Bois-Colombes 15.12.1955

Mon cher Serre,

Réfléchissant un peu à ton théorème de dualité, je m'aperçois que sa formulation générale est à peu près évidente, et d'ailleurs je viens de vérifier qu'elle se trouve implicitement (dans le cas de l'espace projectif) dans ton théorème donnant les $\mathrm{T}^q(M)$ par des Ext. (J'ai bien l'impression, salaud, que tes §§3 et 4 du Chap. 3 peuvent se faire aussi sans aucun calcul). Je note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\mathrm{G})$ le *groupe* des $\mathcal{O}$-homomorphismes du faisceau F de $\mathcal{O}$-modules sur X dans un autre G, et $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\mathrm{G})$ ses foncteurs dérivés (c'est donc un cas particulier des Ext dans les classes abéliennes, mais je mets le X dans la notation pour éviter la confusion évidente). $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{F},\mathrm{G})$ est le *faisceau* des germes de $\mathcal{O}$-homomorphismes de F dans G, les foncteurs dérivés sont notés $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{F},\mathrm{G})$; ce sont donc des faisceaux. Comme je t'ai écrit, il y a une filtration naturelle sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(\mathrm{X},\mathrm{F},\mathrm{G})}$ le gradué associé est le terme E_∞ d'une suite spectrale dont le terme E_2^{pq} est $\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}}(\mathrm{F},\mathrm{G}))$. Ceci dit (X étant maintenant une variété algébrique projective (sans singularités, de dimension n), F un faisceau algébrique cohérent sur X,Ω^n le faisceau des germes de formes différentielles de degré n sur X), le dual de $\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathrm{F})$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\Omega^n)$, de la façon suivante : on a de façon générale des accouplements $\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\mathrm{G})\times\mathrm{Ext}^q_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{G},\mathrm{H})\longrightarrow\mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\mathrm{H})$ [valable dans toute classe abélienne] d'où en particulier

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathcal{O},\mathrm{F})\times\mathrm{Ext}^{n-p}_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\Omega^n)\longrightarrow\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathcal{O},\Omega^n);$$

on voit tout de suite par les suites spectrales que les premier et dernier termes sont respectivement $\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathrm{F})$ et $\mathrm{H}^n(\mathrm{X},\Omega^n)$, ce dernier est canoniquement isomorphe à k d'où l'accouplement voulu, i.e. un homomorphisme

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathrm{F})'\longrightarrow\mathrm{Ext}^{n-p}_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\Omega^n)$$

Cet homomorphisme est évidemment un homomorphisme de ∂-foncteurs ; de plus d'après ton théorème de dualité, c'est une bijection si F est localement libre. On voit alors aisément par récurrence sur la longueur d'une résolution localement libre de F et le lemme des 5, que c'est bijectif pour tout F.

Note qu'on obtient comme ça une filtration naturelle sur $\mathrm{H}^*(\mathrm{X},\mathrm{F})$, le gradué associé étant le terme E_∞ d'une suite spectrale dont le terme E_2^{pq} est $\mathrm{Ext}^{n-p}(\mathrm{X},\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\mathcal{O}}(\mathrm{F},\Omega^n,\Omega^n)$ (suite spectrale obtenue en dualisant le suite spectrale mentionnée plus haut pour $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}}(\mathrm{X},\mathrm{F},\Omega^n)$; mais je n'en vois pas d'interprétation directe).

Rien de neuf autrement, je tâche de m'instruire, mais il y a tellement de choses à regarder, et c'est si lent ! Cartier semble un type extraordinaire, surtout comme rapidité de compréhension et le nombre invraisemblable de choses qu'il lit et pige, j'ai bien l'impression que dans quelques années, il en sera au même point que toi. Je l'exploite d'ailleurs avec profit.

Salut et fraternité

A. Grothendieck