussitôt le résultat.

COROLLAIRE.- Sous les conditions précédentes, A admet une suite de composition avec des $A_i/A_{i+1} \in K(Y)$.

Cela signifie que A_i/A_{i+1} est annulé par $\mathfrak{I}_Y$; on prendra $A_i = \mathfrak{I}_Y^i A$. Dans le cas où $\dim.Y < n$, raisonnant par récurrence sur la longueur de cette suite de composition, utilisant déf. 1 et $K(Y) \subset K$, on trouve que si dim. supp. $A < n$, alors $A \in K$.

Supposons d'abord X irréductible. Pour $A \in K(X)$, soit $T(A)$ le sous-module de torsion de A, (dont les modules ponctuels sont les sous-modules de torsion de A_x).

LEMME 2.- Si $A \in K(X)$, alors le sous-module de torsion $T(A)$ est $\in K(X)$, et $A = T(A)$ équivaut à supp. $A \neq X$.

On est aussitôt ramené au cas où X est affine, où c'est immédiat à l'aide de l'interprétation des $\mathcal{O}$-modules cohérents comme $A(X)$-modules de type fini.

Utilisant la suite exacte $0 \longrightarrow T(A) \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$, et $T(A) \in K$, on trouve que $A \in K$ équivaut à $A_0 \in K$.

Soit $\mathcal{R}$ le faisceau de corps sur X formé par les corps de fractions des $\mathcal{O}_{X,x}$, i.e. le faisceau des germes de fonctions rationnelles, c'est un faisceau constant, on a un homomorphisme injectif $A_0 \longrightarrow A_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}$. Représentant localement A_0 comme un conoyau d'un homomorphisme $\mathcal{O}_X^m \longrightarrow \mathcal{O}_X^{m'}$, on trouve que le produit tensoriel du deuxième membre est localement isomorphe à un faisceau de la forme $\mathcal{R}^k$ (en tant que faisceau de $\mathcal{R}$-modules), on en conclut qu'il est globalement isomorphe à $\mathcal{R}^k$, grâce au

LEMME 3.- Sur un ensemble algébrique irréductible X, un faisceau localement constant est constant.

C'est une conséquence facile du fait que tout ouvert de X est connexe (considérer un ouvert maximal où le faisceau envisagé soit constant !)

Nous identifierons donc $A_0 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{R}$ à un $\mathcal{R}^k$, qui contient le sous-$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X^k$. Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_0 + \mathcal{O}_X^k \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

où Q est défini comme le conoyau de l'homomorphisme d'injection. On voit aussitôt que $Q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{R} = 0$, donc Q est un module de torsion donc supp. $Q \neq X$ (lemme 2) d'où $Q \in K$. (On s'est servi implicitement du fait que $A_0 + \mathcal{O}_X^k$ est un $\mathcal{O}$-module cohérent, ce qui se vérifie facilement). Par suite $A_0 \in K$ équivaut à $A_0 + \mathcal{O}_X^k \in K$. De même, la suite exacte analogue

$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^k \longrightarrow A_o + \mathcal{O}_X^k \longrightarrow Q' \longrightarrow 0$, où supp.$Q' \neq X$ d'où $Q' \in K$, implique que $A_o + \mathcal{O}_X^k \in K$ équivaut à $\mathcal{O}_X^k \in K$. Supposons enfin $k > 0$, i.e. que A ne soit pas un $\mathcal{O}$-module de torsion i.e. supp.$A = X$; alors $\mathcal{O}_X^k \in K$ équivaut à $\mathcal{O}_X \in K$, comme il résulte aussitôt de définition 1 . Donc, les équivalences précédentes impliquent que si A est tel que supp. $A \neq X$, alors $A \in K$ équivaut à $\mathcal{O}_X \in K$. Faisant $A = F_X$ on trouve donc $\mathcal{O}_X \in K$, donc tout $A \in K(X)$ de support X est dans K , et comme il en est de même des $A \in K(X)$ de support $\neq X$, on a bien $K(X) \in K$.

Si maintenant X n'est plus nécessairement irréductible, soient X_i ses composantes irréductibles. Pour tout faisceau algébrique cohérent A sur X , soient A_i le faisceau coïncidant avec A sur X_i , avec 0 dans $X - X_i$, c'est un $\mathcal{O}$-module cohérent s'identifiant à un quotient de A . On a un homomorphisme naturel $A \longrightarrow \coprod_i A_i$ de A dans la somme directe des A_i , homomorphisme injectif, soit Q son conoyau, on a donc une suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow \coprod_i A_i \longrightarrow Q \longrightarrow 0$. Comme supp. $Q \subset \bigcup_{i \neq j} X_i \cap X_j$, on a $Q \in K$, pour prouver $A \in K$ il suffit de prouver que $\coprod_i A_i \in K$, ou encore que chaque A_i est dans K . Or d'après ce qu'on a vu, appliqué à X_i , on a $K(X_i) \in K$, d'où on conclut encore que supp. $A_i \subset X_i$ implique $A_i \in K$, en utilisant le corollaire du lemme 1 . Le théorème 2 est démontré.

REMARQUE.- Disons que la sous-catégorie K de $K(X)$ est exacte à gauche si pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ dans $K(X)$, A' resp. A est dans K pourvu que les deux autres termes soient dans K . La démonstration du théorème 2 prouve que la conclusion est encore valable si on suppose seulement K exact à gauche, pourvu que les F_Y considérés comme $\mathcal{O}_Y$-Modules soient sans torsion. Ceci suffit à prouver sans plus que si X est complète, les $\Gamma(X , A)$ pour $A \in K(X)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie (car la catégorie K des $A \in K(X)$ ayant cette propriété est exacte à gauche, et contient les $\mathcal{O}_Y$) : c'est la démonstration de Serre.

3.- Compléments de cohomologie des faisceaux.

Soit X un espace topologique, C^X désigne la catégorie des faisceaux abéliens sur X . On définit de la façon usuelle les faisceaux injectifs, on prouve l'existence, pour tout $A \in C^X$, d'une résolution $C(A)$ de A par des faisceaux injectifs, ce qui permet de développer la théorie des foncteurs dérivés à droite. En particulier, considérons le foncteur exact à gauche $\Gamma(X , A)$

de C^X dans la catégorie C des groupes abéliens; ses foncteurs dérivés sont notés $H^i(X, A)$. On a donc

$$H^i(X , A) = H^i(\Gamma(X , C(A))).$$

Les $H^i(X , A)$ forment un "foncteur cohomologique" en A, nul pour $i < 0$, satisfaisant à

$$H^0(X , A) = \Gamma(X , A).$$

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue de X dans un espace Y, on définit pour tout faisceau abélien B sur Y, le faisceau abélien $f^{-1}(B)$ sur X <u>image réciproque</u> de B, et l'homomorphisme canonique

$$H^0(Y , B) \longrightarrow H^0(X , f^{-1}(B))$$

se prolonge de façon unique en des homomorphismes, fonctoriels et compatibles avec les opérateurs cobords

$$H^i(Y , B) \longrightarrow H^i(X , f^{-1}(B)) .$$

Soit maintenant A un faisceau abélien sur X, on définit son <u>image directe</u> $f_*(A)$ comme le faisceau abélien sur Y dont les sections sur un ouvert V sont les sections de A sur $f^{-1}(V)$. Evidemment f_* est un foncteur covariant additif exact à gauche de C^X dans C^Y, et si Γ_X resp. Γ_Y désignent les foncteurs "sections" sur C^X resp. C^Y, on a par définition

$$\Gamma_X = \Gamma_Y f_* .$$

De plus, on vérifie trivialement que f_* transforme faisceaux injectifs en faisceaux injectifs. Il en résulte facilement la <u>suite spectrale de Leray</u> de l'application continue f_* : $H^*(X , A)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale cohomologique de terme initial

$$E_2^{p,q} = H^p(Y , R^q f_*(A))$$

où les $R^q f_*(A)$ sont les faisceaux sur Y obtenus en prenant les foncteurs dérivés à droite du foncteur $f_* : C^X \longrightarrow C^Y$, i.e. $R^q f_*(A) = H^q(f_*(C(A)))$. On trouve aussitôt que $R^q f_*(A)$ <u>est le faisceau sur</u> Y <u>associé au préfaisceau</u> $V \longrightarrow H^q(f^{-1}(V) , A)$.

De la suite spectrale de Leray résultent des homomorphismes

(1) $$H^p(Y , f_*(A)) \longrightarrow H^p(X , A)$$

dont la définition directe est évidente (en notant qu'on a un homomorphisme naturel $f^{-1}(f_*(A)) \longrightarrow A$). De plus, <u>si</u> $R^q f_*(A) = 0$ <u>pour</u> $q > 0$, <u>les</u>

homomorphismes (1) sont des isomorphismes. Cela résulte aussitôt de la suite spectrale, ou encore plus simplement du fait que $f_*(C(A))$ sera alors une résolution injective de $f_*(A)$.

Pour les résultats de ce numéro, voir Séminaire Grothendieck 1957.

4.- Résultats auxiliaires sur les faisceaux algébriques sur l'espace projectif.

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathfrak{K}$, P l'espace projectif associé, quotient de $V-(0)$ par le groupe algébrique $\mathfrak{K}^*$. On voit que $V-(0)$ est un espace fibré algébrique principal sur P , de groupe structural $\mathfrak{K}^*$, qui définit donc sur P un espace fibré associé, à fibres vectorielles de dimension 1 ; le faisceau des germes de sections régulières du fibré dual est noté $\mathcal{O}(1)$, on désigne par $\mathcal{O}(n)$ la puissance tensorielle n-ième de $\mathcal{O}(1)$ si $n \geqslant 0$, la puissance tensorielle (-n)-ième du faisceau "dual" si $n < 0$ (en particulier $\mathcal{O}(0) = \mathcal{O}_P$) . Si A est un faisceau algébrique sur P , on pose $A(n) = A \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}(n)$, on a alors $A(m)(n) = A(m+n)$. Les définitions de $\mathcal{O}(n)$ et de l'opération $A \longrightarrow A(n)$ s'étendent aussitôt au cas de faisceaux sur un produit $P \times Y$, où Y est un ensemble algébrique quelconque.

THÉORÈME 3.- a) Soient Y un ensemble algébrique affine, A un faisceau algébrique cohérent sur $P \times Y$. Alors pour tout entier n assez grand, $A(n)$ est engendré par le module de ses sections, i.e. $A(n)$ est isomorphe à un quotient d'un faisceau $\mathcal{O}_{P\times Y}^{\ k}$.

b) On a $H^i(P , \mathcal{O}(n)) = 0$ pour n assez grand.

La démonstration est élémentaire; pour a) voir [1, page 247, théorème 1], (où est traité le cas où Y est réduit à un point, mais la démonstration vaut telle quelle pour Y qulconque), et pour b) voir [1, page 259, théorème 2] . On peut procéder directement par calcul de $H^i(P , \mathcal{O}(n))$ par la méthode de Čech, qui s'applique grâce au théorème 1,c) (cf. Séminaire Grothendieck pour ce point), utilisant le recouvrement bien connu de P par $r+1$ ouverts affines isomorphes à $\mathfrak{K}^r$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{K}$ soit le corps des complexes, alors P est aussi muni d'une structure d'espace analytique, soit P^h , et ce dernier est muni de son faisceau d'anneaux locaux analytiques, soit $\mathcal{O}^h$, enfin on définit comme ci-dessus les faisceaux $\mathcal{O}^h(n)$. Cela étant, on a :

COROLLAIRE.- a) Soit A^h un $\mathcal{O}^h$-Module cohérent sur P^h , alors pour tout n assez grand, $A^h(n)$ est isomorphe à un quotient d'un faisceau $(\mathcal{O}^h)^k$.

b) On a $H^i(P^h , \mathcal{O}^h(n)) = 0$ pour n assez grand.

La démonstration est nettement plus profonde : voir [2, lemme 5 page 21 et lemme 8 page 24] , Elle procède par récurrence sur la dimension, et utilise de façon essentielle le fait que la cohomologie de P^h à valeurs dans un $\mathcal{O}^h$ - module cohérent est de dimension finie.

5.- Le théorème de finitude : énoncé.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application régulière d'ensembles algébriques, et soit A un faisceau algébrique, i.e. un $\mathcal{O}_X$-module, sur X ; alors son image directe par f , et plus généralement les $R^q f_*(A)$ (cf. n° 3) sont des $\mathcal{O}_Y$-modules. Dans le cas où A est cohérent (ou plus généralement "quasi-cohérent" au sens de Cartier, cf. Séminaire Grothendieck), on montre élémentairement que pour tout ouvert affine V dans Y , on a

$$\Gamma(V , R^q f_*(A)) = H^q(f^{-1}(V), A)$$

et que les faisceaux $R^q f_*(A)$ sont aussi "quasi-cohérents" . Nous allons donner des conditions suffisantes pour qu'ils soient même cohérents.

DÉFINITION 2.- Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ d'ensembles algébriques est dit propre si pour toute composante irréductible X_i de X , le schéma de X_i est complet au dessus du schéma de $\overline{f(X_i)}$ (cf. Séminaire Cartan-Chevalley 1955/56).

Une définition plus géométrique est la suivante : f est propre si pour tout ensemble algébrique Z , l'application correspondante $X \times Z \longrightarrow Y \times Z$ est fermée. Si $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ sont des morphismes d'ensembles algébriques, si f et g sont propres gf l'est ; si gf est propre, alors f l'est, et g aussi pourvu que l'image de f soit dense dans Y. Pour que X soit complète, il faut et il suffit que le morphisme de X dans un ensemble algébrique réduit à un point soit propre. Supposons que X soit une partie localement fermée d'une variété complète X' , alors pour que $f : X \longrightarrow Y$ soit propre, il faut et il suffit que son graphe soit fermé. Conjuguant ceci avec le lemme de Chow (n° 7, lemme 4), le fait qu'un sous-ensemble algébrique d'un ensemble algébrique sur les complexes est fermé si et seulement si il est fermé pour la topologie de l'espace analytique sous-jacent [2, proposition 7 page 12], et le fait qu'un espace projectif complexe est compact, on conclut aisément du critère précédent que dans le "cas classique", un morphisme est propre si et seulement si l'application pour les espaces analytiques sous-jacents est propre au sens usuel (l'image réciproque d'un compact est compact) ; comparer [2, proposition 12, proposition 6] où est démontré le cas particulier : X complète $\Longleftrightarrow$ X compacte.

THÉORÈME 4.- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre d'ensembles algébriques. Pour tout faisceau algébrique cohérent A sur X, les faisceaux algébriques $R^q f_*(A)$ sur Y (et en particulier l'image directe $f_*(A)$) sont cohérents.

La démonstration sera donnée au n° 7. Signalons ici le corollaire suivant, obtenu en prenant Y réduit à un point :

COROLLAIRE.- Soit A un faisceau algébrique cohérent sur un ensemble algébrique complet, alors les $H^i(X , A)$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

6.- Un théorème de comparaison algébrique-analytique : énoncé.

Soit X un ensemble algébrique sur le corps des complexes, on désigne par X^h l'espace analytique sous-jacent (cf. [2] pour des définitions en forme), par $\mathcal{O}^h$ ou $\mathcal{O}^h_X$ le faisceau des anneaux locaux (analytiques) de X^h. L'application identique $i_X : X^h \longrightarrow X$ est continue, on peut donc considérer l'image réciproque $i^{-1}(\mathcal{O}_X)$, et on a un homomorphisme naturel de faisceaux d'anneaux $i^{-1}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X^h$, qui permet de considérer $\mathcal{O}^h_X$ comme un faisceau d'algèbres sur $i^{-1}(\mathcal{O}_X)$. Si maintenant A est un $\mathcal{O}_X$-module, alors $i^{-1}(A)$ est un $i^{-1}(\mathcal{O}_X)$-module, et on posera :

$$A^h = i^{-1}(A) \otimes_{i^{-1}(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}^h_X$$

A^h est appelé le faisceau analytique associé à A. On montre dans [2] que le foncteur covariant $A \longrightarrow A^h$ est exact. On a un homomorphisme fonctoriel

$$i^{-1}(A) \longrightarrow A^h$$

qui est d'ailleurs injectif, il donne naissance à des homomorphismes (cf. n° 3)

$$H^i(X , A) \longrightarrow H^i(X^h , A^h) \quad . \tag{2}$$

Nous allons voir que si X est complète, (2) sont des isomorphismes. Mais nous allons démontrer un résultat plus général. Soit

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme d'ensembles algébriques ; considérons l'application $f^h : X^h \longrightarrow Y^h$. Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle i_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_Y} \\ X^h & \xrightarrow{f^h} & Y^h \end{array}$$

on déduit facilement un homomorphisme fonctoriel

$$i_Y^{-1}(f_*(A)) \longrightarrow f^h_*(i_X^{-1}(A))$$

valable pour tout faisceau A sur X ; si A est un $\mathcal{O}_X$-Module, l'homomorphisme canonique $i_X^{-1}(A) \longrightarrow A^h$ définit aussi un homomorphisme

$$f^h_*(i_X^{-1}(A)) \longrightarrow f^h_*(A^h) .$$

Le composé $i_Y^{-1}(f_*(A)) \longrightarrow f^h_*(A^h)$ de ces homomorphismes est compatible avec l'homomorphisme canonique $i_Y^{-1}(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_Y^h$ des anneaux d'opérateurs, d'où par tensorisation un homomorphisme canonique :

(3) $$f_*(A)^h \longrightarrow f^h_*(A^h) .$$

Cet homomorphisme fonctoriel se prolonge de façon unique en des homomorphismes fonctoriels, permutant aux opérations cobord :

(4) $$(R^q f_*(A))^h \longrightarrow R^q f^h_*(A^h) .$$

Ces homomorphismes ont toutes les propriétés fonctorielles désirables dont l'énoncé fastidieux ne sera pas donné ici (bien qu'elles servent évidemment de façon essentielle dans la démonstration).

<u>THÉORÈME 5</u>.- <u>Supposons le morphisme d'ensembles algébriques</u> $f : X \longrightarrow Y$ propre. <u>Alors les homomorphismes</u> (4) <u>sont des isomorphismes</u>.

La démonstration est donnée au numéro suivant.

Prenant Y réduit à un point, on trouve comme annoncé le

<u>COROLLAIRE 1</u>.- <u>Si</u> X <u>est un ensemble algébrique complet, alors les homomorphismes</u> (2) <u>sont des isomorphismes</u>.

Comme $A \longrightarrow A^h$ transforme faisceaux algébriques cohérents en faisceaux analytiques cohérents (conséquence immédiate de l'exactitude de ce foncteur), la conjonction des théorèmes 4 et 5 donne

<u>COROLLAIRE 2</u>.- <u>Sous les conditions du théorème 5, les</u> $f^h(A^h)$ <u>sont des faisceaux analytiques cohérents</u>.

Il est très plausible que plus généralement, si $g : V \longrightarrow W$ est une application holomorphe propre d'un espace analytique V dans un autre W, et si F est un faisceau analytique cohérent sur V, alors $g_*(F)$ est un faisceau analytique cohérent. C'est en tout cas vrai si les ensembles $f^{-1}(y)$ $(y \in W)$ sont finis (comme on voit à l'aide d'un théorème classique de Oka, cf. Séminaire Cartan 1953/54), ou si W est réduite à un point (d'après un résultat de Serre-Cartan, loc. cité).

COROLLAIRE 3.- *Sous les conditions du théorème 5, supposons que* Y *soit un ensemble algébrique* affine, *soient* $A(Y)$ (resp. $A^h(Y)$) *l'anneau des fonctions régulières sur* Y (resp. l'anneau des fonctions holomorphes sur Y^h). *Alors on a un isomorphisme canonique*

$$H^q(X^h, A^h) = H^q(X, A) \otimes_{A(Y)} A^h(Y) . \tag{5}$$

Nous avons déjà signalé que $H^q(X, A)$ s'identifie au module des sections de $R^q f_*(A)$ sur Y, de même je dis que $H^q(X^h, A^h)$ s'identifie au module des sections de $R^q f^h_*(A^h)$ sur Y : pour ceci, il suffit d'utiliser la suite spectrale de Leray de f^h (cf. n° 3), et de noter que, Y^h s'identifiant à un sous-ensemble analytique fermé d'un espace $\mathbb{C}^n$, sa cohomologie à valeurs dans les faisceaux analytiques cohérents $R^q f^h_*(A^h)$ est nulle en dimensions >0, d'après un théorème fondamental de Cartan (cf. Séminaire Cartan 1951/52). On est donc, grâce au théorème 5, ramené à prouver que si B est un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent sur la variété affine Y, on a

$$H^0(Y^h, B^h) = H^0(Y, B) \otimes_{A(Y)} A^h(Y) . \tag{6}$$

Or on constate que les deux membres sont des foncteurs exacts en B, ce qui nous ramène à vérifier (6) si $B = \mathcal{O}_Y$, auquel cas c'est trivial.

7.- Démonstration des théorèmes 4 et 5 .

Elle se fait essentiellement à l'aide du théorème 3, du théorème 2 "de dévissage" (qui est nécessaire parce qu'il n'est pas certain que X soit isomorphe à une partie localement fermée d'un espace projectif), joint au

LEMME 4 (Chow).- *Soit* X *un ensemble algébrique irréductible ; alors il existe un ensemble algébrique* X' *localement fermé dans un espace projectif* P, *et un morphisme propre birationnel* $g : X' \longrightarrow X$.

Rappelons (n° 5) que "propre" signifie aussi, ici, que le graphe de g

est une partie fermée de $P \times X$. Ici, nous nous servirons seulement du fait que g est propre et surjective.

Démonstration du lemme 4.- On recouvre X par des ouverts affines X_i , chaque X_i est localement fermé dans un espace projectif P_i , d'où une application diagonale $\bigcap X_i \longrightarrow \prod P_i$. On prend pour X' l'adhérence dans $X \times \prod P_i$ du graphe de cette application, ou plutôt son normalisé.

Les théorèmes 4 et 5 affirment que tout faisceau algébrique cohérent A sur X possède une certaine propriété. Or on constate aussitôt dans les deux cas, que la classe K des $A \in K(X)$ ayant la propriété en question est une sous-catégorie exacte (n° 2, définition 1), en utilisant la suite exacte des $R^q f_*$ (et $R^q f^h_*$) correspondant à une suite exacte de faisceaux $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$, et en utilisant, soit le fait que si dans une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow E$ les 4 termes extrêmes sont cohérents, il en est de même du terme médian C ; soit (pour le cas du théorème 5) le classique lemme des 5. En vertu du théorème 2, on est donc ramené à trouver, pour toute partie fermée irréductible Z de X , un faisceau algébrique cohérent sur Z , de support Z , et appartenant à K . Notant que la restriction de f à Z est encore propre, on peut supposer $Z = X$, ce qui nous ramène à trouver un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent A de support X, tel que $A \in K$. Considérons le morphisme $f' : X' \longrightarrow X$ envisagé dans le lemme 4 . Comme X' est plongé dans P , on peut envisager les faisceaux $\mathcal{O}_{X'}(n)$ sur X' obtenus en réduisant les $\mathcal{O}_P(n)$ (cf. n° 4) mod. le faisceau d'idéaux défini par X' dans P . Je dis que pour n assez grand, le faisceau $A = f\ (\mathcal{O}_{X'}(n))$ est $\in K$ (ce qui achèvera la démonstration, puisque le faisceau envisagé a évidemment pour support X). Ceci résultera du

LEMME 5.- *Soit $g : V \longrightarrow W$ un morphisme propre d'ensembles algébriques, V étant une partie localement fermée d'un espace projectif P . Soit G un faisceau algébrique cohérent sur V . Alors pour n assez grand, on a $R^p f_*(G(n)) = 0$ pour $p > 0$, et $f_*(G(n))$ est cohérent. Si les scalaires sont les complexes, on aura de plus $R^p f^h_*(G(n)^h) = 0$ pour $p > 0$, et $(f_*(G(n)))^h \longrightarrow f^h_*(G(n)^h)$ est un isomorphisme.*

Montrons comment ce lemme implique notre assertion antérieure. Appliquant le lemme à $f' : X' \longrightarrow X$, on tire aussitôt des définitions, et des relations $R^p f_*(\mathcal{O}(n)) = 0$ pour $p > 0$, que l'on a

$$R^p(ff')_*(\mathcal{O}(n)) = R^p f_*(f'(\mathcal{O}(n)) = R^p f_*(A)$$

or le premier membre est nul pour $p > 0$ et n grand, en vertu du même lemme 5 appliqué à $ff' : X' \longrightarrow Y$, donc on aura $R^p f_*(A) = 0$ pour $p > 0$, a fortiori $R^p f_*(A)$ est cohérent pour $p > 0$; et de même $f_*(A)$ est cohérent puisque $f_*(A) = (ff')_*(\mathcal{O}(n))$, de sorte qu'il suffit d'appliquer le lemme 5 à ff'. Cela prouve donc $A \in K$ dans le cas du théorème 4. Dans le cas du théorème 5, le même raisonnement prouve que (si n est choisi assez grand) on a $R^p f_*^h(A^h) = 0$ pour $p > 0$, a fortiori les homomorphismes (4) sont des isomorphismes pour $q > 0$; et de même l'homomorphisme $(f_*(A))^h \longrightarrow f_*^h(A^h)$ est un isomorphisme, car ses deux membres s'identifient respectivement à $((ff')_*(\mathcal{O}(n)))^h$ et à $f^h(A^h) = f^h(f'^h_*(\mathcal{O}(n)^h))$ (car $A^h = (f'(\mathcal{O}(n)))^h = f'^h_*(\mathcal{O}(n)^h)$, en vertu du lemme 5 appliqué à $f' : X' \longrightarrow X$), donc $= (ff')^h_*(\mathcal{O}(n)^h) = ((ff')_*(\mathcal{O}(n)))^h$ (d'après le lemme 5 appliqué à $ff' : X' \longrightarrow Y$).

Reste à prouver le lemme 5. Comme le graphe V' de g est une partie fermée de $P \times W$ isomorphe à V, on peut, en identifiant les faisceaux sur V à des faisceaux sur V' donc sur $P \times W$, supposer que $V = P \times W$, et que g est l'homomorphisme de projection. De plus, on peut supposer que W est affine, et même $W = \mathfrak{K}^m$.

Prouvons le lemme 5 d'abord dans le cas où $F = \mathcal{O}(k)$. Quand les scalaires sont quelconques, cela signifie donc que $H^p(P \times W, \mathcal{O}(n)) = 0$ pour $p > 0$ et n grand, et que $H^o(P \times W, \mathcal{O}(n))$ est un module de type fini sur l'anneau de coordonnées $A(W)$ de W. Comme $\mathcal{O}_{P\times W}(n)$ est le "produit tensoriel" (au sens des faisceaux algébriques) des faisceaux $\mathcal{O}_P(n)$ sur P et $\mathcal{O}_W$ sur W, la formule de Künneth (qui se démontre très élémentairement dans ce contexte) s'applique, on obtient le résultat annoncé compte tenu de $H^i(W, \mathcal{O}) = 0$ pour $i > 0$ (théorème 1,c) et du théorème 3,b) :
$H^i(P \times W, \mathcal{O}_{P\times W}(n)) = H^i(P, \mathcal{O}_P(n)) \otimes_{\mathfrak{K}} A(W)$ est nul pour $i > 0$ et n grand, et est de type fini sur $A(W)$ si $i = 0$, car il est immédiat que $H^o(P, \mathcal{O}_P(n))$ est de dimension finie. Quand les scalaires sont complexes, il faut prouver que pour n assez grand, on a $H^i(P^h \times W', \mathcal{O}(n)^h) = 0$ pour $i > 0$ et tout ouvert de Stein W' dans W^h, et que $f_*(\mathcal{O}(n)^h)$ s'identifie à $(f_*(\mathcal{O}(n)))^h$, i.e. à $H^o(P, \mathcal{O}(n)) \otimes \mathcal{O}^h_W$, c'est-à-dire qu'on a $H^i(P^h \times W', \mathcal{O}(n)) = H^o(P, \mathcal{O}(n)) \otimes H^o(X', \mathcal{O}^h_W)$ pour tout ouvert de Stein W' de W. Or $H^*(P^h \times W', \mathcal{O}(n)^h)$ peut en effet se calculer par une <u>variante vectorielle-topologique du théorème de Künneth</u> (utilisant le fait que l'espace

$H^o(W', \mathcal{O}^h_{W'})$ est nucléaire ; cf. Séminaire Schwartz, 1953/54) ; on trouve $H^i(P^h, \mathcal{O}(n)^h) \otimes H^o(W', \mathcal{O}_W)$, compte tenu du fait que $H^i(W', \mathcal{O}_W) = 0$ pour $i > 0$, en vertu d'un théorème fondamental de Cartan sur les variétés de Stein (qu'il suffit de connaitre ici pour un polycylindre et le faisceau des anneaux locaux où il est une conséquence facile de ce même théorème de Künneth vectoriel-topologique). Les assertions faites résultent alors du corollaire b) au théorème 3, compte tenu de $H^o(P^h, \mathcal{O}(n)^h) = H^o(P, \mathcal{O}(n))$, (qui se démontre en même temps que le corollaire en question).

Pour démontrer le lemme 5 dans le cas général, on procède par récurrence descendante sur p, le lemme étant trivial pour p grand en vertu de raisons de dimension. En vertu du théorème 3, a), A est isomorphe à un quotient d'un faisceau $\mathcal{O}(m)^k = L$, i.e. on a une suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow L \longrightarrow A \longrightarrow 0$, d'où pour tout n une suite exacte

$$0 \longrightarrow A'(n) \longrightarrow L(n) \longrightarrow A(n) \longrightarrow 0$$

donnant naissance à une suite exacte

$$R^pf_*(A'(n)) \longrightarrow R^pf_*(L(n)) \longrightarrow R^pf_*(A(n)) \longrightarrow R^{p+1}f_*(A'(n)) .$$

Le dernier terme écrit est nul pour n grand d'après l'hypothèse de récurrence, il en est de même de $R^pf_*(L(n))$ si $p > 0$, en vertu de ce qui a déjà été prouvé, d'où $R^pf_*(A(n)) = 0$ pour n grand lorsque $p > 0$. Et si $p = 0$, la même suite exacte prouve que pour n grand, $f_*(A(n))$ est cohérent, puisque $f_*(L(n))$ l'est et que $f_*(A'(n))$ est en tous cas quasi-cohérent. Dans le cas où les scalaires sont les complexes, on prouve de la même façon que $R^pf^h_*(A(n)^h) = 0$ pour $p > 0$ si n est grand. Reste à montrer que pour n grand, $(f_*(A(n)))^h \longrightarrow f^h(A^h)$ est bijectif. Pour ceci on écrit A comme conoyau d'un homomorphisme $L' \longrightarrow L$, où L et L' sont isomorphes à des faisceaux sommes directes de faisceaux $\mathcal{O}(m)$ (c'est possible grâce au théorème 3, a)). En vertu de ce qui précède, pour n grand, $f_*(A(n))$ et $f^h_*(A(n)^h)$ s'identifient au conoyau de $f_*(L'(n)) \longrightarrow f(L(n))$ et de $f^h(L'(n)^h) \to f^h(L(n)^h)$, compte tenu du fait que le foncteur $B \longrightarrow B^h$ est exact, on en conclut un homomorphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
(f_*(L'(n)))^h & \longrightarrow & (f_*(L(n)))^h & \longrightarrow & (f_*(A(n)))^h & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
f^h_*(L'(n)^h) & \longrightarrow & f^h_*(L(n)^h) & \longrightarrow & f^h_*(A(n)^h) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Comme les deux premières flèches verticales sont des isomorphismes pour n grand, il en est de même de la troisième en vertu du lemme des cinq, ce qui achève la démonstration du lemme 5.

REMARQUE.- La démonstration de ce dernier alinéa se simplifie si on utilise le fait que A admet une résolution finie par des faisceaux sommes directes de faisceaux du type $\mathcal{O}(m)$; mais ce fait est moins élémentaire que le théorème 3, a) , aussi avons-nous voulu éviter de nous en servir.

8.- Faisceaux algébriques et faisceaux analytiques sur une variété algébrique compacte.

Nous allons compléter le corollaire 1 du théorème 5 :

THÉORÈME 6.- *Soit X un ensemble algébrique complet sur le corps des complexes. Alors tout faisceau analytique cohérent F sur X^h est isomorphe à un faisceau A^h , où A est un faisceau algébrique cohérent sur X , essentiellement unique.*

L'unicité de A résulte du

COROLLAIRE 1.- *X étant comme ci-dessus, soient A et B deux faisceaux algébriques cohérents sur X , alors l'homomorphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(A , B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X^h}(A^h , B^h) \tag{7}$$

est bijectif.

En effet, cet homomorphisme se déduit, par passage aux espaces de sections, du monomorphisme de faisceaux

$$i_X^{-1}(\underline{\mathrm{Hom}}(A , B)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X^h}(A^h , B^h)$$

(où $\underline{\mathrm{Hom}}$ désigne le faisceau des germes d'homomorphismes), or on a

$$(\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(A , B))^h = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X^h}(A^h , B^h) \tag{8}$$

(conséquence à peu près immédiate du fait que $C \longrightarrow C^h$ est exact), et appliquant alors le théorème 5, corollaire 1 au faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(A , B)$ et $i = 0$, le résultat s'ensuit.

Du corollaire 1 et de l'exactitude du foncteur $C \longrightarrow C^h$ résulte aussi que si F , G sont des faisceaux analytiques cohérents sur X qui proviennent de faisceaux algébriques, et si u est un homomorphisme de F dans G , alors les faisceaux noyau, conoyau, image, coimage de u proviennent aussi de faisceaux algébriques. En particulier, si X est plongé dans un espace projectif P, tout faisceau analytique cohérent sur X est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $L^h \longrightarrow L'^h$, où L et L' sont des faisceaux sommes directes finies de faisceaux du type $\mathcal{O}(k)$ (théorème 3, corollaire , a)) ; il en résulte donc que le théorème 6 est vrai si X est projective (Serre).

Soit $0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux analytique cohérents sur X^h, supposons que F' et F'' proviennent de faisceaux algébriques cohérents ; je dis qu'il en est de même de F. Supposons en effet $F' = A'^h$, $F'' = A''^h$, où A' et A'' sont des faisceaux algébriques cohérents, il suffit de montrer que l'ensemble $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(X\ ;\ A''\ ,\ A')$ des classes de $\mathcal{O}$-modules extensions de A'' par A', s'identifie à l'ensemble analogue $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}^h_X}(X^h\ ;\ A''^h\ ,\ A'^h)$. Or plus généralement, on a des homomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(X\ ;\ A''\ ,\ A') \longrightarrow \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}^h_X}(X^h\ ;\ A''^h\ ,\ A'^h) \tag{9}$$

(définis sans conditions sur X, A', A''), ce sont ici des isomorphismes, comme il résulte de la suite spectrale des Ext de faisceaux de modules (cf. Séminaire Grothendieck, 1957), des relations locales élémentaires

$$(\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}_X}(A\ ,\ B))^h = \underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathcal{O}^h_X}(A^h\ ,\ B^h) \tag{10}$$

généralisant (8) (les <u>Ext</u> soulignés désignent les <u>faisceaux</u> Ext), et du corollaire 1 au théorème 5, impliquant que les termes initiaux des suites spectrales relatives aux deux membres de (9) sont identiques.

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 6, en procédant par récurrence sur $n = \dim.X$, le théorème étant trivial si $n = 0$. Supposons donc $n > 0$, et le théorème démontré pour les dimensions $< n$. Procédant comme dans la fin de la démonstration du théorème 2, on est ramené au cas où X est irréductible. Considérons alors l'application $f : X' \longrightarrow X$ envisagée dans le lemme de Chow (lemme 4), X' est une variété <u>projective</u> et f est un morphisme <u>birationnel</u>. Pour tout faisceau analytique F sur X, soit $F' = f^{-1}(F) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}^h_X)} \mathcal{O}^h_{X'}$, (le produit tensoriel a un sens, puisque $\mathcal{O}^h_{X'}$ est un module sur $f^{-1}(\mathcal{O}^h_X)$, qui s'identifie à un sous-faisceau d'anneaux de $\mathcal{O}^h_{X'}$). Il est facile de vérifier que si F est cohérent, il en est de même de F'. De plus, on a un homomorphisme naturel

$$F \longrightarrow f_*^h(F')$$

et dans le cas actuel, cet homomorphisme est bijectif en dehors d'un ensemble algébrique Y de dimension $< n$ (savoir l'ensemble Y des points de X au-dessus desquels f n'est pas birégulier). On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow F \longrightarrow f_*^h(F') \longrightarrow T' \longrightarrow 0$$

où T et T' ont leurs supports dans Y . Utilisant l'analogue du lemme 1 du n° 2 (grâce à la compacité de X) , on trouve que T (et de même T') admet une suite de composition dont les quotients successifs sont des faisceaux analytiques cohérents <u>sur</u> Y . Ces quotients sont donc en fait "algébriques" d'après l'hypothèse de récurrence ; il en est donc de même de leurs extensions multiples T et T' . De plus, X' étant projective, F' est aussi "algébrique" d'après ce que nous avons dit, il en est donc de même de $f_*^h(F')$ en vertu du théorème 5 appliqué à $f : X' \longrightarrow X$ et $F' = B^h$. Donc le noyau de $f_*^h(F') \longrightarrow T'$ est aussi algébrique, donc aussi F , qui est une extension de ce noyau par T . Le théorème 6 est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.P. SERRE. - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Mathematics, 2. series, tome 61, 1955, p. 197-278.

[2] J.P. SERRE. - Géométrie algébrique et Géométrie analytique, Annales de l'Institut Fourier, tome 6, 1955-56, p. 1-42.

[3] J.P. SERRE. - Sur la cohomologie des variétés algébriques. A paraître au Journal de Math. p. et appl.
