

Astérisque

JEAN-PIERRE SERRE

Arbres, amalgames, SL_2

Astérisque, tome 46 (1977)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__46__1_0>

© Société mathématique de France, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	3
CHAPITRE I - ARBRES ET AMALGAMES	
§ 1 - <u>Amalgames</u>	7
1.1. Limites inductives	7
1.2. Structure des sommes amalgamées	8
1.3. Conséquences du théorème de structure	12
1.4. Constructions utilisant les sommes amalgamées	16
1.5. Quelques exemples	20
§ 2 - <u>Arbres</u>	22
2.1. Graphes	22
2.2. Arbres	28
2.3. Sous-arbres d'un graphe	33
§ 3 - <u>Arbres et groupes libres</u>	38
3.1. Arbres de représentants	38
3.2. Graphe d'un groupe libre	39
3.3. Actions libres sur un arbre	41
3.4. Application : théorème de Schreier	43
Appendice. Présentation d'un groupe d'homéomorphismes	45
§ 4 - <u>Arbres et amalgames</u>	48
4.1. Cas de deux facteurs	48
4.2. Exemples d'arbres associés à des amalgames	52
4.3. Applications	53
4.4. Limite d'un arbre de groupes	55
4.5. Amalgames et domaines fondamentaux (cas général)	56
§ 5 - <u>Structure d'un groupe opérant sur un arbre</u>	59
5.1. Groupe fondamental d'un graphe de groupes	59
5.2. Mots réduits	64
5.3. Revêtement universel relatif à un graphe de groupes	71
5.4. Le théorème de structure	75
5.5. Application : théorème de Kuroš	77

§ 6 - <u>Amalgames et points fixes</u>	81
6.1. La propriété de point fixe pour les groupes opérant sur les arbres	81
6.2. Conséquences de la propriété (FA)	83
6.3. Exemples	84
6.4. Points fixes d'un automorphisme d'un arbre	85
6.5. Groupes ayant des points fixes (résultats auxiliaires) ..	89
6.6. Le cas de $SL_3(\mathbf{Z})$	93
CHAPITRE II - SL_2	
§ 1 - <u>L'arbre de SL_2 sur un corps local</u>	97
1.1. L'arbre	97
1.2. Les groupes $GL(V)$ et $SL(V)$	103
1.3. Action de $GL(V)$ sur l'arbre de V ; stabilisateurs	105
1.4. Amalgames	108
1.5. Un théorème de Ihara	113
1.6. Un théorème de Nagao	117
1.7. Lien avec les systèmes de Tits	122
§ 2 - <u>Sous-groupes arithmétiques des groupes GL_2 et SL_2 sur un corps de fonctions d'une variable</u>	130
2.1. Interprétation des sommets de $\Gamma \backslash X$ comme classes de fibrés vectoriels de rang 2 sur C	131
2.2. Fibrés de rang 1 et fibrés indécomposables	134
2.3. Structure de $\Gamma \backslash X$	140
2.4. Exemples	149
2.5. Structure de Γ	157
2.6. Résultats auxiliaires	160
2.7. Structure de Γ : cas d'un corps fini	165
2.8. Homologie	167
2.9. Caractéristiques d'Euler-Poincaré	174
BIBLIOGRAPHIE	181
INDEX	185
SUMMARY	188

INTRODUCTION

Le point de départ de ce travail a été le théorème de Ihara [16] suivant lequel tout sous-groupe discret sans torsion G de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ est un groupe libre. Ce résultat particulièrement frappant était à l'époque (1966) le seul que l'on eut sur la structure des sous-groupes discrets des groupes p -adiques.

La démonstration de Ihara est de nature combinatoire ; elle utilise, de façon quelque peu mystérieuse, une décomposition de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ comme amalgame de deux copies de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$. Or, la Topologie suggère une manière naturelle de prouver qu'un groupe G est un groupe libre : il suffit de faire opérer G librement ("sans points fixes") sur un arbre X ; le groupe G s'identifie alors au groupe fondamental $\pi_1(G \backslash X)$ du graphe quotient $G \backslash X$, groupe qui est évidemment libre. Interprétée de ce point de vue, la démonstration de Ihara revient à prendre pour X l'arbre associé à l'amalgame indiqué plus haut ; cet arbre, l'arbre de SL_2 sur le corps \mathbb{Q}_p , apparaît alors comme un cas très particulier des immeubles de Bruhat-Tits ([37], [38]), analogues p -adiques des espaces homogènes symétriques des groupes de Lie réels.

On est ainsi amené à préciser les liens qui unissent "arbres", "amalgames" et " SL_2 ". C'est le sujet du présent travail, qui reprend une partie d'un cours fait au Collège de France en 1968/69 ; le reste de ce cours a été publié ailleurs ([34]).

Il y a deux Chapitres.

Le Chapitre I débute par la définition des amalgames et la structure de leurs éléments (§ 1). On passe de là aux arbres (§ 2), et plus précisément à la question suivante : que peut-on dire d'un groupe G opérant sur un arbre X lorsque l'on connaît le graphe quotient $G \backslash X$ ainsi que les stabilisateurs G_x ($x \in \text{som } X$) et G_y ($y \in \text{ar } X$) des sommets et des arêtes ? On traite d'abord deux cas particuliers :

celui où G opère librement, i.e. où les G_x et les G_y sont réduits à $\{1\}$; le groupe G est alors libre ; ce cas, qui est celui du théorème de Ihara, donne également une démonstration simple du théorème de Schreier disant que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre (§ 3) ;

celui où le graphe $G \setminus X$ est un segment $x \xrightarrow{y} x'$, auquel cas G s'identifie à l'amalgame $G_x *_{G_y} G_{x'}$; de plus, tout amalgame de deux groupes s'obtient ainsi, et de façon unique ; on obtient un dictionnaire commode entre "amalgames" et "groupes agissant sur un arbre avec pour domaine fondamental un segment" (§ 4).

Le cas général fait l'objet du § 5. Dans le cours oral, je m'étais borné à en suggérer la possibilité, sans faire aucune vérification. La forme définitive des définitions et des théorèmes, ainsi que les démonstrations, sont dues à H. Bass. Le résultat principal dit, en gros, que l'on peut reconstituer G à partir de $G \setminus X$ et des stabilisateurs G_x et G_y : c'est le "groupe fondamental" d'un "graphe de groupes" porté par $G \setminus X$; inversement, tout graphe de groupes s'obtient ainsi, de façon essentiellement unique. Ici encore, on dispose d'une "forme normale" pour les éléments de G . Le cas où $G \setminus X$ est un lacet  conduit aux groupes "de type (HNN)".

Le § 6 étudie les relations entre "amalgames" et "points fixes". Il montre que certains groupes, tels $SL_3(\mathbb{Z})$, $Sp_4(\mathbb{Z})$, etc, ont toujours des points fixes, lorsqu'ils opèrent sur des arbres ; cela prouve que ce ne sont pas des amalgames. Une première version de ces résultats a été publiée ailleurs (Lect. Notes in Math. n° 372, Springer-Verlag, 1974, p. 633-640).

Le Chapitre II commence par la définition et les principales propriétés de l'arbre X attaché à un espace vectoriel V de dimension 2 sur un corps local K (§ 1). Les sommets de cet arbre sont les classes de réseaux de V , deux réseaux étant dans la même classe s'ils sont homothétiques, i.e. s'ils ont le même stabilisateur dans $GL(V)$; deux sommets sont liés si on peut les représenter par des réseaux emboîtés dont le quotient est de longueur 1 ; on reconnaît là la notion de "réseaux voisins" qui intervient dans la définition classique de l'opérateur

de Hecke T_p . (Lorsque, par exemple, K est le corps \mathbb{Q}_p et V est le module de Tate d'une courbe elliptique E , les sommets de X correspondent aux courbes elliptiques p -isogènes à E , et l'on retrouve la description habituelle des p -isogénies au moyen d'un arbre.) Une fois X défini, on peut lui appliquer les résultats du Chap. I, et l'on obtient sans difficulté les théorèmes de Ihara cités plus haut, ainsi qu'un théorème de Nagao [19] donnant la structure de $GL_2(k[t])$ comme amalgame de $GL_2(k)$ et du groupe de Borel $B(k[t])$. Ce dernier résultat est généralisé au § 2 à la situation suivante : on remplace $k[t]$ par l'algèbre affine A d'une courbe $C^{\text{aff}} = C - \{P\}$ ayant un seul point à l'infini P . Le groupe $\Gamma = GL_2(A)$ agit alors sur l'arbre X correspondant à la valuation définie par P , et le quotient $\Gamma \backslash X$ a une interprétation simple en termes de fibrés vectoriels de rang 2 sur C . Utilisant les résultats connus sur de tels fibrés, on en déduit des théorèmes de structure pour $\Gamma \backslash X$, donc aussi pour Γ ; on obtient en outre des renseignements sur l'homologie de Γ , ainsi que sur sa caractéristique d'Euler-Poincaré.

Je signale également un certain nombre de questions, liées à celles traitées dans le texte, et sur lesquelles le lecteur pourra utilement consulter la Bibliographie, p. 181 :

la théorie des bouts des groupes discrets, et les théorèmes de Stallings ([6], [7], [8], [30], [35]) ;

l'analyse sur les arbres, où l'opérateur de Hecke "somme sur les sommets voisins" remplace le laplacien ([13], [14]) ;

la fonction zêta attachée à un sous-groupe discret à quotient compact de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, cf. [15] ; on peut en donner une interprétation simple en termes d'arbres et de graphes finis ;

les formes modulaires relativement au groupe Γ du Chap. II, § 2 et à ses sous-groupes de congruence (articles à paraître de D. Goss, G. Harder, W. Li, J. Weisinger) ;

la théorie de Mumford des groupes de Schottky p -adiques et des courbes algébri-

ques qui leur sont associées ([17], [18]) ;

les propriétés cohomologiques des groupes S-arithmétiques ([28], [29],[32], [33], [34]), en particulier pour les corps de fonctions (G.Harder, Invent.Math.,42, 1977, p.135-175).

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide, amicale et efficace, de Hyman BASS - tant pour la rédaction que pour la mise au point des résultats. Je l'en remercie avec grand plaisir.

Je remercie également S.C. Althoen et I.M. Chiswell pour les corrections qu'ils m'ont signalées, ainsi que M. Laclotte, Conservateur en Chef du Département des Peintures du Musée du Louvre, pour la reproduction de "l'Arbre aux Corbeaux" de C.D. Friedrich utilisée comme frontispice.

CHAPITRE I

ARBRES ET AMALGAMES

§ 1 - Amalgames

1.1. Limites inductives

On se donne une famille $(G_i)_{i \in I}$ de groupes, et, pour tout couple (i, j) , un ensemble F_{ij} d'homomorphismes de G_i dans G_j .

On cherche un groupe $G = \varinjlim G_i$ et une famille d'homomorphismes $f_i : G_i \rightarrow G$ tels que $f_j \circ f = f_i$ pour tout $f \in F_{ij}$, ce groupe et cette famille étant universels au sens suivant :

(*) Si H est un groupe, et si $h_i : G_i \rightarrow H$ est une famille d'homomorphismes tels que $h_j \circ f = h_i$ pour tout $f \in F_{ij}$, il existe un homomorphisme $h : G \rightarrow H$ et un seul tel que $h_i = h \circ f_i$. (Cela revient à dire que $\text{Hom}(G, H) \simeq \varprojlim \text{Hom}(G_i, H)$, la limite projective étant prise relativement aux F_{ij} .)

On dit alors que G est la limite inductive des G_i , relativement aux F_{ij} .

PROPOSITION 1 - Le couple formé de G et de la famille $(f_i)_{i \in I}$ existe et est unique, à isomorphisme unique près.

L'unicité résulte comme d'habitude de la propriété universelle (ou, ce qui revient au même, du fait que G représente le foncteur $H \mapsto \varprojlim \text{Hom}(G_i, H)$). L'existence est facile. On peut, par exemple, définir G par générateurs et relations ; on prend comme famille génératrice la somme disjointe des G_i ; comme relations, d'une part les xyz^{-1} , où x, y, z appartiennent à un même G_i et $z = xy$ dans G_i , d'autre part les xy^{-1} où $x \in G_i, y \in G_j$, et $y = f(x)$ pour au moins un $f \in F_{ij}$.

Exemple. On prend trois groupes A, G_1 et G_2 et deux flèches $f_1 : A \rightarrow G_1$, $f_2 : A \rightarrow G_2$. On dit que le groupe G correspondant s'obtient en amalgamant A dans G_1 et G_2 au moyen de f_1 et f_2 ; on le note $G_1 *_A G_2$. On peut avoir $G = \{1\}$ même si f_1 et f_2 sont non triviaux (cf. exerc. 2).

Application (théorème de van Kampen). Soit X un espace topologique recouvert par deux ouverts U_1 et U_2 . On suppose U_1 , U_2 et $U_{12} = U_1 \cap U_2$ connexes par arc. Soit $x \in U_{12}$ un point-base. Alors le groupe fondamental $\pi_1(X; x)$ est obtenu par amalgame à partir des trois groupes $\pi_1(U_1; x)$, $\pi_1(U_2; x)$ et $\pi_1(U_{12}; x)$ et des homomorphismes

$$\pi_1(U_{12}; x) \rightarrow \pi_1(U_1; x) \quad \text{et} \quad \pi_1(U_{12}; x) \rightarrow \pi_1(U_2; x).$$

(Pour une généralisation au cas d'une famille quelconque d'ouverts, cf. R. Crowell, Pac. J. Math. 9, 1959, p. 43-50.)

Exercices

1) Soient $f_1 : A \rightarrow G_1$ et $f_2 : A \rightarrow G_2$ deux homomorphismes et soit $G = G_1 *_A G_2$ la somme amalgamée correspondante. On définit par récurrence sur n des sous-groupes A^n , G_1^n et G_2^n de A , G_1 et G_2 par les conditions suivantes :

$$A^1 = \{1\}, \quad G_1^1 = \{1\}, \quad G_2^1 = \{1\}$$

$$A^n = \text{sous-groupe dist. de } A \text{ engendré par } f_1^{-1}(G_1^{n-1}) \text{ et } f_2^{-1}(G_2^{n-1}),$$

$$G_i^n = \text{sous-groupe dist. de } G_i \text{ engendré par } f_i(A^n).$$

Soit A^∞ (resp. G_i^∞) la réunion des A^n (resp. G_i^n). Montrer que f_i définit une injection $A/A^\infty \rightarrow G_i/G_i^\infty$ et que G s'identifie à la somme amalgamée de G_1/G_1^∞ et G_2/G_2^∞ par A/A^∞ .

En déduire (en utilisant les résultats du n° 1.2) que le noyau de $A \rightarrow G$ est A^∞ et que celui de $G_i \rightarrow G$ est G_i^∞ .

2) Soient $A = \mathbb{Z}$, $G_1 = \text{PSL}(2, \mathbb{Q})$ et $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On prend pour $f_1 : A \rightarrow G_1$ une injection et pour $f_2 : A \rightarrow G_2$ une surjection. Montrer que $G_1 *_A G_2 = \{1\}$.

1.2. Structure des sommes amalgamées

On se donne un groupe A , une famille de groupes $(G_i)_{i \in I}$ et, pour tout $i \in I$, un homomorphisme injectif $A \rightarrow G_i$. On identifie A à son image dans chacun des G_i . On note $*_A G_i$ la limite inductive (cf. n° 1.1) de la famille (A, G_i) relativement à ces homomorphismes ; on l'appelle la somme des G_i amalgamée suivant A .

Exemple. $A = \{1\}$; le groupe correspondant se note $* G_i$; c'est le produit libre des G_i .

On va définir la notion de mot réduit. Pour tout $i \in I$, on choisit un ensemble

AMALGAMES

de représentants S_i des classes à droite de G_i suivant A , et l'on suppose que $1 \in S_i$; l'application $(a, s) \mapsto as$ est donc une bijection de $A \times S_i$ sur G_i appliquant $A \times (S_i - \{1\})$ sur $G_i - A$.

Soit $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$ une suite d'éléments de I (avec $n \geq 0$) vérifiant la condition suivante :

$$(T) - i_m \neq i_{m+1} \text{ pour } 1 \leq m \leq n-1 .$$

On appelle mot réduit de type \underline{i} toute famille

$$m = (a; s_1, \dots, s_n)$$

où $a \in A$, $s_1 \in S_{i_1}, \dots, s_n \in S_{i_n}$ et $s_j \neq 1$ pour tout j .

Enfin, on note f (resp. f_i) l'homomorphisme canonique de A (resp. G_i) dans le groupe $G = *_{A} G_i$.

THÉOREME 1 - Pour tout $g \in G$, il existe une suite \underline{i} vérifiant (T) et un mot réduit $m = (a; s_1, \dots, s_n)$ de type \underline{i} tels que

$$(*) \quad g = f(a)f_{i_1}(s_1)\dots f_{i_n}(s_n) .$$

De plus, \underline{i} et m sont uniques.

Remarque. Le Th. 1 implique que f et les f_i sont injectifs (ce qui n'était pas évident a priori). On peut donc identifier A et les G_i à leurs images dans G et la décomposition réduite (*) d'un élément $g \in G$ s'écrit alors :

$$g = as_1 \dots s_n \text{ , avec } a \in A \text{ , } s_1 \in S_{i_1} - \{1\}, \dots, s_n \in S_{i_n} - \{1\} .$$

On voit également que $G_i \cap G_j = A$ si $i \neq j$. En particulier, les ensembles $S_i - \{1\}$ sont deux à deux disjoints.

Démonstration (d'après une méthode de van der Waerden, Amer. J. of Math., 70, 1948 ; voir aussi Bourbaki, A I, § 7)

Soit $X_{\underline{i}}$ l'ensemble des mots réduits de type \underline{i} et soit X la somme disjointe des $X_{\underline{i}}$. On va faire opérer G sur X ; pour cela, vu la propriété universelle de G , il suffit de faire opérer chaque G_i et de vérifier que la loi d'opération

ARBRES ET AMALGAMES

induite sur A ne dépend pas de i .

Soit donc $i \in I$, et soit Y_i l'ensemble des mots réduits de la forme $(1; s_1, \dots, s_n)$, avec $i_1 \neq i$. Les ensembles $A \times Y_i$ et $A \times (S_i - \{1\}) \times Y_i$ s'envoient dans X par les applications

$$\begin{aligned} (a, (1; s_1, \dots, s_n)) &\mapsto (a; s_1, \dots, s_n) \\ ((a, s), (1; s_1, \dots, s_n)) &\mapsto (a; s, s_1, \dots, s_n). \end{aligned}$$

On obtient évidemment ainsi une bijection de $A \times Y_i \cup A \times (S_i - \{1\}) \times Y_i$ sur X . Mais $A \cup A \times (S_i - \{1\})$ s'identifie à G_i . D'où une bijection

$$\theta_i : G_i \times Y_i \rightarrow X.$$

Ceci étant, on fait opérer G_i sur $G_i \times Y_i$ de façon évidente :

$$g'.(g, y) = (g'g, y).$$

D'où, par transport de structure au moyen de θ_i , une loi d'opération de G_i sur X ; sa restriction à A est donnée par

$$a'.(a; s_1, \dots, s_n) = (a'a; s_1, \dots, s_n);$$

elle ne dépend pas de i .

On a donc défini une opération de G sur X . De plus, si $m = (a; s_1, \dots, s_n)$ est un mot réduit et si g est son image dans G par la formule (*), le transformé par g du mot unité $e = (1;)$ (relatif à la suite vide $i = \emptyset$) est m lui-même; cela se vérifie par récurrence sur n . Si l'on note $\alpha : G \rightarrow X$ l'application $g \mapsto g.e$ et $\beta : X \rightarrow G$ l'application définie par (*), on a donc $\alpha \circ \beta = \text{id}$. D'où l'injectivité de β , c'est-à-dire l'unicité de la décomposition réduite (ce qui constitue la partie non triviale du théorème). On peut alors identifier X à $\beta(X) \subset G$, et il reste à voir que $X = G$. Il suffit de prouver que $G_i X \subset X$ pour tout i (car cela entraîne $G X \subset X$, d'où $X = G$ puisque $1 \in X$); or c'est immédiat.

AMALGAMES

Remarque. Il est possible d'énoncer le th. 1 sans faire intervenir les ensembles de représentants S_i . Pour tout $i \in I$, posons $G'_i = G_i - A$. Si $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$, désignons par $G'_{\underline{i}}$ le quotient de $G'_{i_1} \times \dots \times G'_{i_n}$ par l'action de A^{n-1} , opérant au moyen de la formule

$$(a_1, \dots, a_{n-1})(g_1, \dots, g_n) = (g_1 a_1^{-1}, a_1 g_2 a_2^{-1}, a_2 g_3 a_3^{-1}, \dots, a_{n-1} g_n) .$$

(On a donc $G'_{\underline{i}} = G'_{i_1} \times^A G'_{i_2} \times^A G'_{i_3} \times \dots \times^A G'_{i_n}$.)

L'application $(g_1, \dots, g_n) \mapsto f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_n}(g_n)$ définit par passage au quotient une application $f_{\underline{i}} : G'_{\underline{i}} \rightarrow G$. Avec ces notations, on a :

THÉORÈME 2 - Les applications f et $f_{\underline{i}}$ définissent une bijection de la somme disjointe de A et des $G'_{\underline{i}}$ sur G .

Ce n'est qu'une reformulation du théorème 1. En effet, si \underline{i} est non vide, tout élément de $G'_{\underline{i}}$ admet un représentant et un seul de la forme (a, s_1, \dots, s_n) , avec $a \in A$, $s_m \in S_{i_m} - \{1\}$.

Cas particulier. Dans le cas des produits libres ($A = \{1\}$), on a simplement $S_i = G'_i = G_i - \{1\}$.

Plus particulièrement, prenons pour G_i le groupe cyclique infini engendré par un élément x_i , de sorte que G s'identifie au groupe libre $F((x_i)_{i \in I})$ de famille basique $(x_i)_{i \in I}$; les théorèmes 1 et 2 redonnent l'existence et l'unicité de la décomposition d'un élément g de $F((x_i)_{i \in I})$ sous la forme

$$g = x_{i_1}^{m_1} \dots x_{i_n}^{m_n}, \quad i_1 \neq i_2, \dots, i_{n-1} \neq i_n, \quad m_1 \neq 0, \dots, m_n \neq 0 .$$

Généralisations. Dans les théorèmes ci-dessus, le cas crucial est celui où la famille $(G_i)_{i \in I}$ a deux éléments; le cas d'un ensemble fini quelconque s'en déduit par récurrence (par exemple, $G_1 *_A G_2 *_A G_3$ peut s'obtenir par deux amalgames successifs, comme $(G_1 *_A G_2) *_A G_3$); le cas d'un ensemble infini se ramène au cas fini par limite inductive filtrante.

On peut même (toujours en procédant par récurrence) faire des amalgames plus

compliqués. On peut, par exemple, se donner une famille de groupes $(G_i)_{i \in I}$, un ensemble D de parties à deux éléments de I , et, pour tout $\{i, j\} \in D$, un groupe A_{ij} et des injections $A_{ij} \rightarrow G_i$, $A_{ij} \rightarrow G_j$. Le groupe $G = \varinjlim (G_i, A_{ij})$ possède un théorème de structure analogue au th. 1 pourvu que le graphe ayant I pour ensemble de sommets et D pour ensemble d'arêtes n'ait pas de circuit (cf. § 2). (Le cas où I est fini se traite par récurrence sur $\text{Card}(I)$, en utilisant l'existence d'un "sommet terminal" ; le cas général s'en déduit par limite inductive filtrante, comme ci-dessus.)

Exercice. Soient A un anneau, $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'anneaux, et $A \rightarrow B_i$ des homomorphismes. On définit de façon évidente la somme amalgamée $B = *_A B_i$ des B_i relativement à A . On fait l'hypothèse suivante :

Les homomorphismes $A \rightarrow B$ sont injectifs ; de plus, pour tout $i \in I$, il existe un sous- A -bimodule B'_i de B_i tel que $B_i = A \oplus B'_i$.

Montrer que B est somme directe de A et de sous- A -bimodules B'_i isomorphes à $B'_{i_1} \otimes_A B'_{i_2} \otimes_A \dots \otimes_A B'_{i_n}$ (où $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$ parcourt l'ensemble des suites finies d'éléments de I vérifiant la condition (T)). (Même démonstration que pour le th. 1 : faire opérer B sur la somme directe de A et des B'_i .)

[On trouvera un cas un peu plus général dans P.M. Cohn, J. of Algebra, 1, 1964, p. 47-69.]

1.3. Conséquences du théorème de structure

On conserve les notations des théorèmes 1 et 2 ; on note G le groupe $*_A G_i$. Le type d'un élément $g \in G$ est la suite $\underline{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, vérifiant (T), telle que la décomposition réduite de g soit de type \underline{i} . On a $\underline{i} = \emptyset$ si et seulement si g appartient à A ; ce cas écarté, le type de g peut être caractérisé par la relation $g \in G'_{\underline{i}}$ (avec les notations du th. 2) ; il ne dépend pas du choix des représentants S_i .

L'entier n s'appelle la longueur de g ; on le note $\ell(g)$. On a $\ell(g) \leq 1$ si et seulement si g appartient à l'un des G_i .

Enfin, un élément g de longueur ≥ 2 est dit cycliquement réduit si son type $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$ est tel que $i_1 \neq i_n$.

AMALGAMES

PROPOSITION 2 - a) Tout élément g de G est conjugué à un élément cycliquement réduit, ou à un élément de l'un des G_i .

b) Tout élément cycliquement réduit est d'ordre infini.

On établit a) par récurrence sur $l(g)$. Si $l(g) \geq 2$ et si g n'est pas cycliquement réduit, soit $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$ son type ; on a $i_1 = i_n$. On peut écrire g sous la forme

$$g = g_1 \dots g_n, \text{ avec } g_1 \in G_{i_1}^!, \dots, g_n \in G_{i_n}^!.$$

On a donc :

$$g_1^{-1} g g_1 = g_2 \dots g_{n-1} (g_n g_1), \text{ avec } g_n g_1 \in G_{i_1}.$$

On en conclut que $g_1^{-1} g g_1$ est de longueur $n-1$ (si $g_n g_1 \notin A$), ou de longueur $n-2$ (si $g_n g_1 \in A$). Vu l'hypothèse de récurrence, cet élément est donc conjugué d'un élément cycliquement réduit, ou d'un élément de l'un des G_i , et il en est de même de g .

D'autre part, si g est cycliquement réduit de type $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$, il est clair que g^2 est de type $2\underline{i} = (i_1, \dots, i_n, i_1, \dots, i_n)$ donc de longueur $2n$; plus généralement, g^k ($k \geq 1$) est de longueur kn , et n'est donc pas égal à 1.

D'où b).

COROLLAIRE 1 - Tout élément de G d'ordre fini est conjugué d'un élément de l'un des G_i .

Cela résulte évidemment de a) et de b).

Remarque. On peut démontrer (par le même genre d'arguments) un résultat un peu plus précis : tout sous-groupe fini de G est conjugué à un sous-groupe de l'un des G_i , cf. n° 4.3, th. 8.

COROLLAIRE 2 - Si les G_i sont sans torsion, il en est de même de G .

(On rappelle qu'un groupe est dit sans torsion si ses éléments $\neq 1$ sont d'ordre infini.)

PROPOSITION 3 - Pour tout $i \in I$, soit H_i un sous-groupe de G_i . On suppose que $B = H_i \cap A$ est indépendant de i . L'homomorphisme $*_B H_i \rightarrow *_A G_i$ induit par les injections $H_i \rightarrow G_i$ est injectif.

(On peut donc identifier le sous-groupe de G engendré par les H_i à la somme amalgamée $*_B H_i$.)

Soit $i \in I$, et soit T_i un système de représentants des classes à droite de H_i modulo B , contenant 1 . Puisque $A \cap H_i = B$, on peut prolonger T_i en un système de représentants S_i des classes à droite de G_i modulo A . Il est alors clair que toute décomposition réduite dans $*_B H_i$ relativement aux T_i donne une décomposition réduite dans $*_A G_i$ relativement aux S_i ; d'où la proposition.

(Variante : les applications $H_i \rightarrow G_i$ sont injectives.)

COROLLAIRE - Si $H_i \cap A = \{1\}$ pour tout $i \in I$, le sous-groupe de G engendré par les H_i s'identifie au produit libre $* H_i$.

Donnons maintenant une application aux produits libres :

PROPOSITION 4 - Soient A et B deux groupes, et soit R le noyau de l'homomorphisme canonique $A * B \rightarrow A \times B$. Le groupe R est un groupe libre, de famille basique l'ensemble X des commutateurs $(a,b) = a^{-1}b^{-1}ab$, avec $a \in A - \{1\}$, $b \in B - \{1\}$.

Démonstration (d'après Magnus-Karrass-Solitar, [3], p. 196, exerc. 24)

Soit S le sous-groupe de $A * B$ engendré par X . Si $a' \in A$ et $(a,b) \in X$, on a

$$a'^{-1}(a,b)a' = a'^{-1}a^{-1}b^{-1}aba' = (aa',b).(a',b)^{-1} \in S,$$

d'où $a'^{-1}Sa' = S$. On montre de même que $b'^{-1}Sb' = S$ si $b' \in B$, d'où le fait que S est distingué dans $A * B$. Il est clair que $(A * B)/S$ a la propriété universelle qui caractérise $A \times B$; on a donc $S = R$, d'où le fait que R est engendré par X .

Il reste à voir que X est une famille libre dans R . Or, on a le lemme suivant :

LEMME 1 - Soit X une partie d'un groupe R . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est libre.

(ii) Pour toute suite finie x_1, \dots, x_n ($n \geq 1$) d'éléments de X , et toute suite $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ d'éléments de $\{\pm 1\}$ telles que l'on n'ait $x_i = x_{i+1}$ et $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ pour aucun i , le produit $x_1 \dots x_n$ n'est pas égal à 1 .

En effet, on sait (cela résulte facilement du th. 1) que tout élément $\neq 1$ du groupe libre $F(X)$ de base X se met de façon unique sous la forme $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ comme ci-dessus. La condition (ii) signifie donc simplement que l'homomorphisme $F(X) \rightarrow R$ est injectif.

Ceci étant, il nous suffit de prouver que l'ensemble X des (a,b) vérifie (ii) . Soient donc $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in X$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que l'on n'ait pas simultanément $a_i = a_{i+1}$, $b_i = b_{i+1}$ et $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$. Il faut prouver que l'élément

$$g = (a_1, b_1)^{\varepsilon_1} \dots (a_n, b_n)^{\varepsilon_n}$$

est $\neq 1$. De façon plus précise, on va montrer que l'on a :

(1) $l(g) \geq n+3$.

(2) Si $\varepsilon_n = +1$ (resp. $\varepsilon_n = -1$) , la décomposition réduite de g se termine par $a_n b_n$ (resp. par $b_n a_n$) .

On procède par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant trivial. Supposons, pour fixer les idées, que $\varepsilon_{n-1} = +1$; la décomposition réduite de

$$g' = (a_1, b_1)^{\varepsilon_1} \dots (a_{n-1}, b_{n-1})^{\varepsilon_{n-1}}$$

est alors de la forme

$$g' = s_1 \dots s_p a_{n-1} b_{n-1} , \text{ avec } p \geq n .$$

Si $\varepsilon_n = +1$, on a :

$$g = s_1 \dots s_p a_{n-1} b_{n-1} a_n^{-1} b_n^{-1} a_n b_n ,$$

et c'est une décomposition réduite de longueur $\geq n+6$ se terminant par $a_n b_n$,

d'où (1) et (2) dans ce cas. Si $\varepsilon_n = -1$, on a :

$$g = s_1 \dots s_p a_{n-1} (b_{n-1} b_n^{-1}) a_n^{-1} b_n a_n .$$

Si $b_{n-1} b_n^{-1} \neq 1$, c'est une décomposition réduite de g de longueur $\geq n+5$, se terminant par $b_n a_n$, d'où (1) et (2) dans ce cas. Si $b_{n-1} b_n^{-1} = 1$, on a nécessairement $a_{n-1} \neq a_n$ (vu que $\varepsilon_{n-1} = -\varepsilon_n$); la décomposition

$$g = s_1 \dots s_p (a_{n-1} a_n^{-1}) b_n a_n$$

est alors réduite, de longueur $\geq n+3$, et se termine bien par $b_n a_n$, cqfd.

Remarque. On peut aussi déduire la prop. 4 des résultats sur les graphes qui seront démontrés plus loin (cf. n° 4.3, exerc. 2).

COROLLAIRE - Le produit libre de deux groupes finis contient un sous-groupe libre d'indice fini.

Exercices

1) Soit g (resp. h) un élément de $*_A G_i$ de longueur n (resp. m) et de type (i_1, \dots, i_n) (resp. de type (j_1, \dots, j_m)). Montrer que $\ell(gh) \leq n + m$, et qu'il y a égalité si et seulement si $i_n \neq j_1$, auquel cas gh est de type $(i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m)$.

2) Soit H un sous-groupe de $G = *_A G_i$. On suppose que $A.H = G$. On pose $B = A \cap H$ et $H_i = G_i \cap H$. Montrer que H est engendré par les H_i , et s'identifie à $*_B H_i$.

1.4. Constructions utilisant les sommes amalgamées

Les sommes amalgamées sont souvent utilisées pour démontrer la non trivialité de groupes définis par générateurs et relations. C'est ainsi, par exemple, qu'elles interviennent de façon essentielle dans le travail de G. Higman (Proc. Royal Soc., 262, 1961, p. 455-475) caractérisant les groupes plongeables dans un groupe de présentation finie (ce sont ceux qui ont une présentation "réursive").

Je me bornerai à deux exemples plus élémentaires :

PROPOSITION 5 (G. Higman, B.H. Neumann, H. Neumann) - Soient A un sous-groupe d'un groupe G , et $\theta : A \rightarrow G$ un homomorphisme injectif. Il existe alors un groupe G'

AMALGAMES

contenant G , et un élément s de G' , tels que $\theta(a) = sas^{-1}$ pour tout $a \in A$.

De plus, si G est dénombrable (resp. de type fini, resp. sans torsion), on peut choisir pour G' un groupe ayant la même propriété.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posons $A_n = A$, $G_n = G$. Soit H le groupe obtenu par amalgame des G_n au moyen des injections $A_n \rightarrow G_n$, $A_n \rightarrow G_{n+1}$ qui sont respectivement θ et l'inclusion canonique. [On peut résumer cet amalgame par le diagramme suivant :

$$\dots \begin{array}{c} \nearrow G \\ \searrow \theta \\ A \end{array} \begin{array}{c} \nearrow G \\ \searrow \text{id.} \\ A \end{array} \begin{array}{c} \nearrow G \\ \searrow \theta \\ A \end{array} \begin{array}{c} \nearrow G \\ \searrow \text{id.} \\ A \end{array} \begin{array}{c} \nearrow G \\ \searrow \theta \\ A \end{array} \begin{array}{c} \nearrow G \\ \searrow \text{id.} \\ A \end{array} \dots]$$

Soit u_n l'isomorphisme canonique de G_n sur G_{n+1} . Les u_n définissent un automorphisme u de H ("décalage"). De plus, si l'on identifie G à G_0 , et si $a \in A \subset G$, l'élément $u(a)$ de G_1 est égal à l'élément $\theta(a)$ de $G_0 = G$. Ainsi u prolonge θ . Formons alors le produit semi-direct $G' = H.S$ d'un groupe cyclique infini S engendré par un élément s , et du groupe H , l'élément s opérant sur H grâce à u . Il est immédiat que le couple (G',s) a la propriété cherchée (il est même universel pour la propriété en question, cf. exerc. 2). On vérifie en outre que si G est dénombrable, de type fini, ou sans torsion, il en est de même de G' .

Remarque. On dit parfois que G' se déduit de (A,G,θ) par la construction (HNN).

COROLLAIRE - Tout groupe G peut être plongé dans un groupe K jouissant de la propriété suivante :

(*) Tous les éléments de K de même ordre sont conjugués entre eux.

De plus, si G est dénombrable (resp. sans torsion), on peut choisir K dénombrable (resp. sans torsion).

Tout d'abord, si $x,y \in G$ ont même ordre, la prop. 5 montre qu'il existe un groupe G_{xy} contenant G dans lequel x et y sont conjugués (et l'on peut prendre G_{xy} dénombrable, ou sans torsion, si G l'est). En recommençant cette opération et passant à la limite inductive, on construit un groupe $E(G)$, contenant G , et tel que tous les éléments de G de même ordre sont conjugués dans $E(G)$. En appliquant cette construction à $E(G)$ lui-même, on obtient un groupe $E(E(G))$; et l'on

recommence ... La limite inductive des $E(E(\dots E(G)\dots))$ répond à la question.

Remarque. Si K est sans torsion, la condition (*) signifie simplement que les éléments de K distincts de 1 sont conjugués entre eux. En particulier, K est un groupe simple (s'il n'est pas réduit à $\{1\}$).

PROPOSITION 6 (G. Higman) - Soit G le groupe défini par quatre générateurs x_1, x_2, x_3, x_4 et par les quatre relations :

$$x_2 x_1 x_2^{-1} = x_1^2, \quad x_3 x_2 x_3^{-1} = x_2^2, \quad x_4 x_3 x_4^{-1} = x_3^2, \quad x_1 x_4 x_1^{-1} = x_4^2.$$

- a) Tout sous-groupe d'indice fini de G est égal à G .
 b) G est infini.

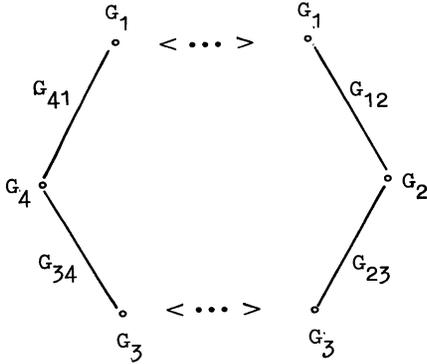
Prouvons d'abord a). Tout sous-groupe d'indice fini de G contient un sous-groupe distingué d'indice fini (l'intersection des conjugués du sous-groupe donné, par exemple). Il suffit donc de prouver que G n'admet aucun quotient fini non trivial. Or, soit \bar{G} un tel quotient, et soit $n_i (1 \leq i \leq 4)$ l'ordre de x_i dans \bar{G} . Puisque $\bar{G} \neq \{1\}$, l'un des n_i est > 1 . Soit p le plus petit nombre premier divisant l'un des n_i , et supposons par exemple que p divise n_1 . Du fait que

$$x_1^{n_2^2} = x_2^{n_2} x_1 x_2^{-n_2} = x_1 \quad \text{dans } \bar{G}$$

on déduit $2^{n_2} \equiv 1 \pmod{n_1}$ et a fortiori $2^{n_2} \equiv 1 \pmod{p}$. Cela entraîne déjà $p \neq 2$. D'autre part, on a $2 \not\equiv 1 \pmod{p}$; l'ordre N de l'image de 2 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ vérifie donc les inégalités $1 < N \leq p-1$. La congruence écrite ci-dessus équivaut à $n_2 \equiv 0 \pmod{N}$. Si p' est un facteur premier de N , on a donc $n_2 \equiv 0 \pmod{p'}$ et $p' \leq N \leq p-1$, ce qui contredit le caractère minimal de p . D'où a).

Démonstration de b) : soit G_{12} le groupe défini par les générateurs x_1, x_2 et la relation $x_2 x_1 x_2^{-1} = x_1^2$. C'est le produit semi-direct de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ par \mathbb{Z} , ce dernier opérant sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ par $n \mapsto 2n$. Le sous-groupe G_1 (resp. G_2) de G_{12} engendré par x_1 (resp. x_2) est isomorphe à \mathbb{Z} , et l'on a $G_1 \cap G_2 = \{1\}$. On définit de même G_{23} (resp. G_{34} et G_{41}) et ses sous-groupes G_2 et G_3 (resp. G_3, G_4

AMALGAMES



et G_4, G_1). En amalgamant le sous-groupe G_2 de G_{12} au sous-groupe de même nom de G_{23} , on obtient un groupe $G_{123} = G_{12} *_{G_2} G_{23}$. On définit de même $G_{341} = G_{34} *_{G_4} G_{41}$. Dans G_{123} , le sous-groupe engendré par G_1 et G_3 est isomorphe au groupe libre $F = G_1 * G_3$ (cf. cor. à la prop. 3). Il en est de même dans G_{341} . On peut donc former la

somme amalgamée $G_{123} *_F G_{341}$ et il est clair que c'est le groupe G de l'énoncé ; sa construction par amalgames successifs montre qu'il est infini (il contient le groupe libre à deux générateurs).

COROLLAIRE - Il existe un groupe simple infini engendré par 4 éléments.

Il suffit de prendre un quotient simple de G : il en existe puisque G est de type fini.

Problème

Y a-t-il une variété algébrique X sur \mathbb{C} dont le groupe fondamental est isomorphe au groupe G de la prop. 6 ? Si oui, a) montre que X est simplement connexe au sens algébrique, sans l'être au sens topologique, à cause de b). (Noter que, puisque G est de présentation finie, on peut le réaliser comme le groupe fondamental d'un polyèdre compact et même, si l'on veut, d'une variété différentielle compacte de dimension 4.)

Exercices

1) Montrer que le groupe défini par la présentation

$$x_2 x_1 x_2^{-1} = x_1^2, \quad x_3 x_2 x_3^{-1} = x_2^2, \quad x_1 x_3 x_1^{-1} = x_3^2$$

est trivial.

2) Montrer que le groupe G' construit dans la démonstration de la prop. 5 est isomorphe au quotient de $G * S$ par le sous-groupe distingué engendré par les éléments de la forme $s^{-1} a^{-1} s \theta(a)$, où a parcourt A , et où s désigne un géné-

rateur du groupe cyclique infini S .

1.5. Quelques exemples

Il s'agit de groupes que l'on rencontre fréquemment et qui sont de façon naturelle des produits libres ou des sommes amalgamées.

1.5.1. Le groupe diédral infini D_∞ , isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1.5.2. Le groupe "du trèfle", défini par $\langle a, b ; aba = bab \rangle$, est somme de deux copies de \mathbb{Z} amalgamées par $\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \xrightarrow{3} \mathbb{Z}$; en d'autres termes, il peut être défini par $\langle x, y ; x^2 = y^3 \rangle$ (prendre $x = bab$ et $y = ab$, par exemple). Ce groupe intervient de diverses façons :

- i) C'est l'image réciproque de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$.
- ii) C'est le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 - N$, où N est le noeud de trèfle :



iii) C'est le groupe $B(3)$ des tresses à trois brins, autrement dit le groupe fondamental de l'espace X_3 des sous-ensembles à trois éléments de \mathbb{C} .

iv) C'est le groupe fondamental local de la singularité "point de rebroussement ordinaire"; ou, ce qui revient au même, c'est le groupe fondamental de $\mathbb{C}^2 - Y$, où Y est la courbe affine d'équation $x^2 = y^3$.

1.5.3. Le groupe $PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (les groupes cycliques d'ordre 4 et 6 étant respectivement engendrés par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$).

1.5.4. Soit k un corps commutatif, et soit $k[X]$ l'algèbre des polynômes en une variable sur k . On a

$$GL_2(k[X]) \simeq GL_2(k) *_{\text{Bor}(k)} \text{Bor}(k[X]),$$

où $\text{Bor}(k)$ (resp. $\text{Bor}(k[X])$) désigne le groupe des matrices triangulaires à coefficients dans k (resp. dans $k[X]$). Le groupe $SL_2(k[X])$ admet une décomposition analogue.

AMALGAMES

Nous reviendrons au chap. II, n° 1.6, sur ces résultats, dus à H. Nagao [19].

1.5.5. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ est somme de deux copies de $SL_2(\mathbb{Z})$ amalgamées par le sous-groupe $\Gamma_0(p)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{p}$.

1.5.6. Soit k un corps muni d'une valuation discrète, d'anneau O_k et d'uniformisante π . Soit $\Gamma = SL_2(O_k)$, et soit A le sous-groupe de Γ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{\pi}$. Le groupe $SL_2(k)$ est isomorphe à $\Gamma *_A \Gamma$.

Ce résultat (comme le précédent) est dû à Y. Ihara [16] ; nous reviendrons là-dessus au chap. II, n° 1.4.

Exercices

1) Dédurre 1.5.5. de 1.5.6 et de l'exercice 2 du n° 1.3 .

2) Montrer que la courbe de \mathbb{R}^3 d'équation paramétrique

$$x = \cos 2t (2 + \cos 3t)$$

$$y = \sin 2t (2 + \cos 3t)$$

$$z = \sin 3t$$

est un noeud de trèfle.

3) Montrer l'équivalence des interprétations ii), iii), iv) du groupe du trèfle. (Pour ii) \Rightarrow iv), construire un homéomorphisme de $\mathbb{C}^2 - Y$ sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{S}^2 - N)$. Pour iii) \Rightarrow iv), définir un isomorphisme de X_3 sur $\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^2 - Y)$.)

Définir une "courbe elliptique au-dessus de X_3 " au moyen de l'équation $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$. En déduire une interprétation de l'homomorphisme $B(3) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z})$ de i).

(Pour une généralisation de ceci aux groupes de tresses $B(n)$ et le calcul de la cohomologie des $B(n)$, voir les notes publiées en 1968 par V.I. Arnold aux Uspekhi, Math. Zametki et Funkt. Anal.)

§ 2 - Arbres

2.1. Graphes

DEFINITION 1 - Un graphe Γ se compose d'un ensemble $X = \text{som } \Gamma$, d'un ensemble $Y = \text{ar } \Gamma$, et de deux applications

$$Y \rightarrow X \times X, \quad y \mapsto (o(y), t(y))$$

et

$$Y \rightarrow Y, \quad y \mapsto \bar{y}$$

qui satisfont à la condition suivante : pour tout $y \in Y$, on a $\bar{\bar{y}} = y$, $\bar{y} \neq y$, et $o(y) = t(\bar{y})$.

Un élément $P \in X$ s'appelle un sommet de Γ ; un élément $y \in Y$ s'appelle une arête (orientée), et \bar{y} s'appelle l'arête inverse. Le sommet $o(y) = t(\bar{y})$ s'appelle l'origine de y , et le sommet $t(y) = o(\bar{y})$ s'appelle le sommet terminal de y . Ces deux sommets s'appellent les extrémités de y . On dit que deux sommets sont liés s'ils sont les extrémités d'une arête.

Il y a une notion évidente de morphisme de graphes. On dit qu'un morphisme est injectif si les applications correspondantes sur les sommets et sur les arêtes le sont.

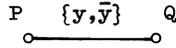
Une orientation d'un graphe Γ est une partie Y_+ de $Y = \text{ar } \Gamma$ telle que Y soit réunion disjointe de Y_+ et de \bar{Y}_+ . Il en existe toujours. Un graphe orienté est défini, à isomorphisme près, par la donnée de deux ensembles X et Y_+ , et d'une application $Y_+ \rightarrow X \times X$. Le graphe correspondant a pour ensemble d'arêtes $Y = Y_+ \cup \bar{Y}_+$, où \bar{Y}_+ désigne une copie de Y_+ .

Dessins

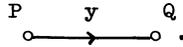
On représente en général un graphe par un dessin au moyen de la convention suivante : un point marqué du dessin correspond à un sommet du graphe, et une ligne joignant deux points marqués correspond à un ensemble d'arêtes de la forme $\{y, \bar{y}\}$.

ARBRES

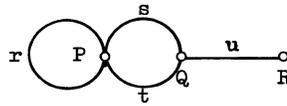
Par exemple, le graphe ayant 2 sommets P, Q et 2 arêtes y, \bar{y} avec $P = o(y)$, $Q = t(\bar{y})$ est représenté par le dessin



ou par



Ainsi, le dessin



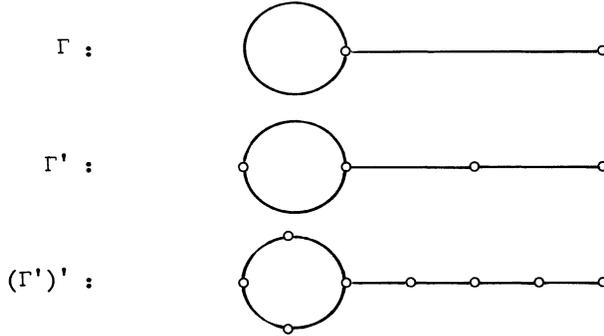
représente un graphe ayant 3 sommets P, Q, R , et 8 arêtes $r, s, t, u, \bar{r}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{u}$; de plus, r, s, t, u ont pour extrémités $\{P, P\}, \{P, Q\}, \{P, Q\}, \{Q, R\}$, respectivement. On a forcément $o(r) = P = t(r)$, mais le dessin ne précise pas si P est l'origine ou le sommet terminal de s .

Réalisation d'un graphe

Soit Γ un graphe et soient $X = \text{som } \Gamma, Y = \text{ar } \Gamma$. Formons l'espace topologique T somme disjointe de X et de $Y \times [0, 1]$, où X et Y sont munis de la topologie discrète. Soit R la relation d'équivalence la plus fine sur T pour laquelle $(y, t) \equiv (\bar{y}, 1-t), (y, 0) \equiv o(y)$, et $(y, 1) \equiv t(y)$ pour $y \in Y$ et $t \in [0, 1]$. L'espace quotient $\text{real}(\Gamma) = T/R$ s'appelle la réalisation du graphe Γ . (La réalisation est un foncteur qui commute aux limites inductives filtrantes. Puisqu'un graphe est la limite inductive de ses sous-graphes finis on en conclut que $\text{real}(\Gamma)$ est un CW-complexe de dimension ≤ 1 , au sens de J.H.C. Whitehead.)

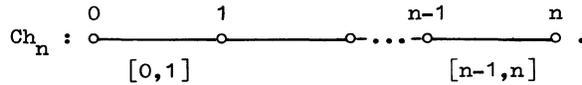
Il est facile de voir que la subdivision barycentrique de $\text{real}(\Gamma)$ est homéomorphe à la réalisation du graphe Γ' suivant : $\text{som } \Gamma'$ est la réunion de X et de l'ensemble des parties de la forme $\{y, \bar{y}\}$ de Y , (ces dernières représentant les milieux des arêtes de Γ) ; on pose $\text{ar } \Gamma' = Y \times \{0, 1\}$ avec $\overline{(y, \varepsilon)} = (\bar{y}, 1-\varepsilon)$ si $\varepsilon = 0, 1$ et $o(y, 0) = o(y)$ et $o(y, 1) = \{y, \bar{y}\}$. On appelle Γ' la subdivision barycentrique de Γ .

Voici un exemple :



Chemins

Soit n un entier ≥ 0 . Considérons le graphe orienté



Il a $n+1$ sommets $0, 1, \dots, n$ et l'orientation donnée par les n arêtes $[i, i+1]$, $0 \leq i < n$, avec $o([i, i+1]) = i$ et $t([i, i+1]) = i+1$.

DÉFINITION 2 - On appelle chemin (de longueur n) dans un graphe Γ tout morphisme c de Ch_n dans Γ .

Pour $n \geq 1$ la suite (y_1, \dots, y_n) d'arêtes $y_i = c([i-1, i])$ telle que $t(y_i) = o(y_{i+1})$, $1 \leq i < n$, détermine c ; on la note également c . Si $P_i = c(i)$ on dit que c est un chemin de P_0 à P_n et que P_0 et P_n sont les extrémités du chemin.

Un couple de la forme $(y_i, y_{i+1}) = (y_i, \bar{y}_i)$ dans le chemin s'appelle un aller-retour. Il nous permet de construire un chemin (de longueur $n-2$) de P_0 à P_n , donné (pour $n > 2$) par la suite $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+2}, \dots, y_n)$. Par récurrence, on en déduit que, s'il existe un chemin de P à Q dans Γ , il en existe un sans aller-retour.

La limite inductive $Ch_\infty = \lim_{\rightarrow} Ch_n$ fournit aussi la notion de chemin infini. C'est une suite infinie (y_1, y_2, \dots) d'arêtes telles que $t(y_i) = o(y_{i+1})$ pour

tout $i \geq 1$.

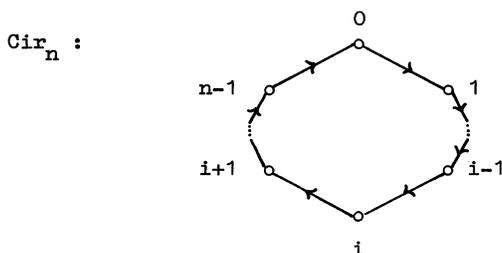
DÉFINITION 3 - Un graphe est dit connexe si deux sommets quelconques sont les extrémités d'au moins un chemin. Les sous-graphes connexes maximaux (pour la relation d'inclusion) s'appellent les composantes connexes du graphe.

Remarque

Un graphe est connexe si et seulement si sa réalisation est connexe (ou connexe par arcs, cela revient au même). Plus généralement, les composantes connexes d'un graphe correspondent à celles de sa réalisation.

Circuits

Soit n un entier ≥ 1 . Considérons le graphe orienté



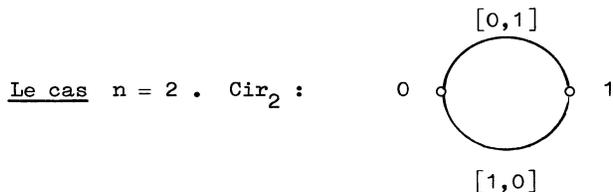
L'ensemble de sommets est $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et l'orientation est donnée par les n arêtes $[i, i+1]$ ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) avec $o([i, i+1]) = i$ et $t([i, i+1]) = i+1$.

DÉFINITION 4 - On appelle circuit (de longueur n) dans un graphe tout sous-graphe isomorphe à Cir_n.

Un tel sous-graphe est défini par un chemin (y_1, \dots, y_n) sans aller-retour tel que les $P_i = t(y_i)$ ($1 \leq i \leq n$) soient distincts, et tel que $P_n = o(y_1)$.



On notera que Cir₁ a un automorphisme d'ordre deux qui ne conserve pas l'orientation. Un circuit de longueur 1 s'appelle un lacet.



Graphes combinatoires

Soit (X,S) un complexe simplicial de dimension ≤ 1 . Rappelons que X est un ensemble et que S est un ensemble de parties de X ayant 1 ou 2 éléments, et contenant toutes les parties à 1 élément. On lui associe le graphe ayant pour ensemble de sommets X , pour arêtes les couples $(P,Q) \in X \times X$ tels que $P \neq Q$ et $\{P,Q\} \in S$, avec $\overline{(P,Q)} = (Q,P)$ et $o(P,Q) = P$, $t(P,Q) = Q$. Dans ce graphe, deux arêtes qui ont la même origine et le même sommet terminal sont égales. Cette propriété est évidemment équivalente à celle de la définition suivante :

DÉFINITION 5 - Un graphe est dit combinatoire s'il ne possède pas de circuit de longueur ≤ 2 . (Cf. Bourbaki, [36], Annexe.)

Réciproquement, il est facile de voir que tout graphe combinatoire Γ se déduit (à isomorphisme canonique près), par la construction ci-dessus, du complexe simplicial (X,S) où $X = \text{som } \Gamma$ et où S est l'ensemble des parties $\{P,Q\}$ de X telles que P et Q soient ou bien liés, ou bien égaux.

Soit Γ un graphe combinatoire. Un ensemble $\{P,Q\}$ d'extrémités d'une arête y s'appelle une arête géométrique de Γ . L'arête géométrique $\{P,Q\}$ détermine l'ensemble $\{y, \bar{y}\}$ d'arêtes orientées. La structure de Γ est évidemment déterminée par l'ensemble de ses sommets et de ses arêtes géométriques.

Le graphe $\Gamma(G,S)$

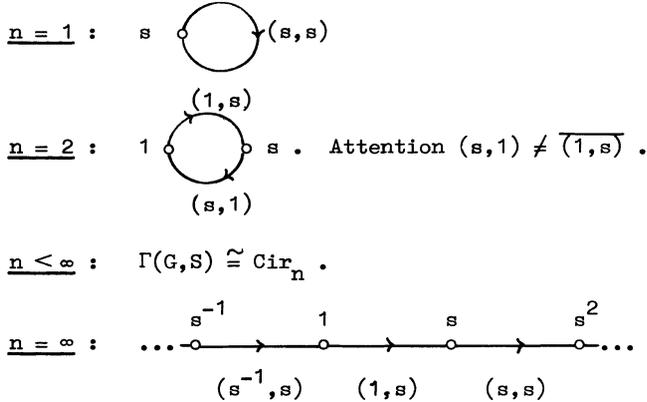
Soit G un groupe et soit S une partie de G . On note $\Gamma = \Gamma(G,S)$ le graphe orienté ayant G pour ensemble de sommets, $G \times S = (\text{ar } \Gamma)_+$ pour orientation, avec

$$o(g,s) = g \text{ et } t(g,s) = gs \text{ pour toute arête } (g,s) \in G \times S .$$

ARBRES

La multiplication à gauche par les éléments de G définit une opération de G sur Γ qui conserve l'orientation. De plus, G opère librement sur les sommets et sur les arêtes.

Par exemple soit G un groupe cyclique d'ordre n engendré par $S = \{s\}$. Voici le dessin de $\Gamma(G,S)$:



PROPOSITION 7 - Soit $\Gamma = \Gamma(G,S)$ le graphe défini par un groupe G et une partie S de G .

- (a) Pour que Γ soit connexe, il faut et il suffit que S engendre G .
- (b) Pour que Γ contienne un lacet, il faut et il suffit que 1 appartienne à S .
- (c) Pour que Γ soit un graphe combinatoire, il faut et il suffit que $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

Pour que $g, g' \in G$ soient extrémités d'un chemin de longueur n , il faut et il suffit qu'il existe $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ tels que $g' = gs_1 \dots s_n$; d'où (a). (Plus précisément, les composantes connexes de Γ correspondent aux classes gH du sous-groupe H engendré par S .) Les assertions (b) et (c) sont immédiates.

Exercices

1) Un graphe Γ est dit fini si $\text{som}\Gamma$ et $\text{ar}\Gamma$ sont finis ; il est dit localement fini si tout sommet n'est extrémité que d'un nombre fini d'arêtes. Montrer que Γ est fini (resp. localement fini) si et seulement si sa réalisation est un espace compact (resp. localement compact).

2) Montrer qu'un graphe connexe et localement fini dans lequel il n'existe pas de chemin injectif infini est un graphe fini.

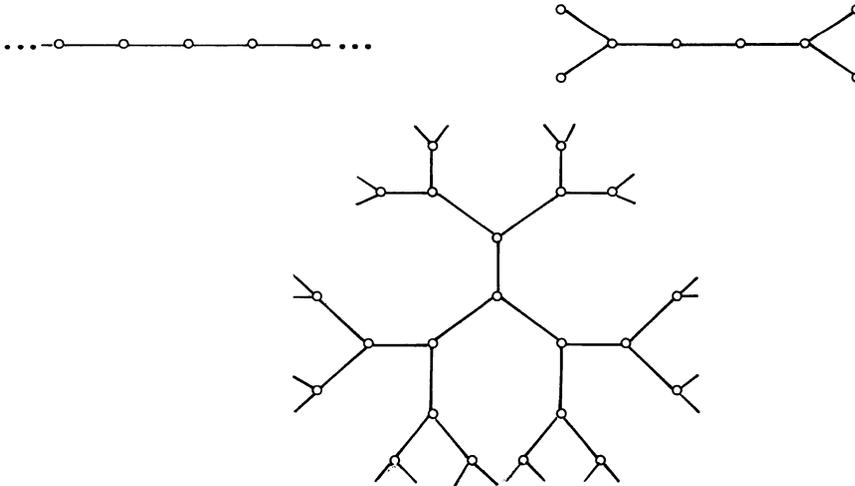
3) Soit $\Gamma = \Gamma^{(0)}$ un graphe et, pour $n > 0$, soit $\Gamma^{(n)}$ la subdivision barycentrique de $\Gamma^{(n-1)}$. Montrer que $\Gamma^{(n)}$ ne contient pas de circuit de longueur $\leq n$. En particulier $\Gamma^{(2)}$ est combinatoire. (Ceci permet de ramener toute question topologique sur les graphes au cas des graphes combinatoires.)

2.2. Arbres

DEFINITION 6 - Un arbre est un graphe connexe, non vide, sans circuit.

En particulier un arbre est un graphe combinatoire.

Exemples d'arbres



Géodésiques dans un arbre

Une géodésique dans un arbre est un chemin sans aller-retour.

PROPOSITION 8 - Soient P et Q deux sommets d'un arbre Γ . Il existe une et une seule géodésique de P à Q , et c'est un chemin injectif.

L'existence résulte du fait que Γ est connexe.

Injectivité. Soit $c : Ch_n \rightarrow \Gamma$ une géodésique de $P = c(0)$ à $Q = c(n)$, et posons $P_i = c(i)$. Pour montrer que c est injectif il suffit (car Ch_n est combinatoire) de montrer que P_0, \dots, P_n sont distincts. On peut donc supposer que $n > 0$, et que c est défini par la suite d'arêtes (y_1, \dots, y_n) . Si les sommets ne sont pas distincts, soit $j-i > 0$ minimal tel que $P_i = P_j$. Alors (y_{i+1}, \dots, y_j) est un circuit, ce qui contredit l'hypothèse que Γ est un arbre.

Unicité. On peut supposer $P \neq Q$ car une géodésique de longueur > 0 de P à P , étant injective, définirait un circuit.

Soit (y_1, \dots, y_n) et (w_1, \dots, w_m) deux géodésiques de P à Q . On a $y_n = w_m$ car, sinon, le chemin $(y_1, \dots, y_n, \bar{w}_m, \dots, \bar{w}_1)$ serait une géodésique de P à P . Par récurrence on en déduit que les géodésiques (y_1, \dots, y_{n-1}) et (w_1, \dots, w_{m-1}) , qui ont le même sommet terminal, coïncident. D'où la proposition.

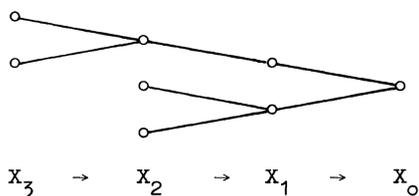
La longueur de la géodésique de P à Q s'appelle la distance de P à Q ; nous la noterons $\ell(P, Q)$. On a $\ell(P, Q) = 0$ si et seulement si $P = Q$, et $\ell(P, Q) = 1$ si et seulement si P et Q sont liés.

Arbres et systèmes projectifs

Soit P un sommet d'un arbre Γ . Pour tout entier $n \geq 0$, soit X_n l'ensemble des sommets Q de Γ tels que $\ell(P, Q) = n$. Si $Q \in X_n$, avec $n \geq 1$, il existe un et un seul sommet Q' à distance $< n$ de P auquel Q est lié; c'est le sommet $o(y_n)$ où (y_1, \dots, y_n) est la géodésique de P à Q . On définit ainsi une application $f_n : Q \mapsto Q'$ de X_n dans X_{n-1} , d'où le système projectif :

$$(S_P) \quad \dots \rightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = \{P\} .$$

La connaissance de ce système permet de reconstituer l'arbre Γ ; en effet, l'ensemble des sommets de Γ est la réunion X des X_n , et les arêtes géométriques sont les $\{Q, f_n(Q)\}$ pour $n \geq 1$ et $Q \in X_n$. De plus, tout système projectif, indexé par les entiers ≥ 1 , peut être obtenu de cette manière. Il y a donc équivalence entre arbres pointés et systèmes projectifs d'ensembles indexés par les entiers ≥ 1 :



Sous-arbre engendré par un ensemble de sommets

Soit Γ un arbre et soit X' une partie de $X = \text{som } \Gamma$. Tout sous-arbre de Γ contenant X' contient les géodésiques d'extrémités dans X' . Inversement, les sommets et les arêtes de ces géodésiques constituent un sous-arbre Γ' de Γ contenant X' ; c'est le sous-arbre engendré par X' . Si X' est fini, il en est de même de Γ' ; on en déduit que Γ est réunion filtrante de ses sous-arbres finis ; tout énoncé sur les arbres qui est "de caractère fini" peut donc se ramener à un énoncé sur les arbres finis. Pour ces derniers, il y a un procédé de "dévisage" (cf. la remarque après la prop. 10) qui permet souvent de raisonner par récurrence sur le nombre de sommets.

Réalisation d'un arbre

Soit P un sommet d'un arbre Γ . Si Q est un sommet à distance n de P le sous-arbre $\Gamma(P, Q)$ engendré par $\{P, Q\}$ est isomorphe à Ch_n , et canoniquement si on fait correspondre P au sommet 0 de Ch_n . On peut identifier $\text{real}(Ch_n)$ avec l'intervalle $[0, n]$. Considérons la contraction de $\text{real}(\Gamma(P, Q))$ qui correspond ainsi à la contraction $x \mapsto tx$ ($0 \leq t \leq 1$) de l'intervalle $[0, n]$ sur 0 .

ARBRES

Puisque Γ est réunion des sous-arbres $\Gamma(P,Q)$ ($Q \in \text{som}\Gamma$) la réalisation de Γ est aussi la réunion des sous-espaces $\text{real}(\Gamma(P,Q))$. De plus, il est facile de voir que les contractions de ces sous-espaces que nous venons de définir se recollent. D'où une contraction de $\text{real}(\Gamma)$: la réalisation d'un arbre est contractile.

Sommets terminaux

Soit Γ un graphe et soient $X = \text{som}\Gamma$, $Y = \text{ar}\Gamma$. Soit P un sommet et soit Y_P l'ensemble des arêtes y telles que $P = t(y)$. Le cardinal n de Y_P s'appelle l'indice de P . Si $n = 0$ on dit que P est isolé; si Γ est connexe ce n'est possible que si $X = \{P\}$, $Y = \emptyset$. Si $n \leq 1$ on dit que P est un sommet terminal.

On note $\Gamma-P$ le sous-graphe de Γ ayant $X - \{P\}$ pour ensemble de sommets et $Y - (Y_P \cup \bar{Y}_P)$ pour ensemble d'arêtes.

PROPOSITION 9 - Soit P un sommet terminal non isolé d'un graphe Γ .

- (a) Γ est connexe si et seulement si $\Gamma-P$ est connexe.
- (b) Tout circuit de Γ est contenu dans $\Gamma-P$.
- (c) Γ est un arbre si et seulement si $\Gamma-P$ est un arbre.

L'hypothèse veut dire que P est sommet terminal d'une unique arête y . L'assertion (a) est immédiate. D'autre part, tout sommet appartenant à un circuit est évidemment d'indice ≥ 2 ; d'où (b). L'assertion (c) résulte de (a) et de (b).

Arbres bornés

L'ensemble des sommets d'un arbre Γ , muni de la distance d , est un espace métrique. D'où les notions de diamètre d'un arbre, et d'arbre borné (= arbre de diamètre fini). Par exemple tout arbre fini est borné. Si X' est un ensemble de sommets de diamètre n , le sous-arbre engendré par X' est évidemment de diamètre $\leq 3n$ (il est même de diamètre n , cf. exerc.2).

PROPOSITION 10 - Soit Γ un arbre de diamètre $n < \infty$.

- (a) L'ensemble $t(\Gamma)$ des sommets terminaux de Γ n'est pas vide.
- (b) Si $n \geq 2$, $\text{som}\Gamma - t(\Gamma)$ est l'ensemble des sommets d'un sous-arbre Γ' de

diamètre $n-2$.

(c) Si $n = 0$, on a $\Gamma \simeq Ch_0$ (dessin : \circ) et si $n = 1$, on a $\Gamma \simeq Ch_1$
(dessin : $\circ \text{---} \circ$).

L'assertion (c) est immédiate, et (a) résulte de (b) et (c). Il suffit donc de prouver (b). Soit $X' = \text{som} \Gamma - t(\Gamma)$. Si $P, Q \in X'$, aucun point de la géodésique joignant P à Q n'est terminal ; on en déduit que le sous-arbre Γ' engendré par X' n'a pas d'autres sommets que les éléments de X' . De plus, si $l(P, Q) = m$, la géodésique joignant P à Q peut être prolongée ("des deux côtés") en une géodésique de longueur $m+2$; d'où $m+2 \leq n$, ce qui montre que $\text{diam}(\Gamma') \leq n-2$. D'autre part, puisque Γ est de diamètre n , il existe une géodésique de Γ qui est de longueur n ; en lui enlevant sa première et sa dernière arêtes, on obtient une géodésique de longueur $n-2$ de Γ' ; on a donc bien $\text{diam}(\Gamma') = n-2$.

Remarque. Le graphe Γ' est stable par tout automorphisme de Γ . D'où aussitôt, par récurrence sur $\text{diam}(\Gamma)$:

COROLLAIRE - Un arbre de diamètre fini pair (resp. fini impair) possède un sommet (resp. une arête géométrique) qui est invariant par tout automorphisme.

Remarque. Si Q est un sommet d'un arbre Γ_1 , la prop. 9 montre que le graphe Γ obtenu par adjonction à Γ_1 d'un sommet terminal P et d'une arête géométrique $\{P, Q\}$ est encore un arbre. La prop. 10 (a) montre que tout arbre fini s'obtient, par application répétée de ce procédé, à partir d'un arbre à un seul sommet. Ce procédé de "dévissage" est souvent commode.

Exercices

1) Soit Γ un arbre, soit P un sommet de Γ , et soit (S_P) le système projectif associé à P . Identifier la limite projective T_P de ce système avec l'ensemble C_P des chemins infinis $y = (y_1, y_2, \dots)$ sans aller-retour d'origine P . Montrer que l'espace topologique T_P est indépendant (à homéomorphisme canonique près) du sommet P choisi. (Si Q est un autre sommet de Γ et si $y \in C_P$, on montrera qu'il existe un élément $w \in C_Q$ et un entier d tel que $y_i = w_{i+d}$ pour i assez grand, et que ces conditions déterminent w et d de façon unique.)

ARBRES

[Lorsque Γ est localement fini, T_p est compact totalement discontinu ; c'est l'espace des bouts de la réalisation de Γ .]

- 2) Soit Γ un arbre, et soit $X = \text{som } \Gamma$.
- a) Soient $P, Q, R \in X$ et soit P' un sommet de la géodésique joignant Q à R . Démontrer l'inégalité $\ell(P, P') \leq \text{Sup}(\ell(P, Q), \ell(P, R))$.
- b) Soit X' une partie de X de diamètre n , et soit Γ' l'arbre engendré par X' . Montrer, en utilisant a), que le diamètre de Γ' est égal à n .

2.3. Sous-arbres d'un graphe

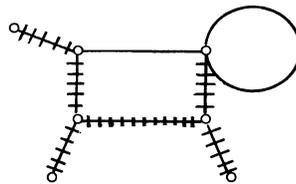
Soit Γ un graphe non vide. L'ensemble des sous-graphes de Γ qui sont des arbres, ordonné par inclusion, est évidemment inductif. Il possède donc un élément maximal ; un tel élément s'appelle un arbre maximal de Γ .

PROPOSITION 11 - Soit Λ un arbre maximal d'un graphe Γ connexe non vide.

Alors Λ contient tous les sommets de Γ .

Sinon, puisque Γ est connexe, il existerait une arête y d'origine dans Λ et de sommet terminal P en dehors de Λ . D'après la proposition 9 (c) le sous-graphe déduit de Λ par adjonction du sommet P et des arêtes y, \bar{y} serait un arbre. Comme cela contredit le caractère maximal de Λ on a donc $\text{som } \Lambda = \text{som } \Gamma$, d'où la proposition.

Exemple :



PROPOSITION 12 - Soit Γ un graphe connexe ayant un nombre fini de sommets.

Posons

$$s = \text{Card}(\text{som } \Gamma), \quad a = \frac{1}{2} \text{Card}(\text{ar } \Gamma).$$

On a alors $a \cong s-1$ et il y a égalité si et seulement si Γ est un arbre.

(Noter que a est le nombre des "arêtes géométriques" de Γ .)

Supposons d'abord que Γ soit un arbre, et montrons que $a = s-1$. Cette propriété est vraie pour un arbre à un seul sommet ($s=1, a=0$) et reste vraie lorsqu'on adjoint un sommet terminal et une paire d'arêtes $\{y, \bar{y}\}$; elle est donc vraie pour tout arbre fini (cf. Remarque à la fin du n° 2.2).

Passons au cas général. La proposition est évidente si Γ est vide. Sinon, soit Γ' un arbre maximal de Γ . D'après la prop. 11, on a $s(\Gamma) = s(\Gamma')$ et $a(\Gamma) \cong a(\Gamma')$ avec égalité si et seulement si $\Gamma = \Gamma'$; d'autre part, on vient de voir que $a(\Gamma') = s(\Gamma') - 1$, d'où

$$a(\Gamma) = s(\Gamma) - 1 + (a(\Gamma) - a(\Gamma')),$$

et la proposition en résulte.

Remarque. Les nombres de Betti B_i du graphe Γ sont $B_0 = 1, B_1 = a(\Gamma) - a(\Gamma')$, et $B_i = 0$ pour $i \cong 2$, si Γ est non vide; sinon $B_i = 0$ pour tout $i \cong 0$. La formule $a(\Gamma) = s(\Gamma) - 1 + (a(\Gamma) - a(\Gamma'))$ peut donc s'écrire :

$$s(\Gamma) - a(\Gamma) = \sum_i (-1)^i B_i;$$

c'est un cas particulier de la formule d'Euler-Poincaré.

Contraction de sous-arbres

Soit Γ un graphe connexe non vide, et soit Λ un sous-graphe de Γ qui est réunion disjointe d'une famille Λ_i ($i \in I$) d'arbres. Nous allons définir un graphe Γ/Λ tel que $\text{real}(\Gamma/\Lambda)$ soit l'espace quotient de $\text{real}(\Gamma)$ obtenu par identification de chacun des sous-espaces $\text{real}(\Lambda_i)$ à un point.

De façon précise, Γ/Λ a pour ensemble de sommets le quotient de $\text{som } \Gamma$ par la relation d'équivalence dont les classes sont les ensembles $\text{som } \Lambda_i$ et les éléments de $\text{som } \Gamma - \text{som } \Lambda$. Son ensemble d'arêtes est $\text{ar } \Gamma - \text{ar } \Lambda$, avec l'involution $y \mapsto \bar{y}$ induite par celle de $\text{ar } \Gamma$. Finalement,

$$\text{ar}(\Gamma/\Lambda) \rightarrow \text{som}(\Gamma/\Lambda) \times \text{som}(\Gamma/\Lambda)$$

est induit, en passant au quotient, par

$$\text{ar} \Gamma \rightarrow \text{som} \Gamma \times \text{som} \Gamma.$$

Il est facile de voir que $\text{real}(\Gamma/\Lambda)$ a la propriété voulue.

PROPOSITION 13 - La projection canonique $\text{real}(\Gamma) \rightarrow \text{real}(\Gamma/\Lambda)$ est une équivalence d'homotopie.

Posons $X = \text{real}(\Gamma)$, $A = \text{real}(\Lambda)$, et $A_i = \text{real}(\Lambda_i)$; ainsi A est somme disjointe des A_i ($i \in I$). On a vu au n° 2.2 que la réalisation d'un arbre est contractile. Il existe donc une homotopie $h_t : A \rightarrow A$ ($0 \leq t \leq 1$) telle que $h_0 = 1_A$ et que h_1 rétracte chaque A_i sur un point appartenant à A_i .

Puisque A est un sous-complexe du CW-complexe X , le couple (X, A) a la propriété d'extension des homotopies (c'est une "cofibration", cf. par exemple E. Spanier, Algebraic Topology, chap. 7, §6). Il existe donc une homotopie $H_t : X \rightarrow X$ ($0 \leq t \leq 1$) telle que $H_0 = 1_X$ et que H_t coïncide avec h_t sur A . Pour $t = 1$ on obtient une application $H_1 : X \rightarrow X$ qui se factorise à travers le quotient $p : X \rightarrow Y = \text{real}(\Gamma/\Lambda)$ de X obtenu par identification de chacun des A_i à un point. D'où une application $f : Y \rightarrow X$ telle que $H_1 = f \circ p$; en particulier $f \circ p$ est homotope à $H_0 = 1_X$.

Il reste à montrer que $p \circ f$ est homotope à 1_Y . On remarque d'abord que, puisque les H_t laissent stables les A_i , ils induisent par passage au quotient une homotopie $H'_t : Y \rightarrow Y$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & H_1 & \\ X & \rightarrow & X \\ p \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\ Y & \rightarrow & Y \\ & H'_1 & \end{array}$$

le carré et le triangle supérieur commutent. Puisque p est surjectif on en déduit que le triangle inférieur commute; donc $p \circ f = H'_1$ est bien homotope à $H'_0 = 1_Y$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1 - Soit Γ un graphe connexe non vide. Alors $\text{real}(\Gamma)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de cercles. De plus Γ est un arbre si et seulement si $\text{real}(\Gamma)$ est contractile.

On prend pour Λ un arbre maximal de Γ . D'après la proposition 11, Γ/Λ n'a qu'un sommet. Donc $\text{real}(\Gamma/\Lambda)$ est un CW-complexe de dimension ≤ 1 n'ayant qu'une cellule de dimension zéro, c'est un bouquet de cercles. Il est contractile si et seulement si le nombre B_1 des cercles est nul. Puisque $B_1 = \frac{1}{2} \text{Card}(\text{ar } \Gamma - \text{ar } \Lambda)$ on conclut que $B_1 = 0$ si et seulement si $\Gamma = \Lambda$, c'est-à-dire si et seulement si Γ est un arbre. Vu la proposition, ceci démontre le corollaire.

Remarque. Le nombre B_1 est le premier nombre de Betti de $\text{real}(\Gamma)$. Lorsque $\text{som } \Gamma$ est fini, on a $B_1 = a(\Gamma) - s(\Gamma) + 1$, où $a(\Gamma) = \frac{1}{2} \text{Card}(\text{ar } \Gamma)$ et $s(\Gamma) = \text{Card}(\text{som } \Gamma)$, cf. prop. 12.

COROLLAIRE 2 - Les hypothèses étant celles de la prop. 13, Γ est un arbre si et seulement si Γ/Λ en est un.

Cela résulte de la proposition, combinée avec le cor. 1.

Remarque. Le cor. 2 ci-dessus est la principale propriété des contractions que nous utiliserons par la suite. Il est facile d'en donner des démonstrations directes (cf. exerc. 2 et 3).

Exercices

1) Soit Γ un graphe connexe non vide. Si $P, Q \in \text{som } \Gamma$, soit $l_\Gamma(P, Q)$ la longueur minimum des chemins joignant P à Q . Soit $P_0 \in \text{som } \Gamma$. Montrer qu'il existe un arbre maximal Λ de Γ tel que $l_\Gamma(P_0, P) = l_\Lambda(P_0, P)$ pour tout $P \in \text{som } \Gamma$.

2) Les hypothèses étant celles de la prop. 13, on suppose en outre que $\text{som } \Gamma$ est fini. Montrer directement que $a(\Gamma) - s(\Gamma) = a(\Gamma/\Lambda) - s(\Gamma/\Lambda)$. En déduire, au moyen de la prop. 12, une autre démonstration du cor. 2 (tout d'abord dans le cas où $\text{som } \Gamma$ est fini, puis, par passage à la limite inductive, dans le cas général).

3) Les hypothèses sont celles de la prop. 13.

a) Montrer que, si Γ contient un circuit de longueur n , Γ/Λ contient un circuit de longueur $\leq n$.

ARBRES

- b) Montrer que, si Γ/Λ contient un circuit de longueur n , Γ contient un circuit de longueur $\cong n$.
- c) Dédire de a) et b) une autre démonstration du cor. 2 à la prop. 13.

§ 3 - Arbres et groupes libres

3.1. Arbres de représentants

Soit X un graphe où opère un groupe G . On appelle inversion un couple formé d'un élément $g \in G$ et d'une arête y de X tels que $gy = \bar{y}$; s'il n'existe pas de tel couple, on dit que G opère sans inversion; il revient au même de dire qu'il existe une orientation de X conservée par G . (Exemple: G opère sans inversion sur la subdivision barycentrique de X , car celle-ci a une orientation naturelle, cf. n° 2.1.)

Si G opère sans inversion, on définit de façon évidente le graphe quotient $G \backslash X$; l'ensemble des sommets (resp. des arêtes) de $G \backslash X$ est le quotient de $\text{som} X$ (resp. de $\text{ar} X$) par l'action de G .

PROPOSITION 14 - Soit X un graphe connexe où opère sans inversion un groupe G . Tout sous-arbre T' de $G \backslash X$ se relève en un sous-arbre de X .

Soit Ω l'ensemble des sous-arbres de X qui se projettent injectivement dans T' ; c'est un ensemble inductif pour la relation d'inclusion. Soit T'_0 un élément maximal de Ω , soit T'_0 son image dans T' , et supposons que $T'_0 \neq T'$. Il existe alors une arête y' de T' qui n'appartient pas à T'_0 ; comme T' est connexe, on peut supposer que $o(y')$ est un sommet de T'_0 ; le sommet terminal P' de y' n'appartient pas à $\text{som} T'_0$ (sinon, la géodésique de $o(y')$ à P' dans T'_0 , suivie de \bar{y}' , donnerait un circuit dans T'). Soit y un relèvement de y' ; quitte à remplacer y par gy , avec $g \in G$, on peut supposer que $o(y)$ appartient à T'_0 . Soit T_1 le graphe déduit de T'_0 en adjoignant le sommet $P = t(y)$ et les arêtes y, \bar{y} . D'après la proposition 9(c), T_1 est un arbre. Mais $T_1 \rightarrow T'$ est injectif, ce qui contredit le caractère maximal de T'_0 ; d'où la proposition.

On appelle arbre de représentants de $X \text{ mod } G$ tout sous-arbre T de X qui est un relèvement d'un arbre maximal de $G \backslash X$; d'après la prop. 11 du n° 2.3, toute orbite de G dans $\text{som} X$ contient un élément de $\text{som} T$ et un seul.

Exercice

Considérons la propriété suivante d'un morphisme $f : X \rightarrow X'$ de graphes :

(*) Etant donnés $P \in \text{som} X$ et $y' \in \text{ar} X'$ tels que $f(P) = o(y')$, il existe $y \in \text{ar} X$ tel que $P = o(y)$ et $f(y) = y'$.

a) Montrer que (*) entraîne que tout sous-arbre de X' qui rencontre $f(X)$ se relève en un sous-arbre de X .

b) Vérifier (*) pour le morphisme $X \rightarrow G \setminus X$ de la prop. 14.

c) Soit f le morphisme surjectif



Montrer que l'arbre X' ne se relève pas en un arbre de X .

3.2. Graphe d'un groupe libre

PROPOSITION 15 - Soit $X = \Gamma(G, S)$ le graphe défini par un groupe G et une partie S de G (cf. n° 2.1). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) X est un arbre.
- (ii) G est un groupe libre de famille basique S .

Supposons que G soit libre de base S . Tout élément $g \in G$ s'écrit de façon unique sous forme réduite

$$g = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}, \quad s_i \in S, \epsilon_i \in \{\pm 1\},$$

et $\epsilon_i = \epsilon_{i+1}$ si $s_i = s_{i+1}$ (cf. n° 1.3, lemme 1). L'entier n s'appelle la longueur de g et se note $\ell(g)$. Soit G_n l'ensemble des éléments de G de longueur n . Si g est, comme ci-dessus, un élément de G_n , $n \geq 1$, il est clair que g est lié dans X à un unique élément de G_{n-1} , à savoir

$$g' = s_1^{\epsilon_1} \dots s_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}.$$

On en déduit, pour tout $n \geq 1$, une application $G_n \rightarrow G_{n-1}$. De plus, on voit que X est le graphe défini par le système projectif

$$\dots \rightarrow G_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 = \{1\}$$

et c'est bien un arbre (cf. n° 2.2).

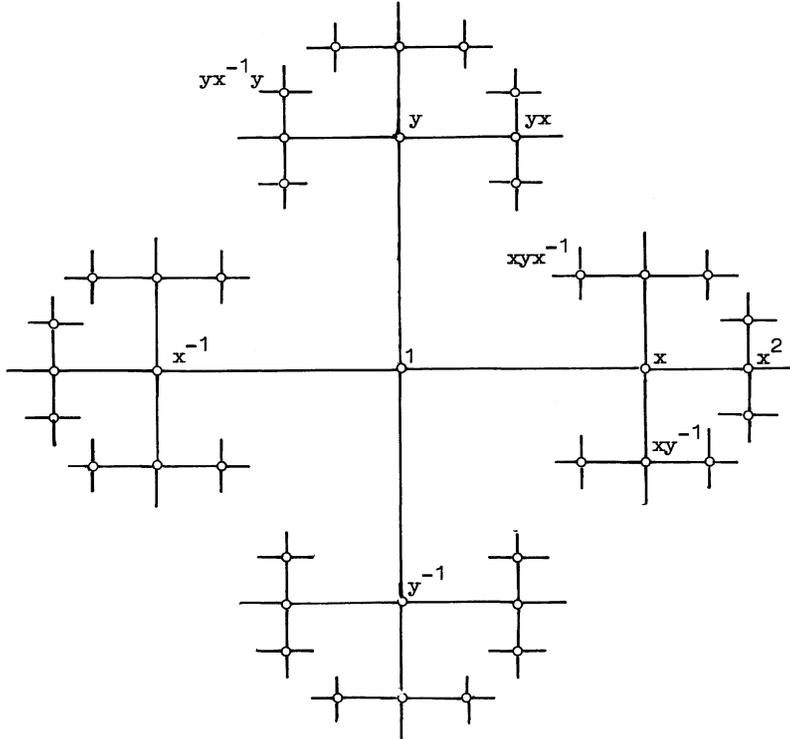
Inversement, supposons que X soit un arbre. La proposition 7 du n° 2.1 montre que S engendre G (car X est connexe) et que $S \cap S^{-1} = \emptyset$ (car X est combinatoire). Montrons que S est une famille libre. Sinon il existerait un élément non trivial \hat{g} du groupe libre $F(S)$ défini par S dont l'image dans G serait égale à 1. Choisissons un tel élément \hat{g} de longueur minimum n , et soit

$$\hat{g} = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n}$$

sa décomposition réduite dans $F(S)$. Le fait que $S \cap S^{-1} = \emptyset$ entraîne que $n \geq 3$. Soit $P_i (0 \leq i \leq n)$ l'image de $s_1^{\epsilon_1} \dots s_i^{\epsilon_i}$ dans G . Le caractère minimal de \hat{g} entraîne que P_0, \dots, P_{n-1} sont deux à deux distincts. De plus P_i est lié à P_{i+1} et $P_n = 1 = P_0$. Puisque $n \geq 3$, les arêtes géométriques $\{P_i, P_{i+1}\} (0 \leq i \leq n-1)$ et $\{P_n, P_0\}$ sont deux à deux distinctes. Ainsi, P_0, \dots, P_{n-1} sont les sommets d'un circuit de longueur n dans X . L'existence d'un tel circuit contredit l'hypothèse que X est un arbre, d'où la proposition.

Exemple

$S = \{x, y\}$
 $G = F(S)$



3.3. Actions libres sur un arbre

On dit qu'un groupe G opère librement sur un graphe X s'il opère sans inversion et si un élément $g \neq 1$ de G ne laisse invariant aucun sommet ni aucune arête de X . Par exemple, si S est une partie d'un groupe G , le groupe G opère librement (par multiplication à gauche) sur le graphe $\Gamma(G,S)$. La proposition 15 montre donc que, si G est libre, il existe un arbre sur lequel G opère librement. En fait, cette propriété caractérise les groupes libres :

THÉORÈME 4 - Un groupe qui opère librement sur un arbre est un groupe libre.

Plus précisément :

THÉORÈME 4' - Soit G un groupe opérant librement sur un arbre X . Choisissons un arbre T de représentants de $X \text{ mod } G$ (cf. n° 3.1) et une orientation $Y_+ \subset \text{ar}X$ conservée par G .

a) Soit S l'ensemble des éléments $g \neq 1$ de G tels qu'il existe une arête $y \in Y_+$ d'origine dans T et de sommet terminal dans gT . Alors S est une famille basique de G .

b) Si $X^* = \mathbb{G}X$ n'a qu'un nombre fini s de sommets, et si $\text{Card}(\text{ar}X^*) = 2a$, on a $\text{Card}(S) - 1 = a - s$.

Puisque G opère librement et que $T \rightarrow X^*$ est injectif, l'application $g \mapsto gT$ est une bijection de G sur l'ensemble des translatés de T , et ces translatés sont deux à deux disjoints. En particulier, on peut former le graphe $X' = X/G.T$ (cf. n° 2.3) par contraction de chaque arbre gT en un seul sommet ; notons ce sommet (gT) . D'après la proposition 13 du n° 2.3, X' est un arbre. De plus, l'inverse de la bijection $g \mapsto (gT)$ peut être considérée comme une bijection $\alpha : \text{som}X' \rightarrow \text{som}\Gamma(G,S) = G$, où $\Gamma(G,S)$ est le graphe associé à G et S . Nous allons étendre α en un isomorphisme $\alpha : X' \rightarrow \Gamma(G,S)$. Grâce à la proposition 15 (du n° 3.2) ceci démontrera a).

Rappelons que $\text{ar}X' = \text{ar}X - \text{ar}(G.T)$. Donnons à X' l'orientation $Y'_+ = Y_+ \cap \text{ar}X'$ induite par celle de X . Le morphisme α sera un morphisme de

graphes orientés, et il suffit donc de définir $\alpha : Y'_+ \rightarrow G \times S = (\text{ar } \Gamma(G,S))_+$. Soit $y \in Y'_+$, et soient $(gT) = o(y)$, $(g'T) = t(y)$. Du fait que, dans X , l'arête y lie gT à $g'T$, on déduit que $s = g^{-1}g'$ appartient à S ; on pose alors $\alpha(y) = (g,s)$. La surjectivité de $\alpha : Y'_+ \rightarrow G \times S$ se voit directement sur la définition de S . L'injectivité résulte du fait (déjà remarqué) que X' est un arbre, et du fait que $\alpha : \text{som } X' \rightarrow \text{som } \Gamma(G,S)$ est injectif; d'où a).

b) Soit W l'ensemble des arêtes $y \in Y_+$ telles que $o(y) \in T$ et $t(y) \notin T$. La démonstration de a) nous fournit une bijection $W \rightarrow S$, d'où $\text{Card } W = \text{Card } S$.

D'autre part soit T^* l'image de T dans $X^* = G \setminus X$; c'est un arbre maximal. On munit X^* de l'orientation Y^*_+ , image de Y_+ . Il est immédiat que Y^*_+ est réunion disjointe de $Y^*_+ \cap \text{ar } T^*$ et de W^* image de W , et que $W \rightarrow W^*$ est bijectif. Donc, si l'ensemble $\text{som } X^* = \text{som } T^*$ est fini, on a

$$\begin{aligned} \text{Card } Y^*_+ - \text{Card } \text{som } X^* &= \text{Card } W^* + (\text{Card } (\text{ar } T^*)_+ - \text{Card } \text{som } T^*) \\ &= \text{Card } W^* - 1 \quad (\text{d'après la prop. 12 du n}^\circ 2.2) \\ &= \text{Card } S - 1 \end{aligned}$$

D'où b).

Interprétation topologique. Du fait que G opère librement sur $\bar{X} = \text{real}(X)$, ce dernier est un revêtement universel du quotient $\bar{X}^* = G \setminus \bar{X} = \text{real}(X^*)$, et G s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(\bar{X}^*)$. Puisque T^* est un arbre maximal de X^* , le quotient $\bar{X}^*/\text{real}(T^*) = \text{real}(X^*/T^*)$ est un bouquet de cercles; d'après la proposition 13 du n° 2.3 il a le même type d'homotopie que \bar{X}^* . Le groupe fondamental $G = \pi_1(X^*)$ est donc libre de base correspondant à l'ensemble des cercles du bouquet $\text{real}(X^*/T^*)$. Ces cercles, orientés convenablement, correspondent eux-mêmes aux éléments de W^* , et donc aux éléments de S , comme on l'a vu ci-dessus; d'où le théorème.

Exercice

Soit S une partie d'un groupe G , engendrant G . Soit $F(S)$ le groupe libre défini par S et soit R le noyau de $F(S) \rightarrow G$.

(a) Montrer que R opère librement sur l'arbre $\Gamma(F(S),S)$ et que le graphe quotient est isomorphe à $\Gamma(G,S)$.

(b) En déduire que R est isomorphe au groupe fondamental de la réalisation de $\Gamma(G,S)$ (noter que cela donne une autre démonstration de la prop. 15).

3.4. Application : Théorème de Schreier

C'est le suivant :

THÉORÈME 5 - Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.

Soit G un groupe libre. On peut faire opérer G librement sur un arbre X (cf. prop. 15). Si H est un sous-groupe de G , il est clair que H opère librement sur X ; c'est donc un groupe libre, d'après le th. 4.

Notation. Si G est libre, le cardinal d'une base de G est indépendant du choix de la base (cela se voit, par exemple, en rendant G abélien); on l'appelle le rang de G , et on le note r_G .

COROLLAIRE (formule de Schreier) - Soit G un groupe libre et soit H un sous-groupe d'indice fini n . On a

$$r_H - 1 = n(r_G - 1).$$

Posons $G_1 = G$ et $G_2 = H$, et soit Γ un arbre où G opère librement.

Soient $\Gamma_i = G_i \setminus \Gamma$, $s_i = \text{Card } \text{som } \Gamma_i$ et $a_i = \text{Card } \text{ar } \Gamma_i$, ($i = 1, 2$). On a $s_2 = ns_1$ et $a_2 = na_1$. On peut choisir Γ tel que s_1 soit fini; par exemple pour l'arbre associé à une base de G , on a $s_1 = 1$. Ceci étant, le corollaire résulte des formules $r_{G_i} - 1 = \frac{1}{2}a_i - s_i$ ($i = 1, 2$) (cf. théorème 4'(b)).

Forme explicite du théorème de Schreier

C'est l'énoncé suivant :

PROPOSITION 16 - Soit G le groupe libre défini par un ensemble S , et soit H un sous-groupe de G .

a) On peut choisir un ensemble T de représentants de $H \backslash G$ satisfaisant à la propriété suivante :

(*) Si $t \in T$ a la décomposition réduite

$$t = s_1^{\epsilon_1} \dots s_n^{\epsilon_n} \quad (s_i \in S, \epsilon_i = \pm 1, \text{ et } \epsilon_i = \epsilon_{i+1} \text{ si } s_i = s_{i+1}),$$

tous les produits partiels $1, s_1^{\varepsilon_1}, s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2}, \dots, s_1^{\varepsilon_1} \dots s_n^{\varepsilon_n}$ appartiennent à T .

b) Soit T comme ci-dessus et soit $W = \{(t,s) \in T \times S, ts \notin T\}$. Si $(t,s) \in W$, posons $h_{t,s} = tsu^{-1}$ où $u \in T$ est tel que $Hts = Hu$. Alors

$$R = \{h_{t,s}, (t,s) \in W\}$$

est une famille basique de H .

Soit Γ l'arbre orienté $\Gamma(G,S)$ où G , et donc aussi H , opère librement et laisse invariante l'orientation $G \times S$ de Γ . Si $t \in G$, les produits partiels dans (*) ne sont autres que les sommets de la géodésique de 1 à t dans Γ . Donc une partie T de G satisfait à la propriété (*) si et seulement si $T = \text{som} \Lambda$ pour un arbre de représentants Λ de $\Gamma \text{ mod } H$ qui contient le sommet 1. Ceci démontre a), vu la proposition 14.

Soit $T = \text{som} \Lambda$ comme ci-dessus. D'après le théorème 4', H a comme famille basique l'ensemble des $h \neq 1$ dans H tels qu'il existe une arête $(t,s) \in G \times S$ d'origine $t \in T$ et de sommet terminal $ts \in hT$. Puisque $h \neq 1$, l'élément $u = h^{-1}ts$ de T est différent de 1. On trouve donc ainsi précisément les arêtes (t,s) de W et les éléments $h = h_{t,s}$ de H ; d'où la proposition.

Remarque

On peut choisir T dans a) de telle sorte que chaque élément t de T soit de longueur minimum dans la classe Ht (cf. n° 2.3, exerc.1).

Exemple

Soit $G = F(x,y)$ le groupe libre de base $S = \{x,y\}$, avec $x \neq y$, et soit H le noyau de la projection $G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. D'après le corollaire au théorème 5, on a $r_H = 1 + 4(r_G - 1) = 5$. Si l'on prend pour ensemble de représentants $T = \{1, x, y, xy\}$, la prop. 16 montre que H a pour base l'ensemble $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ défini par les formules : $xx = h_1 \cdot 1$, $yx = h_2 \cdot xy$, $yy = h_3 \cdot 1$, $xy \cdot x = h_4 \cdot y$ et $xy \cdot y = h_5 \cdot x$. On obtient ainsi la base

$$\{x^2, yxy^{-1}x^{-1}, y^2, xyxy^{-1}, xy^2x^{-1}\}.$$

Exercice

Soit (S, W) une présentation d'un groupe G . (Rappelons ce que cela signifie: W est une partie du groupe libre $F(S)$ défini par S , et l'on s'est donné un isomorphisme $F(S)/\langle W \rangle \cong G$, où $\langle W \rangle$ désigne le plus petit sous-groupe distingué de $F(S)$ contenant W .)

Soit H un sous-groupe de G et soit F' son image réciproque dans $F(S)$; on a $G/H \cong F/F'$. Soit $T \subset F$ un système de représentants de F/F' et soit S' une base de F' ; soit $W' = \cup_{t \in T} t^{-1}Wt$. Montrer que $\langle W' \rangle$ est le plus petit sous-groupe distingué de F' contenant W' . En déduire que $\langle S', W' \rangle$ est une présentation de H . [Lorsque S, W et G/H sont finis, il en est de même de S' et W' ; cela montre que tout sous-groupe d'indice fini d'un groupe de présentation finie est de présentation finie.]

APPENDICE

Présentation d'un groupe d'homéomorphismes

Les résultats des paragraphes 3 et 4 peuvent aussi se démontrer en utilisant des théorèmes généraux sur les groupes d'homéomorphismes. Rappelons ces théorèmes :

On considère un espace X connexe, non vide sur lequel opère un groupe G (par homéomorphismes, bien entendu). On se donne un ouvert U de X tel que $X = G.U$ (i.e. l'application $U \rightarrow G \setminus X$ est surjective). On note Σ l'ensemble des $g \in G$ tels que $U \cap gU \neq \emptyset$. On a tout d'abord :

(1) L'ensemble Σ engendre G .

En effet, soit H le sous-groupe de G engendré par Σ . L'espace X est réunion des ouverts $H.U$ et $(G - H).U$; de plus ces ouverts sont disjoints (en effet, si $h.u = h'.u'$, avec $h \in H$ et $h' \in G - H$, on a $h^{-1}h'.U \cap U \neq \emptyset$, d'où $h^{-1}h' \in \Sigma$ et $h' \in H.\Sigma = H$, ce qui est absurde). Comme X est connexe, et $H.U$ non vide, cela entraîne $(G - H).U = \emptyset$, d'où $G = H$.

Ceci étant, soit $F(\Sigma)$ le groupe libre défini par Σ ; si $s \in \Sigma$, notons x_s l'élément correspondant de $F(\Sigma)$. D'après (1), l'application $x_s \mapsto s$ se prolonge en un homomorphisme surjectif $\varepsilon : F(\Sigma) \rightarrow G$, et il s'agit de décrire le noyau R de ε (i.e. l'ensemble des "relations" entre les éléments de Σ). Le résultat est

le suivant :

(2) Supposons que $\pi_0(X) = \pi_1(X) = 0$ et $\pi_0(U) = 0$ (autrement dit X est connexe et simplement connexe par arcs, et U est connexe par arcs). Soit W l'ensemble des couples (s, t) d'éléments de Σ tels que $U \cap sU \cap stU \neq \emptyset$. Le groupe R est le sous-groupe distingué de $F(\Sigma)$ engendré par les $x_s x_t (x_{st})^{-1}$ pour $(s, t) \in W$.

(Noter que, si $(s, t) \in W$, on a $s, t, st \in \Sigma$ de sorte que x_s, x_t, x_{st} sont définis.)

Ce résultat est dû à A.M. Macbeath, Ann. of Maths., 79, 1964, p. 473-488. [On trouvera des résultats analogues dans M. Gerstenhaber, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1953, p. 745-750, H. Behr, J. Crelle, 211, 1962, p. 116-122 et A. Weil, Ann. of Maths., 72, 1960, p. 369-384.]

Indiquons brièvement une démonstration (pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à Weil, loc.cit.) : soit \tilde{G} le groupe quotient de $F(\Sigma)$ par le sous-groupe \tilde{R} engendré par les $x_s x_t (x_{st})^{-1}$, pour $(s, t) \in W$; comme \tilde{R} est évidemment contenu dans R , on a une projection canonique $\tilde{G} \rightarrow G$.

Si $s \in \Sigma$, on note \tilde{s} l'image de x_s dans \tilde{G} ; l'application $s \mapsto \tilde{s}$ est injective. Soit \tilde{X} l'espace topologique obtenu à partir de la somme disjointe $\bigsqcup_g U$ (où g parcourt \tilde{G}) en identifiant deux points $gu, g'u'$ si et seulement si il existe $s \in \Sigma$ tel que $g' = g\tilde{s}$, $u \in U \cap sU$, $u' \in U \cap s^{-1}U$, et $su' = u$. On vérifie (grâce au fait que \tilde{R} contient les $x_s x_t (x_{st})^{-1}$, pour $(s, t) \in W$) que c'est bien là une relation d'équivalence ouverte. On a une projection naturelle $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, compatible avec les actions de \tilde{G} et G . De plus, si N désigne le noyau de $\tilde{G} \rightarrow G$, l'image réciproque de U par π s'identifie au produit $N \times U$ (N étant muni de la topologie discrète); en particulier, \tilde{X} est un revêtement de X , de groupe N . Le fait que U soit connexe par arcs et que Σ engendre G entraîne en outre que \tilde{X} est connexe par arcs. Comme X est simplement connexe, on en conclut que $N = \{1\}$, d'où le résultat.

Exemple

Dans la situation du th. 4', on peut appliquer (1) et (2) à l'action de G sur $\text{real}(X)$; on prend pour U un voisinage ouvert convenable de $\text{real}(T)$, par exemple l'ensemble des points dont la distance à $\text{real}(T)$ est $< 2/3$. On constate alors que l'ensemble Σ est égal à $\{1\} \cup S \cup S^{-1}$ (avec les notations du th. 4') et que W est l'ensemble des couples (s,t) d'éléments de Σ tels que $s = 1$, ou $t = 1$. Il en résulte bien que G est libre de base S .

§ 4 - Arbres et amalgames

Dans ce paragraphe on convient (sauf mention expresse du contraire) que tout groupe opérant sur un graphe γ opère sans inversion (cf. 3.1).

4.1. Cas de deux facteurs

DÉFINITION 7 - Soit G un groupe opérant sur un graphe X . On appelle domaine fondamental de $X \text{ mod } G$ tout sous-graphe T de X tel que $T \rightarrow G \setminus X$ soit un isomorphisme.

Si $G \setminus X$ est un arbre il résulte de la proposition 14 du n°3.1 qu'un domaine fondamental existe. Si X est un arbre la réciproque est vraie :

PROPOSITION 17 - Soit G un groupe opérant sur un arbre X . Pour qu'il existe un domaine fondamental de $X \text{ mod } G$, il faut et il suffit que $G \setminus X$ soit un arbre.

Il faut montrer que, s'il existe un domaine fondamental T , le quotient $G \setminus X$ est un arbre. Or, puisque X est connexe non vide, $G \setminus X$ est connexe non vide; donc T est un sous-graphe connexe non vide d'un arbre, i.e. c'est un arbre; d'où la proposition.

Un graphe isomorphe à $Ch_1 = \overset{0}{\circ} \text{---} \overset{1}{\circ}$ est appelé un segment.

THÉORÈME 6 - Soit G un groupe opérant sur un graphe X , et soit $T = \overset{P}{\circ} \text{---} \overset{y}{\curvearrowright} \text{---} \overset{Q}{\circ}$ un segment de X . Supposons que T soit un domaine fondamental de $X \text{ mod } G$. Soient G_P , G_Q et $G_y = G_{\curvearrowright}$ les stabilisateurs des sommets et des arêtes de T . Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- (1) X est un arbre.
- (2) L'homomorphisme $G_P *_{G_y} G_Q \rightarrow G$ induit par les inclusions $G_P \rightarrow G$ et $G_Q \rightarrow G$ est un isomorphisme.

(On notera que $G_y = G_P \cap G_Q$ est un sous-groupe de G_P et de G_Q ; cela donne un sens à l'amalgame $G_P *_{G_y} G_Q$, cf. § 1.)

Inversement, tout amalgame de deux groupes opère sur un arbre avec pour domaine fondamental un segment. De façon plus précise :

THÉOREME 7 - Soit $G = G_1 *_A G_2$ un amalgame de deux groupes. Il existe un arbre X (et un seul, à isomorphisme unique près) sur lequel G opère avec pour domaine fondamental un segment $T = \overset{P}{\underset{O}{\curvearrowright}} \xrightarrow{y} \underset{Q}{\curvearrowleft}$, les stabilisateurs des sommets et des arêtes étant respectivement $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$ et $G_y = A$.

Démonstration du théorème 6

Le théorème résulte des deux lemmes suivants :

LEMME 2 - Pour que X soit connexe, il faut et il suffit que G soit engendré par $G_P \cup G_Q$.

Soit X' la composante connexe de X contenant T , soit G' l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gX' = X'$, et soit G'' le sous-groupe de G engendré par $G_P \cup G_Q$. Si $h \in G_P \cup G_Q$, les segments T et hT ont un sommet en commun. On a donc $hT \subset X'$, d'où $hX' = X'$, i.e. $h \in G'$; cela prouve que G' contient G'' . D'autre part, $G''T$ et $(G-G'')T$ sont des sous-graphes disjoints de X , dont la réunion est X . On en déduit que $G''T$ contient X' , donc que $G' \subset G''$, d'où $G' = G''$. Le graphe X est connexe si et seulement si $X = X'$, i.e. si $G = G' = G''$, d'où le lemme.

LEMME 3 - Pour que X ne contienne pas de circuit, il faut et il suffit que $G_P *_y G_Q \rightarrow G$ soit injectif.

Dire que X contient un circuit revient à dire qu'il existe dans X un chemin $c = (w_0, \dots, w_n)$, $n \geq 1$, sans aller-retour, tel que $o(c) = t(c)$. Ecrivons w_i sous la forme $h_i y_i$, avec $h_i \in G$ et $y_i = y$ ou \bar{y} . En passant à $G \setminus X \cong T$ on voit de plus que $\bar{y}_i = y_{i-1}$ ($1 \leq i \leq n$). Soit $P_i = o(y_i) = t(y_{i-1})$; on a $h_i = h_{i-1} g_i$ avec $g_i \in G_{P_i}$, car

$$h_i P_i = h_i o(y_i) = o(h_i y_i) = t(h_{i-1} y_{i-1}) = h_{i-1} t(y_{i-1}) = h_{i-1} P_i,$$

et $g_i \notin G_y$ car

$$\overline{h_i y_i} \neq h_{i-1} y_{i-1}.$$

ARBRES ET AMALGAMES

Le fait que $o(c) = t(c)$ équivaut à $t(y_n) = P_0$, ou encore à

$$h_0 P_0 = h_n P_0 = h_0 g_1 \dots g_n P_0, \text{ i.e. } g_1 \dots g_n \in G_{P_0}.$$

On en conclut que X contient un circuit si et seulement si l'on peut trouver une suite P_0, \dots, P_n de sommets de T , avec $\{P_{i-1}, P_i\} = \{P, Q\}$ pour tout i , et une suite d'éléments $g_i \in G_{P_i} - G_y$ ($0 \leq i \leq n$) telle que $g_0 g_1 \dots g_n = 1$. Vu le théorème 2 du n°1.2, cela revient bien à dire que $G_P *_G_y G_Q \rightarrow G$ n'est pas injectif.

Démonstration du théorème 7

L'unicité de X est claire : il faut que X soit, à isomorphisme près, le graphe suivant :

$$\text{som } X = (G/G_1) \perp\!\!\!\perp (G/G_2) \quad \text{et} \quad \text{ar } X = (G/A) \perp\!\!\!\perp \overline{(G/A)},$$

les applications $o : G/A \rightarrow G/G_1$ et $t : G/A \rightarrow G/G_2$ étant induites par les inclusions $A \rightarrow G_i$ ($i = 1, 2$). Si l'on pose $P = 1.G_1$, $Q = 1.G_2$, et $y = 1.G_A$, le segment $T = \overset{P}{\underset{Q}{\text{---}}} \underset{y}{\text{---}} \overset{Q}{\text{---}}$ est un domaine fondamental pour l'action évidente de G sur X . Le théorème 6 montre alors que X est un arbre, *cqfd*.

Remarques

1/ Les théorèmes 6 et 7 établissent une équivalence entre "amalgames de deux groupes" et "opérations sur un arbre à domaine fondamental un segment". Le cas des amalgames à plus de deux facteurs est analogue; on le traitera (grâce à la notion d' "arbre de groupes") au n°4.5.

Il existe un dictionnaire analogue entre

"groupes de type (HNN)" (au sens du n°1.4)

et

"opérations sur un arbre à quotient un lacet" ;

nous reviendrons là-dessus au §5.

2/ L'implication (1) \Rightarrow (2) du théorème 6 peut aussi se démontrer en appliquant les résultats de l'Appendice du § 3 à un voisinage ouvert assez petit du domaine fondamental T .

3/ L'implication "X connexe" \Rightarrow "G est engendré par $G_P \cup G_Q$ " peut être généralisée de la manière suivante :

LEMME 4 - Soit G un groupe opérant sur un graphe connexe X, et soit T un arbre de représentants de $X \text{ mod } G$ (cf. n°3.1). Soit Y un sous-graphe de X contenant T dont chacune des arêtes a une extrémité dans T, et tel que $G.Y = X$. Pour chaque arête y de Y d'origine dans T, soit g_y un élément de G tel que $g_y t(y) \in \text{som } T$. Le groupe H engendré par les éléments g_y et par les stabilisateurs G_P ($P \in \text{som } T$) est égal à G.

Il suffit évidemment de montrer que $H.(\text{som } T) = \text{som } X$. Puisque H contient les éléments g_y , on a $\text{som } Y \subset H.(\text{som } T)$ et l'on est ramené à voir que $H.Y = X$. Comme X est connexe, il suffit de montrer qu'une arête w d'origine dans H.Y appartient à H.Y. Quitte à traduire w par un élément de H, on peut supposer que $P = o(w)$ appartient à $\text{som } T$. Puisque $G.Y = X$, il existe $g \in G$ tel que $gw \in Y$ et tout revient à montrer que g appartient à H.

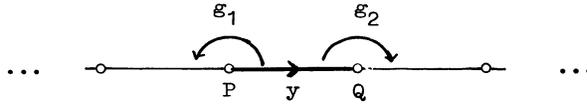
Puisque $gw \in Y$, on a $o(gw) \in \text{som } T$ ou $t(gw) \in \text{som } T$. Dans le premier cas, P et gP sont deux sommets de T congrus mod G, donc sont égaux et l'on a $g \in G_P$, d'où $g \in H$. Dans le second cas, l'arête $y = gw$ a son origine dans T; on a donc $g_y t(y) \in \text{som } T$, et l'on en déduit comme dans le premier cas que P et $g_y t(y) = g_y g^P$ coïncident, d'où $g \in g_y^{-1} G_P$, et l'on a bien encore $g \in H$, cqfd.

Remarque. Si G, X, T sont donnés, on peut toujours trouver un sous-graphe Y satisfaisant aux conditions du lemme. Lorsque T est un domaine fondamental, on peut même prendre $Y = T$ et tous les g_y égaux à 1.

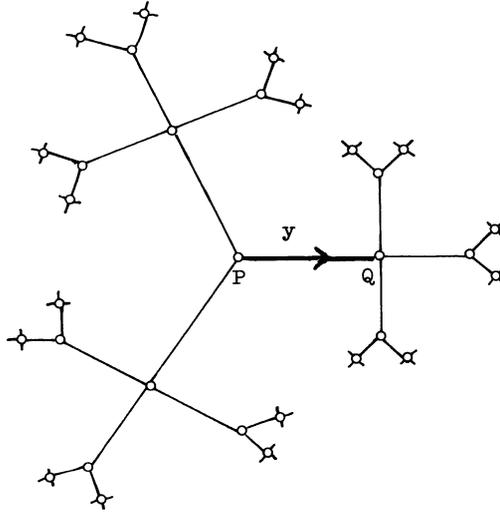
Exercice. Soit G un groupe opérant sur un arbre X avec inversion. On suppose que G opère transitivement sur $\text{som } X$ et $\text{ar } X$. Soit $P \in \text{som } X$ et soit y une arête d'origine P. Soient G_P, G_y, \tilde{G}_y les stabilisateurs de P, y et $\{y, \bar{y}\}$; on a $G_y \subset \tilde{G}_y$ et $(\tilde{G}_y : G_y) = 2$. Montrer que les injections $G_P \rightarrow G, \tilde{G}_y \rightarrow G$ se prolongent en un isomorphisme $G_P *_G \tilde{G}_y \rightarrow G$. Réciproque ? (Appliquer le théorème 6 à la subdivision barycentrique de X.)

4.2. Exemples d'arbres associés à des amalgames

(a) Groupe diédral D_∞ : $G_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $A = \{1\}$.



(b) $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$



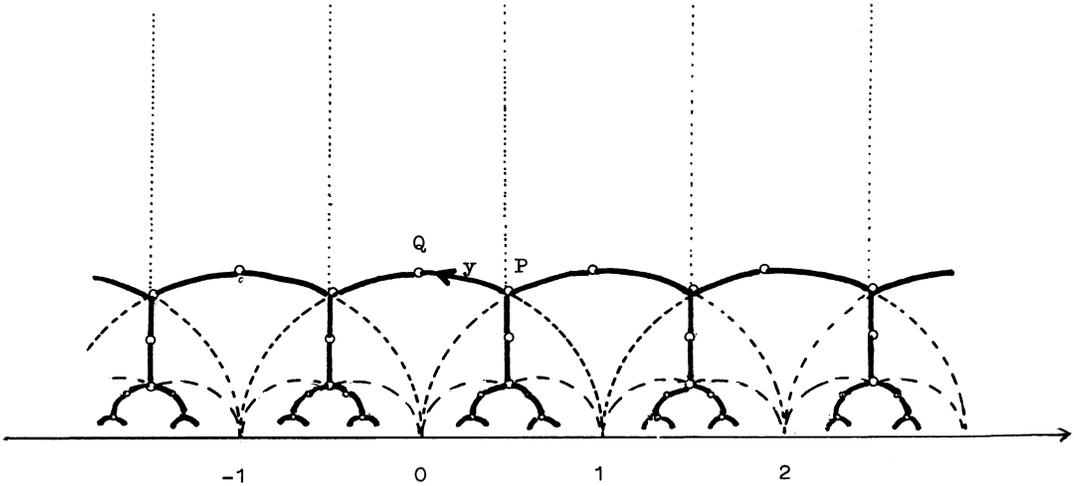
(c) $G = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Le groupe G opère comme on sait sur le demi-plan $H = \{z | \text{Im}(z) > 0\}$. Soit y l'arc de cercle formé des points $z = e^{i\theta}$, avec $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; son origine est le point $P = e^{\pi i/3}$, son extrémité le point $Q = i$. Soit X la réunion des transformés de y par G . On peut montrer que X est un arbre (ou plutôt, la réalisation géométrique d'un arbre...) sur lequel G opère avec pour domaine fondamental le segment PQ . On a

$$G_P = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} , \quad G_Q = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} , \quad G_y = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ,$$

et l'on retrouve bien l'isomorphisme classique de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ avec

$$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$$



Exercice. Soit $j(z)$ la fonction modulaire. Montrer que l'arbre X défini ci-dessus est l'ensemble des points $z \in H$ tels que $j(z) \in [0, 1728]$.

4.3. Applications

Dans ce n° , G désigne un amalgame $G_1 *_A G_2$ de deux groupes. On note X l'arbre correspondant, cf. n° 4.1, théorème 7.

PROPOSITION 18 - Soit Γ un sous-groupe de $G = G_1 *_A G_2$ tel que $\Gamma - \{1\}$ ne rencontre aucun conjugué de G_1 ni de G_2 . Alors Γ est un groupe libre.

L'hypothèse faite sur Γ équivaut à dire que Γ opère librement sur l'arbre X . La proposition résulte donc du théorème 4 du n° 3.3.

(On laisse au lecteur le soin d'expliciter une famille basique de Γ , au moyen du théorème 4' du n° 3.3.)

THÉORÈME 8 - Tout sous-groupe borné de $G = G_1 *_A G_2$ est contenu dans un conjugué de G_1 ou de G_2 .

(Une partie Σ de G est dite bornée si les longueurs des décompositions réduites des éléments de Σ sont bornées.)

COROLLAIRE - Tout sous-groupe fini de G est contenu dans un conjugué de G_1 ou de G_2 .

Soit $T = \begin{matrix} P & \xrightarrow{y} & Q \\ \circ & & \circ \end{matrix}$ un domaine fondamental de $X \text{ mod } G$ tel que $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$, $G_y = A$. Si $g \in G_1 \cup G_2$, T et gT ont un sommet en commun; on en déduit aussitôt que, si Σ est une partie bornée de G , l'ensemble $\Sigma \cdot (\text{som } T)$ est borné (au sens de la métrique de $\text{som } X$, cf. n°2.2). Le théorème 8 résulte donc de la proposition suivante (plus précisément, de l'implication (b) \Rightarrow (c)) :

PROPOSITION 19 - Soit Γ un groupe opérant sur un arbre X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) Pour toute partie bornée A de $\text{som } X$, l'ensemble $\Gamma \cdot A$ est borné.
- (b) Il existe $P \in \text{som } X$ tel que $\Gamma \cdot P$ soit borné.
- (c) Il existe un sommet de X invariant par Γ .

Les implications (a) \Rightarrow (b) et (c) \Rightarrow (a) sont immédiates. Montrons que (b) \Rightarrow (c). Soit Y le sous-arbre engendré par l'orbite $\Gamma \cdot P$. C'est un sous-arbre borné, stable par Γ . D'après le corollaire à la prop.10 du n°2.2, il existe un sommet ou une arête géométrique de Y qui est invariant par Γ . Mais on a supposé que Γ ne contient pas d'inversion. Il en résulte que, si Γ laisse invariante une arête géométrique $\{y, \bar{y}\}$, il laisse invariants y et \bar{y} , donc aussi leurs extrémités. D'où (c).

Exercices

1) Les hypothèses sont celles de la prop.18. On suppose en outre que $\Gamma \backslash G/A$ est fini. On pose

$$a = \text{Card}(\Gamma \backslash G/A), \quad s_1 = \text{Card}(\Gamma \backslash G/G_1), \quad s_2 = \text{Card}(\Gamma \backslash G/G_2).$$

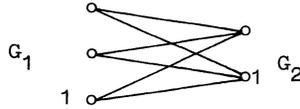
(i) Montrer que A est d'indice fini dans G_1 et G_2 ; si l'on pose $n_1 = (G_1 : A)$, $n_2 = (G_2 : A)$, on a $s_1 = a/n_1$, $s_2 = a/n_2$.

(ii) Montrer que le groupe libre Γ est de rang fini, égal à

$$1 + a - s_1 - s_2 = 1 + a \left(1 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right).$$

2) On suppose que $A = \{1\}$ et on note Γ le noyau de $G_1 * G_2 \rightarrow G_1 \times G_2$. La prop.18 est applicable à Γ .

(i) Montrer que ΓX est isomorphe au graphe combinatoire ayant $G_1 \sqcup G_2$ pour ensemble de sommets et $G_1 \times G_2$ pour ensemble d'arêtes géométriques.



(ii) Expliciter un arbre de représentants de $X \text{ mod } \Gamma$. En déduire, grâce au théorème 4', que Γ admet pour famille basique l'ensemble des commutateurs $g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$, avec $g_1 \in G_1 - \{1\}$, $g_2 \in G_2 - \{1\}$ (cf.n°1.3, prop.4).

4.4. Limite d'un arbre de groupes

DÉFINITION 8 - Un graphe de groupes (G, T) se compose d'un graphe T et de la donnée, pour tout $P \in \text{som } T$, d'un groupe G_P , et, pour tout $y \in \text{ar } T$, d'un groupe G_y , muni d'un monomorphisme $G_y \rightarrow G_{t(y)}$ (noté $a \mapsto a^y$); on exige en outre que $G_{\bar{y}} = G_y$.

Dans ce paragraphe, nous n'aurons à considérer que le cas où T est un arbre; nous dirons alors que (G, T) est un arbre de groupes. Nous noterons

$$G_T = \varinjlim (G, T)$$

la limite inductive (au sens du n°1.1) de l'arbre de groupes (G, T) ; on l'appelle aussi "l'amalgame des G_P suivant les G_y ".

Exemples

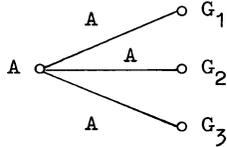
(a) On prend pour T un segment $\overset{P}{\circ} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ}$. On a alors trois groupes G_P , G_Q et $G_y = G_{\bar{y}}$, ainsi que deux monomorphismes $G_y \xrightarrow{\bar{y}} G_P$ et $G_y \xrightarrow{y} G_Q$; le groupe G_T est égal à $G_P *_{G_y} G_Q$.

(b) Plus généralement, supposons que T soit obtenu par adjonction à un arbre T' d'un sommet P et d'une arête géométrique $\{y, \bar{y}\}$ (autrement dit, P est un sommet terminal de T , et $T' = T - P$, cf.n°2.2). On a alors

$$G_T = G_{T'} *_{G_y} G_P, \quad \text{où } G_{T'} = \varinjlim (G, T').$$

(c) Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de groupes, soit A un groupe, et donnons-nous, pour tout $i \in I$, un monomorphisme $f_i : A \rightarrow G_i$ (cf.n°1.2). Soit 0 un élément

n'appartenant pas à I ; formons l'arbre T dont les sommets sont les éléments



de I et 0 , et dont les arêtes sont les couples (0,i) et (i,0) , avec $i \in I$.

On définit un arbre de groupes (G,T) en posant $G_0 = A$, $G_y = A$ pour tout $y \in \text{ar} T$, et en définissant les monomorphismes $A \rightarrow A$ et $A \rightarrow G_i$ de manière évidente.

Il est clair que $G_T = \varinjlim (G,T)$ est l'amalgame $\ast_A G_i$ défini au n°1.2.

Convention. Si (G,T) est un arbre de groupes, de limite G_T , nous convenons d'identifier les groupes G_P et G_y à leurs images dans G_T . C'est licite, car les homomorphismes $G_P \rightarrow G_T$ et $G_y \rightarrow G_T$ sont injectifs. [En effet, il suffit de le voir pour un arbre T fini ; dans ce cas, on raisonne par récurrence sur le nombre des sommets de T , en utilisant (b) ci-dessus.]

4.5. Amalgames et domaines fondamentaux (cas général).

THÉORÈME 9 - Soit (G,T) un arbre de groupes. Il existe un graphe X contenant T et une loi d'opération de $G_T = \varinjlim (G,T)$ sur X qui sont caractérisés (à isomorphisme unique près) par la propriété suivante :

T est un domaine fondamental pour $X \text{ mod } G_T$, et, pour tout $P \in \text{som} T$ (resp. pour tout $y \in \text{ar} T$) , le stabilisateur de P (resp. y) dans G_T est G_P (resp. G_y) .
De plus X est un arbre.

(Le graphe X sera dit le graphe associé à (G,T).)

Evidemment $\text{som} X$ (resp. $\text{ar} X$) est la réunion disjointe des $G_{T \cdot P} \cong G_T / G_P$, pour $P \in \text{som} T$ (resp. des $G_{T \cdot y} \cong G_T / G_y$ pour $y \in \text{ar} T$) . Les extrémités se définissent au moyen des inclusions $G_y \rightarrow G_{o(y)}$ et $G_y \rightarrow G_{t(y)}$. Ceci définit bien un graphe où le groupe G_T opère de façon évidente, et toutes les assertions du théorème sont immédiates sauf le fait que X est un arbre.

Pour démontrer cela, on représente T comme limite inductive filtrante de ses

sous-arbres finis (cf.n°2.2), et G_T et X comme limites inductives des groupes et des graphes correspondants. On se ramène ainsi au cas où T est fini. Ceci étant, on raisonne par récurrence sur $n = \text{Card som } T$. Nous pouvons supposer $n > 1$ car sinon X et T coïncident. Soit $y \in \text{ar } T$ tel que $P = t(y)$ soit un sommet terminal de T (cf.n°2.2). D'après la prop.9 du n°2.2, T s'obtient à partir du sous-arbre $T' = T - P$ par adjonction du sommet P et des arêtes y, \bar{y} . Si l'on pose $G_{T'} = \varinjlim (G, T')$, on a $G_T = G_{T'} *_{G_y} G_P$, cf.n°4.4, exemple (b).

Soit $X' = G_{T', T'}$; c'est un sous-graphe de X . On voit facilement que X' est le graphe associé à (G, T') ; vu l'hypothèse de récurrence, c'est un arbre. De plus, les transformés gX' , $g \in G_T/G_{T'}$, sont deux à deux disjoints. Soit \tilde{X} le graphe déduit de X en contractant chacun des gX' en un point (cf.n°2.3). Le groupe G_T opère sur \tilde{X} ; il a pour domaine fondamental le segment T/T' , où $T/T' = \begin{matrix} (T') \\ \circ \end{matrix} \xrightarrow{y} \begin{matrix} P \\ \circ \end{matrix}$; les stabilisateurs de (T') , P et y sont respectivement $G_{T'}$, G_P et G_y . Comme $G_{T'} *_{G_y} G_P \rightarrow G_T$ est un isomorphisme, il résulte du théorème 6 du n°4.1 que \tilde{X} est un arbre, donc aussi X (cf.n°2.3, cor.2 à la prop.13), cqfd.

Inversement, soit G un groupe opérant sur un graphe X , avec pour domaine fondamental un arbre T . Soit (G, T) l'arbre de groupes dont les G_P et G_y sont les stabilisateurs dans G des sommets T et des arêtes y (les monomorphismes $G_y \rightarrow G_{t(y)}$ étant les inclusions). Soit $G_T = \varinjlim (G, T)$. Les inclusions $G_P \rightarrow G$ se prolongent en un homomorphisme $G_T \rightarrow G$; d'après le lemme 4 du n°4.1, cet homomorphisme est surjectif si X est connexe.

D'autre part, si \tilde{X} désigne l'arbre associé à (G, T) , l'application identique $T \rightarrow T$ se prolonge de manière unique en un morphisme $\tilde{X} \rightarrow X$ équivariant par rapport à $G_T \rightarrow G$.

THÉORÈME 10 - Les hypothèses et notations étant comme ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) X est un arbre.

(2) $\tilde{X} \rightarrow X$ est un isomorphisme.

(3) $G_T \rightarrow G$ est un isomorphisme.

Les implications (3) \Rightarrow (2) et (2) \Rightarrow (1) résultent du théorème 9.

(2) \Rightarrow (3) : Soit $P \in \text{som } T$ et soit $(G_T)_P$ (resp. G_P) le stabilisateur correspondant dans G_T (resp. dans G). Par construction, l'homomorphisme $G_T \rightarrow G$ induit un isomorphisme de $(G_T)_P$ sur G_P . D'autre part, si $\tilde{X} \rightarrow X$ est bijectif, le noyau H de $G_T \rightarrow G$ est contenu dans $(G_T)_P$; on a donc $H = \{1\}$. Comme on sait déjà que $G_T \rightarrow G$ est surjectif, on voit bien que c'est un isomorphisme.

(1) \Rightarrow (2) : Puisque $G_T.T = \tilde{X}$ et $G.T = X$, le morphisme $\tilde{X} \rightarrow X$ est surjectif. D'autre part, l'homomorphisme $G_T \rightarrow G$ induit des isomorphismes entre les stabilisateurs des sommets correspondants (resp. des arêtes correspondantes) de \tilde{X} et de X . On en déduit que $f : \tilde{X} \rightarrow X$ est localement injectif (i.e. injectif sur l'ensemble des arêtes d'origine donnée). Cela suffit à entraîner que f est injectif, grâce au lemme suivant :

LEMME 5 - Soit $f : \tilde{X} \rightarrow X$ un morphisme localement injectif d'un graphe connexe \tilde{X} dans un arbre X . Alors f est injectif.

Puisque \tilde{X} est connexe il suffit de montrer que, si c est un chemin injectif dans \tilde{X} , le chemin $f \circ c$ dans X est aussi injectif. Puisque X est un arbre il suffit de vérifier que $f \circ c$ est sans aller-retour (cf. prop.8 du n°2.2). Or cette dernière propriété résulte immédiatement du fait que c est injectif et que f est localement injectif.

Remarque. Soit G un groupe opérant sur un arbre X . Lorsque $G \backslash X$ est un arbre, il existe un domaine fondamental T de $X \text{ mod } G$ qui est un arbre (isomorphe à $G \backslash X$), et la structure de G est donnée par le théorème 10. Le cas où $G \backslash X$ n'est pas un arbre est plus compliqué; ce sera l'objet du § 5.

Exercices

1) Démontrer l'implication (1) \Rightarrow (3) du théorème 10 en utilisant les résultats de l'Appendice du § 3.

2) Etendre la prop.18 et le th.8 aux sous-groupes de $G_T = \varprojlim (G, T)$ où (G, T) est un arbre de groupes.

§ 5. Structure d'un groupe opérant sur un arbre

Le principal résultat de ce paragraphe est le th.13 du n°5.4, qui donne la structure d'un groupe G opérant sans inversion sur un arbre X . Deux cas particuliers ont été traités dans les paragraphes précédents : celui d'une action libre (G est alors un groupe libre, cf. n°3.3) et celui où le graphe quotient $G \backslash X$ est un arbre (auquel cas G est un amalgame des stabilisateurs des sommets d'un arbre de représentants de $G \backslash X$, cf. n°4.5).

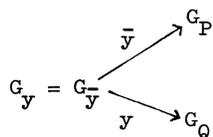
Pour étudier le cas général, nous aurons besoin de la notion^(*) de "groupe fondamental d'un graphe de groupes", notion qui généralise à la fois celle de groupe libre et celle d'amalgame; ce sera l'objet des n°5.1 et 5.2.

5.1. Groupe fondamental d'un graphe de groupes

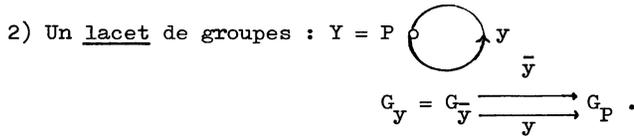
Soit Y un graphe connexe et non vide et soit (G, Y) un graphe de groupes. [Rappelons, cf. n°4.4, que G consiste en la donnée, pour tout $P \in \text{som } Y$, d'un groupe G_P , et, pour tout $y \in \text{ar } Y$, d'un groupe G_y muni d'un monomorphisme $G_y \rightarrow G_{t(y)}$ noté $a \mapsto a^y$; on exige en outre que $G_{\bar{y}} = G_y$.]

Exemples

1) Un segment de groupes : $Y = \overset{P}{\circ} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ}$



(*) due à H. Bass, ainsi que les démonstrations des ths. 11, 12, 13.



Le groupe $F(G,Y)$

C'est le groupe engendré par les groupes G_p et les éléments y de arY , soumis aux relations

$$\bar{y} = y^{-1} \quad \text{et} \quad ya^{\bar{y}}y^{-1} = a^{\bar{y}} \quad \text{si} \quad y \in arY, a \in G_y .$$

De façon plus précise, soit Γ le produit libre des G_p et du groupe libre de famille basique arY ; le groupe $F(G,Y)$ est défini comme le quotient de Γ par le sous-groupe distingué engendré par les éléments $y\bar{y}$ et $ya^{\bar{y}}y^{-1}(a^{\bar{y}})^{-1}$, $y \in arY$, $a \in G_y$.

On observera que les relations écrites ci-dessus sont équivalentes aux relations

$$ya^{\bar{y}}y^{-1} = a^{\bar{y}} \quad \text{si} \quad y \in arY, a \in G_y .$$

Mots de $F(G,Y)$

Soit c un chemin dans Y d'origine un sommet P_0 . Notons y_1, \dots, y_n les arêtes de c , avec $n = \ell(c)$, et posons

$$P_i = o(y_{i+1}) = t(y_i) .$$

DÉFINITION 9 - On appelle mot de type c dans $F(G,Y)$ tout couple (c, μ) où $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ est une suite d'éléments $r_i \in G_{P_i}$. L'élément

$$|c, \mu| = r_0 y_1 r_1 y_2 \dots y_n r_n \quad \text{de} \quad F(G,Y)$$

est dit associé au mot (c, μ) .

Lorsque $n = 0$, on a $|c, \mu| = r_0$.

[Par abus de notation, nous ne distinguons pas un élément de l'un des groupes G_p de son image par l'homomorphisme canonique $G_p \rightarrow F(G,Y)$; on verra en effet au n°5.2 que cet homomorphisme est injectif.]

GROUPE OPÉRANT SUR UN ARBRE

Les deux définitions du groupe fondamental de (G, Y)

a) Soit P_0 un sommet de Y . Nous noterons $\pi_1(G, Y, P_0)$ l'ensemble des éléments de $F(G, Y)$ de la forme $|c, \mu|$, où c est un chemin dont les deux extrémités sont égales à P_0 (i.e. $o(c) = P_0 = t(c)$). On voit tout de suite que $\pi_1(G, Y, P_0)$ est un sous-groupe de $F(G, Y)$; on l'appelle le groupe fondamental de (G, Y) en P_0 . Lorsque G est le graphe de groupes trivial I (correspondant à $I_P = \{1\}$ pour tout sommet P de Y), le groupe $\pi_1(I, Y, P_0)$ coïncide avec le groupe fondamental (au sens usuel) $\pi_1(Y, P_0)$ du graphe Y au point P_0 (plus précisément, on obtient la définition combinatoire de ce groupe). Dans le cas général, le morphisme canonique $G \rightarrow I$ se prolonge en un homomorphisme

$$\pi_1(G, Y, P_0) \rightarrow \pi_1(Y, P_0);$$

cet homomorphisme est surjectif; son noyau est le sous-groupe distingué de $\pi_1(G, Y, P_0)$ engendré par les G_P .

b) Soit T un arbre maximal de Y . Le groupe fondamental $\pi_1(G, Y, T)$ de (G, Y) en T est, par définition, le quotient de $F(G, Y)$ par le sous-groupe distingué engendré par les éléments y de $\text{ar}T$. Ainsi, si g_y désigne l'image de y dans $\pi_1(G, Y, T)$, le groupe $\pi_1(G, Y, T)$ est engendré par les groupes G_P ($P \in \text{som}Y$) et les éléments g_y ($y \in \text{ar}Y$), soumis aux relations

$$\begin{aligned} g_y a^y g_y^{-1} &= a^{\bar{y}}, & g_{\bar{y}} &= g_y^{-1} & \text{si } y \in \text{ar}Y, a \in G_y \\ g_y &= 1 & \text{si } y \in \text{ar}T. \end{aligned}$$

En particulier; on a $a^y = a^{\bar{y}}$ si $y \in \text{ar}T$, $a \in G_y$.

Remarque

Soit R le plus petit sous-groupe distingué de $\pi_1(G, Y, T)$ contenant les images des G_P , $P \in \text{som}Y$. Il résulte de la définition ci-dessus que le quotient $\pi_1(G, Y, T)/R$ est défini par les générateurs g_y , $y \in \text{ar}Y$, et les relations

$$g_{\bar{y}} = g_y^{-1} \quad \text{ainsi que} \quad g_y = 1 \quad \text{si } y \in \text{ar}T.$$

C'est le groupe fondamental (au sens ordinaire) $\pi_1(Y, T)$ du graphe Y relativement à l'arbre maximal T ; c'est un groupe libre : il admet pour famille basique

la famille des ξ_y , $y \in A - (T \cap A)$, où A est une orientation de Y .

Exemples

1) Supposons que $G_y = \{1\}$ pour tout $y \in \text{ar } Y$, et soit A une orientation de Y . Le groupe $\pi_1(G, Y, T)$ est alors engendré par les G_P ($P \in \text{som } Y$) et les ξ_y ($y \in A - T \cap A$), ceux-ci n'étant soumis à aucune relation. On a donc

$$\pi_1(G, Y, T) = \left(\prod_P G_P \right) * F$$

où F est le groupe libre de famille basique $A - (T \cap A)$, autrement dit le groupe fondamental $\pi_1(Y, T)$, cf. Remarque ci-dessus.

2) Si $Y = \begin{matrix} P & & Q \\ \circ & \xrightarrow{y} & \circ \end{matrix}$ est un segment, on a

$$\pi_1(G, Y, Y) = G_P *_{G_y} G_Q.$$

Plus généralement, si Y est un arbre, on a

$$\pi_1(G, Y, Y) = \varinjlim (G, Y),$$

cf. n° 4.4 ; c'est l'amalgame des G_P suivant les G_y .

3) $Y = \text{Po} \begin{matrix} \circ \\ \bigcirc \\ \circ \end{matrix} \xrightarrow{y} \text{ay}$ est un lacet. Posons $A = G_y$. On a deux monomorphismes

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{\bar{y}} \\ \xrightarrow{y} \end{matrix} G_P;$$

le groupe $F(G, Y) = \pi_1(G, Y, P)$ est engendré par G_P et par un élément $g = \xi_y$, avec les relations de définition :

$$ga^y g^{-1} = a^{\bar{y}} \quad \text{pour tout } a \in A.$$

Si l'on identifie A à un sous-groupe de $G = G_P$ par $a \mapsto a^y$, et si l'on désigne par θ l'homomorphisme $a \mapsto a^{\bar{y}}$ de A dans G , on voit que le groupe $\pi_1(G, Y, P)$ n'est autre que le groupe déduit de (A, G, θ) par la construction (HNN), cf. n° 1.4, démonstration de la prop. 5. Il résulte de cette démonstration que $\pi_1(G, Y, P)$ est produit semi-direct du groupe cyclique infini $g^{\mathbb{Z}}$ engendré par g , et du sous-groupe distingué R engendré par les conjugués $G_n = g^n G g^{-n}$ de G , $n \in \mathbb{Z}$; de plus, R est somme amalgamée des G_n , comme indiqué dans 1.4, loc. cit. (Noter que $g^{\mathbb{Z}}$ peut s'interpréter comme le groupe fondamental $\pi_1(Y, P)$ du lacet Y , et R comme le groupe $\pi_1(G, \tilde{Y}, \tilde{Y})$ relatif au revêtement universel \tilde{Y} de Y ;

pour une généralisation de tout ceci, voir Exercice.]

PROPOSITION 20 - Soit (G, Y) un graphe de groupes, soit $P_0 \in \text{som } Y$ et soit T un arbre maximal de Y . La projection canonique $p : F(G, Y) \rightarrow \pi_1(G, Y, T)$ induit un isomorphisme de $\pi_1(G, Y, P_0)$ sur $\pi_1(G, Y, T)$.

(En particulier, on voit que $\pi_1(G, Y, P_0)$ est indépendant du choix de P_0 , à isomorphisme près (l'isomorphisme dépendant du choix de T); de même, $\pi_1(G, Y, T)$ est indépendant du choix de T . C'est la même situation que pour le groupe fondamental usuel.)

Démonstration

Si $P \in \text{som } Y$, soit c_P la géodésique joignant P_0 à P dans T . Soient y_1, \dots, y_n les arêtes de c_P , et posons

$$\gamma_P = y_1 \dots y_n \quad \text{dans} \quad F(G, Y).$$

Posons également

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_P x \gamma_P^{-1} & \text{si} & \quad x \in G_P \\ y' &= \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} & \text{si} & \quad y \in \text{ar } Y. \end{aligned}$$

Si $y \in \text{ar } T$, on a, soit $c_{t(y)} = (c_{o(y)}, y)$, soit $c_{o(y)} = (c_{t(y)}, \bar{y})$; dans les deux cas, on voit que $y' = 1$. D'autre part, on a $(\bar{y})' y' = 1$ et, si $a \in G_y$,

$$\begin{aligned} y'(a^y)' y'^{-1} &= \gamma_{o(y)} y \gamma_{t(y)}^{-1} \gamma_{t(y)} a^y \gamma_{t(y)}^{-1} \gamma_{t(y)} y^{-1} \gamma_{o(y)}^{-1} \\ &= \gamma_{o(y)} y a^y y^{-1} \gamma_{o(y)}^{-1} = \gamma_{o(y)} a^{\bar{y}} \gamma_{o(y)}^{-1} \\ &= (a^{\bar{y}})' . \end{aligned}$$

Comme les éléments x' et y' appartiennent à $\pi_1(G, Y, P_0)$, les relations ci-dessus montrent qu'il existe un homomorphisme

$$f : \pi_1(G, Y, T) \rightarrow \pi_1(G, Y, P_0)$$

et un seul, tel que $f(x) = x'$, $f(g_y) = y'$ si $x \in G_P$, $y \in \text{ar } Y$. On a $p(\gamma_P) = 1$, d'où $p \circ f = \text{Id}$. D'autre part, soit c un chemin fermé d'origine P_0 , d'arêtes y_1, \dots, y_n et de sommets $P_i = o(y_{i+1}) = t(y_i)$; soit (c, μ) , avec $\mu = (r_0, \dots, r_n)$, un mot de type c , et soit $r_0 y_1 r_1 y_2 \dots y_n r_n$ l'élément de

$\pi_1(G, Y, P_0)$ associé à (c, μ) , cf. déf.9. On a

$$r'_i = \gamma_{P_i} r_i \gamma_{P_i}^{-1}, \quad y'_i = \gamma_{P_i} y_i \gamma_{P_{i+1}}^{-1},$$

d'où

$$r'_0 y'_1 r'_1 \dots y'_n r'_n = \gamma_{P_0} (r_0 y_1 r_1 \dots y_n r_n) \gamma_{P_0}^{-1} = r_0 y_1 \dots y_n r_n$$

puisque $\gamma_{P_0} = 1$. On a donc $f \circ p = \text{Id}$, ce qui achève la démonstration.

Exercice

Soit (G, Y) un graphe de groupes connexe non vide, et soit T un arbre maximal de Y . Soit (\tilde{Y}, T) le revêtement universel de Y relativement à T ; le graphe \tilde{Y} est un arbre, où opère librement le groupe $\Gamma = \pi_1(Y, T)$. Si $Q \in \text{som } \tilde{Y}$ a pour projection $P \in \text{som } Y$, on pose $G_Q = G_P$; on définit de même G_y pour $y \in \text{ar } \tilde{Y}$ ainsi que $G_y \rightarrow G_{t(y)}$; d'où un arbre de groupes (G, \tilde{Y}) sur lequel Γ opère de façon naturelle.

Montrer que $\pi_1(G, Y, T)$ est canoniquement isomorphe au produit semi-direct de Γ et du groupe $\pi_1(G, \tilde{Y}, \tilde{Y}) = \varinjlim (G, \tilde{Y})$.

5.2. Mots réduits

On conserve les notations et hypothèses du n°5.1. Soit (c, μ) un mot de type c , où c est un chemin d'origine P_0 et d'arêtes y_1, \dots, y_n , et où $\mu = (r_0, \dots, r_n)$, cf. déf.9.

DÉFINITION 10 - On dit que (c, μ) est réduit s'il satisfait à la condition suivante :

Si $n = 0$, on a $r_0 \neq 1$; si $n \geq 1$, on a $r_i \notin G_{y_i}^{y_i}$ pour tout indice i tel que $y_{i+1} = \bar{y}_i$.

(On convient de noter G_y^y l'image de G_y dans $G_{t(y)}$ par le monomorphisme $a \mapsto a^y$.)

En particulier, tout mot dont le type est un chemin de longueur ≥ 1 sans aller-retour est réduit.

THÉORÈME 11 - Si (c, μ) est un mot réduit, l'élément associé $|c, \mu|$ de $F(G, Y)$ est $\neq 1$.

COROLLAIRE 1 - Les homomorphismes $G_P \rightarrow F(G, Y)$ sont injectifs.

GROUPE OPÉRANT SUR UN ARBRE

C'est le cas particulier où c est de longueur nulle.

COROLLAIRE 2 - Si (c, μ) est réduit, et si $\ell(c) \geq 1$, on a $|c, \mu| \notin G_{P_0}$,
où $P_0 = o(c)$.

Si l'on avait $|c, \mu| = x \in G_{P_0}$, le mot réduit (c, μ') , où

$$\mu' = (x^{-1}r_0, r_1, \dots, r_n),$$

serait tel que $|c, \mu'| = 1$, ce qui contredirait le théorème.

COROLLAIRE 3 - Soit T un arbre maximal de Y , et soit (c, μ) un mot réduit dont le type c est un chemin fermé (i.e. $o(c) = t(c)$). L'image de $|c, \mu|$ dans $\pi_1(G, Y, T)$ est alors $\neq 1$.

Soit $P_0 = o(c)$ l'origine de c ; on a $|c, \mu| \in \pi_1(G, Y, P_0)$ et le th.11 affirme que $|c, \mu| \neq 1$. Le corollaire résulte de là et du fait que la projection canonique

$$f : F(G, Y) \rightarrow \pi_1(G, Y, T)$$

induit un isomorphisme de $\pi_1(G, Y, P_0)$ sur $\pi_1(G, Y, T)$, cf. prop.20.

Préliminaires à la démonstration du théorème 11

On va utiliser une technique de "dévissage"; cette technique nous permettra de ramener le problème au cas où Y est, soit un segment, soit un lacet.

Soient Y' un sous-graphe connexe non vide de Y , et $(G|Y', Y')$ la restriction du graphe de groupes (G, Y) à Y' . On suppose que le théorème 11 est vrai pour $(G|Y', Y')$; d'après le cor.1, cela entraîne en particulier que, pour tout $P \in \text{som } Y'$, l'homomorphisme $G_P \rightarrow F(G|Y', Y')$ est injectif.

Soit $W = Y/Y'$ le graphe déduit de Y par contraction de Y' en un sommet, noté (Y') ; on a $\text{som } W = (\text{som } Y - \text{som } Y') \cup \{(Y')\}$ et $\text{ar } W = \text{ar } Y - \text{ar } Y'$; si $y \in \text{ar } W$, on définit $o_W(y)$ et $t_W(y)$ de façon évidente :

$$\begin{aligned} o_W(y) &= o(y) & \text{si } o(y) \notin \text{som } Y' & \text{ et } o_W(y) = (Y') & \text{ sinon} \\ t_W(y) &= t(y) & \text{si } t(y) \notin \text{som } Y' & \text{ et } t_W(y) = (Y') & \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Soit (H, W) le graphe de groupes défini comme suit :

si $P \in \text{som } Y - \text{som } Y'$, on pose $H_P = G_P$;

si $P = (Y')$, on pose $H_P = F(G|Y', Y')$;

si $y \in \text{ar}W$, on pose $H_y = G_y$, et l'on définit $H_y \rightarrow H_{t(y)}$ de manière évidente (c'est un monomorphisme, vu l'hypothèse faite sur Y').

La projection $(G, Y) \rightarrow (H, W)$ induit un homomorphisme de $F(G, Y)$ dans $F(H, W)$.

LEMME 6 - Le morphisme $F(G, Y) \rightarrow F(H, W)$ est un isomorphisme.

C'est essentiellement trivial; cela revient à dire que l'on peut construire $F(G, Y)$ en deux étapes : on prend d'abord les générateurs et relations relatifs à Y' , ce qui donne $H_{(Y')} = F(G|Y', Y')$, puis on adjoint les autres générateurs et les autres relations, ce qui correspond à la construction de $F(H, W)$. [On laisse au lecteur le soin de rédiger une démonstration en forme, par exemple en définissant un morphisme $F(H, W) \rightarrow F(G, Y)$ inverse du morphisme $F(G, Y) \rightarrow F(H, W)$.]

On va maintenant associer à tout mot (c, μ) de (G, Y) un mot (c', μ') de (H, W) de sorte que $|c', \mu'|$ soit l'image de $|c, \mu|$ par l'isomorphisme ci-dessus. L'idée est, tout simplement, de remplacer chaque "morceau" de (c, μ) dans Y' par l'élément correspondant dans $H_{(Y')}$. De façon précise, soit (P_0, \dots, P_n) la suite des sommets de c et (y_1, \dots, y_n) la suite de ses arêtes; soit $\mu = (r_0, \dots, r_n)$. Si $0 \leq i \leq j \leq n$, on note (c_{ij}, μ_{ij}) le sous-mot de (c, μ) où c_{ij} est le sous-chemin de c formé de $(P_i, y_i, P_{i+1}, \dots, P_j)$ et où $\mu_{ij} = (r_i, \dots, r_j)$. Si c_{ij} est contenu dans Y' , on note r_{ij} l'élément de $H_{(Y')} = F(G|Y', Y')$ associé à (c_{ij}, μ_{ij}) . On définit une suite croissante d'entiers

$$0 \leq i_0 \leq j_0 < i_1 \leq j_1 < \dots < i_m \leq j_m \leq n$$

par les conditions suivantes :

- (i) tout chemin $c_{i_a j_a}$ ($0 \leq a \leq m$) est contenu dans Y' ,
- (ii) tout sommet (resp. toute arête) de c qui est contenu dans Y' appartient à l'un des $c_{i_a j_a}$.

Ainsi, les chemins intermédiaires $c_{j_a i_{a+1}}$ sont de longueur ≥ 1 , et aucun de leurs sommets (à part les extrémités) n'appartient à Y' ; ces chemins définissent donc des chemins dans W , que l'on note également $c_{j_a i_{a+1}}$.

Soit (c', μ') le mot de (H, W) défini par :

$$c' = (\dots, c_{j_{a-1}i_a}, c_{j_a i_{a+1}}, \dots)$$

$$\mu' = (\dots, \mu_{j_{a-1}+1, i_a-1}, r_{i_a j_a}, \mu_{j_a+1, i_{a+1}-1}, \dots) .$$

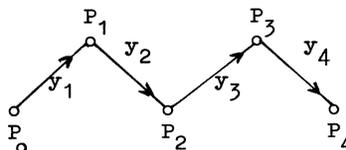
(On convient ici que $\mu_{h,k}$ est la suite vide si $h > k$.)

Précisons que le chemin c' commence par $c_{i_0 j_0}$ si $i_0 = 0$ et par $c_{o i_0}$ sinon; de même μ' commence par $r_{i_0 j_0}$ si $i_0 = 0$, et par μ_{o, i_0-1} sinon. La situation est analogue pour les "bouts" de c' et μ' .

Exemple. Supposons que $n = 4$

et que les seuls sommets et les seules arêtes de c dans Y' soient P_0, P_1, P_2 et y_2 . On a

alors $c' = (y_1, y_3, y_4)$, $\mu' = (r_o, r_1 y_2 r_2, r_3, r_4)$.



Il est clair que $|c, \mu|$ et $|c', \mu'|$ se correspondent par l'isomorphisme du lemme 6. De plus :

LEMME 7 - Si (c, μ) est un mot réduit de (G, Y) , alors (c', μ') est un mot réduit de (H, W) .

Supposons que $l(c') = 0$, i.e. que c' soit réduit à un sommet P . Si $P \neq (Y')$, on a également $l(c) = 0$ et $c = P$; on a $\mu = (r_o)$ avec $r_o \neq 1$ dans G_P ; comme $H_P = G_P$ on voit que (c', μ') est réduit. Si $P = (Y')$, le chemin c est contenu dans Y' et l'on a $|c, \mu| \neq 1$ puisque le th.11 est supposé applicable à $(G|Y', Y')$; on en déduit bien que $|c', \mu'|$ est $\neq 1$.

Supposons que $l(c') \geq 1$ et soient w_1, \dots, w_p les arêtes de c' . Il faut montrer que $w_{h+1} = \bar{w}_h \Rightarrow r'_h \notin H_{w_h}^{w_h}$, où $\mu' = (r'_o, \dots, r'_p)$. Soit $P = t(w_h)$. Si $P \neq (Y')$, l'implication ci-dessus résulte du fait que (c, μ) est réduit.

Lorsque $P = (Y')$, on distingue deux cas :

(α) (w_h, r'_h, w_{h+1}) est de la forme (y_i, r'_i, y_{i+1}) où i est un indice tel que $y_{i+1} = \bar{y}_i$. On a $r'_i \notin G_{y_i}^{y_i}$ puisque (c, μ) est réduit. Or r'_h est l'image de r'_i dans $H_{(Y')}$ et l'hypothèse faite sur $(G|Y', Y')$ entraîne que $G_{t(y_i)} \rightarrow H_{(Y')}$ est injectif; de plus cet homomorphisme transforme $G_{y_i}^{y_i}$ en $H_{w_h}^{w_h}$. On en conclut bien

que r'_h n'appartient pas à $H_{w_h}^{w_h}$.

(β) (w_h, r'_h, w_{h+1}) est de la forme $(y_{i_a}, r_{i_a j_a}, y_{j_a+1})$, avec $i_a < j_a$ et $r_{i_a j_a} = |c_{i_a j_a}, \mu_{i_a j_a}| \in F(G|Y', Y')$. Comme $l(c_{i_a j_a}) \geq 1$, le corollaire 2 au th.11, appliqué à $(G|Y', Y')$, montre que $r_{i_a j_a} \notin G_Q$, où

$$Q = o(c_{i_a j_a}) = t(y_{i_a}).$$

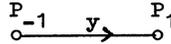
En particulier, $r_{i_a j_a}$ n'appartient pas au sous-groupe $H_{w_h}^{w_h}$ de G_Q .

LEMME 8 - Si le théorème 11 est vrai pour (H, W) , il l'est aussi pour (G, Y) .

Cela résulte aussitôt des lemmes 6 et 7.

Démonstration du théorème 11

1) Le cas où Y est un segment



L'élément $|c, \mu|$ est de la forme

$$r_o y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n$$

avec $e_i = \pm 1$, $e_{i+1} = -e_i$, $r_o \in G_{P_{-1}}$, $r_i \in G_{P_{e_i}} - G_y^{y_i}$; si $n = 0$, on a $r_o \neq 1$.

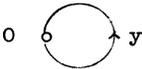
Soit φ l'homomorphisme canonique

$$F(G, Y) \rightarrow \pi_1(G, Y, Y) = G_{P_{-1}} *_{G_y} G_{P_1}.$$

On a $\varphi(|c, \mu|) = r_o r_1 \dots r_n$ et il résulte du th.1 du n°1.2 que l'on a $r_o r_1 \dots r_n \neq 1$, d'où a fortiori $|c, \mu| \neq 1$.

2) Le cas où Y est un arbre

Un argument standard sur les limites inductives filtrantes permet de se ramener au cas où Y est fini. On raisonne alors par récurrence sur $n = \frac{1}{2} \text{Card}(\text{ar } Y)$, le cas $n = 0$ étant trivial. Si $n \geq 1$, on prend pour Y' un segment contenu dans Y; d'après 1), le théorème 11 s'applique à Y' . D'autre part le graphe quotient $W = Y/Y'$ est un arbre (cf. n°2.3, cor.2 à la prop.13) et $\frac{1}{2} \text{Card}(\text{ar } W) = n-1$. L'hypothèse de récurrence s'applique donc à (H, W) et l'on conclut au moyen du lemme 8.

3) Le cas où Y est un lacet 

Nous avons déterminé (cf. n°5.1, exemple 3) la structure de $F(G,T)$. Ce groupe est produit semi-direct du groupe cyclique infini engendré par y et du sous-groupe distingué R engendré par G_0 . De plus, si l'on pose $G_n = y^n G_0 y^{-n}$ et $A = G_y$, le groupe R est somme amalgamée des G_n suivant les homomorphismes

$$\begin{array}{ccc} G_{n-1} & \longleftarrow & A & \longrightarrow & G_n \\ y^{n-1} a \bar{y} y^{1-n} & \longleftarrow & a & \longrightarrow & y^n a y y^{-n} \end{array}, \quad (\text{cf. n°1.4}).$$

L'élément $|c, \mu|$ est de la forme

$$r_0 y^{e_1} r_1 y^{e_2} \dots y^{e_n} r_n,$$

avec $r_i \in G_0$, $e_i = \pm 1$, et $r_i \notin A y^{e_i}$ si $e_{i+1} = -e_i$.

Si $\sum e_i \neq 0$, on a $|c, \mu| \notin R$ d'où $|c, \mu| \neq 1$. Supposons donc que $\sum e_i = 0$ et posons

$$d_i = e_1 + \dots + e_i \quad \text{et} \quad s_i = y^{d_i} r_i y^{-d_i};$$

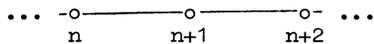
on a

$$|c, \mu| = s_0 s_1 \dots s_n, \quad \text{avec} \quad s_i \in G_{d_i}, \quad d_0 = d_n = 0,$$

$$d_{i+1} - d_i = e_{i+1} = \pm 1, \quad \text{et} \quad s_i \notin y^{d_i} A y^{e_i} y^{-d_i} \quad \text{si} \quad d_{i+1} = d_{i-1}.$$

Soit alors T l'arbre dont l'ensemble des

sommets est Z et dont les arêtes géométriques sont les $\{n, n+1\}$, $n \in Z$. Soit (K, T)



l'arbre de groupes défini par les G_n et les $G_{n-1} \leftarrow A \rightarrow G_n$ comme ci-dessus. On a $R = \pi_1(K, T, T)$, et $s_0 \dots s_n$ est associé à un mot réduit de (K, T) dont le type est un chemin fermé (car $d_0 = d_n = 0$). Vu 2), on peut appliquer le cor.3 du th.11 à (K, T) et on en conclut bien que $s_0 \dots s_n$, donc aussi $|c, \mu|$, est $\neq 1$.

4) Cas général

On se ramène comme dans 2) ci-dessus au cas où Y est fini, et l'on raisonne par

récurrence sur $n = \frac{1}{2} \text{Card}(\text{ar } Y)$, le cas $n = 0$ étant trivial. Si $n \geq 1$, on choisit un sous-graphe Y' de Y ayant 2 arêtes; c'est, soit un segment, soit un lacet et le th.11 est applicable à $(G|Y', Y')$. D'autre part, l'hypothèse de récurrence montre que le th.11 est aussi applicable à (H, W) où $W = Y/Y'$; on conclut alors au moyen du lemme 8.

Remarque. On pourrait également ramener le cas général au cas des arbres en passant au revêtement universel de Y , et en utilisant l'Exercice du n°5.1

Exercice

Soit c un chemin de sommets P_0, \dots, P_n et d'arêtes y_1, \dots, y_n . Soient (c, μ) et (c, μ') , avec

$$\mu = (r_0, \dots, r_n), \mu' = (r'_0, \dots, r'_n)$$

deux mots de type c . On dit que (c, μ) et (c, μ') sont équivalents s'il existe une famille (a_1, \dots, a_n) , $a_i \in G_{y_i}$, telle que

$$r'_0 = r_0 \bar{a}_1, a_i^{y_i} r'_i = r_i \overline{a_{i+1}^{y_{i+1}}} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

et

$$a_n^{y_n} r'_n = r_n.$$

(a) Montrer que, si (c, μ) et (c, μ') sont équivalents, on a

$$|c, \mu| = |c, \mu'| \quad \text{dans } F(G, Y).$$

Si de plus (c, μ) est réduit, il en est de même de (c, μ') .

(b) Inversement, on suppose que $|c, \mu| = |c, \mu'|$ et que (c, μ) et (c, μ') sont réduits. Montrer que (c, μ) et (c, μ') sont équivalents.

(On raisonne par récurrence sur n . On pose

$$d = (c, \bar{c}) = (y_1, \dots, y_n, \overline{y_n}, \dots, \overline{y_1})$$

$$v = (r'_0, \dots, r'_{n-1}, r'_n r_n^{-1}, r_{n-1}^{-1}, \dots, r_0^{-1}),$$

de sorte que (d, v) est un mot de type d , et que $|d, v| = 1$. D'après le th.11, (d, v) n'est pas réduit. Montrer que cela entraîne $r'_n r_n^{-1} \in G_{y_n}^{y_n}$, et utiliser l'hypothèse de récurrence.)

(c) Soit $P_0 \in \text{som } Y$ et soit $g \in \pi_1(G, Y, P_0)$, $g \neq 1$. Montrer qu'il existe un chemin fermé c d'origine P_0 et un mot réduit (c, μ) de type c tels que

$|c, \mu| = g$. Montrer que ces conditions déterminent c de façon unique, et (c, μ) à équivalence près (même raisonnement que pour b).

5.3. Revêtement universel relatif à un graphe de groupes

On se donne

(G, Y) : graphe de groupes, avec Y connexe non vide

T : arbre maximal de Y

A : orientation de Y .

Si $y \in \text{ar } Y$, on pose

$$e(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in A \\ 1 & \text{si } y \notin A \end{cases}$$

et on note $|y|$ celle des deux arêtes y, \bar{y} qui appartient à A .

Définition du revêtement universel

Nous nous proposons de construire les objets suivants :

- un graphe $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T)$;
- une opération de $\pi = \pi_1(G, Y, T)$ sur \tilde{X} ;
- un morphisme $p : \tilde{X} \rightarrow Y$ qui induise un isomorphisme $\pi \tilde{X} \simeq Y$;
- des sections $\text{som } Y \rightarrow \text{som } \tilde{X}$ et $\text{ar } Y \rightarrow \text{ar } \tilde{X}$ de p (ces sections seront notées $P \mapsto \tilde{P}$ et $y \mapsto \tilde{y}$).

Si $P \in \text{som } Y$, on exige en outre que le stabilisateur $\pi_{\tilde{P}}$ de \tilde{P} dans π soit égal à G_P . De même, si $y \in \text{ar } Y$, le stabilisateur $\pi_{\tilde{y}}$ doit être égal au sous-groupe G_w^W de $G_{t(w)}$, avec $w = \overline{|y|}$.

Ces conditions imposent que $\text{som } \tilde{X}$ soit réunion disjointe des orbites $\pi \cdot \tilde{P} \simeq \pi / \pi_{\tilde{P}}$, et que $\text{ar } \tilde{X}$ soit réunion disjointe des orbites $\pi \cdot \tilde{y} \simeq \pi / \pi_{\tilde{y}}$.

Nous poserons donc

$$\text{som } \tilde{X} = \bigsqcup_{P \in \text{som } Y} \pi / \pi_{\tilde{P}} \quad , \quad \text{ar } \tilde{X} = \bigsqcup_{y \in \text{ar } Y} \pi / \pi_{\tilde{y}}$$

où

$$\pi_{\tilde{P}} = G_P \quad , \quad \pi_{\tilde{y}} = G_w^W \quad (w = \overline{|y|})$$

sont les groupes définis ci-dessus, et nous noterons \tilde{P} (resp \tilde{y}) l'image de 1 dans

$\pi/\pi_{\tilde{P}}$ (resp. $\pi/\pi_{\tilde{Y}}$). Il reste à définir $\overline{g\tilde{y}}$, $o(g\tilde{y})$ et $t(g\tilde{y})$ pour $g \in \pi$, $y \in \text{ar } Y$.

On prendra :

$$\begin{aligned}\overline{g\tilde{y}} &= \tilde{g\tilde{y}} \\ o(g\tilde{y}) &= g \mathcal{G}_y^{-e(y)} \widetilde{o(y)} \\ t(g\tilde{y}) &= g \mathcal{G}_y^{1-e(y)} \widetilde{t(y)}\end{aligned}$$

(\mathcal{G}_y désigne l'image de y dans π , cf. n°5.1). Bien entendu, il faut vérifier que ces formules sont licites. Pour la première, cela résulte de ce que $\pi_{\tilde{y}} = \pi_{\tilde{y}}$. Pour la seconde, il faut montrer que, si $h \in \pi_{\tilde{y}}$, on a

$$h \mathcal{G}_y^{-e(y)} \widetilde{o(y)} = \mathcal{G}_y^{-e(y)} \widetilde{o(y)},$$

i.e. que

$$\mathcal{G}_y^{e(y)} \pi_{\tilde{y}} \mathcal{G}_y^{-e(y)} \subset \pi_{\widetilde{o(y)}} = G_{o(y)}.$$

Or, si $e(y) = 0$, on a $|y| = y$, et $\pi_{\tilde{y}} = G_{\tilde{y}} \subset G_{o(y)}$, d'où la relation ci-dessus. Si $e(y) = 1$, on a $\pi_{\tilde{y}} = G_y^y$ et la relation $\mathcal{G}_y a^y \mathcal{G}_y^{-1} = a^{\tilde{y}}$ ($a \in G_y$) montre que $\mathcal{G}_y \pi_{\tilde{y}} \mathcal{G}_y^{-1} = G_{\tilde{y}} \subset G_{o(y)}$, d'où la relation cherchée. Noter également l'égalité

$$\pi_{\tilde{y}} = \mathcal{G}_y^{e(y)-1} G_y^y \mathcal{G}_y^{1-e(y)},$$

valable sans hypothèse sur $e(y)$.

Reste à montrer que la troisième formule est licite, i.e. que l'on a

$$\mathcal{G}_y^{e(y)-1} \pi_{\tilde{y}} \mathcal{G}_y^{1-e(y)} \subset \pi_{\widetilde{t(y)}} = G_{t(y)}.$$

Cela se fait par le même genre de calcul (on peut aussi remplacer y par \tilde{y} , ce qui ramène au cas traité précédemment).

On a donc défini le graphe \tilde{X} ainsi que la loi d'opération de π sur \tilde{X} ; on a $\pi \setminus \tilde{X} = Y$. De plus, si $y \in \text{ar } T$, on a $\mathcal{G}_y = 1$ d'où $o(\tilde{y}) = \widetilde{o(y)}$, $t(\tilde{y}) = \widetilde{t(y)}$, et l'on voit que $P \mapsto \tilde{P}$, $y \mapsto \tilde{y}$ définit un relèvement $T \simeq \tilde{T} \subset \tilde{X}$ de T dans \tilde{X} .

THÉORÈME 12 - Soit (G, Y) un graphe de groupes connexe et non vide, soit T un arbre maximal de Y et soit A une orientation de Y . Le graphe $\tilde{X} = \tilde{X}(G, Y, T, A)$ construit ci-dessus est un arbre.

Montrons d'abord que \tilde{X} est connexe. Si $y \in \text{ar } Y$, on a $o(\tilde{y}) = \widetilde{o(y)}$ si $e(y) = 0$ et $t(\tilde{y}) = \widetilde{t(y)}$ si $e(y) = 1$; l'une des extrémités de \tilde{y} se trouve donc dans l'arbre \tilde{T} . On en conclut que le plus petit sous-graphe W de \tilde{X} contenant tous les \tilde{y} , $y \in \text{ar } Y$, est connexe; on a en outre $\pi.W = \tilde{X}$. Il suffit donc de montrer qu'il existe une partie S de π , engendrant π , et telle que $W \cup sW$ soit connexe pour tout $s \in S$ (car cela entraîne, par récurrence sur n , que

$$W \cup s_1 W \cup s_1 s_2 W \cup \dots \cup s_1 \dots s_n W$$

est connexe quels que soient $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$). On prend pour S la réunion des $G_{\tilde{P}}$, ($P \in \text{som } Y$) et des $\{g_y\}$, $y \in \text{ar } Y$. Si $s \in G_{\tilde{P}}$, les graphes W et sW ont en commun le sommet \tilde{P} et $W \cup sW$ est bien connexe; de même, W et $g_y W$ ont le sommet commun $o(\tilde{y}) = o(g_y \tilde{y})$ si $e(y) = 1$ et

$$t(\tilde{y}) = t(g_y \tilde{y}) \quad \text{si } e(y) = 0.$$

Pour montrer que \tilde{X} est un arbre, il suffit maintenant de prouver que \tilde{X} ne contient pas de chemin fermé de longueur $n > 0$ sans aller-retour.

Soit \tilde{c} un tel chemin, soit $(s_1 \tilde{y}_1, \dots, s_n \tilde{y}_n)$ la suite de ses arêtes, et soit (P_0, \dots, P_n) la suite des sommets de la projection c de \tilde{c} dans Y ; on a $P_0 = P_n$. Si l'on pose $e_i = e(y_i)$ et $g_i = g_{y_i}$, on a

$$t(s_n \tilde{y}_n) = s_n g_n^{1-e_n} \tilde{P}_0 = s_1 g_1^{-e_1} \tilde{P}_0 = o(s_1 \tilde{y}_1)$$

$$t(s_1 \tilde{y}_1) = s_1 g_1^{1-e_1} \tilde{P}_1 = s_2 g_2^{-e_2} \tilde{P}_1 = o(s_2 \tilde{y}_2)$$

...

$$t(s_{n-1} \tilde{y}_{n-1}) = s_{n-1} g_{n-1}^{1-e_{n-1}} \tilde{P}_{n-1} = s_n g_n^{-e_n} \tilde{P}_{n-1} = o(s_n \tilde{y}_n) .$$

En posant $q_i = s_i g_i^{-e_i}$, ceci donne

$$q_n \varepsilon_n r_n = q_1$$

$$q_1 \varepsilon_1 r_1 = q_2$$

...

$$q_{n-1} \varepsilon_{n-1} r_{n-1} = q_n$$

avec $r_i \in G_{P_i} = \pi_{\tilde{P}_i}$. D'où

$$\varepsilon_1 r_1 = q_1^{-1} q_2, \varepsilon_2 r_2 = q_2^{-1} q_3, \dots, \varepsilon_n r_n = q_n^{-1} q_1,$$

et, en multipliant, on trouve la relation

$$(*) \quad \varepsilon_1 r_1 \varepsilon_2 r_2 \dots \varepsilon_n r_n = 1.$$

Soit maintenant (c, μ) le mot de type c défini par la suite $\mu = (1, r_1, \dots, r_n)$.

Nous allons voir que (c, μ) est réduit.

En effet, supposons que $y_{i+1} = \bar{y}_i$; on a $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i^{-1}$ et $e_{i+1} = 1 - e_i$.

La formule

$$(s_i \varepsilon_i^{-e_i}) \cdot \varepsilon_i r_i = s_{i+1} \varepsilon_{i+1}^{-e_{i+1}}$$

montre alors que $r_i = \varepsilon_i^{e_i-1} (s_i^{-1} s_{i+1}) \varepsilon_i^{1-e_i}$. Il nous faut prouver que $r_i \notin G_{y_i}^{y_i}$, autrement dit que

$$s_i^{-1} s_{i+1} \notin \varepsilon_i^{1-e_i} G_{y_i}^{y_i} \varepsilon_i^{e_i-1}.$$

Or ce dernier groupe est égal à $\pi_{\tilde{y}_i}$, et l'on a bien $s_i \pi_{\tilde{y}_i} \neq s_{i+1} \pi_{\tilde{y}_i}$ puisque $\overline{s_{i+1} \tilde{y}_{i+1}} = s_{i+1} \tilde{y}_i$ est différent de $s_i \tilde{y}_i$ (c'est ici que l'on utilise l'hypothèse que \tilde{c} ne contient pas d'aller-retour).

Puisque c est fermé et que (c, μ) est réduit, le cor.3 au th.11 du n°5.2 montre que l'image de $|c, \mu|$ dans $\pi_1(G, Y, T)$ est $\neq 1$. Comme cette image est $\varepsilon_1 r_1 \dots \varepsilon_n r_n$, ceci contredit la formule (*), et achève la démonstration du théorème.

Exemples

1) Lorsque tous les G_P sont égaux à $\{1\}$, on a $\pi = \pi_1(Y, T)$ et \tilde{X} est le revêtement universel de Y (au sens usuel) relativement à T .

2) Lorsque Y est un segment $\overset{P}{\underset{O}{\circ}} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ}$, \tilde{X} est l'arbre associé à l'amalgame $\pi = G_P *_{G_y} G_Q$, cf. n°4.1.

5.4. Le théorème de structure

Soit G un groupe qui opère sans inversion sur un graphe connexe non vide X . Nous allons voir (cf. th.13 ci-après) que, si X est un arbre, G s'identifie au groupe fondamental d'un certain graphe de groupes (G, Y) où $Y = G \setminus X$.

Commençons par la construction de (G, Y) . Soit T un arbre maximal de Y et soit $j : T \rightarrow X$ un relèvement de T (cf. n°3.1, prop.14). Soit A une orientation de Y et posons

$$e(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in A \\ 1 & \text{si } y \notin A \text{ (i.e. si } \bar{y} \in A). \end{cases}$$

Nous allons prolonger j en une section $j : \text{ar } Y \rightarrow \text{ar } X$ telle que $j\bar{y} = \overline{jy}$; il suffit de définir jy pour $y \in A - \text{ar } T$; dans ce cas, on choisit jy de telle sorte que $o(jy) \in \text{som } jT$; on a donc $o(jy) = j o(y)$. On choisit également $\gamma_y \in G$ tel que $t(jy) = \gamma_y j t(y)$; c'est possible, puisque $t(jy)$ et $j t(y)$ ont la même projection $t(y)$ dans $\text{som } Y$. On prolonge ensuite $y \mapsto \gamma_y$ à $\text{ar } Y$ tout entier grâce aux formules

$$\gamma_{\bar{y}} = \gamma_y^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_y = 1 \quad \text{si } y \in \text{ar } T.$$

Pour tout $y \in \text{ar } Y$, on a

$$\begin{aligned} o(jy) &= \gamma_y^{-e(y)} j o(y) \\ t(jy) &= \gamma_y^{1-e(y)} j t(y). \end{aligned}$$

Notons G_Q (resp. G_z) le stabilisateur d'un sommet Q (resp. d'une arête z) de X . Le graphe de groupes (G, Y) est alors défini par les formules

$$\begin{aligned} G_P &= G_{jP} & \text{pour } P \in \text{som } Y \\ G_y &= G_{jy} & \text{pour } y \in \text{ar } Y, \end{aligned}$$

l'homomorphisme $G_y \rightarrow G_{jt(y)}$ étant $a \mapsto a^y = \gamma_y^{e(y)-1} a \gamma_y^{1-e(y)}$. (Cette dernière définition est licite car $\gamma_y^{e(y)-1} G_{jy} \gamma_y^{1-e(y)} \subset G_{jt(y)}$ pour tout $y \in \text{ar } Y$.)

Soit $\varphi : \pi_1(G, Y, T) \rightarrow G$ l'homomorphisme défini par les inclusions $G_P \rightarrow G$ et par $\varphi(g_y) = \gamma_y$. Soit

$$\psi : \tilde{X}(G, Y, T) \rightarrow X$$

l'application définie par

$$\psi(g\tilde{P}) = \varphi(g)jP \quad \text{et} \quad \psi(g\tilde{y}) = \varphi(g)jy.$$

On vérifie tout de suite que ψ est un morphisme de graphes et que ψ est φ -équivariant.

Soit W le plus petit sous-graphe de X contenant jy pour tout $y \in \text{ar } Y$. Toute arête de W a une extrémité dans jT et l'on a $G.W = X$. De plus, W est contenu dans $\psi(\tilde{X})$ et φ induit des isomorphismes entre les stabilisateurs des sommets et des arêtes correspondants de \tilde{X} et de X . En appliquant le lemme 4 du n°4.1, on voit que φ (donc aussi ψ) est surjectif; en outre, le fait que φ induise des isomorphismes entre les stabilisateurs des sommets et des arêtes montre que ψ est localement injectif (cf. n°4.5).

THÉORÈME 13 - Les hypothèses et notations étant comme ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) X est un arbre.
- (2) $\tilde{X} \xrightarrow{\psi} X$ est un isomorphisme.
- (3) $\pi_1(G, Y, T) \xrightarrow{\varphi} G$ est un isomorphisme.

(L'assertion la plus intéressante est l'implication (1) \Rightarrow (3) : si X est un arbre, G est engendré par les G_P ($P \in \text{som } Y$) et les γ_y ($y \in \text{ar } Y$), ceux-ci étant soumis aux relations du n°5.1

$$\gamma_y a^y \gamma_y^{-1} = a^{\bar{y}}, \quad \gamma_{\bar{y}} = \gamma_y^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_y = 1 \quad \text{si} \quad y \in T.)$$

Démonstration

L'implication (1) \Rightarrow (2) résulte du lemme 5 du n°4.5 puisque l'on sait déjà que ψ est surjectif et localement injectif; l'implication (2) \Rightarrow (1) résulte du théorème 12 du n°5.3.

GROUPE OPÉRANT SUR UN ARBRE

Soit d'autre part N le noyau de φ et soit $P \in \text{som } Y$. On a $N \cap G_{\tilde{P}} = \{1\}$ puisque φ définit un isomorphisme de $G_{\tilde{P}}$ sur G_{jP} . Si n est un élément non trivial de N , les deux sommets \tilde{P} et $n\tilde{P}$ de \tilde{X} sont distincts et ont même image jP dans X ; on en conclut que (2) \Rightarrow (3). L'implication (3) \Rightarrow (2) est immédiate.

COROLLAIRE 1 - Supposons que X soit un arbre. Soit R le sous-groupe de G engendré par les G_P , $P \in \text{som } X$. Alors R est distingué dans G , et G/R s'identifie au groupe fondamental du graphe $Y = G \backslash X$.

Il est clair que R est le plus petit sous-groupe distingué de G contenant les $G_P = G_{jP}$, pour $P \in \text{som } Y$. L'assertion sur G/R résulte alors de (1) \Rightarrow (3), combiné avec la Remarque du n°5.1

COROLLAIRE 2 - Supposons que X soit un arbre, et que $Y = G \backslash X$ soit un lacet. Alors G est un groupe de type (HNN).

Cela résulte de (1) \Rightarrow (3), compte tenu de l'Exemple 3 du n°5.1.

Exercices

- 1) Donner une démonstration directe du cor.1 au th.13.
- 2) On suppose que X est un arbre. Montrer l'équivalence de :
 - (a) Y est un arbre;
 - (b) G est engendré par les G_P , $P \in \text{som } X$;
 - (c) G est engendré par les G_P , $P \in \text{som } Y$.
- 3) Les hypothèses étant celles du th.13, montrer que le noyau N de φ est isomorphe au groupe fondamental de X .

5.5. Application : théorème de Kuroš

Soit $H = *_A H_i$ la somme d'une famille de groupes $(H_i)_{i \in I}$ amalgamée suivant un sous-groupe commun A (cf.n°1.2). Soit G un sous-groupe de H . Si $x \in H/H_i$, le sous-groupe $xH_i x^{-1}$ est bien défini; nous poserons

$$G_{i,x} = G \cap xH_i x^{-1}.$$

Le groupe $G_{i,x}$ est le stabilisateur de x pour l'action naturelle de G sur H/H_i .

THÉORÈME 14 - Supposons que $G - \{1\}$ ne rencontre aucun conjugué de A . On peut alors trouver :

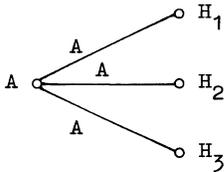
- (a) un sous-groupe libre F de G ,
- (b) pour tout $i \in I$, une partie X_i de H/H_i qui soit un système de représentants des éléments de $G \setminus H/H_i$,

de telle sorte que l'on ait

$$G = \left(\prod_{i \in I, x \in X_i} G_{i,x} \right) * F .$$

(Autrement dit, G est le produit libre de ses intersections avec les conjugués des H_i (convenablement indexés) et d'un groupe libre.)

Soit (H, T) l'arbre de groupes défini par les H_i et A (cf. n°4.4, exemple 3).



On a $H = \varprojlim (H, T)$. Soit X l'arbre correspondant (cf. th.9). Le groupe H opère sur X avec T pour domaine fondamental; les stabilisateurs des arêtes sont les conjugués de A ; ceux des sommets sont les conjugués de H_i et de A .

Puisque G est un groupe de H , il opère sur X , et on peut lui appliquer le th.13. On voit ainsi que $G = \pi_1(G, Y, T)$, où $Y = G \setminus X$ et où T est un arbre maximal de Y , dont on a choisi un relèvement dans X . L'hypothèse que $G - \{1\}$ ne rencontre aucun conjugué de A équivaut à dire que $G_y = \{1\}$ pour tout $y \in \text{ar } Y$. D'après l'exemple 1 du n° 5.1, on a donc

$$G = \pi_1(G, Y, T) \simeq \left(\prod_P G_P \right) * F ,$$

où F est un groupe libre (isomorphe à $\pi_1(Y, T)$), et où P parcourt l'ensemble des sommets de T . Or on a

$$\text{som } X \cong H/A \prod_{i \in I} H/H_i \quad \text{et} \quad \text{som } T \cong G \setminus H/A \prod_{i \in I} G \setminus H/H_i .$$

Le relèvement de T dans X définit donc des systèmes de représentants

$$X_A \subset H/A \quad \text{et} \quad X_i \subset H/H_i$$

GROUPE OPÉRANT SUR UN ARBRE

de $G \setminus H/A$ et $G \setminus H/H_i$ respectivement; si x appartient à X_A (resp. X_i), le groupe G_P correspondant est $G \cap xAx^{-1}$ (resp. $G \cap xH_i x^{-1}$). D'où le théorème, puisque les $G \cap xAx^{-1}$ sont réduits à $\{1\}$.

Remarques

1) L'hypothèse $G \cap xAx^{-1} = \{1\}$ pour tout $x \in H$ est notamment vérifiée lorsque $A = \{1\}$, i.e. lorsque H est le produit libre des H_i ; le th.14 redonne alors un résultat de Kuroš.

2) On pourrait préciser l'énoncé du th.14 (comme nous l'avons fait au n° 3.4 pour le théorème de Schreier) en donnant :

a) les conditions que doivent vérifier les X_i (elles expriment le fait que T doit être connexe) ;

b) un procédé pour construire une base du groupe libre F (les éléments de cette base sont les g_y du n°5.1, où y parcourt $A - ar T$, A étant une orientation de $Y = G \setminus X$).

3) Lorsque $G - \{1\}$ rencontre l'un des conjugués de A , on a encore $G \simeq \pi_1(G, Y, T)$, mais la structure de ce π_1 est moins simple (cf.n°5.1); nous ne l'explicitons pas.

Exercices

Les hypothèses et notations sont celles du théorème 14.

1) Soit R le sous-groupe de G engendré par les $G \cap xH_i x^{-1}$, $i \in I$, $x \in H$. Montrer que R est le plus petit sous-groupe distingué de G qui contienne les $G_{i,x}$, $i \in I$, $x \in X_i$. En déduire que G/R est isomorphe à F .

2) On suppose I et $G \setminus H/A$ finis et l'on pose

$$a = \text{Card}(G \setminus H/A), \quad x_i = \text{Card}(G \setminus H/H_i).$$

Montrer que le rang r_F du groupe libre F est donné par la formule

$$r_F = 1 - a + \sum_{i \in I} (a - x_i).$$

3) On fait les hypothèses suivantes :

a) $A = \{1\}$, i.e. H est produit libre des H_i .

b) G est indécomposable, i.e. toute décomposition $G = B * C$ entraîne $B = \{1\}$ ou $C = \{1\}$.

c) G n'est pas isomorphe à Z .

ARBRES ET AMALGAMES

Montrer que G est alors contenu dans un conjugué de l'un des H_i (appliquer le th.14).

§ 6 - Amalgames et points fixes

Disons qu'un groupe G est un amalgame si on peut l'écrire $G \simeq G_1 *_A G_2$ avec $G_1 \neq A \neq G_2$. Dans ce §, on montre que certains groupes, par exemple $SL_2(\mathbb{Z})$, ne sont pas des amalgames ; comme on le verra, cela revient à prouver que, lorsque ces groupes opèrent sur des arbres, ils ont nécessairement des points fixes.

Convention - Tout groupe opérant sur un arbre est supposé opérer sans inversion, cf. 3.1.

6.1. La propriété de point fixe pour les groupes opérant sur les arbres

Soit G un groupe opérant (sans inversion) sur un arbre X .

L'ensemble X^G des points fixes de G dans X est un sous-graphe de X ; si P et Q sont deux sommets de X^G , la géodésique joignant P à Q est fixe par G , donc contenue dans X^G ; il en résulte que, si X^G est non vide, c'est un arbre. Nous nous intéressons aux groupes G ayant la propriété :

(FA) - Quel que soit l'arbre X sur lequel opère G , on a $X^G \neq \emptyset$.

Cette propriété est "presque" équivalente à celle de ne pas être un amalgame.

Plus précisément :

THÉOREME 15 - On suppose G dénombrable. Pour que G ait la propriété (FA), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites :

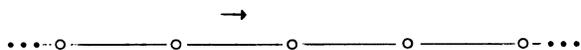
- (i) G n'est pas un amalgame.
- (ii) G n'a pas de quotient isomorphe à \mathbb{Z} .
- (iii) G est de type fini.

Démonstration

(FA) \Rightarrow (i) : Si G est un amalgame $G_1 *_A G_2$, avec $G_1 \neq A$ et $G_2 \neq A$, il existe un arbre X sur lequel G opère avec pour domaine fondamental un segment

PQ , le stabilisateur de P (resp. de Q) étant G_1 (resp. G_2) , cf. n° 4.1, th. 7. Comme G est distinct de G_1 et G_2 , on a donc $X^G = \emptyset$, ce qui contredit (FA) .

(FA) \Rightarrow (ii) : Si G a un quotient isomorphe à Z , on peut le faire opérer par translations sur une chaîne doublement infinie



et cela contredit (FA) .

(FA) \Rightarrow (iii) : Comme G est dénombrable, il est réunion d'une suite croissante $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ de sous-groupes de type fini. Formons un graphe X dont l'ensemble des sommets est la somme disjointe des ensembles G/G_n , deux sommets étant joints par une arête si et seulement si ils appartiennent à deux ensembles consécutifs G/G_n et G/G_{n+1} et se correspondent par l'application canonique

$$G/G_n \rightarrow G/G_{n+1} .$$

On vérifie immédiatement que X est un arbre ; de plus G opère de façon évidente sur X . Si G a la propriété (FA) , il existe un sommet P de X invariant par G ; si $P \in G/G_n$, cela entraîne que $G_n = G$, donc G est de type fini.

Inversement, supposons que G ait les propriétés (i) , (ii) et (iii) , et qu'il opère sur un arbre X . Si $T = X/G$ désigne le quotient de X par G , le groupe fondamental $\pi_1(T)$ du graphe T est isomorphe à un quotient de G (n° 5.4, cor. 1 au th. 13). Comme $\pi_1(T)$ est un groupe libre, ce n'est possible, d'après (ii) , que si $\pi_1(T) = \{1\}$. Ainsi, T est un arbre, et on peut le relever en un sous-arbre de X , cf. n° 3.1. Le groupe G s'identifie alors au groupe $G_T = \varinjlim (G, T)$ limite de l'arbre de groupes défini par les fixateurs G_P et G_y des sommets P et des arêtes y de T , cf. n° 4.5, th. 10. Il en résulte que G est réunion des groupes $G_{T'} = \varinjlim (G, T')$, où T' parcourt l'ensemble des sous-arbres finis de T . Comme G est de type fini, il existe au moins un T' tel que $G = G_{T'}$; choisissons T' minimal pour cette propriété. Si T' est réduit à un seul sommet P , on a $G = G_P$ et G a un point fixe. Sinon, T' pos-

AMALGAMES ET POINTS FIXES

sède un sommet terminal P , et $T'' = T' - \{P\}$ est un arbre (n° 2.2, prop. 9) ; si y désigne l'unique arête qui joint P à T'' , on a

$$G = G_{T'} = G_{T''} *_A G_P, \quad \text{où } A = G_y.$$

Vu l'hypothèse de minimalité faite sur T' , on a $G_{T''} \neq G$ et $G_P \neq G$, ce qui montre que G est un amalgame et contredit l'hypothèse (i).

Remarques

1) Lorsque G n'est pas dénombrable, le théorème 15 reste valable à condition de remplacer la condition (iii) par :

(iii') G n'est pas réunion d'une suite strictement croissante de sous-groupes.

Des exemples de groupes (non dénombrables) satisfaisant aux conditions (i), (ii), et (iii') ont été construits par J. Tits et S. Koppelberg (CR, 279).

2) On obtient des résultats plus complets en tenant compte des points fixes de G non seulement sur les sommets, mais aussi sur les bouts, des arbres sur lesquels il opère. Cf. n° 6.5, exerc. 2, ainsi que J. Tits, [12].

6.2. Conséquences de la propriété (FA)

PROPOSITION 21 - Soit G un groupe ayant la propriété (FA). Si G est contenu dans un amalgame $G_1 *_A G_2$, G est contenu dans un conjugué de G_1 ou de G_2 .

Cela traduit simplement le fait que G a un point fixe dans l'arbre associé à l'amalgame $G_1 *_A G_2$, cf. n° 4.1.

PROPOSITION 22 - Soit G un groupe dénombrable ayant la propriété (FA), et soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}_2(k)$ une représentation linéaire de degré 2 de G sur un corps commutatif k . Alors, pour tout $s \in G$, les valeurs propres de $\rho(s)$ sont entières sur \mathbb{Z} .

(Lorsque k est de caractéristique 0, ces valeurs propres sont donc des entiers algébriques ; lorsque k est de caractéristique $\neq 0$, ce sont des racines

de l'unité.)

Soit k_ρ le sous-corps de k engendré par les coefficients des matrices $\rho(s)$, pour $s \in G$. D'après le th. 15, G est de type fini, donc k_ρ est de type fini sur le corps premier. Soit v une valuation discrète de k_ρ , et soit O_v l'anneau de valuation correspondant. Notons X_v l'arbre associé à v (chap. II, § 1), arbre sur lequel opère $GL_2(k_\rho)$. Soit $GL_2(k_\rho)^\circ$ le noyau de l'homomorphisme

$$v \circ \det : GL_2(k_\rho) \rightarrow \mathbf{Z} . \quad \text{cf. chap. II, n}^\circ 1.2.$$

La condition (ii) du th. 15 montre que $\rho(G)$ est contenu dans $GL_2(k_\rho)^\circ$, donc opère sans inversion sur X_v . Puisque G a la propriété (FA), il existe un sommet de X_v invariant par G . Cela entraîne (chap. II, n° 1.3) que $\rho(G)$ est contenu dans un conjugué de $GL_2(O_v)$. Ainsi, pour tout $s \in G$, les coefficients du polynôme caractéristique de s appartiennent à l'intersection des O_v . Mais on sait que cette intersection est égale à l'ensemble des éléments de k_ρ qui sont entiers sur \mathbf{Z} (cf. par exemple Grothendieck, EGA II, p. 140, cor. 7.1.8); les valeurs propres des $\rho(s)$ sont donc bien entières sur \mathbf{Z} .

Exercice

Soient A un sous-groupe d'un groupe H , et soit $\theta : A \rightarrow H$ un homomorphisme injectif de A dans H ; soit \tilde{H} le groupe déduit de (A, H, θ) par la construction (HNN), cf. nos 1.4 et 5.1. Montrer que tout sous-groupe de \tilde{H} qui possède la propriété (FA) est contenu dans un conjugué de H .

6.3. Exemples

6.3.1. Un groupe de torsion de type fini a la propriété (FA).

Vu le th. 15, il suffit de vérifier qu'un tel groupe ne peut pas être un amalgame $G_1 *_A G_2$. Or c'est clair, car si l'on prend $s_1 \in G_1 - A$ et $s_2 \in G_2 - A$, l'élément $s_1 s_2$ est cycliquement réduit (au sens du n° 1.3), donc d'ordre infini d'après la prop. 2.

6.3.2. Si G a la propriété (FA), il en est de même de tout quotient de G .

C'est clair.

6.3.3. Soit H un sous-groupe distingué de G . Si H et G/H ont la propriété (FA), il en est de même de G .

En effet, si G opère sur un arbre X , le groupe G/H opère sur l'arbre X^H , donc a un point fixe.

6.3.4. Soit G' un sous-groupe d'indice fini de G . Si G opère sur un arbre X et si $X^{G'} \neq \emptyset$, alors $X^G \neq \emptyset$.

En effet, soit H un sous-groupe distingué d'indice fini de G contenu dans G' (par exemple l'intersection des conjugués de G'). On a $X^H \neq \emptyset$, et G/H opère sur l'arbre X^H ; comme G/H est fini, il a un point fixe; d'où $X^G \neq \emptyset$.

En particulier, si G' a la propriété (FA), il en est de même de G .

6.3.5. Par contre, il ne faudrait pas croire que, si G a la propriété (FA), il en est de même de ses sous-groupes d'indice fini. Voici un contre-exemple (on en verra d'autres au n° 6.5, exerc. 3 et 4) : prenons pour G le groupe de Schwarz défini par deux générateurs a et b , liés par les relations

$$a^A = b^B = (ab)^C = 1,$$

où A, B, C sont des entiers ≥ 2 . Le groupe G a la propriété (FA). En effet, si G opère sur un arbre, les éléments a, b et ab ont chacun un point fixe (puisque ils sont d'ordre fini, cf. 4.3, prop. 19), et le cor. 1 à la prop. 26 du n° 6.5 ci-après montre qu'il existe un point fixe commun à a et b , donc fixe par G . D'autre part, si A, B, C sont tels que $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq 1$, il est bien connu que G contient un sous-groupe H d'indice fini isomorphe au groupe fondamental d'une surface orientable compacte de genre ≥ 1 ; un tel sous-groupe H a un quotient isomorphe à \mathbb{Z} , et ne satisfait donc pas à (FA).

6.3.6. On trouvera au n° 6.6 d'autres exemples de groupes ayant la propriété (FA).

6.4. Points fixes d'un automorphisme d'un arbre

Géodésique joignant deux sous-arbres

Si P et Q sont deux sommets d'un arbre, on note $P-Q$ la géodésique joignant

P à Q (n° 2.2, prop. 8).

LEMME 9 - Soient T_1 et T_2 deux sous-arbres disjoints d'un arbre X , et soit n la distance de T_1 à T_2 (i.e. la borne inférieure des $\ell(P, Q)$, pour $P \in \text{som } T_1$ et $Q \in \text{som } T_2$).

(a) Il existe un couple (P_1, P_2) et un seul dans $\text{som } T_1 \times \text{som } T_2$ tel que $\ell(P_1, P_2) = n$.

(b) On a $\ell(Q_1, Q_2) = \ell(Q_1, P_1) + n + \ell(P_2, Q_2)$ si $Q_1 \in \text{som } T_1$ et $Q_2 \in \text{som } T_2$.

(c) Tout sous-arbre de X rencontrant à la fois T_1 et T_2 contient la géodésique $P_1 - P_2$.

(On dit que $P_1 - P_2$ est la géodésique joignant T_1 à T_2 .)

Soient $P_1 \in \text{som } T_1$ et $P_2 \in \text{som } T_2$ tels que $\ell(P_1, P_2) = n$. Aucun des sommets de $P_1 - P_2$ distinct des extrémités n'appartient à T_1 , ni à T_2 . Il en résulte que, si $Q_1 \in \text{som } T_1$, $Q_2 \in \text{som } T_2$, le chemin obtenu en juxtaposant les géodésiques $Q_1 - P_1$, $P_1 - P_2$, et $P_2 - Q_2$ est sans aller-retour. On a donc $\ell(Q_1, Q_2) = \ell(Q_1, P_1) + n + \ell(P_2, Q_2)$, ce qui démontre (b); les assertions (a) et (c) en résultent aussitôt.

Automorphismes ayant des points fixes

Soit s un automorphisme (sans inversion) d'un arbre X . On dit que s a un point fixe si le sous-graphe X^s de X formé des points fixes par s est non vide, auquel cas c'est un arbre (6.1).

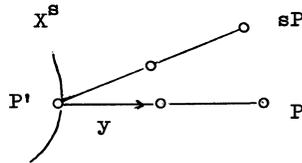
PROPOSITION 23 - Supposons que s ait un point fixe. Soit $P \in \text{som } X$, soit n la distance de P à X^s , et soit $P - P'$ la géodésique joignant P à X^s . Alors la géodésique $P - sP$ s'obtient en juxtaposant les géodésiques $P - P'$ et $P' - sP = s(P' - P)$.

C'est clair si $n = 0$ car alors $P = P' = sP$. Si $n \geq 1$, notons y l'arête de $P - P'$ d'origine P' . On a $sy \neq y$, sinon l'extrémité de y appartiendrait

à X^S . Il en résulte que le chemin obtenu en juxtaposant $P - P'$ et

$$s(P' - P) = P' - sP$$

est sans aller-retour ; c'est donc bien la géodésique joignant P à sP .



COROLLAIRE 1 - On a $l(P, sP) = 2n$.

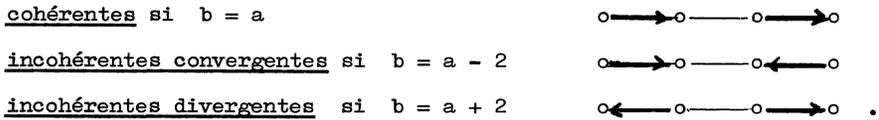
COROLLAIRE 2 - Le milieu de la géodésique $P - sP$ est fixe par s .

En effet, ce milieu n'est autre que P' , qui appartient à X^S .

COROLLAIRE 3 - Supposons $n \geq 1$. Soit P_1 (resp. P_2) le sommet de $P - sP$ à distance 1 de P (resp. sP). On a $sP_1 = P_2$.

Cela résulte du fait que s transforme $P - P'$ en $sP - P'$.

Soient y et y' deux arêtes. Posons $a = l(o(y), o(y'))$, $b = l(t(y), t(y'))$. On a $b - a = 0, 2$ ou -2 . Disons que y et y' sont :



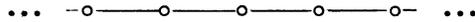
(Autrement dit, y et y' sont cohérentes si et seulement si elles sont orientées de la même façon sur l'unique géodésique qui les contient.)

Avec cette terminologie, le cor. 3 équivaut à :

COROLLAIRE 4 - Si $y \in \text{ar } X$ n'est pas fixe par s , alors y et sy sont incohé-
rentes.

Automorphismes sans points fixes

Convenons d'appeler droit chemin une chaîne doublement infinie :



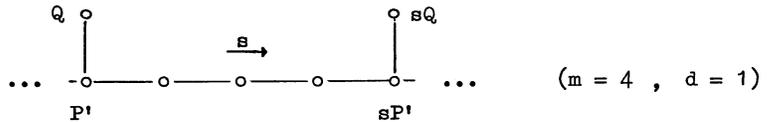
PROPOSITION 24 (Tits) - Supposons l'automorphisme s sans point fixe. Posons :

$$m = \inf_{P \in \text{som } X} \ell(P, sP) \quad \text{et} \quad T = \{P \in \text{som } X \mid \ell(P, sP) = m\} .$$

Alors :

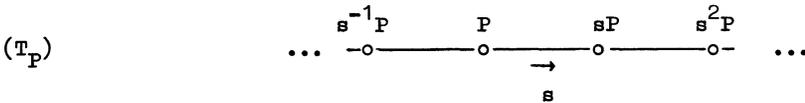
- i) T est l'ensemble des sommets d'un droit chemin de X .
- ii) s induit sur T une translation d'amplitude m .
- iii) Tout sous-arbre de X stable par s et s⁻¹ contient T .
- iv) Si un sommet Q de X est à distance d de T , on a

$$\ell(Q, sQ) = m + 2d .$$



Démonstration

Soit $P \in T$, et soient $P_0 = P, P_1, \dots, P_m = sP$ les sommets de la géodésique $c = P - sP$. Les géodésiques c et sc définissent un chemin sans aller-retour joignant P à s^2P . En effet, sinon, on aurait $P_{m-1} = sP_1$; or ceci est impossible si $m = 1$ puisque s opère sans inversion, et c'est impossible si $m \geq 2$ puisque la distance $\ell(P_1, sP_1)$ serait alors $m-2 < m$. On en déduit aussitôt, par itération, que les géodésiques $s^n c$ ($n \in \mathbb{Z}$) forment un droit chemin



stable par s , et que s est une translation d'amplitude m sur T_P . Si Q est un sommet de X à distance d de T_P , et si P' est le sommet de T_P le plus proche de Q (cf. lemme 9), le chemin formé des géodésiques $Q - P'$, $P' - sP'$ et $sP' - sQ$ est sans aller-retour. On a donc $\ell(Q, sQ) = d + m + d = m + 2d$. En

particulier, on ne peut avoir $l(Q, sQ) = m$ que si $d = 0$; d'où le fait que $T = T_P$, ce qui démontre i) , ii) et iv) . D'autre part, si un sous-arbre X' de X est stable par s et s^{-1} , et si l'on choisit Q dans X' , la géodésique $Q - sQ$ est contenue dans X' ; il en est donc de même, avec les notations ci-dessus, de $P' - sP'$, donc aussi de T_P , qui est réunion des $s^n(P' - sP')$.

COROLLAIRE - Soit $y \in \text{ar } X$. Pour que y et sy soient cohérentes, il faut et il suffit que y soit une arête du droit chemin T associé à s .

Cela résulte, par exemple, de iv) .

En combinant les prop. 23 et 24, on obtient :

PROPOSITION 25 - Soit s un automorphisme de l'arbre X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) s opère sans point fixe ;
- (b) il existe une arête y de X telle que y et sy soient cohérentes et distinctes ;
- (c) il existe un droit chemin de X stable par s , et sur lequel s induit une translation d'amplitude non nulle.

Un automorphisme ayant ces propriétés est parfois dit hyperbolique (cette terminologie provient du cas de SL_2 , cf. chap. II, n° 1.3).

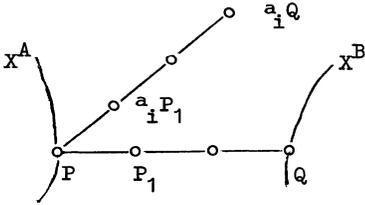
Exercice

Les notations étant celles de la prop. 24, soit Γ le groupe engendré par s . Montrer que Γ opère librement sur X , et que le graphe quotient $\Gamma \backslash X$ contient un circuit et un seul, à savoir $\Gamma \backslash T$; ce circuit est de longueur m . L'injection $\Gamma \backslash T \rightarrow \Gamma \backslash X$ est une équivalence d'homotopie.

6.5. Groupes ayant des points fixes (résultats auxiliaires)

PROPOSITION 26 - Soit G un groupe engendré par des éléments a_i, b_j , et soit A (resp. B) le sous-groupe de G engendré par les a_i (resp. les b_j) . On suppose que G opère sur un arbre X de telle sorte que $X^A \neq \emptyset$, $X^B \neq \emptyset$, et que, pour tout couple (i, j) , l'automorphisme $a_i b_j$ ait un point fixe. Alors G

a un point fixe (i.e. $X^G \neq \emptyset$).



On a $X^G = X^A \cap X^B$. Supposons que les deux arbres X^A et X^B soient disjoints, et soit $P - Q$ la géodésique les joignant, avec $P \in \text{som } X^A$, $Q \in \text{som } X^B$ (cf. lemme 9). Soit P_1 le sommet de cette géodésique à distance 1 de P . On a $P_1 \notin X^A$, et

il existe donc un indice i tel que $a_i P_1 \neq P_1$. Le chemin obtenu en juxtaposant les géodésiques $Q - P$ et $P - a_i Q = a_i(P - Q)$ est donc sans aller-retour : c'est la géodésique $Q - a_i Q$; son milieu est P . Mais on a $a_i Q = a_i b_j Q$ pour tout j ; comme $a_i b_j$ a un point fixe, le cor. 2 à la prop. 23 montre que le milieu P de $Q - a_i b_j Q$ est fixe par $a_i b_j$. On a donc $a_i b_j P = P$, i.e. $b_j P = a_i^{-1} P = P$, ce qui montre que P est fixe par tous les b_j , contrairement au fait que $P \notin X^B$.

COROLLAIRE 1 - Soient a , b et c trois automorphismes d'un arbre tels que $abc = 1$. Si a , b , c ont chacun un point fixe, ils ont un point fixe commun.

Cela résulte de la prop. 26 appliquée à $a_i = a$, $b_j = b$.

COROLLAIRE 2 - On suppose G engendré par des éléments s_1, \dots, s_m , en nombre fini, tels que les s_j et les $s_i s_j$ aient des points fixes. Alors G a un point fixe.

Cela se démontre par récurrence sur m , en appliquant la prop. 26 avec

$$a_1 = s_1, \dots, a_{m-1} = s_{m-1} \text{ et } b_1 = s_m.$$

COROLLAIRE 3 - Si G est de type fini, et si chacun de ses éléments a des points fixes, il en est de même de G .

Cela résulte du cor. 2.

Remarque - On peut aussi déduire le cor. 2 du cor. 1 : soit X_i le sous-arbre de X fixé par s_i ; le cor. 1 montre que $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ pour tout couple (i, j) , et l'on peut appliquer le lemme suivant :

LEMME 10 - Soient X_1, \dots, X_m des sous-arbres d'un arbre X . Si les X_i se rencontrent deux à deux, leur intersection est non vide.

Démonstration : raisonnant par récurrence sur m , on peut supposer que

$$Y = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_{m-1}$$

est non vide. Si Y ne rencontre pas X_m , soit $P - Q$ la géodésique joignant Y à X_m . Si $i \leq m-1$, l'arbre X_i rencontre à la fois Y et X_m , donc contient $P - Q$ d'après le lemme 9 c). On a donc $P - Q \subset Y$, ce qui est absurde.

Cas des groupes nilpotents

Rappelons qu'un groupe est dit nilpotent si l'un des termes de sa suite centrale descendante est égal à $\{1\}$ (cf. Bourbaki, A-I, § 6).

PROPOSITION 27 - Soit G un groupe nilpotent de type fini opérant sur un arbre X . Deux cas seulement sont possibles (et s'excluent mutuellement) :

(a) G a un point fixe.

(b) Il existe un droit chemin T stable par G sur lequel G opère par translations au moyen d'un homomorphisme non trivial $G \rightarrow Z$.

Supposons d'abord que l'on soit dans le cas (b). Choisissons un élément s de G dont l'action sur T soit une translation non triviale. D'après la prop. 25, s n'a pas de point fixe ; cela montre que (a) et (b) s'excluent. De plus, la prop. 24 montre que T est unique : c'est l'intersection des sous-arbres de X stables par s et s^{-1} .

Ceci étant, choisissons une suite de composition

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$$

telle que les quotients successifs G_i/G_{i-1} soient cycliques, et raisonnons par récurrence sur n . Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons donc $n \geq 1$, et appliquons l'hypothèse de récurrence au groupe $H = G_{n-1}$. Si H a un point fixe, le résultat cherché résulte de la prop. 26, appliquée à l'action du groupe cyclique G/H sur l'arbre X^H . Si H n'a pas de point fixe, le droit chemin T stable

par H est stable par G (puisque H est distingué dans G), et l'on obtient ainsi un homomorphisme $G \rightarrow \text{Aut}(T)$ dont l'image contient un groupe non trivial de translations. Cette image est donc, soit le groupe diédral infini, soit le groupe \mathbf{Z} (opérant par translations). Mais le premier cas est impossible, le groupe diédral infini n'étant pas nilpotent. Il reste donc seulement le second cas, i.e. le cas (b).

COROLLAIRE 1 - Si G est engendré par des éléments qui ont des points fixes, alors G a un point fixe.

Supposons que l'on soit dans le cas (b), et que G soit engendré par une famille (s_i) . Puisque $G \rightarrow \mathbf{Z}$ est non trivial, l'un au moins des s_i a une image $\neq 0$ dans \mathbf{Z} ; d'après la prop. 25, un tel élément s_i ne peut pas avoir de point fixe.

COROLLAIRE 2 - Soit G' le groupe des commutateurs de G , et soit s un élément de G tel que $s^n \in G'$ pour un entier $n \geq 1$. Alors s a un point fixe.

C'est clair si G a un point fixe. Sinon, on est dans le cas (b), et l'hypothèse faite sur s entraîne que son image par l'homomorphisme $G \rightarrow \mathbf{Z}$ est nulle. L'élément s laisse donc fixe le droit chemin T .

Remarque

On a un résultat analogue à la prop. 27 chaque fois que G admet une suite de composition dont les quotients successifs sont cycliques, ou ont la propriété (FA).

Exercices

1) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-arbres d'un arbre X . Soit N le nerf de cette famille, i.e. le complexe simplicial dont l'ensemble de sommets est I , une partie J de I étant un simplexe si et seulement si $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \emptyset$. Montrer que N a le même type d'homotopie que la réunion des X_i . En déduire que toute composante connexe de N est contractile. (Cela fournit une autre démonstration du lemme 10.)

2) (Tits) Soit G un groupe opérant sur un arbre X . On suppose que tous les éléments de G ont des points fixes, mais que G n'en a pas. Si $P \in \text{som } X$, soit

$s \in G$ tel que $sP \neq P$, et soit P_1 le sommet de la géodésique $P - sP$ à distance 1 de P . Montrer que P_1 ne dépend pas du choix de s . Soit $f : \text{som } X \rightarrow \text{som } X$ l'application $P \mapsto P_1$; on a $f \circ s = s \circ f$ pour tout $s \in G$. Montrer que, pour tout $P \in \text{som } X$, les $f^n P$ ($n = 1, 2, \dots$) tendent vers un bout de X , qui est indépendant de P , et fixe par G .

3) (Généralisation de 6.3.5) Soit W un groupe de Coxeter, défini par une matrice finie (m_{ij}) telle que $m_{ij} \neq \infty$ pour tout (i, j) , cf. Bourbaki, [36], § 1; soit W^+ le sous-groupe de W formé des éléments de longueur paire (loc. cit., exerc. 9). Montrer que W et W^+ jouissent de la propriété (FA) (appliquer le cor. 2 à la prop. 26).

4) Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué nilpotent de G . On suppose qu'il n'existe aucun sous-groupe N' de N , qui soit distingué dans G , et tel que N/N' soit isomorphe à \mathbf{Z} . Montrer que, si G opère sur un arbre X , alors N a un point fixe dans X (utiliser la prop. 27). En déduire que, si G/N a la propriété (FA), il en est de même de G .

(Exemple : on prend $N = \mathbf{Z}^2$, et on prend pour G le produit semi-direct d'un groupe cyclique C d'ordre 3, 4 ou 6 par N , l'action de C sur N étant non triviale. Comme $G/N = C$ est fini, on en déduit que G possède la propriété (FA), alors que N , qui est d'indice fini dans G , ne la possède pas.)

5) Soit $\omega = (1 + \sqrt{-3})/2$ une racine primitive 6-ème de l'unité, et soit $G = \text{SL}_2(\mathbf{Z}[\omega])$. On pose

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega' \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \omega' = \omega^{-1}.$$

a) Montrer que x et y engendrent le sous-groupe de Borel $B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ de G , et que x, y, w engendrent G .

b) Montrer que B a la propriété (FA) (utiliser l'exercice précédent), et que xw et yw sont d'ordre fini.

c) En déduire, au moyen de la prop. 26, que G a la propriété (FA).

d) Mêmes questions pour le groupe $\text{GL}_2(\mathbf{Z}[i])$.

6.6. Le cas de $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$

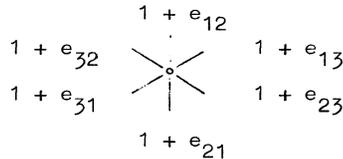
THÉOREME 16 - Le groupe $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$ a la propriété (FA).

Vu le th. 15, cela entraîne :

COROLLAIRE - Le groupe $\text{SL}_3(\mathbf{Z})$ n'est pas un amalgame.

Démonstration du th. 16

Si $i, j \in \{1, 2, 3\}$, convenons de noter e_{ij} la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i -ème ligne et j -ème colonne qui est égal à 1. On sait que $SL_3(\mathbf{Z})$ est engendré par les $1 + e_{ij}$, avec $i \neq j$. Il est commode d'indexer de façon circulaire ces six matrices :



(cela correspond au fait que les "racines" de SL_3 forment un hexagone régulier). On est ainsi conduit à poser :

$$z_0 = z_6 = 1 + e_{12}, z_1 = 1 + e_{13}, z_2 = 1 + e_{23}, z_3 = 1 + e_{21},$$

$$z_4 = 1 + e_{31}, z_5 = 1 + e_{32} \text{ et } z_{i+6} = z_i \text{ pour tout } i.$$

On a les propriétés suivantes :

(i) z_i commute à z_{i+1} et z_{i-1} ,

(ii) le commutateur (z_{i-1}, z_{i+1}) est égal à z_i^{-1} ou z_i suivant que i est pair ou impair.

En particulier, $SL_3(\mathbf{Z})$ est engendré par $\{z_1, z_3, z_5\}$. De plus, pour tout $i \in \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, les éléments z_{i-1} et z_{i+1} engendrent un groupe nilpotent B_i , et z_i appartient au groupe dérivé de B_i .

Supposons maintenant que $SL_3(\mathbf{Z})$ opère sur un arbre. Le cor. 2 à la prop. 27, appliqué au groupe B_i , montre que z_i a un point fixe. Comme ceci est vrai pour tout $i \in \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, on voit que B_i est engendré par des éléments qui ont des points fixes, donc a un point fixe d'après le cor. 1 à la prop. 27. En particulier, $z_{i-1}z_{i+1}$ a un point fixe. Le cor. 2 à la prop. 26, appliqué à $\{z_1, z_3, z_5\}$, montre alors que $SL_3(\mathbf{Z})$ a un point fixe.

Remarque - Au lieu d'utiliser le cor. 2 à la prop. 26, on aurait pu appliquer le lemme 10 aux trois arbres formés des points fixes de z_1, z_3, z_5 : ces arbres se ren-

contrent deux à deux, donc ont une intersection non vide.

Généralisations

1) Soit N un entier ≥ 1 , et soit G_N le sous-groupe de $SL_3(\mathbf{Z})$ engendré par z_1^N, z_3^N, z_5^N . Le même argument que celui utilisé ci-dessus montre que G_N possède la propriété (FA). Or :

a) tout sous-groupe d'indice fini de $SL_3(\mathbf{Z})$ contient un G_N (c'est immédiat) ;

b) G_N est d'indice fini dans $SL_3(\mathbf{Z})$ (cela a été démontré par Tits, C.R. Acad. Sci. Paris, 283, 1976, p. 693-698).

Vu 6.3.4, cela entraîne :

THEOREME 16' (Margulis-Tits) - Tout sous-groupe d'indice fini de $SL_3(\mathbf{Z})$ a la propriété (FA) .

2) Les théorèmes 16 et 16' s'étendent aux groupes $G(A)$, où G est un groupe "de Chevalley" simple de rang ≥ 2 , et A est l'anneau des entiers (ou plus généralement des "S-entiers") d'un corps de nombres algébriques (Tits, loc. cit.).

En particulier, les groupes

$$SL_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]), n \geq 3, Sp_{2n}(\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]), n \geq 2, \dots, E_8(\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]),$$

ont la propriété (FA) .

3) Pour SL_2 , la situation est différente. Il est clair que $SL_2(\mathbf{Z})$ n'a pas la propriété (FA). Il en est de même de $SL_2(A)$, lorsque A est l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire non isomorphe à $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ ou $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, car un tel groupe a un quotient isomorphe à \mathbf{Z} (cf. [20], Théorème 9, p. 519). Par contre, si K est un corps de nombres algébriques qui n'est isomorphe, ni à \mathbf{Q} , ni à un corps quadratique imaginaire, on peut montrer que tout sous-groupe arithmétique de $SL_2(K)$ possède la propriété (FA) ; cela s'applique notamment aux groupes $SL_2(\mathbf{Z}[\sqrt{D}])$ et à leurs sous-groupes d'indice fini (D étant un entier > 1 sans facteur carré).

ARBRES ET AMALGAMES

4) Margulis a obtenu récemment des résultats généraux sur les sous-groupes discrets des groupes semi-simples qui contiennent comme cas particuliers le th. 16' et ses généralisations mentionnées ci-dessus.

CHAPITRE II

SL_2

§ 1 - L'arbre de SL_2 sur un corps local

Notations

La lettre K désigne un corps muni d'une valuation discrète v ; rappelons que v est un homomorphisme de K^* sur \mathbb{Z} , et que l'on a

$$v(x + y) \geq \inf(v(x), v(y)) \quad \text{pour } x, y \in K,$$

en convenant que $v(0) = +\infty$.

On note \mathcal{O} l'anneau de valuation de K , i.e. l'ensemble des $x \in K$ tels que $v(x) \geq 0$. On fait choix d'un élément π tel que $v(\pi) = 1$, et l'on note k le corps résiduel $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$. Pour tout $x \in K^*$, on a

$$x\mathcal{O} = \mathcal{O}x = \pi^{v(x)}\mathcal{O} = \{y \in K \mid v(y) \geq v(x)\}.$$

En particulier, tous les idéaux de \mathcal{O} sont bilatères.

On note V un K -espace vectoriel à droite de dimension 2.

1.1. L'arbre

Classes de réseaux

On appelle réseau de V tout sous- \mathcal{O} -module de V qui est de type fini et engendre le K -espace vectoriel V ; un tel module est libre de rang 2. Si $x \in K^*$, et si L est un réseau de V , Lx est aussi un réseau de V (utiliser le fait que $\mathcal{O}x = x\mathcal{O}$). Ainsi, le groupe K^* opère sur l'ensemble des réseaux ; on appelle classe d'un réseau son orbite pour cette action ; deux réseaux appartenant à la même classe sont dits équivalents. L'ensemble des classes de réseaux est noté X .

Distance de deux classes

Soient L et L' deux réseaux de V . D'après la théorie des diviseurs élémen-

taires, il existe une \mathbb{Q} -base $\{e_1, e_2\}$ de L , et des entiers a, b tels que $\{e_1 \pi^a, e_2 \pi^b\}$ soit une \mathbb{Q} -base de L' . De plus, l'ensemble $\{a, b\}$ ne dépend que de L et L' . On a $L' \subset L$ si et seulement si a et b sont ≥ 0 , auquel cas L/L' est isomorphe à $(\mathbb{Q}/\pi^a \mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{Q}/\pi^b \mathbb{Q})$.

Remplacer L, L' par $Lx, L'y$ (avec $x, y \in K^*$) a pour effet de remplacer $\{a, b\}$ par $\{a+c, b+c\}$ où $c = v(y/x)$. L'entier $|a - b|$ ne dépend donc que des classes Λ et Λ' de L et L' ; on le note $d(\Lambda, \Lambda')$; c'est la distance de Λ et Λ' .

Si L est donné, pour chaque classe $\Lambda' \in X$ il existe un représentant L' de Λ' et un seul qui satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

- (i) $L' \subset L$ et L' est maximal (dans Λ') pour cette propriété ;
- (ii) $L' \subset L$ et $L' \not\subset L\pi$;
- (iii) $L' \subset L$ et L/L' est monogène.

Pour un tel L' , on a

$$L/L' \cong \mathbb{Q}/\pi^n \mathbb{Q}, \text{ où } n = d(\Lambda, \Lambda').$$

En particulier :

$$d(\Lambda, \Lambda') = 0 \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda';$$

$d(\Lambda, \Lambda') = 1 \Leftrightarrow$ il existe des représentants $L' \subset L$ de Λ' et Λ tels que $L/L' \cong k$ (i.e. $\ell(L/L') = 1$, ℓ désignant la longueur).

L'arbre de V

Deux éléments Λ, Λ' de X sont dits liés si $d(\Lambda, \Lambda') = 1$. On définit ainsi sur X une structure de graphe combinatoire (que l'on note encore X).

THÉORÈME 1 - Le graphe X est un arbre.

Montrons d'abord que X est connexe. Si Λ et Λ' sont des sommets de X , choisissons des réseaux L et L' représentant Λ et Λ' avec $L' \subset L$. Une suite de Jordan-Hölder de L/L' définit, par image réciproque, une suite de réseaux

$$L' = L_n \subset L_{n-1} \subset \dots \subset L_0 = L$$

L'ARBRE DE SL_2

telle que $\ell(L_{i-1}/L_i) = 1$ pour $1 \leq i \leq n$. Les classes $\Lambda_0, \dots, \Lambda_n$ de ces réseaux définissent un chemin dans X d'extrémités Λ et Λ' . D'où le fait que X est connexe.

Pour prouver que X est un arbre, il suffit maintenant de montrer que, si $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ ($n \geq 1$) est la suite des sommets d'un chemin sans aller-retour dans X , on a $\Lambda_0 \neq \Lambda_n$. En fait, on va montrer (par récurrence sur n) que $d(\Lambda_0, \Lambda_n) = n$.

D'après ce qui a été dit plus haut, on peut trouver des représentants L_i des Λ_i tels que $L_{i+1} \subset L_i$ et $\ell(L_i/L_{i+1}) = 1$. On a $\ell(L_0/L_n) = n$ et l'on veut

prouver que $L_n \not\subset L_0\pi$. Vu l'hypothèse de récurrence, on a $L_{n-1} \not\subset L_0\pi$. Les réseaux L_n et $L_{n-2}\pi$ sont les images réciproques de deux droites du k -plan $L_{n-1}/L_{n-1}\pi$.

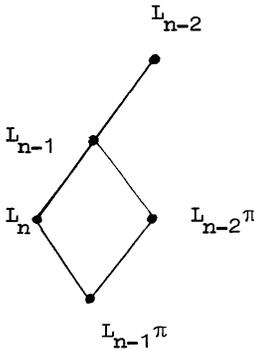
Ces droites sont distinctes : sinon, $\Lambda_{n-2}, \Lambda_{n-1}, \Lambda_n$ correspondrait à un aller-retour du chemin donné. On a donc

$$L_{n-1} = L_n + L_{n-2}\pi$$

d'où

$$L_{n-1} \equiv L_n \pmod{L_0\pi}$$

et l'on en déduit bien $L_n \not\subset L_0\pi$, cqfd.



Remarques

1) La démonstration montre en outre que $d(\Lambda, \Lambda')$ coïncide avec la distance des sommets Λ et Λ' de l'arbre X (au sens du chap. I, n° 2.2).

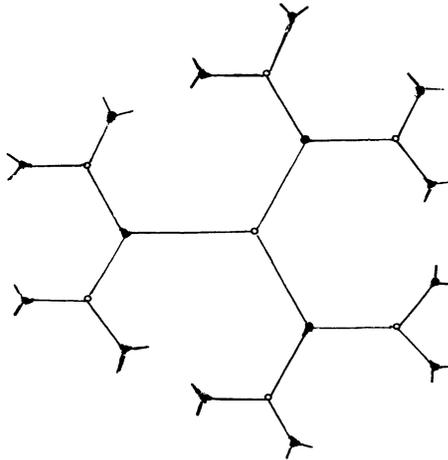
2) Une construction voisine de celle faite ci-dessus a été utilisée (en dimension quelconque) par H. Behr ; cf. J. Crelle, 211, 1962, p. 123-135.

3) L'arbre X est un cas particulier des immeubles de Bruhat-Tits (cf. 1.7, ainsi que [38], n° 10.2).

Complétion

Soit \hat{K} le complété de K par rapport à v ; son anneau de valuation est $\hat{O} = \varprojlim \underline{O}/\pi^n \underline{O}$. Posons $\hat{V} = V \otimes_K \hat{K}$. Si l'on associe à tout réseau L de V le réseau $\hat{L} = L \otimes_{\underline{O}} \hat{O}$ de \hat{V} , on obtient une bijection de l'ensemble des réseaux de V sur l'ensemble des réseaux de \hat{V} ; cette bijection induit un isomorphisme de l'arbre de V sur celui de \hat{V} (ce qui permet, si on le désire, de se ramener au cas où K est complet).

Dessin (corps résiduel à 2 éléments) :



(Les notations \bullet et \circ correspondent à la partition des sommets en deux classes telles que deux sommets de la même classe soient à une distance paire l'un de l'autre.)

Droites projectives

Soit L_0 un réseau de V , et soit $\Lambda_0 \in X$ sa classe. Tout sommet Λ de X est représenté par un unique réseau $L \subset L_0$ tel que $L_0/L \simeq \underline{O}/\pi^n \underline{O}$, où $n = d(\Lambda_0, \Lambda)$. Le $\underline{O}/\pi^n \underline{O}$ -module $L_0/L_0 \pi^n$ est libre de rang 2 , et $L/L_0 \pi^n$ en

L'ARBRE DE SL_2

est un facteur direct de rang 1 . On voit ainsi que les sommets de X à distance n de Λ_0 correspondent bijectivement aux facteurs directs de rang 1 de $L_0/L_0\pi^n$, c'est-à-dire aux points de la droite projective $P(L_0/L_0\pi^n) \simeq P_1(O/\pi^n O)$.

Pour $n = 1$, cela signifie que les arêtes d'origine Λ_0 correspondent bijectivement aux points de $P(L_0/L_0\pi) \simeq P_1(k)$; si $q = \text{Card}(k)$, le nombre de ces arêtes est $q + 1$.

Appelons bout de X tout chemin infini sans aller-retour d'origine Λ_0 . Ce qui précède montre que les bouts de X correspondent aux points de

$$\varprojlim P(L_0/L_0\pi^n) = P(\hat{L}_0) \simeq P_1(\hat{O}) ;$$

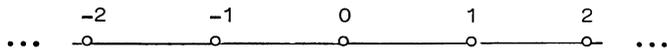
on notera d'ailleurs que $P(\hat{L}_0)$ s'identifie canoniquement à $P(\hat{V})$, ensemble des droites de \hat{V} . (En particulier, l'ensemble des bouts de X "ne dépend pas" de l'origine Λ_0 choisie, cf. chap. I, n° 2.2.) De façon plus explicite, si D est une droite de \hat{V} , on lui associe le bout défini par la suite de réseaux

$$\hat{L}_n = \hat{L}_0\pi^n + (\hat{L}_0 \cap D) ;$$

inversement, D est l'unique droite contenant l'intersection des \hat{L}_n .

Droits chemins

On appelle droit chemin tout chemin isomorphe à :



A un droit chemin de X est associée la paire de bouts formée des chemins $(0,1,2,\dots)$ et $(0,-1,-2,\dots)$. On vérifie sans peine que l'on obtient ainsi des bijections :

droits chemins de l'arbre X	\Leftrightarrow	paires de bouts distincts	\Leftrightarrow	décomposition de \hat{V} en somme directe de deux droites
----------------------------------	-------------------	------------------------------	-------------------	---

Exercices

- 1) Montrer que X ne dépend que de $\text{Card}(k)$, à isomorphisme près.
- 2) On suppose $\text{Card}(k)$ fini. On munit le groupe $G = \text{Aut}(X)$ de la topologie de la convergence simple.
 - a) Montrer que G est un groupe topologique localement compact.

b) Soit G_Λ le stabilisateur d'un sommet Λ de X . Montrer que G_Λ est un sous-groupe ouvert profini de G .

c) Soit G^+ le sous-groupe d'indice 2 de G formé des automorphismes s tels que $d(\Lambda, s\Lambda) \equiv 0 \pmod{2}$ pour tout $\Lambda \in X$ (ou pour un $\Lambda \in X$, cela revient au même). Montrer que tout sous-groupe compact de G^+ est contenu dans un G_Λ , et que les G_Λ sont les sous-groupes compacts maximaux de G^+ .

(Signalons le résultat suivant, dû à Tits : le groupe G^+ est un groupe simple.)

3) (Opérateurs de Hecke) On suppose que $q = \text{Card}(k)$ est fini.

a) Montrer que le nombre des sommets de X à distance $n \geq 1$ d'un sommet donné est $q^{n-1}(q+1)$.

b) On désigne par Θ_n la correspondance^(*) qui associe à un sommet $\Lambda \in X$ la somme formelle des sommets Λ' de X tels que $d(\Lambda, \Lambda') = n$. On pose

$$T_0 = \Theta_0 = \text{id.}$$

$$T_1 = \Theta_1$$

$$T_n = \sum_{0 \leq i \leq n/2} \Theta_{n-2i} = \Theta_n + T_{n-2}.$$

Montrer que l'on a

$$\Theta_1 \Theta_1 = \Theta_2 + (q+1)\Theta_0$$

$$\Theta_1 \Theta_n = \Theta_{n+1} + q \Theta_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

et

$$T_1 T_n = T_{n+1} + q T_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

En déduire que les T_n et les Θ_n sont des polynômes par rapport à T_1 . Démontrer l'identité

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \frac{1}{1 - T_1 x + qx^2},$$

où x est une indéterminée.

4) (Généralisation en dimension $n \geq 2$) Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , et soit X l'espace des réseaux de E (à homothétie près). Une partie finie σ de X est dite un simplexe si l'on peut trouver des réseaux L_0, \dots, L_{n-1} représentant les éléments de σ tels que $L_0 \supset L_1 \supset \dots \supset L_{n-1}$.

(*) Une correspondance T sur un ensemble X est un endomorphisme du \mathbf{Z} -module libre de base X ; pour définir T , il suffit de se donner sa valeur pour les éléments P de X :

$$T(P) = \sum_{Q \in X} n_{PQ} Q,$$

les n_{PQ} étant des entiers presque tous nuls (pour P fixé).

a) Montrer que l'on définit ainsi une structure de complexe simplicial de dimension $n-1$ sur l'ensemble X , et que ce complexe est isomorphe à l'immeuble de Bruhat-Tits de $SL_n(K)$, cf. [38], n° 10.2.

b) Soit w une valuation de E , i.e. une application de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\begin{aligned} w(x) &= +\infty \Leftrightarrow x = 0 \\ w(x\lambda) &= w(x) + v(\lambda) \quad \text{si } x \in E, \lambda \in K, \\ w(x+y) &\cong \text{Inf}(w(x), w(y)) \quad \text{si } x, y \in E. \end{aligned}$$

Si $a \in \mathbb{R}$, soit $E_a^w = \{x \mid x \in E, w(x) \cong a\}$; c'est un réseau de E .

Pour tout réseau L de E , l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que $E_a^w = L$ est un intervalle semi-ouvert I_L^w (éventuellement vide); sa longueur i_Λ^w ne dépend que de l'image Λ de L dans X . Montrer que l'ensemble des Λ tels que $i_\Lambda^w \neq 0$ est un simplexe de X ; soit P_w le point de la réalisation géométrique $\text{real}(X)$ de X dont les coordonnées barycentriques sont les i_Λ^w . Montrer que tout point de $\text{real}(X)$ peut être obtenu de cette façon, et que l'on a $P_w = P_{w'}$, si et seulement si $w' - w$ est constante. (On obtient ainsi une interprétation des points de $\text{real}(X)$, qui est celle de Goldman-Iwahori, cf. [38], p. 238-239.)

1.2. Les groupes $GL(V)$ et $SL(V)$

On note $GL(V)$ le groupe $\text{Aut}(V)$ des K -automorphismes de V ; il est isomorphe à $GL_2(K)$; son centre est C^* , où C désigne le centre du corps K .

On note $SL(V)$ le sous-groupe de $GL(V)$ défini par l'une des propriétés équivalentes suivantes (cf. par exemple E. Artin, Geometric Algebra, chap. IV):

- i) C'est le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les éléments unipotents.
- ii) C'est le groupe des commutateurs $(GL(V), GL(V))$ de $GL(V)$.
- iii) C'est le noyau du déterminant de Dieudonné

$$\det : GL(V) \rightarrow K^*/(K^*, K^*).$$

(Rappelons que, si $s \in GL(V)$ est représenté par la matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

on a

$$\det(s) \equiv \begin{cases} ad - aca^{-1}b & (\text{si } a \neq 0) \\ -cb & (\text{si } a = 0) \end{cases}$$

cf. Artin, loc. cit.)

Remarque. Supposons que K soit fini sur son centre C . Pour tout $n \geq 1$, l'algèbre de matrices $M_n(K)$ est une algèbre de centre C ; la norme réduite $Nrd : M_n(K) \rightarrow C$ est définie (Bourbaki, A-VIII); elle induit un homomorphisme $N_n : GL_n(K) \rightarrow C^*$. Par passage au quotient, N_1 définit un homomorphisme

$$N : K^*/(K^*, K^*) \rightarrow C^*$$

et l'on a $N_n = N \circ \det$ pour tout n . Le noyau $SL'_n(K)$ de N_n contient $SL_n(K)$, et l'on peut se demander si $SL'_n(K)$ est égal à $SL_n(K)$, ou, ce qui revient au même, si l'homomorphisme N est injectif ("problème de Tannaka-Artin"). C'est vrai lorsque C est localement compact (Nakayama-Matsushima, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1943); c'est faux en général (Platonov, Izv. Akad. Nauk, 1976).

Les groupes $GL(V)^+$ et $GL(V)^0$

La valuation $v : K^* \rightarrow \mathbf{Z}$ est triviale sur (K^*, K^*) ; si $s \in GL(V)$ on peut donc parler de $v(\det(s))$, et l'on obtient ainsi un homomorphisme surjectif

$$v(\det) : GL(V) \rightarrow \mathbf{Z}.$$

On désignera par $GL(V)^0$ le noyau de cet homomorphisme, et par $GL(V)^+$ le noyau du composé $GL(V) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On a

$$SL(V) \subset GL(V)^0 \subset GL(V)^+ \subset GL(V).$$

Caractérisation de $v(\det(s))$ en termes de réseaux

Si L_1 et L_2 sont deux réseaux de V , on pose

$$\chi(L_1, L_2) = \ell(L_1/L_3) - \ell(L_2/L_3) \text{ avec } L_3 \subset L_1 \cap L_2;$$

il est immédiat que cet entier ne dépend que de L_1 et L_2 .

PROPOSITION 1 - Soit L un réseau de classe Λ , et soit $s \in GL(V)$. On a

$$\chi(L, sL) = v(\det(s)).$$

Choisissons une base $\{e_1, e_2\}$ de L et des entiers a, b tels que $\{e_1 \pi^a, e_2 \pi^b\}$ soit une base de sL . La matrice de s est alors le produit de la matrice diagonale s_1 de termes diagonaux π^a, π^b et d'une matrice $s_2 \in GL_2(\mathcal{O})$. Les formules données ci-dessus montrent que $v(\det(s_2)) = 0$ et $v(\det(s_1)) = a+b$. On est donc ramené à vérifier que $\chi(L, sL) = a + b$, ce qui est immédiat.

COROLLAIRE - On a $d(\Lambda, s\Lambda) \equiv v(\det(s)) \pmod{2}$.

En effet, avec les notations ci-dessus, on a

$$d(\Lambda, s\Lambda) = |a - b| \equiv a + b \equiv v(\det(s)) \pmod{2}.$$

Exercices

1) Démontrer directement que $s \mapsto \chi(L, sL)$ est un homomorphisme d de $GL(V)$ dans \mathbf{Z} . Déterminer $d(s)$ lorsque s est défini par l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

par rapport à une \mathbf{Q} -base de L . En déduire une autre démonstration de la prop. 1 (utiliser le fait que $GL_2(K)$ est engendré par les matrices ci-dessus).

2) On suppose K localement compact. Interpréter $\chi(L_1, L_2)$ et $v(\det(s))$ en termes d'une mesure de Haar sur V .

1.3. Action de $GL(V)$ sur l'arbre de V ; stabilisateurs

Le groupe $GL(V)$ opère sur l'arbre X . De plus, le cor. à la prop. 1 montre qu'un élément $s \in GL(V)$ appartient à $GL(V)^+$ si et seulement si s conserve chacune des deux classes de sommets de X (deux sommets étant dans la même classe si et seulement si leur distance est paire). En particulier, $GL(V)^+$ opère sans inversion sur X .

Par contre, $GL(V)$ opère avec inversion : si e_1, e_2 est une base de V , soient L et L' les réseaux de bases (e_1, e_2) , $(e_1, e_2\pi)$, et soient Λ, Λ' les sommets correspondants de X . L'élément s de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ transforme L en L' et L' en $L\pi$; il transforme donc l'arête $\Lambda\Lambda'$ en son inverse $\Lambda'\Lambda$.

Stabilisateurs des sommets

Soit G un sous-groupe de $GL(V)$, et soit L un réseau de classe Λ . Nous noterons G_L (resp. G_Λ) le sous-groupe de G formé des éléments s tels que $sL = L$ (resp. $s\Lambda = \Lambda$) ; de même, si $\Lambda\Lambda'$ est une arête de X , nous noterons $G_{\Lambda\Lambda'}$ son stabilisateur dans G .

Par définition, G_Λ est l'ensemble des $s \in G$ tels qu'il existe $x \in K^*$ avec $sL = Lx$.

LEMME 1 - Si G est contenu dans $GL(V)^\circ$, on a $G_L = G_\Lambda$.

En effet, supposons que l'on ait $sL = Lx$, comme ci-dessus. On vérifie tout

SL_2

de suite que $\chi(L, Lx) = 2v(x)$. D'après la prop. 1, on a donc $v(\det(s)) = 2v(x)$, d'où $v(x) = 0$ si s appartient à $GL(V)^\circ$; cela signifie que x est un élément inversible de \mathcal{O} , donc que $Lx = L$, et l'on a bien $s \in G_L$.

(Ceci s'applique en particulier au groupe $SL(V)$.)

Sous-groupes bornés

Rappelons qu'un sous-groupe G de $GL(V)$ est dit borné si c'est une partie bornée de l'espace vectoriel $\text{End}(V)$. Si l'on identifie $GL(V)$ à $GL_2(K)$, cela signifie qu'il existe un entier d tel que $v(s_{ij}) \leq d$ pour tout $s = (s_{ij}) \in G$.

PROPOSITION 2 - Si G est un sous-groupe de $GL(V)^\circ$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) G est borné (au sens ci-dessus).

(ii) Il existe $\Lambda \in X$ tel que l'orbite $G \cdot \Lambda$ soit bornée (au sens de la distance sur l'arbre X).

(iii) Il existe un réseau de V stable par G .

(iv) G laisse fixe un sommet de X .

L'équivalence (iii) \Leftrightarrow (iv) résulte du lemme 1 ci-dessus. L'équivalence (ii) \Leftrightarrow (iv) a été démontrée au chap. I (n° 4.3, prop. 19). Les implications (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) sont immédiates.

(Bien entendu, il est facile de démontrer directement l'implication (i) \Rightarrow (iii) : on choisit un réseau L_0 de V , et l'on forme $L = \sum_{s \in G} sL_0$; en utilisant le fait que G est borné, on voit que c'est un réseau de V , et il est évidemment stable par G .)

COROLLAIRE - Les sous-groupes bornés maximaux de G sont les stabilisateurs des sommets de X .

Stabilisateurs des arêtes : sous-groupes d'Iwahori

Soit Λ' une arête de X , représentée par des réseaux L, L' avec $L' \subset L$ et $\ell(L/L') = 1$. Soit G un sous-groupe de $GL(V)^\circ$. D'après le lemme 1, le stabilisateur $G_{\Lambda'}$ est $G_L \cap G_{L'}$. C'est le sous-groupe de G_L formé des

L'ARBRE DE SL_2

éléments s dont l'image dans $GL(L/L\pi) \simeq GL_2(k)$ laisse stable la droite L'/L ; on l'appelle le sous-groupe d'Iwahori de G relativement à Λ' .

(Traduction matricielle : on prend $L = e_1\mathbb{Q} \oplus e_2\mathbb{Q}$, $L' = e_1\mathbb{Q} \oplus e_2\pi\mathbb{Q}$ et $G_{\Lambda'}$ est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{\pi}$. C'est l'image réciproque du sous-groupe triangulaire $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ de $GL_2(k)$.)

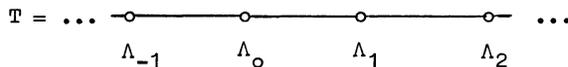
Stabilisateurs des bouts : sous-groupes de Borel

Soit b un bout de X , représenté par le chemin infini sans aller-retour $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots$. On dit qu'un élément $s \in GL(V)$ laisse b invariant s'il existe un entier d tel que $s\Lambda_i = \Lambda_{i+d}$ pour i assez grand (cf. chap. I, n° 2.2, exerc.1) . Si D_b désigne la droite de \hat{V} qui correspond au bout b (n° 1.1), cela équivaut à $sD_b = D_b$. Le stabilisateur de b dans $GL(V)$ est donc l'intersection de $GL(V)$ avec le sous-groupe de Borel de $GL(\hat{V})$ correspondant à D_b . Si K est complet il y a donc identité entre "stabilisateurs des bouts de X " et "sous-groupes de Borel" .

(Traduction matricielle : si l'on choisit une base e_1, e_2 telle que D_b soit engendré par e_1 , on a $sD_b = D_b$ si et seulement si s est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$, et l'entier d correspondant à s est $v(\delta) - v(\alpha)$.)

Stabilisateurs des droits chemins : sous-groupes de Cartan

Soit



un droit chemin de X . On a vu au n° 1.1 que T correspond à une décomposition de \hat{V} en somme directe de deux droites D_1, D_2 . Il en résulte que le stabilisateur $N_T = GL(\hat{V})_T$ de T dans $GL(\hat{V})$ est l'ensemble des s qui transforment $\{D_1, D_2\}$ en $\{D_1, D_2\}$. Ce groupe contient comme sous-groupe d'indice 2 le sous-groupe "de Cartan" $H_T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ formé des s tels que $sD_1 = D_1$, $sD_2 = D_2$.

On vérifie facilement que l'application $N_T \rightarrow \text{Aut}(T)$ est surjective (le groupe $\text{Aut}(T)$ est le groupe diédral infini D_∞) . Un élément $s \in N_T$ appartient à H_T si et seulement si son image dans $\text{Aut}(T)$ est une translation (i.e. si s respecte

l'orientation de T). Lorsqu'on écrit un tel s sous forme matricielle $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, on vérifie que l'amplitude de la translation est $v(a) - v(d)$, une fois T convenablement orienté (lorsque cette amplitude est non nulle, s définit donc un automorphisme hyperbolique de X , au sens du chap. I, n° 6.4 et T est le droit chemin correspondant).

Exercices

1) Soit φ l'homomorphisme canonique $GL(V) \rightarrow \text{Aut}(X)$.

a) Montrer que φ n'est pas surjectif.

b) Montrer que le noyau de φ est le centre C^* de $GL(V)$.

2) On suppose K commutatif, et l'on identifie $PGL(V) = GL(V)/K^*$ au groupe des K -automorphismes de l'algèbre simple $A = \text{End}_K(V)$. Soit S une partie de $PGL(V)$. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

a) S est bornée dans l'espace vectoriel $\text{End}_K(A)$.

b) Il existe un sommet Λ de X tel que $S \cdot \Lambda$ soit une partie bornée de X (au sens du chap. I, n° 2.2).

Si S est un sous-groupe de $PGL(V)$, ces propriétés équivalent à :

c) Il existe un sommet ou une arête géométrique de X qui est stable par S .

1.4. Amalgames

Notations

L et L' sont deux réseaux de V , avec $L' \subset L$ et $\mu(L/L') = 1$; on note Λ et Λ' leurs classes; ce sont des sommets liés de l'arbre X .

G désigne un sous-groupe de $GL(V)^+$; on note $G_L, G_{L'}, G_{LL'}, G_\Lambda, G_{\Lambda'}, G_{\Lambda\Lambda'}$, le stabilisateur dans G de L , de L' , du couple (L, L') , de Λ , de Λ' , et du couple (Λ, Λ') . Si G est contenu dans $GL(V)^0$, on a

$$G_\Lambda = G_L, G_{\Lambda'} = G_{L'}, \text{ et } G_{\Lambda\Lambda'} = G_{LL'},$$

cf. n° 1.3, lemme 1.

THÉORÈME 2 - Faisons l'hypothèse suivante :

(D) - L'adhérence de G dans $GL(V)$ contient $SL(V)$.

Le segment $\Lambda \circ \text{---} \circ \Lambda'$ est alors un domaine fondamental pour l'action de G sur l'arbre X (au sens du chap. I, n° 4.1).

Démonstration

a) Action sur les sommets

Soit X^+ (resp. X^-) l'ensemble des sommets de X qui sont à distance paire de Λ (resp. de Λ'). La partition (X^+, X^-) est invariante par G , et il nous faut montrer que, pour tout $\Lambda_1 \in X^+$ (resp. $\Lambda_1 \in X^-$), il existe $g \in G$ tel que $g\Lambda = \Lambda_1$ (resp. $g\Lambda' = \Lambda_1$). Supposons que l'on ait $\Lambda_1 \in X^+$ (le cas de X^- est analogue), et soit $2n$ la distance de Λ_1 à Λ . En utilisant le théorème des diviseurs élémentaires, on voit qu'il existe un représentant L_1 de Λ_1 et une base $\{e_1, e_2\}$ de L tels que L_1 ait pour base $\{e_1\pi^n, e_2\pi^{-n}\}$. Soit s l'automorphisme de V de matrice $\begin{pmatrix} \pi^n & 0 \\ 0 & \pi^{-n} \end{pmatrix}$ par rapport à $\{e_1, e_2\}$. On a $s \in SL(V)$ et $sL = L_1$; comme l'adhérence de G contient $SL(V)$, et que $GL_2(\mathbb{Q})$ est ouvert dans $GL_2(K)$, il existe un élément $g \in G$ tel que

$$g = s.u, \text{ avec } u \in \text{Aut}(L) \simeq GL_2(\mathbb{Q}).$$

On a alors $gL = sL = L_1$, d'où $g\Lambda = \Lambda_1$.

b) Action sur les arêtes

Vu ce qui précède, il suffit de prouver que G_L agit transitivement sur l'ensemble des arêtes d'origine Λ , ou, ce qui revient au même, sur l'ensemble P_L des sous-réseaux L_1 de L tels que $\ell(L/L_1) = 1$. Prenons une base $\{e_1, e_2\}$ de L ; les réseaux L_1 en question se déduisent de l'un d'entre eux L_0 par les automorphismes de matrices :

$$x_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a \in \mathbb{Q}.$$

Soit U le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Q})$ formé des matrices congrues à 1 (mod π); c'est un sous-groupe ouvert. Vu l'hypothèse (D), il existe donc $g_a, h \in G$ tels que

$$g_a = x_a u_a, \text{ avec } u_a \in U, \text{ et } h = wu, \text{ avec } u \in U.$$

On a $g_a L = hL = L$ et $g_a L_0 = x_a L_0$, $hL_0 = wL_0$; cela montre bien que G_L opère transitivement sur P_L .

(Variante : utiliser la densité de G pour prouver que l'image de l'homomorphisme

me $G_L \rightarrow \text{Aut}(L/L\pi) \rightarrow \text{PGL}_2(k)$ contient $\text{PSL}_2(k)$; remarquer ensuite que $\text{PSL}_2(k)$ opère transitivement sur la droite projective $P_1(k)$.)

THÉOREME 3 - Si l'hypothèse (D) est vérifiée, le groupe G est somme des sous-groupes G_Λ et $G_{\Lambda'}$, amalgamés suivant leur intersection $G_{\Lambda\Lambda'}$.

(On écrit plus brièvement : $G = G_\Lambda *_{G_{\Lambda\Lambda'}} G_{\Lambda'}$.)

Cela résulte du théorème ci-dessus et du th. 6 du chap. I, n° 4.1.

COROLLAIRE 1 (Ihara) - On a $SL_2(K) = SL_2(\mathcal{O}) *_{\Gamma} SL_2(\mathcal{O})$, où Γ est le sous-groupe de $SL_2(\mathcal{O})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{\pi}$.

On applique le th. 3 à $G = SL(V)$ compte tenu de ce que $G_\Lambda = G_L$, $G_{\Lambda'} = G_{L'}$, et $G_{\Lambda\Lambda'} = G_{LL'}$, puisque $G \subset GL(V)^\circ$; on identifie G_L et $G_{L'}$ à $SL_2(\mathcal{O})$.

[Précisons les deux injections de Γ dans $SL_2(\mathcal{O})$ suivant lesquelles se fait l'amalgame :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b\pi \\ \pi^{-1}c & \pi^{-1}d\pi \end{pmatrix} .]$$

Exemples

1) Le groupe $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ est un amalgame de deux copies de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$.

2) Plus généralement, soit A un sous-anneau dense de K . Le groupe $G = SL_2(A)$ est dense dans $SL_2(K)$; en effet, son adhérence contient les sous-groupes additifs $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ et l'on sait que ceux-ci engendrent $SL_2(K)$. On peut donc appliquer les ths. 2 et 3 au groupe G .

COROLLAIRE 2 - Si p est un nombre premier, on a

$$SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = SL_2(\mathbb{Z}) *_{\Gamma_0(p)} SL_2(\mathbb{Z})$$

où $\Gamma_0(p)$ est le sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $c \equiv 0 \pmod{p}$.

C'est le cas particulier $K = \mathbb{Q}$, $v =$ valuation p -adique, $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ et $A \cap \mathcal{O} = \mathbb{Z}$.

Autres exemples

a) On peut généraliser le cor. 2 : si n est un entier premier à p , le groupe $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{pn}])$ est somme de deux copies de $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{n}])$ amalgamées suivant le sous-groupe des $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c \equiv 0 \pmod{p}$. On a ainsi un procédé de "dévissage" permettant d'exprimer les groupes $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p_1 \dots p_k}])$ comme amalgames de certains sous-groupes de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$.

b) La même méthode s'applique aux groupes de "S-unités" des groupes SL_2 sur les corps de nombres ou de fonctions : on les ramène aux groupes d'"unités" usuels.

c) Ihara a étudié les sous-groupes discrets G de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{Q}_p)$ dont la projection sur chaque facteur est dense (et injective). Le th. 3 s'applique à un tel groupe G : on a $G = G_L *_{G_{LL}} G_L$. De plus, G_L , G_L , et G_{LL} sont des sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbb{R})$; ils sont à quotient compact (resp. à quotient de volume fini) si et seulement si il en est de même de G dans $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Présentation de $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ et $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{3}])$

Soit $G = G_1 *_A G_2$ un amalgame. Soit $\langle g_{1\alpha} ; r_{1\beta} = 1 \rangle$ une présentation de G_1 au moyen d'une famille génératrice $\{g_{1\alpha}\}$ et d'une famille de relateurs $\{r_{1\beta}\}$; soit de même $\langle g_{2\gamma} ; r_{2\delta} = 1 \rangle$ une présentation de G_2 . Soit $\{a_e\}$ une famille génératrice de A ; pour chaque e , soit $a_e = m_{1e}((g_{1\alpha}))$ une expression de $a_e \in G_1$ en termes des $g_{1\alpha}$ (m_{1e} étant un élément du groupe libre associé à la famille $g_{1\alpha}$) ; soit de même $a_e = m_{2e}((g_{2\gamma}))$ une expression de $a_e \in G_2$ en termes des $g_{2\gamma}$. Il est alors immédiat que

$$\langle g_{1\alpha}, g_{2\gamma} ; r_{1\beta} = r_{2\delta} = 1, m_{1e} = m_{2e} \rangle$$

est une présentation de $G = G_1 *_A G_2$.

Nous allons appliquer cette méthode au groupe $G = SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$, en prenant pour G_1 le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, pour A le groupe $\Gamma_0(p)$, et pour G_2 le groupe des $\begin{pmatrix} a & p^{-1}b \\ pc & d \end{pmatrix}$, avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, groupe qui est isomorphe à $SL_2(\mathbb{Z})$.

Il est bien connu que $SL_2(\mathbb{Z})$ a pour présentation

$$\langle S, T ; S^4 = 1, (ST)^3 = S^2 \rangle \text{ avec } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le groupe G_2 a donc pour présentation

$$\langle S_p, T_p ; S_p^4 = 1, (S_p T_p)^3 = S_p^2 \rangle$$

$$\text{avec } S_p = \begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ -p & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à expliciter une famille génératrice pour $\Gamma_0(p)$, ainsi que les m_{1e} , m_{2e} correspondants. Nous nous bornerons aux cas $p = 2$ et $p = 3$, qui sont particulièrement simples : le groupe $\Gamma_0(p)$ est alors engendré par les trois éléments $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ [cela peut se vérifier de diverses façons, par exemple en examinant les domaines fondamentaux correspondants dans le demi-plan de Poincaré ; par contre, pour $p \geq 5$, $\Gamma_0(p)$ n'est pas engendré par Y , S^2 et T_p : le nombre minimum d'éléments d'une famille génératrice de $\Gamma_0(p)/\{\pm 1\}$ est $2k + 3$, où k est la partie entière de $(p-1)/12$].

On a évidemment :

$$Y^{-1} = STS^{-1} = S_p T_p^p S_p^{-1}, \quad T_p = T^p, \quad S^2 = S_p^2.$$

On voit ainsi que, pour $p = 2, 3$, $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ admet la présentation suivante :

$$\langle S, T, S_p ; S^4 = 1, S^2 = S_p^2 = (ST)^3 = (S_p T_p^p)^3, STS^{-1} = S_p T_p^{p^2} S_p^{-1} \rangle.$$

Si l'on pose $U_p = S^{-1} S_p = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}$, cela donne la présentation :

$$\langle S, T, U_p ; S^4 = 1, S^2 = (SU_p)^2 = (ST)^3 = (SU_p T_p^p)^3, U_p^{-1} T U_p = T^{p^2} \rangle,$$

due à Behr-Mennicke (Can. J. Math., 20, 1968, p. 1432-1438).

Exercices

1) Montrer que $GL(V)$ opère transitivement sur l'ensemble des sommets et des arêtes de X , et contient une inversion. En déduire une décomposition de $GL(V)$ comme somme amalgamée (cf. chap. I, n° 4.1, exerc.).

2) On définit des correspondances T_n^+ et T_n^- ($n \geq 0$) sur X en posant (cf. n° 1.1, exerc. 3) :

$$\begin{aligned} T_n^+ P &= T_n P, & T_n^- P &= 0 & \text{si } P \in X^+ \\ T_n^+ P &= 0, & T_n^- P &= T_n P & \text{si } P \in X^- . \end{aligned}$$

Montrer que les T_n^+ et les T_n^- commutent entre eux, et commutent aux éléments de $GL(V)^+$. Réciproquement, montrer que toute correspondance sur X qui commute avec un groupe G vérifiant l'hypothèse (D) est combinaison linéaire des T_n^+ et des T_n^- .

3) Expliciter une présentation de $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{6}])$ au moyen de la famille génératrice $\{S, T, U_2, U_3\}$.

1.5. Un théorème de Ihara

THÉORÈME 4 - Soit Γ un sous-groupe de $GL(V)^\circ$ ne contenant aucun sous-groupe borné $\neq \{1\}$. Alors Γ est un groupe libre.

D'après la prop. 2 du n° 1.3, l'hypothèse faite sur Γ équivaut à dire que Γ opère librement sur l'arbre X ; c'est donc un groupe libre, cf. chap. I, n° 3.3, th. 4. (Variante : utiliser la décomposition de $GL(V)^\circ$ comme somme amalgamée, combinée avec la prop. 18 du chap. I, n° 4.3.)

Remarque. On trouvera dans Ihara [16] un énoncé un peu plus général; on peut également le démontrer au moyen des arbres, cf. exerc. 2.

Le cas localement compact

On suppose K localement compact, ce qui équivaut à dire que K est complet, et que son corps résiduel k est fini. On pose $q = \text{Card}(k)$. On se borne, pour simplifier, aux sous-groupes du groupe $G = SL_2(K)$. On munit G de l'unique mesure de Haar μ telle que

$$\mu(G_L) = q - 1,$$

où $G_L = SL_2(\mathbb{Q})$ est le stabilisateur du réseau $L = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ (noter que G_L est un sous-groupe ouvert compact de G).

THÉORÈME 5 - Soit Γ un sous-groupe discret sans torsion de G .

a) Γ est un groupe libre.

b) Les conditions suivantes sont équivalentes :

b₁) $\mu(G/\Gamma)$ est fini.

b₂) G/Γ est compact.

b₃) Le graphe $\Gamma \backslash X$ est fini.

c) Si les conditions b) sont satisfaites, Γ est de type fini et son rang r_Γ est donné par la formule

$$r_\Gamma - 1 = \mu(G/\Gamma) .$$

Puisque K est localement compact, "borné" équivaut à "relativement compact". Si H est un sous-groupe borné de Γ , H est donc relativement compact ; comme Γ est discret, cela entraîne que H est compact et discret, i.e. fini, et comme Γ est sans torsion, on a $H = \{1\}$. D'autre part, si $V = K^2$, on a

$$SL_2(K) = SL(V) \subset GL(V)^\circ .$$

On peut donc appliquer le th. 4, et l'on voit que Γ est libre, ce qui démontre l'assertion a) .

Soit L' le réseau $\underline{0} \oplus \underline{0}\pi$, soit $G_{L'}$ son stabilisateur dans G et soit $G_{LL'} = G_L \cap G_{L'}$, de sorte que $G = G_L *_{G_{LL'}} G_{L'}$. Comme $G_{LL'}$ est d'indice $q+1$ dans G_L et $G_{L'}$, on a

$$\mu(G_{LL'}) = \frac{q-1}{q+1} \quad \text{et} \quad \mu(G_{L'}) = q-1 = \mu(G_L) .$$

Soit S (resp. S' , S'') un ensemble de représentants des doubles classes $\Gamma \backslash G/G_L$ (resp. $\Gamma \backslash G/G_{L'}$, $\Gamma \backslash G/G_{LL'}$) . On voit tout de suite que G/Γ est compact si et seulement si S (resp. S' , S'') est fini ; comme l'ensemble des sommets (resp. des arêtes géométriques) de $\Gamma \backslash X$ est en correspondance bijective avec $S \coprod S'$ (resp. avec S'') , on en déduit l'équivalence de b₂) et b₃) . D'autre part, $\Gamma \backslash G$ est réunion disjointe des orbites sG_L ($s \in S$) de G_L ; comme Γ est sans torsion, on a $sG_L s^{-1} \cap \Gamma = \{1\}$, ce qui montre que $G_L \rightarrow sG_L \subset \Gamma \backslash G$ est injectif ; l'orbite sG_L a donc une mesure égale à celle de G_L , i.e. $q-1$. On en conclut que $\mu(G/\Gamma) = \mu(\Gamma \backslash G)$ est fini si et seulement si S est fini, ce qui démontre l'équivalence de b₁) et b₂) . On voit en outre que, si G/Γ est

L'ARBRE DE SL_2

compact, on a

$$\mu(G/\Gamma) = (q - 1) \text{Card}(S)$$

et, par un argument analogue :

$$\mu(G/\Gamma) = (q - 1) \text{Card}(S') = \frac{q-1}{q+1} \text{Card}(S'') .$$

D'après le th. 4' du chap. I, n° 3.3, on a

$$\begin{aligned} 1 - r_\Gamma &= \text{Card}(\text{som } \Gamma \backslash X) - \frac{1}{2} \text{Card}(\text{ar } \Gamma \backslash X) \\ &= \text{Card}(S) + \text{Card}(S') - \text{Card}(S'') \\ &= \mu(G/\Gamma)(q - 1)^{-1}(1 + 1 - (q+1)) \\ &= - \mu(G/\Gamma) , \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. Si les conditions b) sont satisfaites, c) montre que $\mu(G/\Gamma)$ est égal à l'opposée de la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe Γ ; on exprime cela en disant que $-\mu$ est la mesure d'Euler-Poincaré de G , cf [34], § 3 .

Exemples de sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ à quotient compact

Soit L un corps de nombres algébriques totalement réel possédant une valuation discrète v telle que le complété L_v correspondant soit isomorphe à \mathbb{Q}_p (e.g. $L = \mathbb{Q}$) . Soit S_∞ l'ensemble des places réelles de L . Choisissons un corps de quaternions D sur L qui soit décomposé en v (i.e. $D \otimes L_v \simeq M_2(L_v)$) et qui ne soit décomposé en aucune place réelle.

Si L' est une L -algèbre commutative, notons $G(L')$ le groupe des éléments de $D \otimes_L L'$ de norme réduite 1 ; le foncteur $L' \mapsto G(L')$ est représentable par un groupe algébrique G sur L qui est une forme anisotrope de SL_2 . Soit $S = \{v\} \cup S_\infty$, et soit Γ le groupe des S-unités de D (relativement à une base de D sur L) ; le groupe Γ est un sous-groupe discret de

$$G_S = \prod_{s \in S} G(L_s) = G(L_v) \times G_{S_\infty} .$$

Vu les hypothèses faites, G_{S_∞} est compact. D'autre part, le critère de Godement montre que G_S/Γ est compact. Il en résulte que Γ s'identifie à un sous-groupe discret à quotient compact de $G(L_v) \simeq SL_2(\mathbb{Q}_p)$; c'est l'exemple cherché. (Noter

que Γ peut avoir de la torsion ; mais il y a des sous-groupes d'indice fini de Γ qui n'en ont pas : par exemple, des groupes de congruence.)

Relations entre "volume fini" et "compacité"

L'argument utilisé pour l'équivalence $b_1) \Leftrightarrow b_2)$ peut être étendu à tous les groupes de Lie p -adiques, comme l'a remarqué Tamagawa. Plus précisément, soit G un groupe localement compact unimodulaire, soit U un sous-groupe ouvert compact de G , soit Γ un sous-groupe discret de G , et soit μ une mesure de Haar sur G . Soit S un système de représentants des doubles classes $\Gamma \backslash G / U$, et, pour tout $s \in S$, soit $g(s)$ l'ordre du groupe fini $\Gamma_s = \Gamma \cap sUs^{-1}$. L'espace homogène $\Gamma \backslash G$ est réunion disjointe des $sU \simeq (s^{-1}\Gamma_s s) \backslash U$. D'où

$$\mu(sU) = \mu(U)/g(s)$$

et

$$\mu(G/\Gamma) = \mu(U) \sum_{s \in S} \frac{1}{g(s)}.$$

Il y a donc équivalence entre

- i) G/Γ est de volume fini.
- ii) La série $\sum_{s \in S} 1/g(s)$ est convergente.

Ces propriétés sont évidemment impliquées par :

- iii) G/Γ est compact (i.e. S est fini).

On voit en outre que, si i) est vérifiée, la propriété iii) est équivalente à :

- iv) Les entiers $g(s)$ sont bornés.

Exemples

a) Γ est sans torsion. Les $g(s)$ sont tous égaux à 1, et l'on a i) \Leftrightarrow iii) : c'est le cas du théorème 5.

b) Le groupe G est un groupe de Lie sur \mathbb{Q}_p ; on peut alors choisir U de telle sorte que ce soit un pro- p -groupe sans torsion (utiliser l'application exponentielle, par exemple). Les $g(s)$ sont encore égaux à 1 et l'on a l'équivalence i) \Leftrightarrow iii) .

Par contre, en égale caractéristique, il existe des sous-groupes discrets Γ tels

que G/Γ soit de volume fini et non compact ; nous en verrons un exemple au n° suivant.

Exercices

1) On suppose K localement compact. Montrer que tout sous-groupe discret sans torsion de $PGL_2(K)$ est libre (même méthode que pour le th. 4).

2) (Ihara) Soient G un groupe, U un sous-groupe de G et X l'espace homogène G/U . On note P_0 l'image dans X de l'élément neutre de G . On se donne une application $(P,Q) \mapsto d(P,Q)$ de $X \times X$ dans \mathbb{N} vérifiant les conditions suivantes :

i) $d(gP, gQ) = d(P, Q)$ pour tous $P, Q \in X$ et $g \in G$.

ii) d est symétrique, et $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

iii) Pour tout $n \geq 0$, le nombre d_n des éléments $Q \in X$ tels que $d(P_0, Q) = n$ est fini.

On pose $q = d_1 - 1$. Deux points P, Q de X sont dits liés si $d(P, Q) = 1$; cela définit sur X une structure de graphe combinatoire invariante par G .

a) Pour tout entier $n \geq 0$, on note Θ_n la correspondance qui transforme $P \in X$ en la somme des points $Q \in X$ tels que $d(P, Q) = n$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

iv) X est un arbre, et d la fonction distance correspondante.

v) Les Θ_n vérifient les formules (cf. n° 1.1, exerc. 3) :

$$v_1) \quad \Theta_1 \Theta_1 = \Theta_2 + (q+1) \Theta_0$$

$$v_2) \quad \Theta_1 \Theta_n = \Theta_{n+1} + q \Theta_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

b) On suppose i), ..., iv) vérifiés. Soit Γ un sous-groupe de G , ne contenant aucun élément d'ordre 2, et tel que $\Gamma \cap gUg^{-1} = \{1\}$ pour tout $g \in G$. Montrer que Γ opère librement et sans inversion sur l'arbre X ; en déduire que c'est un groupe libre.

1.6. Un théorème de Nagao

Il s'agit de la structure de $GL_2(k[t])$, où $k[t]$ est l'anneau des polynômes en une indéterminée t sur un corps commutatif k . Si R est un anneau commutatif, on pose

$$B(R) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \cap GL_2(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in R^*, b \in R \right\}.$$

Par exemple :

$$B(k[t]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in k^*, b \in k[t] \right\}.$$

THEOREME 6 - Le groupe $GL_2(k[t])$ est somme des sous-groupes $GL_2(k)$ et $B(k[t])$ amalgamés suivant leur intersection $B(k)$:

$$GL_2(k[t]) = GL_2(k) *_{B(k)} B(k[t]) .$$

(Il y a un énoncé analogue pour SL_2 , cf. exerc. 2.)

Ce résultat a été démontré par H. Nagao [19] par une méthode directe. Nous allons en donner une démonstration différente, basée sur l'action du groupe $GL_2(k[t])$ sur un arbre convenable ; cette démonstration, moins simple que celle de Nagao, a l'avantage de pouvoir s'adapter à d'autres anneaux que $k[t]$, cf. § 2.

Notations

On pose $K = k(t)$, $\Gamma = GL_2(k[t])$. On munit K de la valuation discrète v correspondant au "point à l'infini" :

$$v\left(\frac{a}{b}\right) = \deg(b) - \deg(a) \text{ si } a, b \in k[t] , b \neq 0 .$$

L'anneau de valuation $\underline{0}$ correspondant est formé des a/b tels que

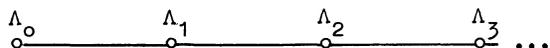
$$\deg(b) \geq \deg(a) ;$$

on choisit pour uniformisante l'élément $\frac{1}{t}$. Le complété \hat{K} de K est le corps de séries formelles $k\left(\left(\frac{1}{t}\right)\right)$.

On pose $V = K^2$; la base canonique de V est notée $\{e_1, e_2\}$. Si n est un entier ≥ 0 , on note L_n le réseau de base $\{e_1 t^n, e_2\}$, et Λ_n le sommet correspondant de l'arbre X associé à V . On a

$$L_n \subset L_{n+1} \text{ et } L_{n+1}/L_n \simeq \underline{0}/t^{-1}\underline{0} \simeq k .$$

Les Λ_n sont les sommets d'un chemin sans aller-retour T :



On pose également

$$\Gamma_0 = GL_2(k)$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\Gamma_n = \left(\begin{smallmatrix} * & d \\ 0 & * \end{smallmatrix} \stackrel{\circ}{\cong} n \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in k^*, b \in k[t], \deg(b) \leq n \right\} .$$

PROPOSITION 3 - (a) Les Λ_n sont deux à deux non équivalents mod Γ .

(b) Γ_n est le stabilisateur de Λ_n dans Γ .

(c) Γ_0 opère transitivement sur l'ensemble des arêtes d'origine Λ_0 .

(d) Pour $n \geq 1$, Γ_n laisse fixe l'arête $\Lambda_n \Lambda_{n+1}$ et opère transitivement sur l'ensemble des arêtes d'origine Λ_n distinctes de $\Lambda_n \Lambda_{n+1}$.

Soit $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de Γ transformant Λ_n en Λ_{n+m} . Par hypothèse, il existe un entier h tel que $sL_n = t^{-h}L_{n+m}$; comme $v(\det(s)) = 0$, la prop. 1 montre que $m = 2h$. En écrivant que s applique L_n dans $t^{-h}L_{n+2h}$, on obtient les conditions :

$$\deg(a) \leq h, \quad \deg(b) \leq n+h, \quad \deg(c) \leq n-h, \quad \deg(d) \leq -h.$$

Les conditions portant sur a et d sont impossibles à réaliser simultanément si $h \neq 0$, ce qui démontre (a). Pour $h = 0, n = 0$, les quatre conditions ci-dessus signifient que a, b, c, d sont des scalaires, i.e. que $s \in \Gamma_0$; pour $h = 0, n \geq 1$, elles signifient que a, d sont des scalaires, que $c = 0$, et que $\deg(b) \leq n$, i.e. que $s \in \Gamma_n$. D'où (b).

L'assertion (c) résulte de ce que l'ensemble des arêtes d'origine Λ_0 s'identifie à la droite projective $P_1(k)$, et que $GL_2(k)$ opère transitivement sur $P_1(k)$.

L'inclusion $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ montre que Γ_n laisse fixe l'arête $\Lambda_n \Lambda_{n+1}$. D'autre part, l'action de Γ_n sur le k -plan $L_n/t^{-1}L_n$ est donnée par l'homomorphisme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ où } b = b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n, \quad b_i \in k.$$

Son image dans $GL_2(k)$ est le sous-groupe triangulaire $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, sous-groupe qui opère sur la droite projective $P_1(k)$ en laissant fixe un point (correspondant à l'arête $\Lambda_n \Lambda_{n+1}$) et en agissant transitivement sur les autres. D'où (d).

COROLLAIRE - Le chemin $T = \underset{0}{\overset{\Lambda_0}{\circ}} \text{---} \underset{0}{\overset{\Lambda_1}{\circ}} \dots$ est un domaine fondamental de X mod Γ .

Notons d'abord que Γ est contenu dans $GL(V)^0$, donc opère sans inversion sur X , et le graphe quotient $X' = \Gamma \backslash X$ est défini. Vu (a), la projection $X \rightarrow X'$

définit un isomorphisme de T sur un sous-graphe T' de X' , et tout revient à montrer que T' est égal à X' . Comme X' est connexe, il suffit de prouver que T' est ouvert dans X' , c'est-à-dire que toute arête y de X' dont l'origine P appartient à T' est contenue dans T' . Par hypothèse, P est l'image d'un sommet Λ_n de T , et y est l'image d'une arête \tilde{y} de X d'origine Λ_n . Si $n = 0$, (c) montre que \tilde{y} est congrue mod Γ à $\Lambda_0\Lambda_1$, donc que y appartient à $\text{ar } T'$. Si $n \geq 1$, (d) montre que \tilde{y} est congrue mod Γ , soit à $\Lambda_n\Lambda_{n+1}$, soit à $\Lambda_n\Lambda_{n-1}$, et l'on a encore $y \in \text{ar } T'$, cqfd.

Remarque. La bijectivité de $\text{som } T \rightarrow \text{som } \Gamma \backslash X$ peut aussi se déduire du fait (dû à Grothendieck) que tout fibré vectoriel sur la droite projective P_1/k est somme directe de fibrés de rang 1 ; nous reviendrons là-dessus au § 2.

Démonstration du théorème 6

Puisque T est un domaine fondamental de $X \text{ mod } \Gamma$, le th. 10 du chap. I, n° 4.5 montre que Γ s'identifie à la limite inductive de l'arbre de groupes défini par T et les Γ_n . En d'autres termes, Γ est somme des groupes Γ_n amalgamés suivant les $\Gamma_n \cap \Gamma_{n+1}$. Cet amalgame peut se faire en deux étapes :

i) On construit l'amalgame des Γ_n , $n \geq 1$. Comme les Γ_n forment une suite croissante, on trouve simplement leur réunion, i.e. le groupe $B(k[t])$.

ii) On amalgame $\Gamma_0 = GL_2(k)$ avec $B(k[t])$ suivant $B(k)$. Cela donne

$$\Gamma = GL_2(k) *_{B(k)} B(k[t]), \quad \text{cqfd.}$$

Remarque

Supposons k fini. Le groupe $SL_2(k[t])$ est alors un sous-groupe discret du groupe localement compact $SL_2(\hat{k}) = SL_2(k((\frac{1}{t})))$, et il est facile de voir (cf. exerc. 6) que le quotient est de volume fini bien que non compact.

Exercices

1) Etendre le th. 6 et la prop. 3 au cas où le corps k est non commutatif.

L'ARBRE DE SL_2

2) On pose $SB(R) = SL_2(R) \cap B(R)$. Montrer que l'on a :

$$SL_2(k[t]) = SL_2(k) *_{SB(k)} SB(k[t]) .$$

(Utiliser le th. 6, ainsi que l'exerc. 2 du chap. I, n° 1.3.)

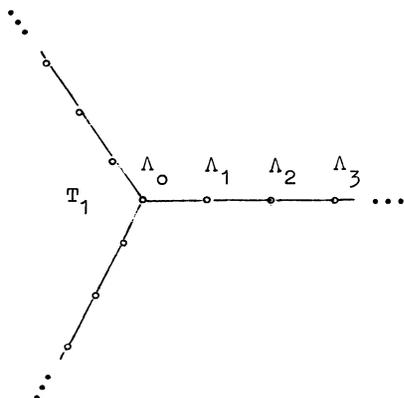
3) (Nagao) Montrer que $GL_2(k[t])$ et $SL_2(k[t])$ ne sont pas des groupes de type fini. (Utiliser le fait que le groupe additif $k[t]$ n'est pas un module de type fini sur l'algèbre du groupe multiplicatif k^* .)

4) On prend $k = \mathbb{F}_2$. Montrer que $GL_2(k[t])$ peut être défini par la famille génératrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, T_n = \begin{pmatrix} 1 & t^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

et par les relations

$$s^2 = 1, (sT_0)^3 = 1, T_n^2 = 1 \quad (n \geq 0), T_n T_m = T_m T_n \quad (n, m \geq 0).$$



5) Soit Γ_1 le noyau de $\Gamma \rightarrow GL_2(k)$ donné par $t \mapsto 0$. Soit

$$C = \Gamma_1 \cap B(k[t]) = \begin{pmatrix} 1 & tk[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit S un ensemble de représentants de $GL_2(k)/B(k) \simeq P_1(k)$ et soit T_1 le sous-graphe de X réunion des sT , $s \in S$.

Montrer que T_1 est un arbre, et que c'est un domaine fondamental de Γ_1 dans X . En déduire que Γ_1 est produit libre des sCs^{-1} , pour s parcourant S .

6) On suppose k fini. On pose $q = \text{Card}(k)$, $\Gamma^0 = SL_2(k[t])$, $G = SL_2(\hat{K})$ et $g(n) = \text{Card}(\Gamma_n \cap \Gamma^0)$ pour $n \geq 0$. On a $g(0) = q(q^2 - 1)$ et

$$g(n) = (q - 1)q^{n+1} \quad \text{pour } n \geq 1 .$$

On munit le groupe localement compact G de la mesure de Haar μ normalisée comme on l'a expliqué au n° 1.5. Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} \mu(G/\Gamma^0) &= (q - 1) \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{g(n)} = (q - 1) \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{g(n)} \\ &= 1/(q^2 - 1) . \end{aligned}$$

1.7. Lien avec les systèmes de Tits

Systèmes de Tits

Rappelons (cf. Bourbaki, Gr. et Alg. de Lie, [36], § 2) qu'un système de Tits (ou une "BN-paire") est un quadruplet (G, B, N, S) où G est un groupe, B et N deux sous-groupes de G , et S une partie de $W = N/(B \cap N)$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(T1) L'ensemble $B \cup N$ engendre G et $B \cap N$ est un sous-groupe distingué de N .

(T2) L'ensemble S engendre $W = N/(B \cap N)$ et se compose d'éléments d'ordre 2.

(Si $w \in W$, on note $C(w)$ la double classe BwB ; on pose également

$${}^w B = wBw^{-1} .)$$

(T3) On a $C(s)C(w) \subset C(w) \cup C(sw)$ pour $s \in S$ et $w \in W$.

(T4) Pour tout $s \in S$, on a ${}^s B \not\subset B$.

Le groupe W est appelé le groupe de Weyl de (G, B, N, S) ; le couple (W, S) est un système de Coxeter (loc. cit., th. 2). Le groupe G est réunion disjointe des doubles classes $C(w)$, $w \in W$ ("décomposition de Bruhat").

Si S' est une partie de S , on note $W_{S'}$ le sous-groupe de W engendré par S' , et l'on pose

$$G_{S'} = BW_{S'}B = \bigcup_{w \in W_{S'}} C(w) .$$

On sait (loc. cit., th. 3) que $S' \mapsto G_{S'}$ est une bijection de l'ensemble des parties de S sur l'ensemble des sous-groupes de G contenant B . On dit que $G_{S'}$ est le sous-groupe parabolique standard de type S' , et que $\text{Card}(S')$ est son rang.

Systèmes de Tits à groupe de Weyl de type $o \text{---} \infty \text{---} o$

Soit (G, B, N, S) un système de Tits, et supposons que (W, S) soit de type \tilde{A}_1 , c'est-à-dire que S soit formé de deux éléments $\{s_1, s_2\}$ et que W soit infini (auquel cas W est un groupe diédral infini engendré par s_1 et s_2). Notons G_1 et G_2 les sous-groupes paraboliques standard correspondant aux parties $\{s_1\}$

L'ARBRE DE SL_2

et $\{s_2\}$ de S . On a

$$G_1 = B \cup C(s_1) , \quad G_2 = B \cup C(s_2) .$$

THEOREME 7 - Le groupe G est somme des groupes G_1 et G_2 amalgamés suivant leur intersection B :

$$G = G_1 *_B G_2 .$$

Le sous-groupe G' de G engendré par G_1 et G_2 contient B , donc est de la forme $G_{S'}$, avec $S' \subset S$. Comme S' contient s_1 et s_2 , on a $S' = S$, d'où $G' = G$.

Il reste à montrer que, si \tilde{g} est un élément $\neq 1$ de $G_1 *_B G_2$, son image g dans G est $\neq 1$. Posons $I = \{1,2\}$ et soit

$$(i_1, \dots, i_n) \in I^n , \quad i_j \neq i_{j+1} \quad (1 \leq j < n) , \quad n = \ell(g) ,$$

le type du mot réduit représentant \tilde{g} (cf. chap. I, n° 1.2). Distinguons deux cas :

a) $n = 0$.

On a alors $\tilde{g} \in B$, et comme $B \rightarrow G$ est injectif, on a bien $g \neq 1$.

b) $n \geq 1$.

Soit $w = s_{i_1} \dots s_{i_n} \in W$. Comme $W = \{1, s_1\} * \{1, s_2\}$, c'est un élément de longueur n de W ; en particulier on a $w \neq 1$. D'autre part, on peut écrire \tilde{g} sous la forme

$$\tilde{g} = b p_1 \dots p_n , \quad \text{avec } b \in B \text{ et } p_j \in G_{i_j} - B , \quad 1 \leq j \leq n .$$

On a $p_j \in C(s_{i_j})$. D'après le cor. 1 au th. 2 de Bourbaki (loc. cit.) on en déduit que g appartient à $C(w)$. Comme $w \neq 1$, cela entraîne $g \neq 1$, cqfd.

Remarque

Soit X l'immeuble défini par (G, B, N, S) , cf. Bourbaki, loc. cit., exerc. 10. Le th. 7 équivaut à dire que X est un arbre sur lequel G opère sans inversion avec pour domaine fondamental un segment $x_1 x_2$, les stabilisateurs de x_1 et x_2 étant respectivement G_1 et G_2 .

Exemples

1) On prend :

$$G = SL_2(K)$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q}) , \quad c \equiv 0 \pmod{\pi} \right\}$$

$$N = G \cap \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \cup G \cap \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} = \text{norm. du tore standard}$$

$$S = \{s_1, s_2\} \quad \text{où} \quad s_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\pi^{-1} \\ \pi & 0 \end{pmatrix} .$$

On vérifie que (G, B, N, S) est un système de Tits (c'est un cas très particulier des résultats d'Iwahori-Matsumoto, Publ. Math. I.H.E.S., [39] - voir aussi Bourbaki, loc. cit., exerc. 21). Comme $s_1 s_2$ est d'ordre infini, c'est un système de Tits de type $o \text{---} \overset{\infty}{\text{---}} o$. Les sous-groupes paraboliques G_1 et G_2 sont :

$$G_1 = SL_2(\mathbb{Q})$$

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & \pi^{-1} b \\ \pi c & d \end{pmatrix} , \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q}) \right\} .$$

D'après le th. 7, on a $SL_2(K) = G_1 *_B G_2$: on retrouve le cor. 1 au th. 3.

L'immeuble attaché au système de Tits (G, B, N, S) s'identifie à l'arbre X du n° 1.1.

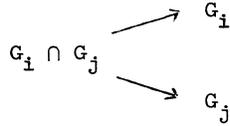
2) D'après Bruhat-Tits, on a des résultats analogues lorsque l'on part d'un groupe algébrique \underline{G} simple et simplement connexe, de rang relatif 1 sur un corps local K (supposé commutatif, à corps résiduel parfait). Le groupe $G = \underline{G}(K)$ possède un système de Tits de type $o \text{---} \overset{\infty}{\text{---}} o$ et l'immeuble correspondant X est un arbre. Une bonne partie de ce qui a été fait dans les n°s précédents se généralise ; par exemple, si K est localement compact, tout sous-groupe discret sans torsion de G est un groupe libre (la démonstration est la même que pour le théorème de Ihara).

Systèmes de Tits et amalgames : cas général

Soit G un groupe, et soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G . Nous dirons (par abus de langage) que G est somme des G_i amalgamés suivant leurs intersections si G est limite inductive (cf. chap. I, n° 1.1) du système formé

L'ARBRE DE SL_2

par les G_i , les $G_i \cap G_j$, et les inclusions



THEOREME 8 (Tits) - Soit (G,B,N,S) un système de Tits ; pour tout $s \in S$, soit $G_s = G_{\{s\}}$ le sous-groupe parabolique standard correspondant. Alors G est somme de N et des G_s ($s \in S$) amalgamés suivant leurs intersections.

Démonstration (d'après une lettre de Tits du 13/6/1968 - voir aussi [41], § 13)

Supposons d'abord seulement que (G,B,N,S) vérifie les propriétés (T_1) , (T_2) , (T_4) et que (W,S) soit un système de Coxeter. On a :

LEMME 2 - La propriété (T_3) est équivalente à la conjonction des deux suivantes :

(T_5) Pour tout $s \in S$, on a $C(s)C(s) = B \cup C(s)$.

(T_6) Si $s \in S$ et $w \in W$ sont tels que $\ell(sw) > \ell(w)$, on a

$$C(s)C(w) = C(sw) .$$

(On note $\ell(w)$ la longueur de w dans le groupe de Coxeter W , cf. Bourbaki, loc. cit.)

L'implication $(T_3) \Rightarrow \{(T_5) \text{ et } (T_6)\}$ est démontrée dans Bourbaki. Inversement, supposons (T_5) et (T_6) vérifiées, et soient $s \in S$, $w \in W$. Il faut prouver que l'on a

$$C(s)C(w) \subset C(w) \cup C(sw) .$$

C'est clair si $\ell(sw) > \ell(w)$ d'après (T_6) . Sinon, on a $\ell(sw) < \ell(w)$. En appliquant (T_6) à s et sw , on trouve

$$C(s)C(sw) = C(w) .$$

D'où $C(s)C(w) = C(s)C(s)C(sw) \subset (B \cup C(s))C(sw)$ [d'après (T_5)]

$$\subset C(sw) \cup C(s)C(sw)$$

$$\subset C(sw) \cup C(w) .$$

LEMME 3 - Supposons que la propriété (T₅) du lemme 2 soit satisfaite. Soient
s ∈ S , w ∈ W tels que ℓ(sw) > ℓ(w) . Posons

$$B_s = {}^s B \cap B , \quad B_w = {}^w B \cap B , \quad B_{sw} = {}^{sw} B \cap B \quad \text{et} \quad {}^s B_w = s B_w s^{-1} = s B_w s .$$

Il y a alors équivalence entre

$$(T_6) \quad C(s)C(w) = C(sw)$$

et

$$(T_7) \quad B_s B_w = B .$$

De plus, ces propriétés entraînent :

$$(T_8) \quad B_{sw} = {}^s B_w \cap B .$$

Si (T₆) est vérifiée, on a $C(s)C(w) \cap C(w) = \emptyset$. En multipliant à droite par w^{-1} , cela donne

$$C(s) \cdot {}^w B \cap B \cdot {}^w B = \emptyset , \quad \text{i.e.} \quad C(s) \cap {}^w B = \emptyset .$$

D'après (T₅) , on a ${}^s B \subset B \cup C(s)$. D'où :

$${}^s B \cap {}^w B \subset (B \cup C(s)) \cap {}^w B = B \cap {}^w B = B_w ,$$

et, en conjuguant par s ,

$$B \cap {}^{sw} B \subset {}^s B_w , \quad \text{i.e.} \quad B_{sw} \subset {}^s B_w .$$

D'où $B_{sw} \subset {}^s B_w \cap B$; comme l'inclusion opposée est triviale, cela montre que

(T₆) ⇒ (T₈) . D'autre part la formule $C(s)C(w) = C(sw)$ montre que $B \subset sBs \cdot wBw^{-1}$, donc que tout $b \in B$ s'écrit $b = xy$, avec $x \in sBs$, $y \in wBw^{-1}$. On a

$$y = x^{-1}b \in sBsB \cap wBw^{-1} \subset (B \cup C(s)) \cap {}^w B = B_w$$

en vertu de ce qui a été vu plus haut. On en conclut que y appartient à B ,

donc aussi x , et l'on a $b \in B_s \cdot B_w$, d'où (T₇) .

Inversement, supposons (T₇) vérifiée. On a

$$B = B_s B_w \subset {}^s B_w B ,$$

i.e. $B \subset sBs \cdot wBw^{-1}$, ou encore $sBw \subset Bsw$, ce qui équivaut à (T₆) .

Revenons maintenant au cas où (G, B, N, S) est un système de Tits et désignons par \tilde{G} la somme de N et des $G_s (s \in S)$ amalgamés suivant leurs intersections . Pour

éviter des confusions, nous noterons \tilde{N} , \tilde{B} , \tilde{G}_s les images de N , B , G_s dans \tilde{G} ; la projection canonique $\varphi : \tilde{G} \rightarrow G$ induit un isomorphisme de \tilde{N} sur N , de \tilde{B} sur B , de \tilde{G}_s sur G_s , de $\tilde{N} \cap \tilde{G}_s$ sur $N \cap G_s$. (Noter que l'intersection de G_s et $G_{s'}$, pour $s \neq s'$, est réduite à B .) On identifie $\tilde{W} = \tilde{N}/(\tilde{B} \cap \tilde{N})$ à W .

LEMME 4 - $(\tilde{G}, \tilde{B}, \tilde{N}, S)$ est un système de Tits.

Il nous faut vérifier les analogues $(\tilde{T}_1), \dots, (\tilde{T}_4)$ des axiomes $(T_1), \dots, (T_4)$ pour (G, B, N, S) . Les axiomes (\tilde{T}_1) , (\tilde{T}_2) et (\tilde{T}_4) sont immédiats. D'autre part, les lemmes 2 et 3 ci-dessus permettent de remplacer (\tilde{T}_3) par (\tilde{T}'_5) et (\tilde{T}'_7) . Or l'axiome (\tilde{T}'_5) :

$$\tilde{C}(s)\tilde{C}(s) = \tilde{B} \cup \tilde{C}(s)$$

ne fait intervenir que des parties du groupe \tilde{G}_s ; comme $\varphi : \tilde{G}_s \rightarrow G_s$ est un isomorphisme, cet axiome est bien vérifié.

Il reste à démontrer

$$(\tilde{T}'_7) \quad \tilde{B}_s \tilde{B}_w = \tilde{B} \quad \text{pour } s \in S, w \in W \text{ et } l(sw) > l(w) .$$

On va d'abord montrer, par récurrence sur $l(w)$, que $\varphi(\tilde{B}_w) = B_w$. C'est vrai si $w = 1$. On est donc ramené à prouver que, si c'est vrai pour w et si $s \in S$ est tel que $l(sw) > l(w)$, c'est vrai pour sw . D'après (T_8) , on a

$$B_{sw} = {}^s B_w \cap B = {}^s \varphi(\tilde{B}_w) \cap \varphi(\tilde{B}) .$$

Or \tilde{B} , \tilde{B}_w et s se trouvent dans \tilde{G}_s qui est appliqué isomorphiquement sur G_s ; on a donc ${}^s \varphi(\tilde{B}_w) \cap \varphi(\tilde{B}) = \varphi({}^s \tilde{B}_w \cap \tilde{B})$, i.e.

$$B_{sw} = {}^s B_w \cap B = \varphi({}^s \tilde{B}_w \cap \tilde{B}) .$$

Comme on a évidemment ${}^s \tilde{B}_w \cap \tilde{B} \subset \tilde{B}_{sw}$, cela montre que $\varphi(\tilde{B}_{sw})$ contient B_{sw} ; l'inclusion opposée est triviale.

Ceci étant, on a $\varphi(\tilde{B}_s \tilde{B}_w) = \varphi(\tilde{B}_s) \varphi(\tilde{B}_w) = B_s B_w = B$. Comme $\varphi : \tilde{B} \rightarrow B$ est un isomorphisme, cela entraîne que $\tilde{B}_s \tilde{B}_w = \tilde{B}$, et achève la démonstration du lemme.

Le théorème 8 est maintenant immédiat. En effet, puisque $(\tilde{G}, \tilde{B}, \tilde{N}, S)$ est un système de Tits, \tilde{G} est réunion disjointe des doubles classes $\tilde{C}(w)$, $w \in W$, et φ

applique $\tilde{C}(w)$ dans $C(w)$. Si $x \in \text{Ker}(\varphi)$, on a donc nécessairement

$$x \in \tilde{C}(1) = \tilde{B},$$

et comme la restriction de φ à \tilde{B} est injective, cela entraîne $x = 1$. Ainsi φ est injectif; le fait qu'il soit surjectif résulte simplement de ce que G est engendré par B et les G_s .

COROLLAIRE 1 - Supposons que S soit non vide, et que, si s, t sont des éléments différents de S , l'ordre de st dans W soit infini. Alors $G = *_B G_s$.

Vu la structure des groupes de Coxeter (Bourbaki, loc. cit.) l'hypothèse faite entraîne que W est produit libre des sous-groupes $W_s = \{1, s\}$. Si $H = B \cap N$, on a $W = N/H$, donc $N = *_H N_s$ avec $N_s = W_s H = N \cap G_s$, et l'on peut supprimer N de l'amalgame qui donne G .

Noter que, pour $\text{Card}(S) = 2$, on retrouve le théorème 7.

COROLLAIRE 2 - Si $\text{Card}(S) \geq 2$, le groupe G est somme de ses sous-groupes paraboliques standard de rang 2, amalgamés suivant leurs intersections.

L'argument est le même que ci-dessus; on utilise le fait que W est somme des $W_{S'}$ (avec $\text{Card}(S') = 2$) amalgamés suivant leurs intersections.

COROLLAIRE 3 - Si $\text{Card}(S)$ est fini ≥ 3 , le groupe G est somme de ses sous-groupes paraboliques standard propres maximaux, amalgamés suivant leurs intersections (ou suivant les paraboliques standard de rang 1, cela revient au même).

Cela résulte du corollaire 2.

Exercices

1) Soit (G, B, N, S) un système de Tits de type $o \text{---} \infty \text{---} o$, soit $G = G_1 *_B G_2$ la décomposition de G fournie par le th. 7, et soit X l'arbre correspondant. Soit x_i ($i = 1, 2$) le sommet de X de stabilisateur G_i ; le stabilisateur de l'arête $x_1 x_2$ est B . Démontrer les propriétés suivantes :

a) Le nombre des arêtes de X d'origine un sommet donné est ≥ 3 .

b) Pour tout $n \geq 0$ et tout $i = 1, 2$, le groupe G_i opère transitivement sur l'ensemble des $x \in \text{som } X$ tels que $d(x, x_i) = n$.

2) Soit X un arbre sur lequel opère un groupe G , et soit $x_1 x_2$ un segment qui soit un domaine fondamental de $X \text{ mod } G$. Soient G_1 , G_2 et B les stabi-

L'ARBRE DE SL_2

lisateurs de x_1 , x_2 et x_1x_2 . On suppose que les propriétés (a) et (b) de l'exercice précédent sont vérifiées. Soient $s_i \in G_i - B$ ($i = 1, 2$). Montrer que toute double classe de G modulo B contient un élément et un seul de la forme

$$s_{i_1} \dots s_{i_n}, \quad \text{avec } i_j \in \{1, 2\} \text{ et } i_j \neq i_{j+1} \text{ pour } 1 \leq j < n.$$

En déduire que B est un sous-groupe de Tits de G (au sens de Bourbaki, loc. cit., exerc. 3) et que le groupe de Weyl correspondant est diédral infini.

§ 2 - Sous-groupes arithmétiques des groupes GL_2 et SL_2
sur un corps de fonctions d'une variable

Notations

Soient k_0 un corps commutatif, et C une courbe projective lisse géométriquement connexe sur k_0 , de genre g . On note K le corps des fonctions de C ; k est une extension de k_0 de degré de transcendance 1, et k_0 est algébriquement fermé dans K .

Les points fermés de C correspondent aux valuations discrètes de K triviales sur k_0 . Si Q est un tel point, on note v_Q la valuation correspondante, \underline{O}_Q son anneau local, $\kappa(Q)$ son corps résiduel, et $\deg(Q)$ le degré de $\kappa(Q)$ sur k_0 . On note e le pgcd des $\deg(Q)$; lorsque k_0 est fini, ou algébriquement clos, on a $e = 1$.

On choisit un point fermé P de C , et l'on pose

$$v = v_P, \underline{O} = \underline{O}_P, k = \kappa(P), d = \deg(P),$$

de sorte que (K, v, \underline{O}, k) satisfait aux hypothèses du § 1.

On pose $C^{\text{aff}} = C - \{P\}$; c'est une courbe affine ayant pour unique "point à l'infini" le point P . Son algèbre affine A est un anneau de Dedekind dont les idéaux premiers correspondent aux points de C distincts de P . On a $A^* = k_0^*$.

On pose $V = K^2$, de sorte que $GL(V) = GL_2(K)$. On se propose d'étudier le sous-groupe $\Gamma = GL_2(A)$ de $GL(V)$, ainsi que ses sous-groupes d'indice fini, et en particulier $SL_2(A)$ lorsque k_0 est fini. On utilisera pour cela l'action de Γ sur l'arbre X des classes de \underline{O} -réseaux de V , cf. § 1.

Exemple

Lorsque C est la droite projective, et P son point à l'infini, on a $k = k_0$, $A = k[t]$, $K = k(t)$. Ce cas a été traité au n° 1.6. On y reviendra au n° 2.4.

2.1. Interprétation des sommets $\Gamma \backslash X$ comme classes de fibrés vectoriels de rang 2 sur C

Soit L un \mathbb{Q} -réseau de $V = K^2$. A L , on associe :

a) le sommet x_L de l'arbre X défini par L , cf. n° 1.1. (Rappelons que tout sommet de X est de la forme x_L , pour un réseau L convenable, et que $x_{L'} = x_L$, si et seulement si il existe $\alpha \in K^*$ tel que $L' = \alpha L$.)

b) le sous-faisceau cohérent E_L du faisceau constant V sur C caractérisé par les deux propriétés suivantes :

b_1) en tout point Q de C^{aff} , le localisé $(E_L)_Q$ de E_L est $(\mathbb{O}_Q)^2$;

b_2) le localisé $(E_L)_P$ de E_L en P est L .

L'existence et l'unicité d'un tel faisceau sont immédiates.

Comme E_L est localement libre de rang 2, on peut l'interpréter comme un fibré vectoriel de rang 2 sur C : c'est l'identification habituelle d'un fibré vectoriel avec le faisceau de ses germes de sections. Sa fibre en P est $L/\pi L$, où π est une uniformisante de \mathbb{O} . Vu b_1), on a :

i) La restriction de E_L à C^{aff} est un fibré trivial.

De plus :

ii) Si $\alpha \in K^*$, et si $n = v(\alpha)$, on a $E_{\alpha L} = I_P^{\otimes n} \otimes E_L$ où I_P est le faisceau d'idéaux du point P sur C ;

iii) Si L' est un \mathbb{Q} -réseau de V , les fibrés E_L et $E_{L'}$ sont isomorphes si et seulement si il existe $s \in \Gamma = GL_2(A)$ tel que $L' = sL$.

(Plus généralement, les homomorphismes de E_L dans $E_{L'}$ sont donnés par les matrices $s \in M_2(A)$ telles que $sL \subset L'$.)

Disons que deux fibrés vectoriels E et E' sur C sont I_P -équivalents s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que E' soit isomorphe à $I_P^{\otimes n} \otimes E$. Les propriétés i), ii), iii) ci-dessus entraînent :

PROPOSITION 4 - La correspondance $x_L \leftrightarrow L \leftrightarrow E_L$ induit une bijection de $\text{som}(\Gamma \backslash X)$ sur l'ensemble des classes de I_P -équivalence des fibrés vectoriels de rang 2 sur C dont les restrictions à C^{aff} sont triviales.

Remarques

1) Dans cette correspondance, le groupe $\text{Aut}(E)$ des automorphismes d'un fibré E s'interprète comme le fixateur dans Γ d'un sommet correspondant à E .

2) Les arêtes correspondent aux couples de faisceaux (E, E') tels que E' soit un sous-faisceau de E , et que le faisceau quotient E/E' soit nul en dehors de P , et de longueur 1 (comme \mathcal{O} -module) en P ; on observera qu'un tel sous-faisceau est caractérisé par la donnée d'une droite de la fibre $E(P)$ de E en P .

3) Le réseau standard \mathcal{O}^2 correspond au fibré trivial 1^2 de rang 2 (où 1 désigne le fibré trivial de rang 1). Vu 1), son fixateur dans Γ est $GL_2(k_0)$.

4) Le groupe Γ est contenu dans le groupe noté $GL(V)^0$ au n° 1.2. Il en résulte qu'il conserve la partition de $\text{som}(X)$ en sommets pairs (i.e. à distance paire du sommet standard défini par 1^2), et sommets impairs; on peut donc parler des sommets pairs et des sommets impairs de $\Gamma \backslash X$; deux sommets liés sont de parité différente.

5) Il y a des résultats analogues pour le groupe $\Gamma_1 = SL_2(A)$, cf. exerc. 2.

Déterminant d'un fibré

Si E est un fibré vectoriel de rang 2 sur C , on pose

$$\det(E) = \wedge^2 E.$$

C'est un fibré de rang 1 (autrement dit un faisceau inversible). Son degré (= degré d'une section rationnelle) sera noté $\text{deg}(E)$.

On a :

LEMME 5 - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) La restriction de E à C^{aff} est triviale.
- i') La restriction de $\det(E)$ à C^{aff} est triviale.
- i'') Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\det(E)$ soit isomorphe à $1_P^{\otimes n}$.

L'équivalence $i) \Leftrightarrow i')$ résulte de ce que C^{aff} est de dimension 1 (on peut aussi remarquer que la restriction de E à C^{aff} correspond à un A -module projectif de rang 2, et invoquer la classification de tels modules). L'équivalence $i') \Leftrightarrow i'')$ est immédiate.

SOUS-GROUPES ARITHMÉTIQUES

Exemple - Si L est un \mathbb{Q} -réseau de V , on a $\det(E_L) = I_P^{\otimes n}$, avec $n = \chi(\mathbb{Q}^2, L)$, cf. n° 1.2. Il en résulte que

$$\deg(E_L) = -n \deg(P) = -nd.$$

Remarque

Soit E un fibré satisfaisant aux conditions du Lemme 5. La formule

$$\det(I_P^{\otimes m} \otimes E) = I_P^{\otimes 2m} \otimes \det(E)$$

montre que l'on peut choisir m de telle sorte que le déterminant du fibré $I_P^{\otimes m} \otimes E$ soit isomorphe à $\mathbb{1}$ ou à I_P . On en déduit :

PROPOSITION 5 - La correspondance de la prop.4 induit une bijection de $\text{som}(\Gamma \backslash X)$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels E de rang 2 sur C tels que $\det(E)$ soit isomorphe à $\mathbb{1}$ ou à I_P .

Les sommets de $\Gamma \backslash X$ correspondant aux fibrés E tels que $\det(E) \sim \mathbb{1}$ sont les sommets pairs, au sens de la Remarque 4) ci-dessus ; les autres sont les sommets impairs.

Exercices

1) On pose $\tilde{\Gamma} = \text{PGL}_2(A) = \Gamma/k_0^*$, $\Gamma_1 = \text{SL}_2(A)$, $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1/\{\pm 1\}$, de sorte que $\tilde{\Gamma}_1$ s'identifie à un sous-groupe de $\tilde{\Gamma}$, lui-même plongé dans $\text{PGL}_2(K)$. Montrer que $\det : \Gamma \rightarrow k_0^*$ induit par passage au quotient un isomorphisme $\tilde{\Gamma}/\tilde{\Gamma}_1 \rightarrow k_0^*/k_0^{*2}$. En déduire que k_0^*/k_0^{*2} opère sur $\Gamma_1 \backslash X$, et que le quotient s'identifie à $\Gamma \backslash X$. En déduire :

- a) Pour qu'un sommet de $\Gamma \backslash X$, correspondant à un fibré E , soit l'image d'un seul sommet de $\Gamma_1 \backslash X$, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in k_0^*$, il existe $s \in \text{Aut}(E)$ tel que $\det(s) = \alpha$.
- b) Pour qu'une arête de $\Gamma \backslash X$ correspondant au couple de faisceaux $E \supset E'$, soit l'image d'une seule arête de $\Gamma_1 \backslash X$, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in k_0^*$, il existe $s \in \text{Aut}(E)$ tel que $\det(s) = \alpha$ et $s(E') = E'$.
- c) Si tout élément de k_0 est un carré, l'application $\Gamma_1 \backslash X \rightarrow \Gamma \backslash X$ est un isomorphisme.

2) Les notations sont celles de l'exerc.1.

a) Montrer que les éléments de $\text{som}(\Gamma_1 \backslash X)$ peuvent s'interpréter comme les classes de couples (E, f) , où E est un fibré de rang 2, et f un isomorphisme $\det(E) \sim I_P^{\otimes n}$, avec $n = -\frac{1}{d} \deg(E)$; deux couples (E, f) et (E', f') sont dans la même classe si et seulement si l'on peut trouver un entier m tel que

(E', f') soit isomorphe au couple (E_m, f_m) déduit de (E, f) par produit tensoriel avec $I_P^{\otimes m}$ (cela a un sens, car $\det(E_m) = I_P^{\otimes 2m} \otimes \det(E)$).

b) Interpréter de façon analogue les éléments de $\text{ar}(\Gamma_1 \backslash X)$ comme des classes de triplets (E, f, E') , où (E, f) sont comme dans a), et E' est un sous-faisceau de E tel que le faisceau E/E' soit nul en dehors de P , et de longueur 1 en P (on peut, si l'on préfère, remplacer la donnée de E' par celle d'une droite de la fibre $E(P)$ de E en P).

c) Utiliser ces interprétations pour retrouver les résultats de l'exerc. 1.

3) Soit H un sous- A -module de type fini de V qui soit un A -module projectif de rang 2, et soit $\Gamma_H = GL(H)$. On identifie H à un fibré vectoriel de rang 2 sur la courbe C^{aff} .

a) Définir une bijection de $\text{som}(\Gamma_H \backslash X)$ sur l'ensemble des classes de I_P -équivalence de fibrés vectoriels de rang 2 sur C dont les restrictions à C^{aff} sont isomorphes à H (même méthode que pour la prop.4).

b) Étendre à Γ_H les résultats démontrés pour Γ dans la suite de ce §.

4) Démontrer un résultat analogue à la prop.4 pour une courbe affine ayant un nombre fini quelconque de "points à l'infini" P_1, \dots, P_h , l'arbre X étant remplacé par le produit des arbres relatifs aux P_i (cf. Stuhler [21]).

5) Soit $x \in \text{som}(\Gamma \backslash X)$, et soit E un fibré correspondant à x . Pour que x soit un sommet terminal de $\Gamma \backslash X$ (cf. chap. I, n° 2.2), il faut et il suffit que le groupe $\text{Aut}(E)$ opère transitivement sur l'ensemble des k -droites de la fibre $E(P)$ de E en P .

6) On fait opérer $GL_2(k_0)$ sur la droite projective $P_1(k)$ par

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot z = (\alpha z + \beta) / (\gamma z + \delta).$$

a) Soit N le cardinal de l'ensemble des orbites. Montrer que :

$$N = 1 \quad \Leftrightarrow \quad d = 1 \quad (\text{on rappelle que } d = [k:k_0])$$

$$N = 2 \quad \Leftrightarrow \quad d = 2 \text{ ou } 3$$

$$N = 2 + \text{Card}(k_0) \quad \text{si } d = 4.$$

b) Soit x_1 le sommet standard de $\Gamma \backslash X$. Le cardinal de l'ensemble des arêtes de $\Gamma \backslash X$ d'origine x_1 est égal à N . En déduire que x_1 est un sommet terminal de $\Gamma \backslash X$ si et seulement si $d = 1$.

2.2. Fibrés de rang 1 et fibrés décomposables

Il s'agit de résultats bien connus, dans lesquels le choix du "point à l'infini" P n'intervient pas. Nous les rappellerons rapidement. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [21], [22], ... , [27].

Fibrés de rang 1

Les classes de fibrés vectoriels de rang 1 sur C forment un groupe $\text{Pic}(C)$, la loi de composition étant le produit tensoriel. On a une suite exacte

$$0 \rightarrow J(k_0) \rightarrow \text{Pic}(C) \xrightarrow{\text{deg}} e\mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

où e désigne le pgcd des degrés des points fermés de C , et J est la jacobienne de C .

Lorsque k_0 est un corps fini à q_0 éléments, le groupe $J(k_0)$ est fini. De façon plus précise, on a d'après un théorème de Weil

$$\text{Card}(J(k_0)) \leq (1 + q_0^{1/2})^{2g},$$

où $g = \dim J$ est le genre de C . On a en outre $e = 1$.

Sous-fibrés de rang 1 des fibrés de rang 2

Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur C . Soit F un sous-faisceau de rang 1 de E ; on sait que F est contenu dans un unique sous-faisceau de rang 1 maximal \bar{F} , qui est localement facteur direct dans E ; on peut, par exemple, définir \bar{F} comme l'intersection de E avec la droite de la fibre générique de E contenant F . Lorsque $F = \bar{F}$, on dit que F est un sous-fibré de rang 1 du fibré E ; le faisceau quotient E/F est alors un fibré de rang 1. Nous poserons

$$N(E; F) = \text{deg}(F) - \text{deg}(E/F) = 2\text{deg}(F) - \text{deg}(E)$$

et

$$N(E) = \sup_F N(E; F).$$

PROPOSITION 6 - (i) On a

$$-2(g + e - 1) \leq N(E) < \infty.$$

ii) Si E contient un sous-fibré F de rang 1 tel que $N(E; F) > 0$, ce fibré est unique; en particulier, on a $N(E) = N(E; F)$.

Rappelons la démonstration :

Pour (i), on remarque que $N(E)$ ne change pas lorsqu'on remplace E par $X \otimes E$, où X est un fibré de rang 1. Comme cette opération change le degré de E par

un multiple de $2e$, on peut supposer que

$$2g - 2 < \deg(E) \leq 2g + 2e - 2 .$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$\dim H^0(C, E) \cong \deg(E) + 2 - 2g > 0 ,$$

où $H^0(C, E)$ est l'espace des sections de E sur C (lorsque E est de la forme E_L du n° 2.1, on a $H^0(C, E) = A^2 \cap L$). On en conclut que E contient un sous-faisceau F de rang 1 isomorphe au fibré trivial $\underline{1}$. Si \bar{F} désigne le sous-fibré correspondant de E , on a $\deg(\bar{F}) \cong \deg(F) = 0$, d'où

$$N(E; \bar{F}) \cong -\deg(E) \cong -2(g + e - 1) ,$$

et par suite

$$N(E) \cong -2(g + e - 1) .$$

D'autre part, si \bar{F} est un sous-fibré de rang 1 de E , le théorème de Riemann-Roch montre que

$$\deg(F') \leq g - 1 + \dim H^0(C, F') \leq g - 1 + \dim H^0(C, E) ,$$

et on en conclut que $\deg(F')$ est borné (ce que l'on pourrait aussi déduire de (ii)). D'où $N(E) < \infty$.

Pour (ii), supposons que E contienne un autre sous-fibré F_1 de rang 1 tel que $N(E; F_1) > 0$. Quitte à remplacer E par $F_1^{-1} \otimes E$, on peut supposer que $F_1 \cong \underline{1}$, i.e. que F_1 est engendré par une section s de E qui est partout non nulle. Comme $N(E; F_1) > 0$, on a $\deg(E) < 0$, d'où $\deg(E/F) < 0$ puisque $N(E; F) > 0$. Il en résulte que $H^0(C, E/F) = 0$, et la suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(C, F) \rightarrow H^0(C, E) \rightarrow H^0(C, E/F)$$

montre que s est contenue dans F . D'où $F_1 \subset F$, et par suite $F_1 = F$, puisque F_1 est un sous-fibré de rang 1 de E .

Remarques

1) Le fait que $N(E)$ soit fini montre que E possède un sous-fibré F de degré maximum; lorsque $N(E) > 0$, ce sous-fibré est unique, en vertu de (ii).

2) L'entier $N(E; F)$ ne change pas par extension du corps de base. Il n'en est

pas de même de $N(E)$, cf. exerc. 2,3.

3) Supposons k_0 algébriquement clos. On dit, avec Mumford, que E est semi-stable si $N(E) \leq 0$, et que E est stable si $N(E) < 0$, cf. [26], [27] où l'on trouvera des renseignements sur les "variétés de modules" de tels fibrés.

(Signalons que Mumford utilise "instable" pour "non semi-stable", ce qui conduit à de fâcheuses confusions ...)

Fibrés décomposables

Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur C . On dit que E est décomposable s'il est somme directe de deux sous-fibrés de rang 1 . Une telle décomposition est unique, à un automorphisme de E près, cf. par exemple Atiyah, Bull. S.M.F., 84 (1956), p. 307-317.

Remarque

Soit $E = F \oplus F'$ un fibré décomposable, avec $\deg(F) \geq \deg(F')$. Distinguons deux cas :

a) F et F' sont isomorphes. On a $E \simeq F \oplus F = F \otimes (1 \oplus 1)$. L'anneau des endomorphismes de E est l'algèbre de matrices $M_2(k_0)$, et toute décomposition de E en somme directe se déduit de la décomposition donnée par un élément de $GL_2(k_0) = \text{Aut}(E)$. On a $N(E) = 0$.

b) F et F' ne sont pas isomorphes. On a alors $H^0(C, F' \otimes F^{-1}) = 0$, puisque $F' \otimes F^{-1}$ est un fibré de rang 1 qui est non trivial et de degré ≤ 0 . On en conclut que les endomorphismes de E peuvent se représenter par des matrices triangulaires $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, avec $a, d \in k_0$ et $b \in H^0(C, F \otimes F'^{-1})$. En particulier, F est stable par tout endomorphisme de E . Si $E = F_1 \oplus F_2$ est une autre décomposition de E , l'un des F_i est égal à F , et l'autre se déduit de F' par une matrice $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $b \in H^0(C, F \otimes F'^{-1})$ comme ci-dessus. On vérifie sans difficulté que F est un sous-fibré de degré maximum de E , i.e. que $N(E) = N(E; F)$. Lorsque

$$\deg(F) > \deg(F') ,$$

F est même l'unique sous-fibré de E de degré $> \frac{1}{2} \deg(E)$, cf. prop. 6 (ii).

Montrons maintenant que tout fibré E dont l'invariant $N(E)$ est assez grand

est décomposable :

PROPOSITION 7 - Soit F un sous-fibré de rang 1 d'un fibré E de rang 2 .

Si $N(E; F) > 2g - 2$, alors F est facteur direct dans E .

Posons $F' = E/F$, de sorte que E est une extension de F' par F . On sait que de telles extensions sont classées par les éléments du groupe de cohomologie $H^1(C, F \otimes F'^{-1})$. Comme

$$\deg(F \otimes F'^{-1}) = N(E; F) > 2g - 2 ,$$

le groupe en question est nul, d'après le "théorème de dualité". L'extension E est donc triviale.

COROLLAIRE - Tout fibré E de rang 2 tel que $N(E) > 2g - 2$ est décomposable.

Exemple

Si C est la droite projective, on a $g = 0$, $e = 1$, et $N(E) \geq 0$ d'après la prop. 6 ; le corollaire ci-dessus montre alors que E est décomposable ; on retrouve le théorème de Grothendieck [23] cité au n° 1.6.

La situation est différente pour une courbe de genre 0 sans point rationnel, cf. exerc. 1.

Exercices

1) On suppose que $g = 0$, auquel cas C est la "variété de Severi-Brauer" associée à une algèbre de quaternions D sur k_0 . On a $e = 1$ si D est une algèbre de matrices, autrement dit si C est isomorphe à la droite projective P_1 ; si D est un corps, on a $e = 2$. On note T le fibré tangent de C , et E une extension non triviale de T par $\underline{1}$: on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \underline{1} \rightarrow E \rightarrow T \rightarrow 0 .$$

a) Montrer que $\text{End}(E) = D$.

b) Si $e = 1$, E est isomorphe à $F \oplus F$, où F est un fibré de rang 1 tel que $\deg(F) = 1$. On a $N(E) = 0$.

c) Si $e = 2$, E est indécomposable, et $\underline{1}$ est un sous-fibré de rang 1 de degré maximal de E . On a $N(E) = N(E; F) = -2$.

Tout fibré indécomposable de rang 2 est isomorphe au produit tensoriel de E par un fibré de rang 1 .

2) Soient k'_0 une extension de k_0 , et C' la courbe déduite de C par extension

SOUS-GROUPES ARITHMÉTIQUES

des scalaires de k_0 à k'_0 ; si E, F, \dots sont des fibrés sur C , on désigne par E', F', \dots les fibrés correspondants sur C' .

a) Si E est de rang 2, on a $N(E') \cong N(E)$. Utiliser l'exerc. 1 pour construire un exemple où $N(E) = -2$ et $N(E') = 0$.

b) Soit H un sous-fibré de rang 1 de E' tel que $N(E'; H) > 0$. Montrer qu'il existe un sous-fibré F de E tel que $H = F'$. (Lorsque k'_0 est une extension galoisienne de k_0 , cela résulte de la prop. 6 (ii), puisque celle-ci montre que H est invariant par $\text{Gal}(k'_0/k_0)$. Comme Raynaud me l'a fait remarquer, la même méthode s'applique au cas général, à condition d'étendre la prop. 6 (ii) au cas où C est définie sur un anneau local artinien, et d'utiliser la théorie de la descente de Grothendieck.)

En déduire que $N(E') > 0$ entraîne $N(E) = N(E')$.

3) Les notations étant celles de l'exerc. 2, on suppose que k'_0 est une extension quadratique séparable de k_0 ; on note $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ l'automorphisme non trivial de k'_0 , ainsi que son extension à C' , $\text{Pic}(C')$, etc. Soit H un fibré de rang 1 sur C' dont la classe h dans $\text{Pic}(C')$ n'appartient pas à l'image de $\text{Pic}(C)$. Soit E le fibré de rang 2 sur C obtenu à partir de H par restriction des scalaires de k'_0 à k_0 (en tant que faisceau, E est image directe de H par le morphisme canonique $C' \rightarrow C$).

a) Montrer que E est indécomposable, et que E' se décompose en $H \oplus \bar{H}$. En déduire que $N(E) < 0$ et $N(E') = 0$.

b) Le corps k'_0 se plonge de façon naturelle dans $\text{End}(E)$. Montrer que

$$\text{End}(E) = k'_0$$

si et seulement si $h \neq \bar{h}$ dans $\text{Pic}(C')$. Lorsque $h = \bar{h}$, l'anneau $\text{End}(E)$ est un corps de quaternions de centre k_0 ; retrouver de ce point de vue les résultats de l'exerc. 1.

4) On suppose k_0 fini.

a) Soient F et F' deux fibrés de rang 1 sur C . Montrer que les extensions de F' par F sont en nombre fini, à isomorphisme près.

b) Soit $c \in \text{Pic}(C)$. Montrer que les classes de fibrés indécomposables E de rang 2 tels que $\det(E)$ soit de classe c sont en nombre fini (utiliser les prop. 6 et 7 pour montrer que $N(E)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et se ramener à a).

c) En déduire que la partie de $\text{som}(\Gamma \backslash X)$ qui correspond aux fibrés indécomposables est finie.

5) (d'après Harder-Narasimhan [25]) Les notations et hypothèses sont celles de l'exercice précédent. On pose $q_0 = \text{Card}(k_0)$, et l'on note $\zeta_C(s)$ la fonction zêta de la courbe C , que l'on écrit sous la forme

$$\zeta_C(s) = Z_C(T), \quad \text{où } T = q_0^{-s}.$$

On sait que Z_C est une fonction rationnelle de T ; on a

$$Z_C(T) = P_C(T)/(1 - T)(1 - q_0 T) ,$$

où $P_C(T)$ est un polynôme unitaire de degré $2g$.

Soit $c \in \text{Pic}(C)$. On considère la série

$$M_c = \sum_{\det(E)=c} 1/\text{Card}(\text{Aut}(E)) ,$$

où la sommation porte sur les classes de fibrés E de rang 2 tels que $\det(E)$ soit de classe c . Il résulte de l'exerc. 4 que M_c est fini.

Montrer, en utilisant le fait que le nombre de Tamagawa de SL_2 (et de ses "formes") est égal à 1 , que l'on a :

$$M_c = \zeta_C(-1)/(q_0 - 1) = P_C(q_0)/(q_0 - 1)^2(q_0^2 - 1) .$$

En particulier, M_c ne dépend pas de c .

Vérifier directement le cas $g = 0$, cf. n° 1.6, exerc. 6.

2.3. Structure de $\Gamma \backslash X$

Fibrés de rang 1 sur C^{aff}

Tout fibré de rang 1 sur C^{aff} se prolonge en un fibré de rang 1 sur C , défini au produit tensoriel près par une puissance de I_P . Il en résulte que le groupe

$$\text{Pic}(A) = \text{Pic}(C^{\text{aff}})$$

s'identifie au quotient de $\text{Pic}(C)$ par le sous-groupe cyclique engendré par la classe de I_P . Comme $\deg(I_P) = -d$, on en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow J(k_0) \rightarrow \text{Pic}(A) \rightarrow eZ/dZ \rightarrow 0 \quad (\text{cf. n° 2.2}).$$

De plus, pour tout $c \in \text{Pic}(A)$, il existe un unique élément \bar{c} de $\text{Pic}(C)$ qui prolonge c , et qui est tel que

$$0 \leq \deg(\bar{c}) < d .$$

Nous noterons F_c un fibré de rang 1 sur C de classe \bar{c} ; un tel fibré est déterminé à isomorphisme près ; on pose $f_c = \deg(F_c) = \deg(\bar{c})$.

Pointe associée à un élément de $\text{Pic}(A)$

Soit $c \in \text{Pic}(A)$. Nous allons construire un sous-graphe Δ_c de $\Gamma \backslash X$, que nous appellerons la pointe associée à c .

SOUS-GROUPES ARITHMÉTIQUES

Soit F_c le fibré de rang 1 défini ci-dessus, et soit $n \in \mathbf{Z}$. Posons

$$F'_{c,n} = I_P^{\otimes n} \otimes F_c^{-1} \quad \text{et} \quad E_{c,n} = F_c \oplus F'_{c,n},$$

de sorte que $E_{c,n}$ est un fibré décomposable de rang 2 tel que $\det(E_{c,n}) = I_P^{\otimes n}$. D'après le lemme 5, sa restriction à C^{aff} est triviale ; il définit donc un sommet $x_{c,n}$ de $\Gamma \backslash X$, cf. prop. 4.

PROPOSITION 8 - Les sommets $x_{c,n}$ ($c \in \text{Pic}(A)$, $n \geq 1$) sont deux à deux distincts.

Remarquons d'abord que, si $n \geq 1$, on a $\deg(F_c) > \deg(F'_{c,n})$, ce qui montre que F_c est l'unique sous-fibré de rang 1 de degré maximal de $E_{c,n}$, cf. prop 6.

Supposons alors que l'on ait

$$x_{c,n} = x_{d,m} \quad (c, d \in \text{Pic}(A), n \geq 1, m \geq 1).$$

D'après la prop. 4, cela signifie qu'il existe un entier q tel que $E_{c,n}$ soit isomorphe à $I_P^{\otimes q} \otimes E_{d,m}$. On a par suite des isomorphismes

$$F_c \simeq I_P^{\otimes q} \otimes F_d \quad \text{et} \quad F'_{c,n} \simeq I_P^{\otimes q} \otimes F'_{d,m}$$

Vu la définition de F_c , on en déduit d'abord que $c = d$, $q = 0$, puis que $m = n$. D'où la proposition

Occupons-nous maintenant des arêtes d'origine $x_{c,n}$ dans $\Gamma \backslash X$. L'inclusion canonique $I_P^{\otimes n} \subset I_P^{\otimes(n+1)}$ définit une inclusion de $E_{c,n}$ dans $E_{c,n+1}$, d'où une arête $y_{c,n}$ d'origine $x_{c,n}$ et d'extrémité $x_{c,n+1}$. On a de même une arête $\bar{y}_{c,n-1}$ d'origine $x_{c,n}$ et d'extrémité $x_{c,n-1}$.

PROPOSITION 9 - Si $(n-1)d > 2g - 2 - 2f_c$, les arêtes $y_{c,n}$ et $\bar{y}_{c,n-1}$ sont les seules arêtes de $\Gamma \backslash X$ d'origine $x_{c,n}$.

Remarquons d'abord que, si E est un fibré vectoriel de rang 2 correspondant à un sommet x de $\Gamma \backslash X$, les arêtes de $\Gamma \backslash X$ d'origine x correspondent aux orbites du groupe $\text{Aut}(E)$ opérant dans l'espace des k-droites de la fibre $E(P)$ de E en P , fibre qui est un espace vectoriel sur k de dimension 2. Lorsque l'on prend $x = x_{c,n}$, $E = E_{c,n}$, la fibre de E en P est somme directe de deux droites :

$$E_{c,n}(P) = D \oplus D',$$

où D est la fibre $F_c(P)$ de F_c , et D' la fibre $F'_{c,n}(P)$ de $F'_{c,n}$. La droite D correspond à l'arête $y_{c,n}$, la droite D' à l'arête $\bar{y}_{c,n-1}$. Si l'on pose $\Gamma_{c,n} = \text{Aut}(E_{c,n})$, la proposition 9 revient à affirmer que toute droite de $D \oplus D'$ est $\Gamma_{c,n}$ -conjuguée à D ou à D' . En fait :

LEMME 6 - Si $(n-1)d > 2g - 2 - 2f_c$, toute droite de $D \oplus D'$ distincte de D est $\Gamma_{c,n}$ -conjuguée à D' .

Remarquons d'abord que le groupe $\Gamma_{c,n}$ contient les automorphismes de la forme $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où s est une section du fibré de rang 1

$$H = \underline{\text{Hom}}(F'_{c,n}, F_c) \simeq F_c^{\otimes 2} \otimes I_P^{\otimes (-n)},$$

fibré qui est de degré $nd + 2f_c$. Un tel automorphisme agit sur la fibre $D \oplus D'$ par la matrice unipotente $\begin{pmatrix} 1 & s(P) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $s(P) \in H(P)$ désigne la valeur de la section s en P . Comme les supplémentaires de D sont conjugués entre eux par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in H(P)$, on voit que le lemme 6 est conséquence du suivant :

LEMME 7 - Si H est un fibré de rang 1 tel que

$$\deg(H) > 2g - 2 + d,$$

l'homomorphisme

$$\text{"valeur en } P \text{ " : } H^0(C, H) \rightarrow H(P)$$

est surjectif.

En effet, on a une suite exacte

$$H^0(C, H) \rightarrow H(P) \rightarrow H^1(C, I_P \otimes H),$$

et le théorème de dualité montre que $H^1(C, I_P \otimes H) = 0$, puisque

$$\deg(I_P \otimes H) > 2g - 2.$$

(Noter que l'hypothèse sur $\deg(H)$ est bien vérifiée dans le cas du lemme 6, puisque $\deg(H) = nd + 2f_c > 2g - 2 + d$.)

Posons maintenant

$$m = \text{Sup}(2g - 2 + d, 3d - 2) .$$

Soit n_c le plus grand entier tel que $2f_c + dn_c \leq m$. On a

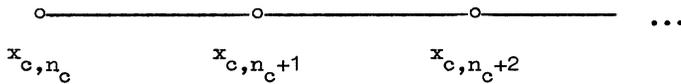
i) $n_c \geq 1$.

En effet, on a $2f_c + dn_c > m - d \geq 2d - 2$. Comme $f_c \leq d - 1$, cela entraîne $dn_c > 0$, d'où $n_c \geq 1$.

ii) $dn_c > 2g - 2 - 2f_c$.

En effet, on a $2f_c + dn_c > m - d \geq 2g - 2$.

Nous définirons la pointe Δ_c comme le sous-graphe de $\Gamma \backslash X$ ayant pour sommets les $x_{c,n}$ ($n \geq n_c$) et pour arêtes les $y_{c,n}$, $\bar{y}_{c,n}$ ($n \geq n_c$) . C'est un chemin infini



d'origine le sommet x_{c,n_c} , sommet que nous noterons simplement x_c . L'inégalité i), jointe à la prop. 8, montre que les Δ_c sont deux à deux disjoints. L'inégalité ii), jointe à la prop. 9, montre que Δ_c ne rencontre le reste de $\Gamma \backslash X$ qu'en son origine x_c .

Structure de $\Gamma \backslash X$

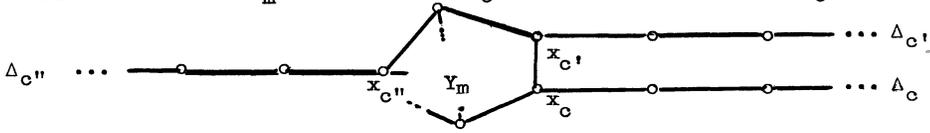
Soit Y_m le sous-graphe de $\Gamma \backslash X$ dont les sommets correspondent aux fibrés E tels que $N(E) \leq m$, et dont les arêtes sont les arêtes de $\Gamma \backslash X$ dont les deux extrémités appartiennent à $\text{som}(Y_m)$. Comme $N(E_{c,n_c}) = 2f_c + dn_c \leq m$, les x_c sont des sommets de Y_m .

THÉOREME 9 - (a) Le graphe $\Gamma \backslash X$ est réunion des sous-graphes Y_m et Δ_c , avec $c \in \text{Pic}(A)$.

(b) On a $\text{som}(Y_m) \cap \text{som}(\Delta_c) = \{x_c\}$ et $\text{ar}(Y_m) \cap \text{ar}(\Delta_c) = \emptyset$.

(c) Il existe une constante $l = l(g,d,e)$ telle que tout sommet de $\Gamma \backslash X$ soit à distance $\leq l$ de l'une des pointes Δ_c .

On peut exprimer (a) et (b) en disant que l'on obtient le graphe $\Gamma \backslash X$ en collant au graphe Y_m les pointes Δ_c par leurs extrémités x_c :



Cette construction est analogue à celle du domaine fondamental d'un groupe fuchsien.

Démonstration de (a)

Soit x un sommet de $\Gamma \backslash X$, et soit E un fibré de rang 2 correspondant à x . Si $N(E) \cong m$, on a $x \in \text{som}(Y_m)$ par définition de Y_m . Si $N(E) \cong m$, il existe un sous-fibré F de rang 1 de E tel que $N(E; F) \cong m$; comme $m > 2g - 2$, la prop. 7 montre que F est facteur direct dans E ; on a $E = F \oplus F'$. Soit $c \in \text{Pic}(A)$ la classe de la restriction de F à C^{aff} . Quitte à tensoriser E par une puissance de I_P , on peut supposer que $F = F_c$. Comme $\det(E)$ est une puissance de I_P (cf. lemme 5), on en déduit que F' est isomorphe à $I_P^{\otimes n} \otimes F_c^{-1}$, avec $n \in \mathbb{Z}$, autrement dit que $E \simeq E_{c,n}$, $x = x_{c,n}$. L'hypothèse $N(E; F) \cong m$ signifie que $2f_c + nd \cong m$; vu la définition de n_c , cela entraîne $n \cong n_c$ et montre que x est un sommet de Δ_c . On a donc

$$\text{som}(\Gamma \backslash X) = \text{som}(Y_m) \cup \bigcup_c \text{som}(\Delta_c) .$$

Soit maintenant y une arête de $\Gamma \backslash X$. Si les deux extrémités de y appartiennent à Y_m , on a $y \in \text{ar}(Y_m)$ par définition de Y_m . Si l'une des extrémités de y n'appartient pas à Y_m , c'est un sommet $x_{c,n}$ de l'un des Δ_c , et l'on a $x_{c,n} \neq x_c$, d'où $n \cong n_c + 1$ et

$$(n - 1)d \cong n_c d > 2g - 2 - 2f_c \quad , \text{ cf. ii).}$$

Vu la prop. 9, ceci entraîne $y \in \text{ar}(\Delta_c)$. On a donc

$$\text{ar}(\Gamma \backslash X) = \text{ar}(Y_m) \cup \bigcup_c \text{ar}(\Delta_c) ,$$

ce qui achève de prouver (a) .

Démonstration de (b)

Soit $x_{c,n} \in \text{som}(Y_m) \cap \text{som}(\Delta_c)$. Le fait que $x_{c,n}$ appartienne à Y_m signifie que $N(E_{c,n}) \leq m$, i.e. que $2f_c + dn \leq m$; vu la définition de n_c , et le fait que $n \geq n_c$, cela entraîne $n = n_c$ et l'on voit bien que $\text{som}(Y_m) \cap \text{som}(\Delta_c)$ est réduit à $\{x_c\}$.

La formule $\text{ar}(Y_m) \cap \text{ar}(\Delta_c) = \emptyset$ est évidente puisqu'aucune arête de Δ_c ne peut avoir ses deux extrémités égales à x_c .

Démonstration de (c)

Nous allons voir que

$$l = \left\lfloor \frac{m + 2g + 2e - 2}{d} \right\rfloor$$

convient (rappelons que $[x]$ désigne la partie entière de x , i.e. le plus grand entier $\leq x$).

Soit $x \in \text{som}(\Gamma \setminus X)$, et soit E un fibré de rang 2 correspondant à x . Soit $n = N(E)$, et soit

$$0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow F' \rightarrow 0$$

une suite exacte, où F et F' sont des fibrés de rang 1 tels que

$$\text{deg}(F) - \text{deg}(F') = n.$$

Soit E_1 le sous-faisceau de E image réciproque par $E \rightarrow F'$ du sous-faisceau $I_P \cdot F'$ de F' . La suite exacte

$$0 \rightarrow F \rightarrow E_1 \rightarrow I_P \cdot F' \rightarrow 0$$

montre que $N(E_1) \cong n + d$. D'autre part, il est clair que le sommet x_1 de $\Gamma \setminus X$ correspondant à E_1 est lié au sommet x . En itérant cette construction, on obtient un chemin

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots \\ x = x_0 & & x_1 & & x_2 & & & & x_r & & \end{array}$$

de $\Gamma \setminus X$ où x_r correspond à un fibré E_r tel que $N(E_r) \cong n + rd$. Prenons $r = l + 1$. On a $rd > m + 2g + 2e - 2$, d'où

$$n + rd > m, \quad \text{cf. prop. 6 (i).}$$

Vu (a), cela entraîne que x_r est un sommet de l'une des pointes Δ_c , et n'est

pas l'origine x_c de cette pointe. Comme x_{r-1} est lié à x_r , on a également $x_{r-1} \in \text{som}(\Delta_c)$, ce qui montre bien que la distance de x à Δ_c est $\leq r - 1 = \ell$.

COROLLAIRE 1 - Tout sommet de Y_m est à distance $\leq \ell$ de l'un des x_c .

Cela résulte de (c), compte tenu de ce que tout chemin de $\Gamma \setminus X$ joignant un sommet de Y_m à un sommet de Δ_c passe nécessairement par l'origine x_c de Δ_c .

COROLLAIRE 2 - L'inclusion $Y_m \rightarrow \Gamma \setminus X$ est une équivalence d'homotopie.

Cela résulte de (a) et (b) : on "rétracte les pointes".

COROLLAIRE 3 - Le graphe Y_m est connexe.

Cela résulte du cor. 2 et du fait que $\Gamma \setminus X$ est connexe, puisque quotient de l'arbre X .

COROLLAIRE 4 - Si k_0 est fini, il en est de même de Y_m .

Posons $q = \text{Card}(k)$. Il y a au plus $q + 1$ arêtes de $\Gamma \setminus X$ d'origine donnée, donc au plus

$$1 + (q+1) + q(q+1) + \dots + q^{\ell-1}(q+1) = q^\ell + 2q^{\ell-1} + \dots + 2q + 2$$

sommets de $\Gamma \setminus X$ à distance $\leq \ell$ d'un x_c donné. Comme les x_c sont en nombre fini, le cor. 1 montre que $\text{som}(Y_m)$ est fini, et il en est évidemment de même de $\text{ar}(Y_m)$.

Remarques

1) le cor. 4 peut aussi se déduire de l'exerc. 4 du n° 2.2.

2) Je signale, sans démonstration, le résultat suivant, dû à H. Bass :

d) Il existe une constante $\ell' = \ell'(g, d, e)$ telle que deux sommets quelconques de Y_m soient à distance $\leq \ell'$ l'un de l'autre.

En d'autres termes, le diamètre de Y_m est fini, et majoré par ℓ' .

Pointes et bouts rationnels

Soit D une droite du K -espace vectoriel $V = K^2$. Associons à D :

a) le bout b_D de l'arbre X défini au n° 1.1;

b) la classe $c = c(D)$ dans $\text{Pic}(A)$ du A -module $D_A = A^2 \cap D$; cela a un sens,

car D_A est projectif de rang 1 .

PROPOSITION 10 - A un graphe fini près, l'image du bout b_D dans $\Gamma \backslash X$ est égale à la pointe Δ_c associée à c .

Soit L_0 le réseau standard \underline{O}^2 , et soit L_n ($n \geq 0$) le sous-réseau de L_0 défini par

$$L_n = L_0 \cap D + \pi^n L_0 , \quad \text{où } \pi \text{ est une uniformisante de } \underline{O} .$$

Les sommets x_n de X correspondant aux L_n forment un chemin infini sans aller-retour qui représente le bout b_D , cf. n° 1.1. Notons F le sous-faisceau cohérent du faisceau constant D défini par :

$$F_Q = \underline{O}_Q^2 \cap D = (D_A)_Q \quad \text{si } Q \text{ est un point de } C^{\text{aff}} ,$$

$$F_P = L_0 \cap D .$$

C'est un faisceau localement libre de rang 1 , dont la restriction à C^{aff} est de classe c . Le quotient E_L/F est un sous-faisceau localement libre de rang 1 du faisceau constant V/D . On a pour tout n une suite exacte :

$$0 \rightarrow F \rightarrow E_{L_n} \rightarrow I_P^{\otimes n} \cdot F' \rightarrow 0 .$$

Lorsque n est assez grand, la prop. 7 montre que cette suite exacte se scinde ; on a alors

$$E_{L_n} \simeq F \oplus I_P^{\otimes n} \otimes F' .$$

Vu la définition de F_c donnée au début, il existe des entiers r, s tels que

$$F \simeq I_P^{\otimes r} \otimes F_c \quad \text{et} \quad F' \simeq I_P^{\otimes s} \otimes F_c^{-1} .$$

On en déduit que E_{L_n} est I_P -équivalent au fibré noté plus haut $E_{c, n+s-r}$; en d'autres termes, on a $x_n = x_{c, n+s-r}$, d'où la proposition.

Remarques

1) Il résulte des propriétés élémentaires des modules sur les anneaux de Dedekind (Bourbaki, AC.VII, § 4, n° 10) que l'application $D \mapsto c(D)$ a les propriétés suivantes :

- i) $c(D) = c(D') \Leftrightarrow D$ et D' sont Γ -conjuguées ;
- ii) pour tout $c \in \text{Pic}(A)$, il existe une droite D telle que $c = c(D)$.

On retrouve ainsi la bijection :

$$\text{pointes de } \Gamma \backslash X \leftrightarrow \text{éléments de } \text{Pic}(A) .$$

2) Les bouts de X correspondent aux points de la droite projective $P_1(\hat{K})$ sur le complété \hat{K} de K , cf. n° 1.1 ; on notera que ce sont uniquement les points K -rationnels de cette droite qui fournissent les pointes de $\Gamma \backslash X$. La situation est analogue à celle du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, où les pointes sont données par les points \mathbb{Q} -rationnels de la droite projective $P_1(\mathbb{R})$.

Exercices

1) Si x est un sommet de X , on note $n(x)$ l'invariant $N(E)$ d'un fibré E correspondant à x .

a) Montrer que, si x et x' sont liés, on a $|n(x') - n(x)| \leq d$.

b) On suppose que $n(x) > 0$. Montrer, en utilisant la prop. 6 (ii), qu'il existe un unique $x' \in \text{som}(X')$ qui est lié à x , et tel que $n(x') = n(x) + d$. En itérant cette construction, on obtient une suite de sommets x, x', x'', \dots qui forme un chemin sans aller-retour ; le bout défini par ce chemin est l'unique bout de X invariant par le fixateur de x dans Γ .

2) On suppose k_0 fini de caractéristique p . On pose

$$q_0 = \text{Card}(k_0), \quad q = q_0^d = \text{Card}(k) .$$

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini de Γ . Si x (resp. y) est un sommet (resp. une arête géométrique) de $\Gamma' \backslash X$, on note Γ'_x (resp. Γ'_y) le stabilisateur dans Γ' d'un représentant de x (resp. y).

a) Montrer que les séries

$$\sum_{x \in \text{som}(\Gamma' \backslash X)} 1/\text{Card}(\Gamma'_x), \quad \sum_{y \in \text{ar}(\Gamma' \backslash X)} 1/\text{Card}(\Gamma'_y)$$

sont convergentes. (Se ramener au cas où $\Gamma' = \Gamma$, et utiliser le cor. 4 du th. 9.)

b) Montrer que l'on a

$$\sum_{x \text{ pair}} 1/\text{Card}(\Gamma'_x) = \sum_{x \text{ impair}} 1/\text{Card}(\Gamma'_x) = \frac{q+1}{2} \sum_y 1/\text{Card}(\Gamma'_y) .$$

On note $M_{\Gamma'}$ la valeur commune de ces séries. Montrer que $M_{\Gamma'} = (\Gamma : \Gamma') \cdot M_C$, où

$$M_C = \zeta_C(-1)/(q_0 - 1) = P_C(q_0)/(q_0 - 1)^2(q_0^2 - 1)$$

est le nombre défini dans l'exerc. 5 du n° 2.2.

c) On pose

$$\chi(\Gamma') = \sum_{x \in \text{som}(\Gamma' \setminus X)} 1/\text{Card}(\Gamma'_x) - \sum_{y \in \text{ar.geom}(\Gamma' \setminus X)} 1/\text{Card}(\Gamma'_y) .$$

On a $\chi(\Gamma') = - (q - 1)M_T$, et $\chi(\Gamma'') = (\Gamma' : \Gamma'') \chi(\Gamma')$ si $\Gamma'' \subset \Gamma'$.

d) Montrer que

$$\chi(\Gamma) = \sum_{\substack{x \in \text{som}(Y_m) \\ x \neq x_c}} 1/\text{Card}(\Gamma_x) - \sum_{y \in \text{ar.geom}(Y_m)} 1/\text{Card}(\Gamma_y) .$$

où la première sommation porte sur les sommets de Y_m distincts des $x_c, c \in \text{Pic}(A)$. (Remarque que, si x est un sommet de l'une des pointes Δ_c , et y est l'arête géométrique joignant x au sommet suivant de Δ_c , on a $\Gamma_x = \Gamma_y$ de sorte que les contributions de x et y dans $\chi(\Gamma)$ se détruisent.)

e) Si Γ' est contenu dans $SL_2(K)$, $\chi(\Gamma')$ est égal à $-\mu(SL_2(\hat{K})/\Gamma')$, où μ est la mesure de Haar normalisée de $SL_2(\hat{K})$, cf. n° 1.5. En particulier, pour $\Gamma' = SL_2(A)$, on a :

$$\chi(SL_2(A)) = -\mu(SL_2(\hat{K})/SL_2(A)) = - (q - 1) \zeta_C(-1) .$$

(Pour une généralisation de cette formule à tous les groupes simples simplement connexes déployés, voir [34], p. 158, note de bas de page.)

f) On suppose que Γ' est sans p'-torsion, autrement dit que tous les éléments d'ordre fini de Γ' ont pour ordre une puissance de p (i.e. sont unipotents). Montrer que $(\Gamma : \Gamma')$ est divisible par $(q_0 - 1)(q_0^2 - 1)$. (Faire opérer le groupe fini $GL_2(k_0)$ sur l'espace homogène Γ/Γ' et remarquer que toutes les orbites ont un ordre multiple de $(q_0 - 1)(q_0^2 - 1)$.) En déduire que $\chi(\Gamma')$ est un entier.

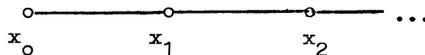
2.4. Exemples

2.4.1. La droite affine : $A = k[t]$, $g = 0$, $e = d = 1$

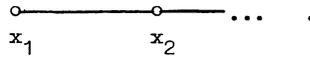
La courbe C est la droite projective P_1 et le point P est de degré 1 ; on a $k = k_0$; c'est le cas déjà traité au n° 1.6. Tous les fibrés E sont décomposables ; on peut les représenter par

$$E_n = 1 \oplus \underline{I}_P^{\otimes n} \quad (n = 0, 1, \dots) .$$

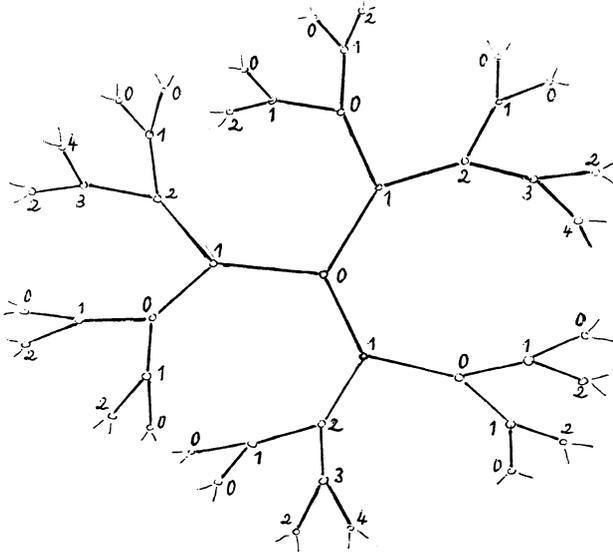
Le graphe $\Gamma \setminus X$ est un chemin infini



dont les sommets x_n correspondent aux E_n . L'entier m du n° 2.5 est égal à 1, et le graphe Y_m est le segment $x_0 - x_1$. Il y a une seule pointe Δ_c , puisque $A = k[t]$ est un anneau principal ; c'est le chemin infini :



Le dessin ci-dessous représente X , pour $k = \mathbb{F}_2$; le nombre n accolé à un sommet signifie que ce sommet est de type n , i.e. que son image dans $\Gamma \backslash X$ est x_n .



On observera que, si un sommet x est de type 0, ses voisins sont tous de type 1. Par contre, si x est de type $n \geq 1$, un seul de ses voisins est de type $n + 1$, les autres étant de type $n - 1$; il existe un seul chemin infini d'origine x sur lequel le "type" va en croissant ; ce chemin correspond à un bout rationnel, à savoir l'unique bout de X fixé par le fixateur Γ_x de x dans Γ . (Pour le comportement des chemins correspondant à un bout irrationnel, voir exerc. 1.)

Remarque

Si l'on remplace $\Gamma = GL_2(k[t])$ par son sous-groupe $\Gamma_1 = SL_2(k[t])$, on voit facilement que le graphe quotient $\Gamma \backslash X$ ne change pas (cf. n° 2.1, exerc. 1, ou n° 1.6, exerc. 2). Ce résultat se généralise de la façon suivante :

Soient S un k -groupe algébrique simple simplement connexe déployé, X_S l'immeuble de Bruhat-Tits de S sur le corps local $\hat{K} = k((1/t))$ (cf. [37], [38], [39]), et posons $\Gamma_S = S(k[[t]])$. Alors l'action naturelle de Γ_S sur X_S admet pour domaine fondamental un quartier de X_S , au sens de Bruhat-Tits [28], 7.4.12 (C.Soulié). Cela permet d'écrire Γ_S comme amalgame de certains sous-groupes, comme on sait le faire pour $S = SL_2$, cf. n° 1.6.

2.4.2. Le cas $g = 0$, $e = 1$, $d \geq 2$

La courbe C est la droite projective P_1 et le point P est de degré $d \geq 2$. Le corps k est une extension monogène de degré d de k_0 . Un cas typique est celui où $k_0 = \mathbb{R}$, $d = 2$, $k = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{R}[u,v]/(u^2+v^2-1)$.

On a $\text{Pic}(C) = \mathbb{Z}$; $\text{Pic}(A) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Si F est un fibré de rang 1 et de degré 1, les représentants F_c des éléments c de $\text{Pic}(A)$ (cf. n° 2.3) sont les $F^{\otimes c}$, $0 \leq c < d$. Tout fibré de rang 2 est isomorphe à l'un des fibrés

$$E_{a,b} = F^{\otimes a} \oplus F^{\otimes b} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{Z}.$$

La restriction d'un tel fibré à C^{aff} est triviale si et seulement si

$$a + b \equiv 0 \pmod{d};$$

dans ce cas, on notera $x(a,b)$ le sommet correspondant de $\Gamma \backslash X$. Tout sommet de $\Gamma \backslash X$ est obtenu ainsi, et l'on a

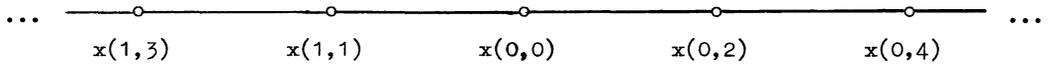
$$x(a,b) = x(a',b') \Leftrightarrow \begin{cases} a - a' = b - b' \equiv 0 \pmod{d} \\ \text{ou} \\ a - b' = b - a' \equiv 0 \pmod{d}. \end{cases}$$

Le sommet $x(a,b)$ est lié au sommet $x(a+d,b)$ par une arête canonique $y(a,b)$, et il est lié à $x(a-d,b)$ par l'arête $\bar{y}(a-d,b)$; si $|b-a| \geq d-1$, on vérifie au moyen de la prop. 9 que $y(a,b)$ et $\bar{y}(a-d,b)$ sont les seules arêtes de $\Gamma \backslash X$ d'origine $x(a,b)$. Pour déterminer complètement le graphe $\Gamma \backslash X$, il reste à faire la liste des autres arêtes, cf. exerc. 2. Je me borne à indiquer le résultat pour $d = 2, 3, 4$:

a) le cas $d = 2$

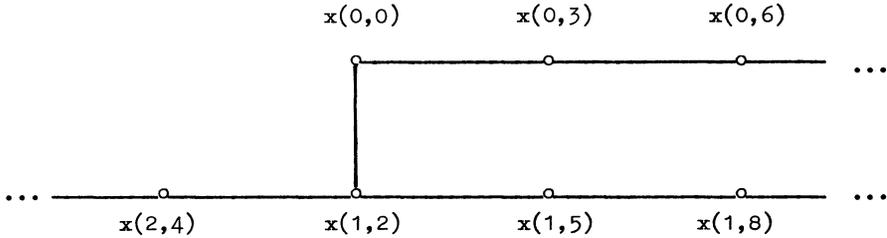
Les sommets sont les $x(0,2n)$ et $x(1,2n-1)$, avec $n = 0, 1, \dots$. A part les arêtes

canoniques $y(a,b)$ et leurs inverses, il y a un seul autre couple d'arêtes, celui qui lie les sommets $x(0,0)$ et $x(1,1)$; cela se voit, par exemple, en déterminant les arêtes issues de $x(0,0)$, cf. n° 2.1, exerc. 6. Le graphe $\Gamma \setminus X$ est donc :



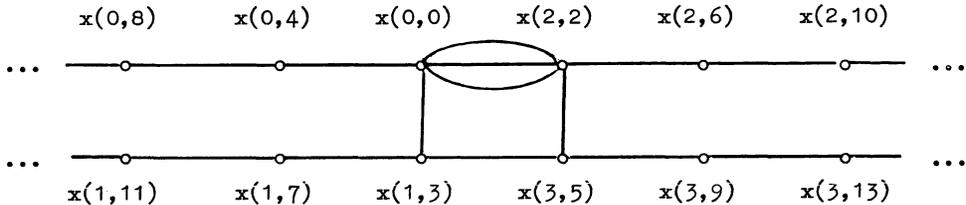
b) le cas $d = 3$

Les sommets sont les $x(0,3n)$, $x(1,3n+2)$, $x(2,3n+4)$, avec $n = 0, 1, \dots$. A part les arêtes canoniques, on ne trouve, ici encore, qu'un seul autre couple d'arêtes, qui lie les sommets $x(0,0)$ et $x(1,2)$. Le graphe $\Gamma \setminus X$ est :



c) le cas $d = 4$

Les sommets sont les $x(0,4n)$, $x(1,4n+3)$, $x(2,4n+2)$, $x(3,4n+5)$, avec $n = 0, 1, \dots$. Du sommet $x(1,3)$ part, outre les deux arêtes canoniques, une arête supplémentaire d'extrémité $x(0,0)$; de même, de $x(3,5)$ part une arête qui le lie à $x(2,2)$. Le sommet $x(0,0)$ est lié à chacun des sommets $x(0,4)$ et $x(1,3)$ par une seule arête, et il est lié à $x(2,2)$ par q_0 arêtes, où $q_0 = \text{Card}(k_0)$; de même $x(2,2)$ est lié à $x(2,6)$ et $x(3,5)$ par une seule arête, et à $x(0,0)$ par q_0 arêtes. Toutes les autres arêtes sont canoniques. Le graphe $\Gamma \setminus X$ est :



A la différence des précédents, ce graphe n'est pas un arbre.

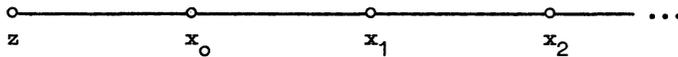
2.4.3. Le cas $g = 0, e = 2, d = 2$

La courbe C est une courbe de genre 0 sans point rationnel. Le point P est de degré 2. On peut réaliser C comme une conique plane, P étant l'intersection de cette conique avec une droite définie sur k_0 . Un cas typique est celui où $k_0 = \mathbb{R}, k = \mathbb{C}, A = \mathbb{R}[u,v]/(u^2+v^2+1)$.

On a $\text{Pic}(A) = 2\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$: il y a une seule pointe. Dans $\Gamma \backslash X$, on a les sommets $x_n (n=0,1, \dots)$, qui correspondent aux fibrés décomposables

$$E_n = \underline{1} \oplus \mathbb{I}_P^{\otimes n}.$$

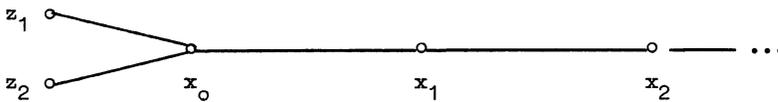
Il y a un autre sommet z , qui correspond à un fibré indécomposable E dont l'anneau d'endomorphismes est le corps de quaternions D associé à C (cf. n° 2.2, exerc. 1). Le graphe $\Gamma \backslash X$ est un chemin infini :



Remarque

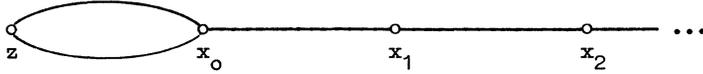
Si l'on remplace Γ par $\Gamma_1 = \text{SL}_2(A)$, le graphe $\Gamma \backslash X$ est remplacé par un graphe $\Gamma_1 \backslash X$ dont la partie gauche (celle relative à $z \text{ --- } x_0$) est quelque peu différente : le sommet z est remplacé par une famille de sommets correspondant aux éléments de $k_0^*/\text{Nrd } D^*$, et l'arête joignant z et x_0 est remplacée par une famille d'arêtes correspondant aux éléments de $k_0^*/N_{k/k_0} k^*$, cf. n° 2.1, exerc. 1. Par exemple :

a) Si $k_0 = \mathbb{R}, k = \mathbb{C}, D = \mathbb{H}$ (quaternions de Hamilton), le sommet z et l'arête $z \text{ --- } x_0$ sont dédoublés ; le graphe $\Gamma_1 \backslash X$ est



Noter les trois arêtes issues de x_0 , qui correspondent aux trois orbites de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur la droite projective complexe $P_1(\mathbb{C})$: le demi-plan supérieur, l'axe réel, et le demi-plan inférieur.

b) Si k_0 est un corps p -adique \mathbb{Q}_p , seule l'arête $z - x_0$ est dédoublée ; le graphe $\Gamma_1 \backslash X$ est :



2.4.4. L'anneau $A = \mathbb{F}_2[u,v]/(u^2+u+v^3+v+1)$

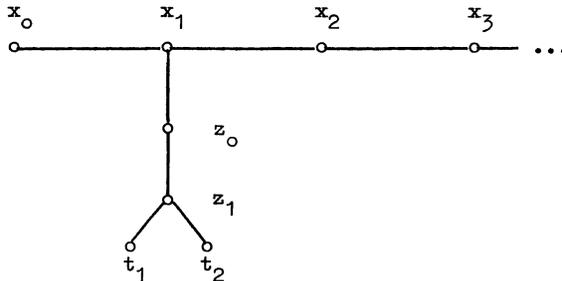
La courbe C définie en caractéristique 2 par l'équation

$$(*) \quad u^2 + u = v^3 + v + 1$$

est une courbe elliptique : on a $g = 1$. Son point à l'infini P est de degré 1 : on a $e = d = 1$, $k = k_0 = \mathbb{F}_2$. Comme la jacobienne J de C est égale à C , on a $J(k_0) = C(k_0) = 0$ (en effet, l'équation $(*)$ n'a pas de solution dans \mathbb{F}_2). Il en résulte que $\text{Pic}(A)$ est réduit à 0 : l'anneau A est principal, il y a une seule pointe. A I_p -équivalence près, on trouve que les fibrés de rang 2 sont les suivants :

- a) les fibrés décomposables $E_n = \underline{1} \oplus I_P^{\otimes n}$ ($n = 0, 1, \dots$) ; je note x_n les sommets correspondants de $\Gamma \backslash X$;
- b) une extension non triviale de $\underline{1}$ par $\underline{1}$ (resp. de $\underline{1}$ par I_p) ; je note z_0 (resp. z_1 le sommet correspondant) ;
- c) deux fibrés obtenus par restriction des scalaires (cf. n° 2.2, exerc. 3) à partir de fibrés H et $H^{\otimes 2}$ de rang 1 sur la courbe C' déduite de C par extension du corps de base à \mathbb{F}_4 (on a $\text{Pic}(C') = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, et l'on prend pour H un fibré dont la classe est d'ordre 5) ; je note t_1 et t_2 les sommets correspondants.

Le graphe $\Gamma \backslash X$ a la structure suivante :



Exercices

1) Les hypothèses sont celles de 2.4.1. Soit

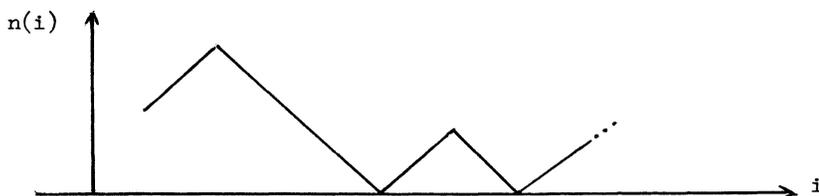
$$\Delta = Q_1 - Q_2 - Q_3 - \dots$$

un chemin infini sans aller-retour dans X . On note $n(i)$ le type de Q_i ; c'est un entier ≥ 0 ; la connaissance des $n(i)$ détermine l'image de Δ dans $\Gamma \backslash X$.

a) On a $n(i+1) = n(i) \pm 1$. Montrer que, si $n(i+1) = n(i) - 1$, alors

$$n(i+j) = n(i) - j \text{ pour tout } j \text{ tel que } 0 \leq j \leq n(i).$$

Le graphe de la fonction $n(i)$, prolongée par linéarité à \mathbb{R}_+ , a la forme suivante



b) En déduire que deux cas seulement sont possibles :

b₁) Il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que $n(i) = i + N$ pour i assez grand.

b₂) Il existe une infinité de valeurs de i telles que $n(i) = 0$.

c) Soit $\delta \in P_1(\hat{K})$ le bout défini par Δ . Montrer que b₁) équivaut à $\delta \in P_1(K)$; autrement dit, b₂) se produit si et seulement si δ est irrationnel.

2) Les hypothèses sont celles de 2.4.2. On note $f_d(t)$ le polynôme unitaire irréductible de degré d qui définit le point P ; on a

$$k = k_0[t]/(f_d).$$

a) Montrer que l'anneau A est formé des fractions rationnelles $g(t)/f_d(t)^n$, avec n entier ≥ 0 , $g \in k_0[t]$ et $\deg(g) \leq nd$.

b) On note ∞ le point à l'infini de P_1 , et I_∞ le faisceau d'idéaux correspondant. On prend pour F le faisceau I_∞^{-1} (faisceau des germes de fonctions ayant au plus un pôle simple à l'infini), de sorte que les sections de $F^{\otimes n}$ s'identifient aux polynômes en t de degré $\leq n$. Si a, b, a', b' sont des entiers, l'espace vectoriel $H\left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right)$ des homomorphismes du faisceau $E_{a,b}$ dans le faisceau $E_{a',b'}$ s'identifie au groupe des matrices $\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, avec :

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k_0[t],$$

$$\deg(\alpha) \leq a' - a, \quad \deg(\beta) \leq a' - b, \quad \deg(\gamma) \leq b' - a, \quad \deg(\delta) \leq b' - b.$$

En particulier, le groupe $G\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ des éléments inversibles de $H\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ b & b \end{smallmatrix}\right)$ n'est autre que $\text{Aut}(E_{a,b})$.

c) On suppose que a, b, a', b' sont tels que

$$a' + b' = a + b + d \equiv 0 \pmod{d},$$

et l'on note $\Phi \left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix} \right)$ le sous-ensemble de $H \left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix} \right)$ formé des matrices φ telles que $\det(\varphi) = \lambda f_d$, avec $\lambda \in k_0^*$; cet ensemble est stable par multiplication à droite par un élément de $G \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right)$ et à gauche par un élément de $G \left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix} \right)$. Montrer que les éléments du quotient $G \left(\begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix} \right) \setminus \Phi \left(\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix} \right) / G \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right)$ correspondent bijectivement aux arêtes de $\Gamma \backslash X$ d'origine $x(a, b)$ et d'extrémité $x(a', b')$. En déduire que, pour que $x(a, b)$ et $x(a', b')$ soient liés dans $\Gamma \backslash X$, il faut et il suffit que, ou bien $\{a, b\} \cap \{a', b'\} \neq \emptyset$ (cas qui correspond à une arête canonique), ou bien $\text{Inf}(a', b') \cong \text{Sup}(a, b)$.

d) Utiliser c) pour montrer que $x(0, 0)$ est lié à tous les $x(a, b)$ tels que $a + b = d$ et $a, b \geq 0$.

e) On suppose d pair. Montrer que $E \mapsto F^{\otimes d/2} \otimes E$ définit un automorphisme d'ordre 2 de $\Gamma \backslash X$.

3) Soient k un corps fini, et C une courbe elliptique sur k dont le groupe $C(k)$ des k -points est réduit à un seul élément.

a) Soit π l'endomorphisme de Frobenius de C , que l'on identifie à la façon usuelle à un entier d'un corps quadratique imaginaire. On a $\pi + \bar{\pi} = \pi \cdot \bar{\pi} = q$, avec $q = \text{Card}(k)$. En déduire que $q \leq 4$.

b) Montrer que, à isomorphisme près, il n'y a que trois possibilités :

- (i) $k = \mathbb{F}_2$, C définie par $u^2 + u = v^3 + v + 1$,
- (ii) $k = \mathbb{F}_3$, " " $u^2 = v^3 - v - 1$,
- (iii) $k = \mathbb{F}_4$, " " $u^2 + u = v^3 + \rho$, avec $\rho \notin \mathbb{F}_2$.

c) Le cas (i) est celui de 2.4.4. Déterminer $\Gamma \backslash X$ dans les cas (ii) et (iii) [la seule différence est que, à la place des 2 sommets t_1, t_2 , on trouve 3 sommets dans le cas (ii), et 4 sommets dans le cas (iii)].

4) On pose $\Gamma_1 = SL_2(A)$. Montrer que, dans le cas 2.4.2, l'application canonique $\text{som}(\Gamma_1 \backslash X) \rightarrow \text{som}(\Gamma \backslash X)$ est bijective; donner des exemples où l'application

$$\text{ar}(\Gamma_1 \backslash X) \rightarrow \text{ar}(\Gamma \backslash X)$$

n'est pas injective. (Utiliser l'exerc. 1 du n° 2.1.)

5) On suppose k_0 fini. Montrer que, avec les notations de l'exerc. 2 du n° 2.3, on a

$$\begin{aligned} \chi(\Gamma) &= - (q - 1) / (q_0 - 1)^2 (q_0^2 - 1) && \text{dans les cas 2.4.1 et 2.4.2,} \\ \chi(\Gamma) &= - 5/3 && \text{dans le cas 2.4.4.} \end{aligned}$$

6) Déterminer $\Gamma \backslash X$ lorsque $g = 1$ et k_0 est algébriquement clos (utiliser [22]).

2.5. Structure de Γ

On peut appliquer au couple (X, Γ) les résultats du chap. I, n° 5.4 : une fois choisis un arbre maximal T de $\Gamma \backslash X$ ainsi qu'un relèvement j de T dans X et de $\text{ar}(\Gamma \backslash X)$ dans $\text{ar}(X)$, le groupe Γ s'identifie au groupe fondamental

$$\pi_1(\Gamma, \Gamma \backslash X, T)$$

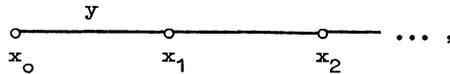
d'un certain graphe de groupes $(\Gamma, \Gamma \backslash X)$ porté par $\Gamma \backslash X$, cf. chap. I, th. 13.

Rappelons que, si $x \in \text{som}(\Gamma \backslash X)$, le groupe Γ_x attaché à x est le stabilisateur du représentant jx de x dans $\text{som}(X)$; si jx est défini par un réseau L , on a donc $\Gamma_x = \text{Aut}(E_L)$, cf. n° 2.1. De même, si $y \in \text{ar}(\Gamma \backslash X)$, le groupe Γ_y est le stabilisateur de l'arête jy de X . Lorsque k_0 est fini, tous les groupes Γ_x et Γ_y sont finis.

Exemples

La situation est particulièrement simple lorsque $\Gamma \backslash X$ est un arbre, puisqu'alors Γ s'identifie à la limite d'un arbre de groupes porté par $\Gamma \backslash X$, cf. chap. I, n° 4.4. Ainsi :

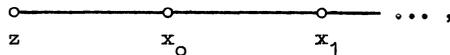
a) dans le cas 2.4.1 ($A = k[t]$, $g = 0$, $e = d = 1$), où $\Gamma \backslash X$ est :



on a $\Gamma_{x_0} = \text{GL}_2(k)$, $\Gamma_{x_1} = \text{B}(k)$, et la limite du sous-arbre de groupes formé par la pointe $\circ \text{---} \circ \text{---} \dots$ est le groupe de Borel $\text{B}(A)$. On retrouve ainsi le théorème de Nagao :

$$\Gamma = \text{GL}_2(k) *_{\text{B}(k)} \text{B}(A) \quad , \text{ cf. n° 1.6, th. 6.}$$

b) dans le cas 2.4.3 ($G = 0$, $e = d = 2$), où $\Gamma \backslash X$ est



on trouve de même :

$$\Gamma = D^* *_{\text{h}} \text{GL}_2(k_0) *_{\text{B}(k_0)} \text{B}(A) \quad ,$$

où D est le corps de quaternions attaché à la courbe C , et où h est le groupe

k^* , considéré comme sous-groupe de Cartan à la fois de $GL_2(k_0)$ et de D^* .

Lorsque $A = \mathbb{R}[u,v]/(u^2 + v^2 + 1)$, cela donne :

$$\Gamma = \mathbb{H}^* *_{\mathbb{C}^*} GL_2(\mathbb{R}) *_{B(\mathbb{R})} B(A) .$$

Revenons au cas général, et reprenons les notations $Y_m, \Delta_c, x_c, \dots$ du n° 2.3.

Si $x = x_{c,n}$ est un sommet de la pointe Δ_c , et y l'arête joignant x au sommet suivant $x' = x_{c,n+1}$, on a vu que $\Gamma_x = \Gamma_y$, de sorte que l'on a une suite de plongements :

$$\Gamma_{x_c} \subset \dots \subset \Gamma_x \subset \Gamma_{x'} \subset \dots$$

et la limite Γ_c de l'arbre de groupes défini sur Δ_c par $(\Gamma, \Gamma \setminus X)$ est simplement la réunion de la suite croissante formée par les Γ_x ; on peut également caractériser Γ_c comme l'intersection de Γ avec le sous-groupe de Borel de $GL_2(K)$ formé des éléments qui stabilisent le bout de X défini par le relèvement $j\Delta_c$ de Δ_c (cf. nos 1.3 et n° 2.3). L'une ou l'autre caractérisation montre que Δ_c est produit semi-direct du groupe $k_0^* \times k_0^*$ par un groupe U_c qui est un A -module projectif de rang 1 (et en particulier un k_0 -espace vectoriel de dimension infinie).

Notons d'autre part Λ_m le groupe fondamental de la restriction à Y_m du graphe de groupes $(\Gamma, \Gamma \setminus X)$. Posons $\Phi_c = \Gamma_{x_c}$. Le fait que x_c soit un sommet à la fois de Y_m et de Δ_c montre que l'on a des injections canoniques :

$$\Phi_c \rightarrow \Lambda_m \quad \text{et} \quad \Phi_c \rightarrow \Gamma_c .$$

THÉOREME 10 - Le groupe Γ est somme des groupes $\Gamma_c (c \in \text{Pic}(A))$ et Λ_m , amalgamés par leurs sous-groupes communs Φ_c suivant les injections ci-dessus.

Cela résulte du th. 9 et du fait, facile à vérifier, que, si un graphe de groupes \underline{G} s'obtient en "collant" deux graphes de groupes \underline{G}_1 et \underline{G}_2 par un arbre de groupes \underline{G}_{12} , on a

$$\pi_1(\underline{G}) = \pi_1(\underline{G}_1) * \pi_1(\underline{G}_{12}) \pi_1(\underline{G}_2) .$$

COROLLAIRE - Le groupe Γ n'est pas de type fini.

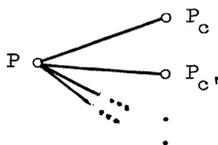
Soit en effet Δ_c une pointe, et soit Γ'_c le groupe obtenu en amalgamant Λ_m et les Γ_c , pour $c' \neq c$. D'après le th. 10, on a

$$\Gamma = \Gamma'_c *_{\Phi_c} \Gamma_c .$$

Mais Γ_c est réunion de la suite strictement croissante de sous-groupes Γ_x , avec $x \in \text{som}(\Delta_c)$, et ces sous-groupes contiennent tous Φ_c . Il en résulte que Γ est réunion de la suite strictement croissante des $\Gamma'_c *_{\Phi_c} \Gamma_x$, et ce n'est donc pas un groupe de type fini.

Autre démonstration du th. 10

Si $c \in \text{Pic}(A)$, notons $\Delta_{c,1}$ le sous-graphe de Δ_c obtenu en retirant x_c ainsi que les deux arêtes (inverses l'une de l'autre) d'origine et d'extrémité x_c . D'après le th. 9, $\text{som}(\Gamma \backslash X)$ est réunion disjointe de $\text{som}(Y_m)$ et des $\text{som}(\Delta_{c,1})$. Notons X_m (resp. X_c) l'image réciproque de Y_m (resp. de $\Delta_{c,1}$) dans X . Soit \bar{X} l'arbre obtenu en contractant en un point chacune des composantes connexes de X_m et des X_c (cf. chap. I, n° 2.3). Le groupe Γ opère sur \bar{X} , et le quotient $T = \Gamma \backslash \bar{X}$ est égal au graphe déduit de $\Gamma \backslash X$ en contractant Y_m en un point P et chacun des $\Delta_{c,1}$ en un point P_c . Vu le th. 9, les seules arêtes de T sont celles qui lient P aux P_c ; en particulier, T est un arbre :



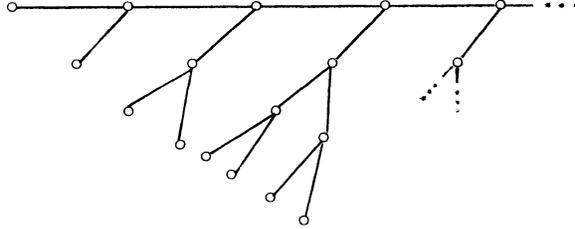
D'après le th. 9 du chap. I, il en résulte que Γ est la limite d'un arbre de groupes (Σ, T) porté par T . De plus, on constate facilement que le groupe Σ_P attaché au sommet P est Λ_m , que celui attaché à P_c est Γ_c , et celui attaché à l'arête $P - P_c$ est Φ_c . Le th. 10 en résulte.

Exercices

- 1) Soit E une composante connexe de l'un des X_c .

a) Montrer que E contient un bout de X et un seul, et que ce bout est rationnel, i.e. appartient à $P_1(K)$. Inversement, tout bout rationnel peut être représenté par une telle composante E , et par une seule.

b) On suppose que $\text{Card}(k) = 2$. Montrer que E est isomorphe à l'arbre suivant :



2) (d'après Quillen). Les hypothèses sont celles de 2.4.1, i.e. on a $A = k[t]$. On note Z_0 l'ensemble des k -sous-espaces vectoriels v de A^2 ayant la propriété suivante :

(*) l'homomorphisme canonique $A \otimes_k v \rightarrow A^2$ est bijectif.

(Un tel sous-espace est une "k-forme" du A -module A^2 .)

a) Soit L un \mathbb{Q} -réseau de $V = K^2$. Montrer que le fibré E_L associé à L est trivial si et seulement si il existe $v \in Z_0$ tel que $L = \mathbb{Q} \cdot v$, auquel cas on a $v = A^2 \cap L$. En déduire une bijection entre Z_0 et l'ensemble des sommets de X de type 0 au sens du n° 2.4.1.

b) Soit $Z_1 = P_1(K)$, et soit Z la somme disjointe de Z_0 et de Z_1 . Si $D \in Z_1$ et $v \in Z_0$, on dit que D et v sont liés si D (considéré comme une K -droite de K^2) est de la forme $K \otimes_k d$, où d est une k -droite de v . On définit ainsi une structure de graphe combinatoire sur Z . Montrer que ce graphe est un arbre, isomorphe à celui noté \bar{X} à la page précédente. Le groupe Γ opère sur Z avec pour domaine fondamental un segment ; on retrouve ainsi la décomposition de Nagao :

$$\Gamma = GL_2(k) *_{B(k)} B(k[t]) .$$

3) Dans le cas 2.4.4, montrer que Γ est produit libre de $\mathfrak{S}_3 *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} A$ et de deux copies de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

2.6. Résultats auxiliaires

PROPOSITION 11 - Soit $G = (G, Y)$ un graphe de groupes ayant les propriétés suivantes :

SOUS-GROUPES ARITHMÉTIQUES

(i) le graphe Y est fini ;

(ii) pour tout $x \in \text{som}(Y)$, le groupe G_x associé à x est fini.

Soient T un arbre maximal de Y , et $G = \pi_1(G, Y, T)$ le groupe fondamental de G en T (chap. I, n° 5.1). Alors :

a) G est un groupe de type fini.

b) Tout sous-groupe sans torsion de G est libre.

c) G possède des sous-groupes sans torsion d'indice fini.

Disons qu'un groupe a virtuellement une propriété (P) s'il possède un sous-groupe d'indice fini qui jouit de (P). Avec cette terminologie, on a :

COROLLAIRE - Le groupe G est virtuellement libre de type fini.

En particulier, c'est un groupe de type (WFL), et de dimension cohomologique virtuelle ≤ 1 , au sens de [34], n° 1.8.

Remarque

A. Karrass, A. Pietrowski et D. Solitar (J. Australian Math. Soc., 1973) ont démontré une réci-proque à la prop. 11 : tout groupe virtuellement libre de type fini est groupe fondamental d'un graphe de groupes ayant les propriétés (i) et (ii). Ce résultat généralise le théorème de Stallings ([7], 0.2) suivant lequel tout groupe sans torsion qui est virtuellement libre de type fini est libre. Il y a des résultats analogues, dus à D. Cohen et G.P. Scott, pour les groupes qui ne sont pas de type fini.

Démonstration de la prop. 11

L'assertion (a) résulte de la définition de $\pi_1(G, Y, T)$ par générateurs et relations.

L'assertion (b) résulte du lemme suivant, qui généralise la prop. 18 du chap. I :

LEMME 8 - Soit H un sous-groupe de G tel que $H - \{1\}$ ne rencontre aucun conjugué des G_x , $x \in \text{som}(Y)$. Alors H est un groupe libre.

En effet, H opère¹ sur l'arbre \tilde{X} revêtement universel de (G, Y, T) puisque les fixateurs des sommets de \tilde{X} sont les conjugués des G_x , cf. chap. I, n° 5.3 ; on librement

applique le th. 4 du chap. I, n° 3.3.

Pour prouver (c), choisissons un entier $n \geq 1$ qui soit multiple des ordres des G_x , $x \in \text{som}(Y)$. Soit E un ensemble fini à n éléments, et soit \mathfrak{S}_E le groupe des permutations de E . Si F est un groupe fini, nous dirons qu'un homomorphisme $f : F \rightarrow \mathfrak{S}_E$ est régulier si l'action correspondante de F sur E est libre, autrement dit si $f(x).e = e$ (avec $x \in F$, $e \in E$) entraîne $x = 1$.

LEMME 9 - Supposons que l'ordre de F divise n . Alors :

(α) Il existe un homomorphisme régulier $f : F \rightarrow \mathfrak{S}_E$, et un seul à conjugaison près par un élément de \mathfrak{S}_E .

(β) Si F' est un sous-groupe de F , tout homomorphisme régulier de F' dans \mathfrak{S}_E se prolonge en un homomorphisme régulier de F dans \mathfrak{S}_E .

(γ) Si F' et F'' sont deux sous-groupes de F , et φ un isomorphisme de F' sur F'' , alors, pour tout homomorphisme régulier $f : F \rightarrow \mathfrak{S}_E$, il existe $s \in \mathfrak{S}_E$ tel que $f(\varphi(x)) = s.f(x).s^{-1}$ pour tout $x \in F'$.

L'assertion (α) signifie que, à isomorphisme près, il existe un et un seul F -ensemble à n éléments sur lequel F agit librement, ce qui est évident. Les assertions (β) et (γ) résultent de (α).

LEMME 10 - Il existe un homomorphisme $f : G \rightarrow \mathfrak{S}_E$ tel que la restriction de f à chacun des G_x , $x \in \text{som}(Y)$, soit un homomorphisme régulier.

Vu la définition de G (chap. I, n° 5.1), il suffit de construire :

des homomorphismes réguliers $f_x : G_x \rightarrow \mathfrak{S}_E$, $x \in \text{som}(Y)$

des éléments s_y de \mathfrak{S}_E , $y \in \text{ar}(Y)$,

vérifiant les propriétés de recollement :

$$s_y.f_x(a^y).s_y^{-1} = f_{x'}(a^{\bar{y}}) \text{ si } y \in \text{ar}(Y), x = t(y), x' = o(y), a \in G_y$$

$$s_y = 1 \text{ si } y \in \text{ar}(T).$$

Pour cela, on construit d'abord les f_x et les s_y sur l'arbre T ; cela se fait par récurrence sur le nombre de sommets de T , en utilisant le lemme 9 (β). L'existence des s_y , pour $y \notin \text{ar}(T)$, résulte alors du lemme 9 (γ).

Soit H le noyau d'un homomorphisme $f : G \rightarrow \mathfrak{S}_E$ ayant les propriétés du lemme 10. Il est clair que H est d'indice fini dans G . D'autre part, pour tout $x \in \text{som}(Y)$, la restriction de f à G_x est injective. On a donc $H \cap G_x = \{1\}$, et, puisque H est distingué dans G , cela entraîne que $H - \{1\}$ ne rencontre aucun des conjugués des G_x . D'après le lemme 8, H est libre, donc a fortiori sans torsion, ce qui démontre (c).

Groupes résiduellement finis

Soit G un groupe. Rappelons ([3], p. 116, 414) que G est dit résiduellement fini s'il est séparé pour la topologie des sous-groupes d'indice fini, autrement dit si, pour tout $x \in G - \{1\}$, il existe un sous-groupe H de G , d'indice fini, qui ne contient pas x ; on notera que l'on peut alors choisir H distingué dans G : il suffit de le remplacer par l'intersection de ses conjugués.

Tout groupe libre est résiduellement fini (cf. par exemple Bourbaki, A.I, p. 150, exerc. 34). Tout sous-groupe d'un produit de groupes résiduellement finis est résiduellement fini.

PROPOSITION 12 - Soit $G = (G, Y)$ un graphe de groupes ayant les propriétés suivantes :

- (i) le graphe Y est fini ;
- (ii') pour tout $x \in \text{som}(Y)$, le groupe G_x est résiduellement fini ;
- (ii'') pour tout $y \in \text{ar}(Y)$, le groupe G_y est fini.

Soient T un arbre maximal de Y , et G le groupe fondamental de (G, Y, T) .

Alors :

- (a) G est résiduellement fini ;
- (b) pour tout $x \in \text{som}(Y)$, la topologie des sous-groupes d'indice fini de G induit sur G_x la topologie des sous-groupes d'indice fini de G_x .

(Noter que les propriétés (ii') et (ii'') sont plus faibles que la propriété (ii) de la prop. 11.)

Soit \mathfrak{R} l'ensemble des familles $R = (R_x)_{x \in \text{som}(Y)}$, où R_x est un sous-groupe

distingué d'indice fini de G_x tel que $R_x \cap G_y = \{1\}$ pour toute arête y d'extrémité x (ce qui permet d'identifier G_y à un sous-groupe de G_x/R_x). Les G_x/R_x et les G_y forment alors un graphe de groupes $(G/R, Y)$ qui satisfait aux hypothèses de la prop. 11. Posons $G_R = \pi_1(G/R, Y, T)$ et notons f_R l'homomorphisme canonique de G sur G_R . Les f_R définissent un homomorphisme

$$f : G \rightarrow \prod_{R \in \mathcal{R}} G_R.$$

Nous allons voir que f est injectif. Pour cela, choisissons un sommet P_0 de Y , et identifions G (resp. G_R) au groupe fondamental de (G, Y) (resp. de $(G/R, Y)$) en P_0 , cf. chap. I, prop. 20. Soit g un élément de G distinct de 1 , et représentons g sous la forme $|c, \mu|$ où (c, μ) est un mot réduit, (chap. I, n° 5.2). Il résulte des hypothèses (i), (ii') et (ii'') que l'on peut choisir R de telle sorte que $(f_R(c), \mu)$ soit un mot réduit de G_R . Vu le th. 11 du chap. I, cela entraîne que $f_R(g) \neq 1$, ce qui montre bien que f est injectif. Mais, d'après le cor. à la prop. 11, chacun des G_R est virtuellement libre, donc résiduellement fini. Il en résulte que G est résiduellement fini, d'où (a).

Soit maintenant H un sous-groupe d'indice fini de l'un des G_x . On peut choisir $R \in \mathcal{R}$ tel que $R_x \subset H$. Vu la prop. 11, il existe un sous-groupe H_1 d'indice fini de G_R qui est sans torsion, donc rencontre G_x/R_x seulement en l'élément neutre. Le groupe $H_2 = f_R^{-1}(H_1)$ est alors un sous-groupe d'indice fini de G tel que $H_2 \cap G_x \subset H$. Cela démontre (b).

Remarque

La prop. 12 ne reste pas valable lorsqu'on y supprime l'hypothèse (ii''), cf. Bourbaki, A.I, p. 150, exerc. 35.

Exercices

- 1) Tout produit libre de groupes résiduellement finis est résiduellement fini.
- 2) Soit $G = \pi_1(G, Y, T)$. On suppose que les G_x , $x \in \text{som}(Y)$ sont finis, mais on ne suppose pas que Y soit fini. Montrer que tout sous-groupe sans torsion de G est libre. Prouver l'équivalence des propriétés suivantes :
 - c) G possède des sous-groupes sans torsion d'indice fini ;
 - c') les ordres des G_x sont bornés.
 (L'implication c) \Rightarrow c') est immédiate. Pour prouver que c') \Rightarrow c), utiliser la

SOUS-GROUPES ARITHMÉTIQUES

même méthode que dans la démonstration de la prop. 11.)

3) On se place dans les hypothèses de la prop. 11. On note $\chi(G)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de G au sens de Wall (cf. [34], p. 99) ; si H est un sous-groupe libre d'indice fini de G , et si r_H désigne le rang de H , on a

$$\chi(G) = (1 - r_H)/(G:H) .$$

Montrer que

$$\chi(G) = \sum_{x \in \text{som}(Y)} 1/\text{Card}(G_x) - \sum_{y \in \text{ar. geom}(Y)} 1/\text{Card}(G_y) .$$

(Pour une généralisation de ce résultat, voir [34], p. 102, prop. 14.)

4) Les notations sont celles du n° 2.5. On suppose k_0 fini.

Montrer que

$$\chi(\Gamma) = \chi(\wedge_m) - \sum_{c \in \text{Pic}(A)} \chi(\phi_c) ,$$

où $\chi(\Gamma)$ est défini comme dans l'exerc. 2 du n° 2.3, et $\chi(\wedge_m)$ et $\chi(\phi_c)$ sont les caractéristiques d'Euler-Poincaré de \wedge_m et de ϕ_c au sens de Wall. (Utiliser l'exercice précédent, la partie d) de l'exerc. 2 du n° 2.3, et le fait que

$$\chi(\phi_c) = 1/\text{Card}(\phi_c)$$

puisque ϕ_c est fini.)

5) Donner un exemple de suite strictement croissante de groupes finis dont la réunion G n'a pas de sous-groupe d'indice fini distinct de G . En déduire que la prop. 12 ne s'étend pas au cas des graphes infinis, même lorsqu'on suppose tous les G_x finis.

2.7. Structure de Γ : cas d'un corps fini

Dans ce numéro, on suppose que k_0 est fini. Le graphe Y_m est alors fini, d'après le cor. 4 au th. 9. Il en est de même des groupes Γ_x , et en particulier des groupes ϕ_c intervenant dans le th. 10. En ce qui concerne \wedge_m , on a :

THÉOREME 11 - Le groupe \wedge_m est virtuellement libre de type fini (au sens du n° 2.6).

Cela résulte du cor. à la prop. 11, et des propriétés de Y_m et des Γ_x rappelées ci-dessus.

Sous-groupes de congruence et sous-groupes d'indice fini

Parmi les sous-groupes d'indice fini de Γ figurent les sous-groupes de congruence. Rappelons (cf. [20]) qu'un sous-groupe H de Γ est dit "de congruence" s'il existe un idéal $\mathfrak{a} \neq 0$ de A tel que H contienne le noyau de

$$GL_2(A) \rightarrow GL_2(A/\mathfrak{a}) .$$

(Dans cette définition, on peut remplacer GL_2 par SL_2 ; cela ne change rien.) La topologie définie sur Γ par les sous-groupes de congruence est séparée ; a fortiori, Γ est résiduellement fini.

Notons $S_{\mathfrak{a}}(\Gamma)$ (resp. $S(\Gamma)$) l'ensemble des sous-groupes de congruence (resp. des sous-groupes d'indice fini) de Γ . On a

$$S_{\mathfrak{a}}(\Gamma) \subset S(\Gamma)$$

et le "problème des groupes de congruence" consiste à voir s'il y a égalité. La réponse est négative :

THEOREME 12 - L'ensemble $S_{\mathfrak{a}}(\Gamma)$ est dénombrable, et l'ensemble $S(\Gamma)$ a la puissance du continu.

(Il y a donc "beaucoup" de sous-groupes d'indice fini qui ne sont pas sous-groupes de congruence.)

La première assertion résulte de ce que l'ensemble des idéaux de A est dénombrable, et que, si \mathfrak{a} est un idéal $\neq 0$, il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes de Γ qui contiennent le noyau de $GL_2(A) \rightarrow GL_2(A/\mathfrak{a})$.

D'autre part, puisque Γ est dénombrable, l'ensemble de ses parties a pour cardinal c , le cardinal du continu. On a donc

$$\text{Card } S(\Gamma) \leq c ,$$

et il reste à prouver l'inégalité opposée. Pour cela, choisissons une pointe Δ_c , et notons Γ_c le sous-groupe correspondant de Γ , cf. n° 2.5. Notons $S(\Gamma_c)$ l'ensemble des sous-groupes d'indice fini de Γ_c .

LEMME 11 - On a $\text{Card } S(\Gamma_c) = c$.

Par construction, Γ_c contient un sous-groupe U_c d'indice fini qui est un k_0 -espace vectoriel de dimension infinie dénombrable. Le dual de cet espace est de

dimension c . On en conclut que l'ensemble des hyperplans de U_c a la puissance du continu, d'où le lemme.

LEMME 12 - La topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ induit sur Γ_c la topologie des sous-groupes d'indice fini de Γ_c .

Cela résulte de la prop. 12, appliquée à l'arbre de groupes (Σ, T) défini à la fin du n° 2.5.

Considérons maintenant le sous-ensemble S de $S(\Gamma) \times S(\Gamma_c)$ formé des couples (H, H') tels que

$$H \in S(\Gamma) , H' \in S(\Gamma_c) , \text{ et } H \cap \Gamma_c \subset H' .$$

D'après le lemme 12, l'application $pr_2 : S \rightarrow S(\Gamma_c)$ est surjective. Vu le lemme 11, on a donc $\text{Card } S \cong c$. D'autre part, l'application $pr_1 : S \rightarrow S(\Gamma)$ est évidemment surjective, et ses fibres sont finies ; on a donc $\text{Card } S(\Gamma) = \text{Card } S$, cf. Bourbaki, E III, p. 50, prop. 4, d'où $\text{Card } S(\Gamma) \cong c$, ce qui achève la démonstration.

Remarque

La démonstration du th. 12 donnée dans [20], § 3, est quelque peu différente : elle évite l'emploi des graphes de groupes, mais utilise les propriétés homologiques des sous-groupes d'indice fini de Γ exposées au n° suivant.

2.8. Homologie

On conserve les hypothèses et notations des n°s 2.5 et 2.7 ; on note p la caractéristique de k_o .

Rappels homologiques

Si un groupe G opère simplicialement sur un complexe simplicial contractile X , il existe une suite spectrale qui relie les groupes d'homologie de G à ceux des fixateurs des simplexes de X , cf. [34], p. 95. Lorsque X est un arbre, sur lequel G opère sans inversion, cette suite spectrale prend une forme particulièrement simple, que nous allons rappeler.

On choisit d'abord une orientation $ar^+(X)$ de X invariante par G ; c'est

possible du fait que G opère sans inversion. On définit le groupe $C_i(X)$ des chaînes de X de dimension i par :

$$\begin{aligned} C_i(X) &= 0 \quad \text{si } i \neq 0, 1, \\ C_0(X) &= \text{groupe abélien libre de base } \text{som}(X) \\ C_1(X) &= \text{groupe abélien libre de base } \text{ar}^+(X). \end{aligned}$$

On a deux homomorphismes

$$\begin{aligned} \partial : C_1(X) &\rightarrow C_0(X) \quad \text{caractérisé par } \partial(y) = t(y) - o(y), \\ \epsilon : C_0(X) &\rightarrow \mathbf{Z} \quad \text{"} \quad \epsilon(x) = 1. \end{aligned}$$

Le groupe G opère sur les $C_i(X)$ et commute à ∂ et ϵ (à condition de le faire opérer trivialement sur \mathbf{Z}). On obtient ainsi une suite de G -modules

$$0 \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0,$$

qui est exacte du fait que X est un arbre.

Si maintenant M est un G -module quelconque, on déduit de la suite exacte précédente une suite exacte de G -modules

$$0 \rightarrow C_1(X) \otimes M \rightarrow C_0(X) \otimes M \rightarrow M \rightarrow 0,$$

d'où, par passage à l'homologie, une suite exacte :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H_i(G, C_1(X) \otimes M) \rightarrow H_i(G, C_0(X) \otimes M) \rightarrow H_i(G, M) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{i-1}(G, C_1(X) \otimes M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Notons Σ_0 (resp. Σ_1) un système de représentants de $\text{som}(X)$ (resp. de $\text{ar}^+(X)$) modulo l'action de G ; si x (resp. y) est un sommet (resp. une arête) de X , notons G_x (resp. G_y) son stabilisateur dans G . Si l'on convient de noter $\mathbf{Z}[G/H]$ le groupe abélien libre de base les éléments de l'espace homogène G/H , on a des isomorphismes de G -modules :

$$C_0(X) = \bigsqcup_{x \in \Sigma_0} \mathbf{Z}[G/G_x] \quad , \quad C_1(X) = \bigsqcup_{y \in \Sigma_1} \mathbf{Z}[G/G_y].$$

Mais, d'après le lemme de Shapiro, $H_i(G, \mathbf{Z}[G/H] \otimes M)$ s'identifie à $H_i(H, M)$. On a donc

$$\begin{aligned} H_i(G, C_0(X) \otimes M) &= \bigsqcup_{x \in \Sigma_0} H_i(G_x, M) \\ H_i(G, C_1(X) \otimes M) &= \bigsqcup_{y \in \Sigma_1} H_i(G_y, M), \end{aligned}$$

et l'on obtient :

PROPOSITION 13 - Si G opère sur l'arbre X , on a, pour tout G -module M , une suite exacte d'homologie :

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(G, M) \rightarrow \bigsqcup_{y \in \Sigma_1} H_i(G_y, M) \rightarrow \bigsqcup_{x \in \Sigma_0} H_i(G_x, M) \rightarrow H_i(G, M) \rightarrow \dots,$$

et une suite exacte de cohomologie :

$$\dots \rightarrow H^i(G, M) \rightarrow \prod_{x \in \Sigma_0} H^i(G_x, M) \rightarrow \prod_{y \in \Sigma_1} H^i(G_y, M) \rightarrow H^{i+1}(G, M) \rightarrow \dots$$

Remarques

1) Les homomorphismes $H_i(G_x, M) \rightarrow H_i(G, M)$ figurant dans la suite exacte ci-dessus sont ceux induits par les injections $G_x \rightarrow G$; quant aux

$$H_i(G_y, M) \rightarrow H_i(G_x, M),$$

ils sont nuls si x n'est pas une extrémité de y , et induits (resp. opposés d'induits) par les injections $G_y \rightarrow G_x$ si $x = t(y)$ (resp. si $x = o(y)$). La situation est duale en cohomologie.

2) On peut récrire la suite exacte de la prop. 13 sous la forme

$$0 \rightarrow H_0(G \setminus X, \underline{H}_i) \rightarrow H_i(G, M) \rightarrow H_1(G \setminus X, \underline{H}_{i-1}) \rightarrow 0,$$

où $H_r(G \setminus X, \underline{H}_s)$ désigne le r -ème groupe d'homologie du graphe $G \setminus X$ à valeurs dans le cofaisceau \underline{H}_s formé par les $H_s(G_x, M)$ et les $H_s(G_y, M)$, cf. [20], n° 3.3, lemme 10.

Exemple (Lyndon, *Ann. of Math.* 52, 1950)

Supposons que G soit un amalgame $G_1 *_{G_{12}} G_2$, et appliquons la prop. 13 à l'action de G sur l'arbre correspondant (chap. I, n° 4.1). On obtient la suite exacte d'homologie

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(G, M) \rightarrow H_i(G_{12}, M) \rightarrow H_i(G_1, M) \oplus H_i(G_2, M) \rightarrow H_i(G, M) \rightarrow \dots$$

et la suite exacte de cohomologie

$$\dots \rightarrow H^i(G, M) \rightarrow H^i(G_1, M) \oplus H^i(G_2, M) \rightarrow H^i(G_{12}, M) \rightarrow H^{i+1}(G, M) \rightarrow \dots$$

Une façon plus "topologique" de présenter ceci consiste à dire que l'espace clas-

sifiant $BG = K(G, 1)$ s'obtient en recollant BG_1 et BG_2 le long de BG_{12} (cf. J.H.C. Whitehead, Mathematical Works, vol. II, p. 199-200), ce qui permet d'appliquer à BG la suite exacte de Mayer-Vietoris.

Homologie de Γ

La méthode ci-dessus s'applique au groupe Γ , soit en le faisant opérer sur l'arbre X (ce qui a l'avantage que les Γ_x et Γ_y sont finis), soit en le faisant opérer sur l'arbre \bar{X} défini à la fin du n° 2.5. Le second point de vue conduit, par exemple, à la suite exacte :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{i+1}(\Gamma, M) &\rightarrow \bigsqcup_c H_i(\Phi_c, M) \rightarrow H_i(\wedge_m, M) \oplus \bigsqcup_c H_i(\Gamma_c, M) \rightarrow \\ &\rightarrow H_i(\Gamma, M) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

où la sommation porte sur les éléments c de $\text{Pic}(A)$.

A partir des propriétés connues de l'homologie des groupes finis, de leurs limites inductives, et des groupes libres, on obtient divers renseignements sur les $H_i(\Gamma, M)$. Par exemple :

PROPOSITION 14 - Supposons que le Γ -module M soit un groupe abélien de type fini. Notons \mathcal{F} la classe des groupes abéliens finis et \mathcal{B}_p celle des groupes qui sont somme directe d'un groupe fini et d'un groupe de torsion p -primaire dénombrable.

Alors :

a) Pour $i \geq 2$, l'homomorphisme canonique

$$H_i(\wedge_m, M) \oplus \bigsqcup_c H_i(\Gamma_c, M) \rightarrow H_i(\Gamma, M)$$

est \mathcal{F} -bijectif (i.e. son noyau et son conoyau appartiennent à \mathcal{F}).

Pour $i = 1$, il est \mathcal{F} -injectif, et son conoyau est de type fini.

b) Pour $i \leq 1$ (resp. pour $i \geq 2$), $H_i(\wedge_m, M)$ est de type fini (resp. est fini).

c) On a $H_i(\Gamma_c, M) \in \mathcal{B}_p$ pour $i \geq 1$ et $c \in \text{Pic}(A)$.

L'assertion a) résulte de la suite exacte écrite plus haut, jointe au fait que les $H_i(\Phi_c, M)$ sont finis pour $i \geq 1$, et de type fini pour $i = 0$.

L'assertion b) résulte de ce que \wedge_m est virtuellement libre de type fini,

cf. th. 11.

Si $c \in \text{Pic}(A)$, notons U_c le sous-groupe des éléments unipotents de Γ_c ; c'est une limite inductive de groupes abéliens finis de type (p, \dots, p) ; il en résulte que, pour $i \geq 1$, les $H_i(U_c, M)$ sont des groupes de torsion p -primaires dénombrables. D'autre part, le quotient Γ_c/U_c est isomorphe à $k_O^* \times k_O^*$, donc fini d'ordre premier à p . Utilisant la suite spectrale des extensions de groupes, on en déduit que, pour $i \geq 1$, le groupe $H_i(\Gamma_c, M)$ est canoniquement isomorphe à

$$H_i(\Gamma_c/U_c, H_0(U_c, M)) \oplus H_0(\Gamma_c/U_c, H_i(U_c, M)).$$

Le premier facteur de cette somme est fini d'ordre premier à p ; le second est un groupe de torsion p -primaire dénombrable; d'où c).

COROLLAIRE 1 - L'homomorphisme $\varinjlim_c H_i(\Gamma_c, M) \rightarrow H_i(\Gamma, M)$ est \mathcal{F} -bijectif pour $i \geq 2$; pour $i = 1$, il est \mathcal{F} -injectif, et son conoyau est de type fini.

Cela résulte de a) et b).

COROLLAIRE 2 - On a $H_i(\Gamma, M) \in \mathcal{D}_p$ pour $i \geq 2$.

Cela résulte de c) et du cor. 1.

COROLLAIRE 3 - Si M est fini d'ordre premier à p , tous les $H_i(\Gamma, M)$ sont finis.

Cela résulte des cor. 1 et 2 et du fait que, si un entier n annule M , il annule aussi tous les $H_i(\Gamma, M)$.

COROLLAIRE 4 - On a $H_i(\Gamma, \mathbb{Q}) = 0$ pour $i \geq 2$, et $H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie, isomorphe à $H_1(\wedge_m, \mathbb{Q})$.

On a $H_i(\Gamma, \mathbb{Q}) = H_i(\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$. D'après le cor. 2, appliqué à $M = \mathbb{Z}$, $H_i(\Gamma, \mathbb{Z})$ est un groupe de torsion pour $i \geq 2$; on en déduit bien que $H_i(\Gamma, \mathbb{Q}) = 0$ dans ce cas.

Pour $i = 1$, la suite exacte écrite avant la prop. 14 montre que l'homomorphisme $H_1(\wedge_m, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(\Gamma, \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.

Remarque

On peut aussi déduire le cor. 4 de la prop. 13 appliquée à l'arbre X ; en effet,

comme les stabilisateurs des sommets et des arêtes sont finis, leur homologie à coefficients dans \mathbb{Q} est 0 en dimension ≥ 1 , et égale à \mathbb{Q} en dimension 0.

On en déduit des isomorphismes

$$H_i(\Gamma, \mathbb{Q}) \simeq H_i(\Gamma \backslash X, \mathbb{Q}) \quad (i = 0, 1, \dots)$$

entre les groupes d'homologie de Γ , et ceux du graphe $\Gamma \backslash X$; en particulier, on a $H_i(\Gamma, \mathbb{Q}) = 0$ pour $i \geq 2$. Le même argument, appliqué à \wedge_m montre que $H_i(\wedge_m, \mathbb{Q})$ s'identifie à $H_i(Y_m, \mathbb{Q})$; comme l'inclusion $Y_m \rightarrow \Gamma \backslash X$ est une équivalence d'homotopie (cf. cor. 2 au th. 9) on obtient finalement des isomorphismes

$$H_i(\Gamma, \mathbb{Q}) \simeq H_i(\wedge_m, \mathbb{Q}) \quad (i = 0, 1, \dots),$$

d'où le cor. 4.

Sous-groupes d'indice fini de Γ

Soit G un sous-groupe d'indice fini de Γ . Faisons opérer G sur la droite projective $P_1(K)$, i.e. sur les bouts rationnels de X . Puisque les orbites de Γ dans $P_1(K)$ sont en nombre fini, il en est de même des orbites de G . Soit Σ un système de représentants de ces orbites, et, pour tout $\sigma \in \Sigma$, notons G_σ le stabilisateur de σ dans G . Les G_σ sont des représentants (modulo G -conjugaison) des intersections de G avec les sous-groupes de Borel de $GL_2(K)$ (ou avec les Γ_σ , cela revient au même). Les résultats démontrés ci-dessus pour Γ et les Γ_σ sont aussi valables pour G et les G_σ . Cela peut se voir par deux méthodes, que je me borne à esquisser :

a) Utilisant le morphisme fini $G \backslash X \rightarrow \Gamma \backslash X$, on montre que $G \backslash X$, tout comme $\Gamma \backslash X$, s'obtient en collant à un graphe fini Y_G des "pointes" Δ_σ ($\sigma \in \Sigma$); le stabilisateur de Δ_σ est un conjugué de G_σ . On peut alors reprendre les arguments de ce numéro, en remplaçant $(\Gamma, \Gamma_\sigma, Y_m, \dots)$ par $(G, G_\sigma, Y_G, \dots)$, et l'on constate que la prop. 14 et ses corollaires restent valables.

b) On utilise le lemme de Shapiro

$$H_i(G, M) = H_i(\Gamma, \text{Ind}_G^\Gamma M),$$

où $\text{Ind}_G^\Gamma M = \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M$ est le Γ -module induit par le G -module M . En appliquant alors la prop. 14 et ses corollaires à $\text{Ind}_G^\Gamma M$, on obtient les résultats

voulus.

Exercices

1) Les notations sont celles de la prop. 14. Si $c \in \text{Pic}(A)$, on note U'_c le sous-groupe de U_c formé des éléments qui opèrent trivialement sur M . Montrer que U'_c est d'indice fini dans U_c . Si cet indice est p^a , montrer que p^{a+1} annule tous les $H_i(U'_c, M)$ pour $i \geq 1$ (remarquer que p annule $H_1(U'_c, M)$, et utiliser un argument de transfert). En déduire l'existence d'un entier $n \geq 1$ qui annule les $H_i(\Gamma_c, M)$ pour $i \geq 1$, et les $H_i(\Gamma, M)$ pour $i \geq 2$; montrer que $H_1(\Gamma, M)$ est somme directe d'un groupe abélien de type fini et d'un groupe dénombrable annulé par une puissance de p .

2) Les notations sont celles de la fin du n° 2.8. En particulier, G désigne un sous-groupe de Γ d'indice fini. Si F est un groupe, on note F^{ab} le plus grand quotient abélien de F ; on sait que $F^{ab} = H_1(F, \mathbb{Z})$.

a) Soit $\alpha : \coprod_{\mathcal{O}} G_{\mathcal{O}}^{ab} \rightarrow G^{ab}$ l'homomorphisme induit par les injections des $G_{\mathcal{O}}$ dans G . Montrer, en utilisant la prop. 14, que $\text{Ker}(\alpha)$ est fini, et que $\text{Coker}(\alpha)$ est de type fini (cf. [20], n° 3.3).

b) Soit $\sigma \in \Sigma$. Montrer que G_{σ} est produit semi-direct d'un groupe abélien fini R_{σ} d'ordre premier à p , et d'un groupe unipotent U_{σ} isomorphe à un \mathbb{F}_p -espace vectoriel infini dénombrable. Montrer que $G_{\sigma}^{ab} = R_{\sigma} \times U_{\sigma}$ si R_{σ} est contenu dans le groupe $k_{\mathcal{O}}^*$ des homothéties, et que $G_{\sigma}^{ab} = R_{\sigma}$ dans le cas contraire.

c) Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :

c₁) le groupe G^{ab} est de type fini ;

c₂) les groupes $G_{\mathcal{O}}^{ab}$ sont finis ;

c₃) pour toute droite D de V , il existe un élément s de G , d'ordre fini premier à p , qui n'est pas une homothétie, et laisse stable D .

Lorsque ces propriétés ne sont pas vérifiées, G^{ab} est produit d'un groupe de type fini par un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension infinie, (cf. [20], loc. cit.).

3) a) Soit ℓ un nombre premier, et soit G un sous-groupe de Γ sans ℓ -torsion (i.e. sans élément d'ordre ℓ). Montrer que, pour tout G -module M , et tout $i \geq 2$, la multiplication par ℓ dans $H_i(G, M)$ est bijective. (Faire opérer G sur l'arbre X , et remarquer que les stabilisateurs des sommets et des arêtes sont finis d'ordre premier à p .)

b) Soit \mathfrak{a} un idéal $\neq 0$ de A et soit $G_{\mathfrak{a}}$ le noyau de l'homomorphisme

$$\text{GL}_2(A) \rightarrow \text{GL}_2(A/\mathfrak{a}).$$

Montrer que, si $\mathfrak{a} \neq A$, $G_{\mathfrak{a}}$ est sans ℓ -torsion pour tout $\ell \neq p$.

2.9. Caractéristiques d'Euler-Poincaré

Les hypothèses et notations sont celles des n^{os} 2.5, 2.7 et 2.8.

On note G un sous-groupe d'indice fini de Γ .

Définition de la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(G)$ de G

La définition de Wall ([34], p. 99) ne s'applique pas, car G ne contient aucun sous-groupe d'indice fini qui soit "de type (FL)". Il est toutefois naturel de définir $\chi(G)$, par analogie avec la prop. 14 de [34], au moyen de la formule

$$(*) \quad \chi(G) = \sum_x 1/\text{Card}(G_x) - \sum_y 1/\text{Card}(G_y),$$

où x (resp. y) parcourt un système de représentants des sommets (resp. des arêtes géométriques) de $G \backslash X$, et G_x (resp. G_y) désigne le stabilisateur de x (resp. de y) dans G . Les deux séries intervenant dans (*) convergent (n° 2.3, exerc. 2). On a

$$\chi(G) = \chi(\Gamma) \cdot (\Gamma:G),$$

et l'on peut calculer $\chi(\Gamma)$ au moyen de la valeur au point - 1 de la fonction zêta de la courbe C (loc. cit.).

Voici un autre point de vue qui conduit au même résultat : on sait que, sous certaines hypothèses ([34], prop. 15) la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un amalgame se calcule par la formule

$$\chi(G_1 *_{A_1} G_2 *_{A_2} \dots * G_n) = \sum \chi(G_i) - \sum \chi(A_i).$$

On peut convenir d'appliquer cette formule à la décomposition de Γ comme amalgame fournie par le th. 10 :

$$\chi(\Gamma) = \chi(\wedge_m) - \sum_c \chi(\Phi_c) + \sum_c \chi(\Gamma_c),$$

en convenant en outre que $\chi(\Gamma_c) = 0$ (ce qui est naturel puisque Γ_c est réunion de sous-groupes finis d'ordres tendant vers $+\infty$, et que $\chi(F) = 1/\text{Card}(F)$ si F est fini). On arrive ainsi à la définition suivante de $\chi(\Gamma)$:

$$\chi(\Gamma) = \chi(\wedge_m) - \sum_c \chi(\Phi_c),$$

où, cette fois, les termes de droite sont des caractéristiques d'Euler-Poincaré au

sens de Wall. Cette définition conduit à la même valeur de $\chi(\Gamma)$ que celle donnée ci-dessus, cf. n° 2.6, exerc. 4.

Interprétation homologique de $\chi(G)$

Considérons le cas d'un groupe G qui est sans p -torsion, i.e. dont les éléments d'ordre fini sont d'ordre une puissance de p . On voit facilement qu'il existe de tels sous-groupes (par exemple des groupes de congruence, cf. n° 2.8, exerc. 3). Le nombre $\chi(G)$ est alors un entier < 0 (n° 2.3, exerc. 2). C'est cet entier que nous allons interpréter.

Pour cela, soit $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(K)]$ le groupe abélien libre de base $\mathbf{P}_1(K)$, et soit $\epsilon : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(K)] \rightarrow \mathbf{Z}$ l'homomorphisme d'augmentation, caractérisé par $\epsilon(\delta) = 1$ pour tout $\delta \in \mathbf{P}_1(K)$. Notons St le noyau de ϵ . On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{St} \rightarrow \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(K)] \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Le groupe $\text{GL}_2(K)$ opère de façon naturelle sur St , qui est son "module de Steinberg"; a fortiori, G opère sur St .

THÉORÈME 13 - Le $\mathbf{Z}[G]$ -module St est projectif de type fini, et stablement libre de rang $-\chi(G)$.

En d'autres termes, il existe des $\mathbf{Z}[G]$ -modules libres de type fini L_0 et L_1 , de rangs ℓ_0 et ℓ_1 , tels que :

$$\text{St} \oplus L_0 \simeq L_1 \quad \text{et} \quad \chi(G) = \ell_0 - \ell_1.$$

Démonstration

Disons qu'un sommet (resp. une arête) de X est G -stable si son stabilisateur est $\{1\}$, et G -instable sinon. Soit X_∞ le sous-graphe de X formé des sommets et des arêtes G -instables, et posons

$$S_0 = \text{som}(X) - \text{som}(X_\infty), \quad S_1 = \text{ar}^+(X) - \text{ar}^+(X_\infty),$$

où $\text{ar}^+(X)$ est une orientation de X invariante par G . Le groupe G opère librement sur S_0 et S_1 ; il en résulte que les $\mathbf{Z}[G]$ -modules

$$L_0 = \mathbf{Z}[S_0] \quad \text{et} \quad L_1 = \mathbf{Z}[S_1]$$

sont libres de rangs $\ell_0 = \text{Card}(G \backslash S_0)$ et $\ell_1 = \text{Card}(G \backslash S_1)$.

Le théorème 13 résulte alors de l'énoncé plus précis suivant :

THEOREME 13' - (a) Les ℓ_i sont finis ($i = 0, 1$) .

(b) Les $\mathbb{Z}[G]$ -modules $St \oplus L_0$ et L_1 sont isomorphes.

(c) On a $\chi(G) = \ell_0 - \ell_1$.

Démonstration de (a)

Remarquons d'abord que, si un sommet x de X est G -stable, son stabilisateur dans Γ a au plus N éléments, où $N = (\Gamma:G)$. Or la structure de $\Gamma \backslash X$ donnée au n° 2.3 montre que de tels sommets sont en nombre fini, modulo l'action de Γ , donc aussi modulo l'action de G . Cela prouve que $\ell_0 = \text{Card}(G \backslash S_0)$ est fini ; un argument analogue montre la finitude de ℓ_1 .

Démonstration de (b)

On peut interpréter L_0 (resp. L_1) comme le groupe des chaînes de dimension 0 (resp. de dimension 1) de X modulo X_∞ :

$$L_0 = C_0(X \text{ mod } X_\infty) \quad , \quad L_1 = C_1(X \text{ mod } X_\infty) .$$

La suite exacte d'homologie relative donne :

$$0 \rightarrow H_1(X_\infty) \rightarrow H_1(X) \rightarrow H_1(X \text{ mod } X_\infty) \rightarrow H_0(X_\infty) \rightarrow H_0(X) \rightarrow H_0(X \text{ mod } X_\infty) \rightarrow 0 .$$

Comme $H_1(X) = 0$ et $H_0(X) = \mathbb{Z}$, on en déduit que $H_0(X \text{ mod } X_\infty) = 0$ et que l'on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(X \text{ mod } X_\infty) \rightarrow H_0(X_\infty) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 .$$

En d'autres termes, $H_1(X \text{ mod } X_\infty)$ s'identifie au noyau $\tilde{H}_0(X_\infty)$ de l'homomorphisme d'augmentation $H_0(X_\infty) \rightarrow \mathbb{Z}$, c'est le "0-ième groupe d'homologie réduite" du graphe X_∞ .

LEMME 13 - On a $H_0(X_\infty) \simeq \mathbb{Z}[P_1(K)]$ et $\tilde{H}_0(X_\infty) \simeq St$.

Admettons provisoirement ce lemme. Par définition de l'homologie relative, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(X \text{ mod } X_\infty) \rightarrow C_1(X \text{ mod } X_\infty) \rightarrow C_0(X \text{ mod } X_\infty) \rightarrow H_0(X \text{ mod } X_\infty) \rightarrow 0 ,$$

ce qui s'écrit :

$$0 \rightarrow St \rightarrow L_1 \rightarrow L_0 \rightarrow 0 .$$

Comme L_0 est libre, cette suite exacte est scindée, ce qui prouve (b).

Démonstration du lemme 13

Si $x \in \text{som}(X_\infty)$, le stabilisateur G_x de x est un p -sous-groupe fini non trivial de G , donc de $GL_2(K)$. Un tel sous-groupe fixe une droite D_x et une seule de l'espace $V = K^2$, autrement dit fixe un bout rationnel $b_x \in P_1(K)$ de X , et un seul. Notons

$$\text{Ch}_x : x \text{ --- } x_1 \text{ --- } x_2 \text{ --- } \dots$$

l'unique chemin sans aller-retour d'origine x aboutissant à b_x . Comme G_x fixe x et b_x , il fixe aussi Ch_x ; on a donc $\text{Ch}_x \subset X_\infty$. L'application $x \mapsto b_x$ induit une bijection de l'ensemble des composantes connexes de X_∞ sur $P_1(K)$:

(i) Si x et x' sont dans la même composante connexe de X_∞ , on a $b_x = b_{x'}$. Il suffit en effet de le prouver lorsque x et x' sont liés. Soit alors y l'arête les joignant. On a $G_y \neq \{1\}$, donc G_y fixe un point de $P_1(K)$ et un seul; mais, puisque G_y est contenu dans G_x et dans $G_{x'}$, il fixe b_x et $b_{x'}$. On a donc $b_x = b_{x'}$.

(ii) Si x et x' sont deux sommets de X_∞ tels que $b_x = b_{x'}$, alors x et x' appartiennent à la même composante connexe de X_∞ . En effet, les chemins Ch_x et $\text{Ch}_{x'}$ se rencontrent, puisqu'ils définissent le même bout; leur réunion est connexe, et contient x et x' .

(iii) Tout bout rationnel de X est de la forme b_x . Cela se vérifie, par exemple, au moyen de la description de $\Gamma \backslash X$ donnée au n° 2.3.

Le lemme 13 est maintenant évident, puisque $H_0(X_\infty)$ est le groupe abélien libre de base l'ensemble des composantes connexes de X_∞ .

Démonstration de (c)

La somme (*) donnant $\chi(G)$ peut être décomposée en sa partie relative à X_∞ et sa partie relative à $X \text{ mod } X_\infty$. Or, si x (resp. y) n'est pas dans X_∞ , on a $G_x = \{1\}$ (resp. $G_y = \{1\}$). La contribution de $X \text{ mod } X_\infty$ à $\chi(G)$ est donc

$$\text{Card}(G \backslash S_0) - \text{Card}(G \backslash S_1) = \ell_0 - \ell_1.$$

Ainsi, tout revient à prouver que la contribution de X_∞ à $\chi(G)$ est nulle, au-

trement dit que l'on a :

$$\sum_{x \in \text{som}(G \setminus X_\infty)} 1/\text{Card}(G_x) - \sum_{y \in \text{ar.geom}(G \setminus X_\infty)} 1/\text{Card}(G_y) = 0 .$$

Pour cela, nous allons prouver que les termes de gauche se détruisent deux à deux :

si x est un sommet de X_∞ , associons-lui l'arête géométrique y_x qui le lie au sommet suivant x_1 de Ch_x . Comme G_x fixe Ch_x , il fixe y_x ; on a donc $G_x \subset G_{y_x}$, d'où $G_x = G_{y_x}$ et les contributions de x et de y_x dans $\chi(G)$ se détruisent. Il reste à vérifier que $x \mapsto y_x$ est une bijection de $\text{som}(X_\infty)$ sur $\text{ar.geom}(X_\infty)$. Pour cela, soit $y \in \text{ar.geom}(X_\infty)$, soit b_y l'unique bout rationnel fixe par G_y , et soit Ch_y le plus petit chemin sans aller-retour contenant y et aboutissant à b_y . L'origine x_y de ce chemin est l'une des deux extrémités de y (c'est l'extrémité de y "la plus loin de b_y "). On obtient ainsi une application $y \mapsto x_y$ de $\text{ar.geom}(X_\infty)$ dans $\text{som}(X_\infty)$, et l'on vérifie immédiatement que c'est l'inverse de l'application $x \mapsto y_x$ définie ci-dessus; cette application est donc bien une bijection, ce qui achève de prouver (c).

Remarque

La "contraction vers l'infini" ci-dessus a également été utilisée par Quillen (non publié) et par Stuhler [21].

Interprétation de $\chi(G)$ en termes d'homologie relative

Rappelons d'abord ce que sont les groupes d'homologie relatifs de G modulo une famille non vide de sous-groupes G_σ (pour plus de détails, voir H. Trotter, Ann. of Math. 76, 1962) : on définit un G -module R par la suite exacte

$$0 \rightarrow R \rightarrow \coprod \mathbb{Z}[G/G_\sigma] \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 ,$$

et, si M est un G -module, on pose :

$$H_i(G \text{ mod } G_\sigma, M) = \text{Tor}_{i-1}^{\mathbb{Z}[G]}(R, M) = H_{i-1}(G, R \otimes M) .$$

La suite exacte des Tor , jointe au lemme de Shapiro, montre que l'on a une suite exacte d'homologie relative :

$$\dots \rightarrow \coprod H_i(G_\sigma, M) \rightarrow H_i(G, M) \rightarrow H_i(G \text{ mod } G_\sigma, M) \rightarrow \coprod H_{i-1}(G_\sigma, M) \rightarrow \dots$$

ce qui justifie la terminologie employée.

Nous appliquerons ceci en prenant pour $G_{\mathcal{O}}$ les stabilisateurs des éléments \circ d'un système de représentants de $G \backslash P_1(K)$, cf. fin du n° 2.8 ; du fait que G est sans p' -torsion, les $G_{\mathcal{O}}$ peuvent aussi être caractérisés comme des représentants des classes de G -conjugaison des sous-groupes unipotents maximaux de G .
On a par construction

$$\mathbf{Z}[P_1(K)] = \bigsqcup \mathbf{Z}[G/G_{\mathcal{O}}] ,$$

de sorte que le module R ci-dessus n'est autre que le module St du th. 13.

On a

$$H_i(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, M) = \text{Tor}_{i-1}^{\mathbf{Z}[G]}(St, M)$$

pour tout G -module M . On en déduit :

THÉORÈME 14 - (a) On a $H_i(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, M) = 0$ pour $i \neq 1$.

(b) Si M est de type fini sur \mathbf{Z} , on a

$$H_1(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, M) \simeq M^{\mu(G)} , \quad \text{où } \mu(G) = -\chi(G) .$$

La première assertion provient de ce que, St étant $\mathbf{Z}[G]$ -projectif, on a

$$\text{Tor}_{i-1}^{\mathbf{Z}[G]}(St, M) = 0 \text{ pour } i \neq 1 .$$

Pour (b), on remarque que, si l'on pose $H(M) = H_1(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, M)$, on a

$$H(M) = St \otimes_{\mathbf{Z}[G]} M ,$$

d'où, d'après le th. 13 :

$$H(M) \oplus M^{\ell_{\mathcal{O}}} \simeq M^{\ell_1} , \quad \text{avec } \ell_1 - \ell_{\mathcal{O}} = \mu(G) .$$

Comme M est de type fini, un argument simple de "diviseurs élémentaires" montre que

$$H(M) \simeq M^{\ell_1 - \ell_{\mathcal{O}}} ,$$

d'où (b).

COROLLAIRE - On a :

$$\begin{aligned} \chi(G) &= \sum (-1)^i \text{rg } H_i(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, \mathbf{Z}) = -\text{rg } H_1(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, \mathbf{Z}) \\ &= \sum (-1)^i \dim H_i(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, \mathbf{Q}) = -\dim H_1(G \text{ mod } G_{\mathcal{O}}, \mathbf{Q}) . \end{aligned}$$

Exercices

1) Montrer que, si deux sous-groupes d'indice fini de Γ sont isomorphes, ils ont même caractéristique d'Euler-Poincaré.

2) On fait les mêmes hypothèses sur G que dans les th. 13 et 14. On note $b(G)$ le premier nombre de Betti de $G \backslash X$, et $h(G)$ le nombre d'éléments de $G \backslash \mathbb{P}_1(K)$.

a) Montrer que $\chi(G) = 1 - b(G) - h(G)$.

b) On note $H_c^i(G \backslash X, \mathbb{Q})$ le i -ième groupe de cohomologie à supports compacts du graphe $G \backslash X$, à coefficients dans \mathbb{Q} . Montrer que

$$H_c^i(G \backslash X, \mathbb{Q}) = 0 \quad \text{pour } i \neq 1,$$

et que

$$\dim H_c^1(G \backslash X, \mathbb{Q}) = -\chi(G).$$

BIBLIOGRAPHIE

Groupes libres, relations, amalgames

- [1] H.S.M. COXETER and W.O.J. MOSER - Generators and relations for discrete groups, *Ergebn. der Math.* 14 (zw. Aufl.), Springer-Verlag, 1965.
- [2] R.C. LYNDON and P.E. SCHUPP - Combinatorial Group Theory, Springer-Verlag, 1977.
- [3] W. MAGNUS, A. KARRASS and D. SOLITAR - Combinatorial Group Theory : presentations of groups in terms of generators and relations, *Intersc. Publ.*, New York, 1966.
- [4] B.H. NEUMANN - An essay on free products of groups with amalgamations, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 246 (1954), p. 503-554.

Méthodes topologiques en théorie des groupes

- [5] K. REIDEMEISTER - Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig, 1932 (réimpr. Chelsea, 1950).
- [6] J. STALLINGS - A topological proof of Gruško's theorem on free products, *Math. Zeit.*, 90 (1965), p. 1-8.
- [7] J. STALLINGS - On torsion-free groups with infinitely many ends, *Ann. of Math.*, 88 (1968), p. 312-334.
- [8] J. STALLINGS - Group Theory and 3-dimensional manifolds, Yale Univ. Press, 1971.

Groupes d'automorphismes des arbres

- [9] H. BASS - Some remarks on group actions on trees, *Comm. in Algebra*, 4 (1976), p. 1091-1126.
- [10] I.M. CHISWELL - Abstract length functions in groups, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 80 (1976), p.451-463.
- [11] J. TITS - Sur le groupe des automorphismes d'un arbre, *Essays on Topology and related topics*, Mémoires dédiés à Georges de Rham, Springer-Verlag, 1970, p. 188-211.

- [12] J. TITS - A "Theorem of Lie-Kolchin" for Trees, Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, p. 377-388, Academic Press, 1977.

Analyse sur les arbres

- [13] P. CARTIER - Géométrie et analyse sur les arbres, Sémin. Bourbaki 1971/72, exposé 407, Lect. Notes in Math. 317, p. 123-140, Springer-Verlag, 1973.
- [14] P. CARTIER - Fonctions harmoniques sur un arbre, Symposia Mathematica, 9 (1972), p. 203-270.

Sous-groupes de SL_2 et GL_2

- [15] Y. IHARA - Discrete subgroups of $PL(2, k_p)$, Proc. Symposia Pure Math. IX, AMS 1966, p. 272-278.
- [16] Y. IHARA - On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), p. 219-235.
- [17] Y. MANIN and V. DRINFELD - Periods of p-adic Schottky groups, J. Crelle, 262/263 (1973), p. 239-247.
- [18] D. MUMFORD - An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Comp. Math., 24 (1972), p. 129-174.
- [19] H. NAGAO - On $GL(2, K[x])$, J. Poly. Osaka Univ., 10 (1959), p. 117-121.
- [20] J-P. SERRE - Le problème des groupes de congruence pour SL_2 , Ann. of Math., 92 (1970), p. 489-527.
- [21] U. STUHLER, Zur Frage der endlichen Präsentierbarkeit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall, Math. Ann., 224 (1976), p. 217-232.

Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques

- [22] M.F. ATIYAH - Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc., Third Series, 7 (1957), p. 414-452.
- [23] A. GROTHENDIECK - Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. of Math., 79 (1957), p. 121-138.
- [24] G. HARDER - Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern, Invent. Math., 7 (1969), p. 33-54.
- [25] G. HARDER and M.S. NARASIMHAN - On the Cohomology Groups of Moduli Spaces of Vector Bundles on Curves, Math. Ann., 212 (1975), p. 215-248.

BIBLIOGRAPHIE

- [26] C.S. SESHADRI - Mumford's conjecture for $GL(2)$ and applications, Proc. Bombay Coll. on Algebraic Geometry, p. 347-371, Tata Press Lim., 1968.
- [27] A.N. TIURIN - Classification of vector fiberings over an algebraic curve, Amer. Math. Soc. Transl. 63 (1967), p. 245-279.

Cohomologie des groupes

- [28] A. BOREL - Cohomologie de sous-groupes discrets et représentations de groupes semi-simples, Astérisque 32-33 (1976), p. 73-112.
- [29] A. BOREL et J-P. SERRE - Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques, Topology, 15 (1976), p. 211-232.
- [30] D.E. COHEN - Groups of Cohomological Dimension One, Lect. Notes in Math. 245, Springer-Verlag, 1972.
- [31] K. GRUENBERG - Cohomological Topics in Group Theory, Lect. Notes in Math. 143, Springer-Verlag, 1970.
- [32] G. HARDER - On the cohomology of $SL_2(\mathbb{Q})$, Lie Groups and their Representations (edited by I.M. Gelfand), p. 139-151, Adam Hilger Ltd., London, 1975.
- [33] M.S. RAGHUNATHAN - Discrete subgroups of Lie groups, Ergebn. der Math. 68, Springer-Verlag, 1972.
- [34] J-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, Ann. Math. Studies 70, p. 77-169, Princeton Univ. Press, 1971.
- [35] R.G. SWAN - Groups of Cohomological Dimension One, J. of Algebra, 12 (1969), p. 585-610.

Systemes de Tits et Immeubles

- [36] N. BOURBAKI - Groupes et Algèbres de Lie, chap. IV, Groupes de Coxeter et systèmes de Tits, Hermann, Paris, 1968.
- [37] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes algébriques simples sur un corps local, Proc. Conf. Local Fields, p. 23-36, Springer-Verlag, 1967.
- [38] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées, Publ. Math. IHES, 41 (1972), p. 5-251.
- [39] N. IWAHORI and H. MATSUMOTO - On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke ring of p-adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES, 25 (1965) p. 5-48.

- [40] J. TITS - Structures et groupes de Weyl, Sémin. Bourbaki 1964/65, exposé 288, Benjamin, New York, 1966.
- [41] J. TITS - Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs, Lect. Notes in Math. 386, Springer-Verlag, 1974.

Bibliographie supplémentaire

- [42] I.M.CHISWELL - Groups acting on Trees, Lectures at Queen Mary College, Londres, 1976/77.
- [43] I.M.CHISWELL - The Bass-Serre theorem revisited, J.pure and applied Algebra, 15 (1979), p.117-123.
- [44] W.DICKS - Groups, Trees and Projective Modules, Lect.Notes in Math.790, Springer-Verlag, 1980.
- [45] M.J.DUNWOODY - Accessibility and Groups of Cohomological Dimension One, Proc. London Math. Soc. (3), 38 (1979), p.193-215.
- [46] G.P.SCOTT et C.T.C.WALL - Topological Methods in Group Theory, LMS Lect. Notes 36, p.137-203, Cambridge Univ. Press, 1979.
- [47] C.SOULÉ - Chevalley Groups over Polynomial Rings, LMS Lect.Notes 36, p.359-367, Cambridge Univ.Press, 1979.

INDEX

aller-retour : I.2.1
amalgame : I.1.1
amalgamée (somme —) : I.1.2, II.1.7
arbre : I.2.2
arête (d'un graphe) : I.2.1
arête géométrique : I.2.1
Borel (sous-groupe de —) : II.1.3
bornée (partie —) : I.2.2, I.4.3, II.1.3
bout : I.2.2, II.1.3
Cartan (sous-groupe de —) : II.1.3
chemin : I.2.1
circuit : I.2.1
cohérentes (arêtes —) : I.6.4
combinatoire (graphe —) : I.2.1
composante connexe (d'un graphe) : I.2.1
connexe (graphe —) : I.2.1
contraction (de sous-arbres) : I.2.3
cycliquement réduit (élément —) : I.1.3
décomposable (fibré vectoriel —) : II.2.2
degré (d'un fibré vectoriel) : II.2.1
dessin (d'un graphe) : I.2.1
déterminant (de Dieudonné) : II.1.2
déterminant (d'un fibré vectoriel) : II.2.1
diamètre : I.2.2
discrète (valuation —) : II.1. Notations
droit chemin : I.6.4, II.1.1
équivalents (réseaux —) : II.1.1
Euler-Poincaré (formule d' —) : I.2.3
Euler-Poincaré (mesure d' —) : II.1.5
extrémités (d'une arête) : I.2.1
fixe (propriété de point —) : I.6.1
fondamental (domaine —) : I.4.1
fondamental (groupe — d'un graphe de groupes) : I.5.1

géodésique : I.2.2, I.6.4
graphe : I.2.1
graphe défini par un groupe : I.2.1, I.3.2
graphe de groupes : I.4.4, I.5.1
Hecke (opérateurs de —) : II.1.1
HNN (construction —) : I.1.4, I.5.1
hyperbolique (automorphisme —) : I.6.4, II.1.3
Ihara (théorème de —) : I.1.5, II.1.4, II.1.5
incohérentes (arêtes —) : I.6.4
indice (d'un sommet) : I.2.2
inductive (limite —) : I.1.1
infini (chemin —) : I.2.1
injectif (morphisme — de graphes) : I.2.1
inverse (arête —) : I.2.1
inversion : I.3.1
 I_p -équivalents (fibrés vectoriels —) : II.2.1
Iwahori (sous-groupes d' —) : II.1.3
Kuroš (théorème de —) : I.5.5
lacet : I.2.1
libre (action — d'un groupe) : I.3.3
libre (produit —) : I.1.2
liés (sommets —) : I.2.1
limite (d'un arbre de groupes) : I.4.4
localement injectif (morphisme — de graphes) : I.4.5
longueur (d'un élément d'un amalgame) : I.1.3
Margulis-Tits (théorème de —) : I.6.6
maximal (arbre —) : I.2.3
Nagao (théorème de —) : I.1.5, II.1.6
orientation (d'un graphe) : I.2.1
orienté (graphe —) : I.2.1
origine (d'une arête) : I.2.1
parabolique (sous-groupe —) : II.1.7
pointe : II.2.3
propriété (FA) : I.6.1
quotient (graphe —) : I.3.1
réalisation (d'un graphe) : I.2.1
réduit (mot —) : I.1.2, I.5.2

INDEX

réseau : II.1.1
Schreier (théorème de —) : I.3.4
segment : I.4.1
semi-stable (fibré vectoriel —) : II.2.2
sommet (d'un graphe) : I.2.1
sous-fibré (d'un fibré vectoriel) : II.2.2
stable (fibré vectoriel —) : II.2.2
subdivision barycentrique : I.2.1
Tannaka-Artin (problème de —) : II.1.2
terminal (sommet —) : I.2.1, I.2.2
Tits (système de —) : II.1.7
trèfle (groupe du —) : I.1.5
type (d'un élément d'un amalgame) : I.1.3
type (d'un mot réduit) : I.1.2
universel (revêtement —) : I.5.3
van Kampen (théorème de —) : I.1.1
Weyl (groupe de —) : II.1.7

SUMMARY

These Notes are based on a course given at the Collège de France in 1968/69 ; they have been written with the collaboration of Hyman BASS.

There are two Chapters.

In Chapter I, we consider a group G acting on a tree X , and we use information on the quotient graph $G \backslash X$, and on the stabilizers of the vertices and the edges, to get properties of G . For instance :

a) when the stabilizers are all trivial (i.e. when G acts freely), then G is free (§ 3) ;

b) when $G \backslash X$ is an edge $\circ \text{---} \circ$, G is an amalgam (§ 4).

In the general case (which is due to Bass), G can be described as the fundamental group of a "graph of groups" (§ 5).

Chapter II is concerned with the "tree of SL_2 " over a local field. This tree is the simplest example of the affine buildings defined by Bruhat-Tits for arbitrary semi-simple groups. It is the ultrametric analogue of the upper-half plane, and can be used in a similar way to study arithmetic groups (§ 2). Other applications are given in § 1, for instance to theorems of Ihara and Nagao.

Table of Contents

Introduction	3
Chapter I - Trees and amalgams	
§ 1. Amalgams	7
§ 2. Trees	22
§ 3. Trees and free groups	38
§ 4. Trees and amalgams	48
§ 5. Structure of a group acting on a tree	59
§ 6. Amalgams and fixed points	81

<u>Chapter II</u> - SL_2	
§ 1. The tree of SL_2 over a local field	97
§ 2. Arithmetic subgroups of GL_2 and SL_2 over a function field of one variable	130
<u>Bibliography</u>	181
<u>Index</u>	185