Remarque. — Dans le cas d'un gerbier (resp. treillis multiplicatif) complet quasi-entier à gauche qui ne vérifie pas la condition de chaîne ascendante, nous pouvons aussi donner un théorème de représentation en utilisant le v-système latticiel, un v-idéal dans L étant défini comme un sous-ensemble de L qui contient toutes les bornes inférieures de l'ensemble de ses bornes supérieures. Mais ce système n'étant pas de caractère fini, l'utilité d'une telle représentation est sensiblement moindre.

COROLLAIRE. — *Si la condition de chaîne ascendante est satisfaite, une propriété laticielle est valable pour tous les x-systèmes si et seulement si elle vaut pour le m-système.*

En vue de ce corollaire notre théorème de représentation est très utile quand il s'agit par exemple de chercher des contre-exemples. Ainsi, on peut se proposer de former un x-système de caractère fini tel que chaque x-idéal irréductibre ne soit pas primaire, et ceci dans un demi-groupe commutatif satisfaisant à la condition de chaîne ascendante pour les x-idéaux. Le corollaire montre qu'il suffit de considérer le cas $x = m$ et l'on trouve alors aisément un m-idéal irréductible qui n'est pas primaire en considérant les treillis multiplicatifs finis.

ALGÈBRE. — *Dualité de Tannaka des groupes et des algèbres de Lie.* Note de M. PIERRE CARTIER, présentée par M. Jacques Hadamard.

On étudie la dualité de Tannaka pour les représentations d'un groupe ou d'une algèbre de Lie par des méthodes de géométrie algébrique. Des critères sont fournis par les théorèmes 2' et 3 qui contiennent des résultats précédents de Harish-Chandra [1]. On verra un lien étroit avec la théorie des groupes algébriques.

1. Si $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) est une algèbre de fonctions définies dans un ensemble X (resp. Y), à valeurs dans un corps $\mathbf{K}$, on identifie $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ à une algèbre de fonctions sur $X \times Y$, par $(a \otimes b)(x, y) = a(x) b(y)$.

Soit G un groupe algébrique de matrices $g = \| g_{ij} \|$, $\mathfrak{o}(G)$ l'ensemble des fonctions sur G de la forme $f(g) = P(g_{ij}, \det g^{-1})$ où P est un polynome. On vérifie facilement les propriétés suivantes :

G 1. *L'algèbre $\mathfrak{o}(G)$ est une algèbre de type fini et contient la fonction constante égale à* 1.

G 2. *Si $g \neq g'$, il existe $f \in \mathfrak{o}(G)$ avec $f(g) \neq f(g')$; un homomorphisme χ non nul de $\mathfrak{o}(G)$ dans $\mathbf{K}$ est de la forme $\chi(f) = f(g_0)$ $(g_0 \in G)$.*

G 3. *Si $f \in \mathfrak{o}(G)$ et $f'(g_1, g_2) = f(g_1^{-1} g_2)$, on a $f' \in \mathfrak{o}(G) \otimes \mathfrak{o}(G)$.*

---

[1] *Cf.* HARISH-CHANDRA, *Ann. Math.*, 51, 1950.

Réciproquement, un groupe G muni d'une algèbre $\mathfrak{o}(G)$ de fonctions vérifiant ces trois conditions possède une représentation matricielle fidèle $g \to \| g_{ij} \|$ telle que l'ensemble des matrices $\| g_{ij} \|$ soit un groupe algébrique de matrices et que $\mathfrak{o}(G)$ soit engendrée par les fonctions $g \to g_{ij}$ et $g \to (\text{dét} \| g_{ij} \|^{-1})$. Un tel groupe G sera dit *groupe algébrique*.

Une représentation linéaire (T_g, V) sera dite *rationnelle* si elle satisfait à la condition suivante :

R. *Pour tout* $v \in V$ *et toute forme linéaire* v' *sur* V, *le « coefficient »* $\rho_{v,v'} : g \to \langle T_g v, v' \rangle$ *est dans* $\mathfrak{o}(G)$.

Cette notion coïncide avec celle de Chevalley [(2) p. 100].

2. Soit G un groupe algébrique, α une forme linéaire sur $\mathfrak{o}(G)$; on adopte la notation intégrale $\alpha(f) = \int f(g)\, d\alpha(g)$ et l'on pose

$$(\alpha \star \beta)(f) = \iint f(g_1 g_2)\, d\alpha(g_1)\, d\beta(g_2), \qquad f \in \mathfrak{o}(G). \tag{1}$$

Pour cette multiplication, l'ensemble $\mathbf{U}(G)$ des formes linéaires nulles sur une puissance de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ des fonctions nulles à l'élément neutre **e**, est une algèbre, *l'hyperalgèbre* du groupe G. La dualité entre $\mathfrak{o}(G)$ et $\mathbf{U}(G)$ est séparée en vertu du théorème de Krull qui s'exprime $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{m}^n = (0)$. Il existe un homomorphisme Δ de $\mathbf{U}(G)$ dans $\mathbf{U}(G) \otimes \mathbf{U}(G)$ et un seul tel que

$$\Delta(\alpha)(f_1 \otimes f_2) = \alpha(f_1 f_2) \tag{2}$$

et l'ensemble des $X \in \mathbf{U}(G)$ tels que $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$, muni du crochet $[X, Y] = X \star Y - Y \star X$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G.

Si K *est de caractéristique* 0, $\mathbf{U}(G)$ est l'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$; inversant la construction précédente, on définit sur le dual de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, une structure d'algèbre $F(\mathfrak{g})$ sans diviseurs de zéro.

Enfin, dans le cas général, toute représentation rationnelle de G, soit (T_g, V), définit une représentation linéaire de $\mathbf{U}(G)$ par la formule

$$\langle T_\alpha v, v' \rangle = \int \langle T_g v, v' \rangle\, d\alpha(g). \tag{3}$$

Appliquant ceci à l'application identique d'un groupe algébrique G d'automophismes de V et à $\mathfrak{g} \subset \mathbf{U}(G)$, on identifie $\mathfrak{g}$ à l'algèbre de Lie de G telle qu'elle est définie par Chevalley [(2), p. 128].

3. Si G est un groupe, un ensemble de représentations linéaires s'appellera un *anneau de représentations*, s'il est stable par rapport aux opérations

(2) *Théorie des groupes algébriques*, 2, Paris, 1951.

naturelles de restriction à un sous-espace stable, passage au quotient, à la somme directe, au produit tensoriel, à la représentation contragrédiente. L'ensemble des coefficients des représentations appartenant à l'anneau $\mathcal{R}$ forme une algèbre $\mathbf{A}_{\mathcal{R}}$ de fonctions sur G qui vérifie la condition G 3. Un *homomorphisme* de $\mathcal{R}$ est une fonction qui associe à toute $\mathcal{D} = (\mathrm{T}_g^{\mathcal{D}}, \mathrm{V}_{\mathcal{D}}) \in \mathcal{R}$ un opérateur $\mathrm{U}(\mathcal{D})$ de l'espace $\mathrm{V}_{\mathcal{D}}$ de manière compatible avec les opérations de $\mathcal{R}$ et les équivalences; nous expliciterons seulement la formule

$$\mathrm{U}(\mathcal{D} \otimes \mathcal{D}') = \mathrm{U}(\mathcal{D}) \otimes \mathrm{U}(\mathcal{D}'). \tag{4}$$

L'ensemble de ces homomorphismes forme un groupe $\mathrm{G}_{\mathcal{R}}$ qui peut s'identifier à l'ensemble des homomorphismes de l'algèbre $\mathbf{A}_{\mathcal{R}}$ dans $\mathbf{K}$ et l'on a un homomorphisme naturel $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathcal{R}}$ donné par $\mathrm{U}_g(\mathcal{D}) = \mathrm{T}_g^{\mathcal{D}}$. La dualité de Tannaka est l'assertion : « $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathcal{R}}$ est un isomorphisme de G sur $\mathrm{G}_{\mathcal{R}}$ ».

THÉORÈME 1. — *Pour que $\mathcal{R}$ soit l'ensemble* [3] *de toutes les représentations rationnelles de* G *pour une structure de groupe algébrique sur* G, *il faut et il suffit que $\mathcal{R}$ soit à « engendrement » fini et que $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_{\mathcal{R}}$ soit bijective.*

THÉORÈME 2. — *Si* $\mathbf{K}$ *est de caractéristique zéro, l'anneau des représentations rationnelles d'un groupe algébrique est engendré par toute représentation rationnelle fidèle.*

On déduit du théorème 1 une correspondance « de Galois » entre sous-groupes algébriques de G et sous-anneaux de $\mathcal{R}$.

Toutes les démonstrations sont très faciles.

4. Définitions analogues d'un anneau de représentations d'une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$, de $\mathbf{A}_{\mathcal{R}}$ sous-algèbre de $\mathrm{F}(\mathfrak{g})$, de $\mathfrak{g}_{\mathcal{R}}$, et de $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathcal{R}}$.

THÉORÈME 1'. — *Pour que $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathcal{R}}$ soit bijective, il faut et il suffit qu'il existe un groupe algébrique* G *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *et que $\mathcal{R}$ soit l'ensemble des représentations « infinitésimales » de* G *correspondant aux représentations globales rationnelles.*

THÉORÈME 2'. — *Si $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_{\mathcal{R}}$ est bijective et si $\mathcal{D} \in \mathcal{R}$ est fidèle, il existe $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n \in \mathcal{R}$ telles que toute représentation $\mathcal{D}' \in \mathcal{R}$ soit quotient d'une représentation contenue dans une somme directe de représentations du type $\left(\overset{n}{\bigotimes} \mathcal{D}\right) \otimes \mathcal{D}_i (1 \leqq i \leqq n)$.*

Il est essentiel dans ces deux théorèmes que $\mathbf{K}$ soit de caractéristique zéro.

Les deux théorèmes se démontrent simultanément en prouvant que $\mathbf{A}_{\mathcal{R}}$ est un module de type fini sur le sous-anneau $\mathbf{A}_{\mathcal{D}}$ engendré par les coefficients de $\mathcal{D}$, à l'aide du *théorème de normalisation de E. Noether*. Il faut au préalable étudier trois cas particuliers : *a*. $\mathfrak{g}$ est semi-simple; *b*. $\mathfrak{g}$ est abélienne; *c*. toute $\mathcal{D} \in \mathcal{R}$ est nilpotente. On utilise alors un principe de récurrence pour passer de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ($\mathfrak{h}$ idéal de $\mathfrak{g}$) à $\mathfrak{g}$.

---

[3] En toute rigueur, on ne peut parler de « l'ensemble » de toutes les représentations de G.

5. *Applications.* — La démonstration des théorèmes 1′ et 2′ fournit le critère suivant lorsque K *est algébriquement clos* de caractéristique zéro.

THÉORÈME 3. — *La dualité de Tannaka pour $\mathfrak{g}$ équivaut à la conjonction des deux conditions suivantes :*

a. Si $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}$ est l'annulateur des $\mathcal{D} \in \mathcal{R}$ irréductibles, toute $\mathcal{D} \in \mathcal{R}$ qui annule $\mathfrak{n}$ est complètement réductible.

b. Si $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{n}$ est le radical de $\mathfrak{g}$, le rang sur les entiers de l'ensemble des poids de $\mathfrak{r}$ dans les $\mathcal{D} \in \mathcal{R}$, est égal à la dimension de $\mathfrak{r}/\mathfrak{n}$ ([4]).

Les théorèmes précédents montrent de plus que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, il existe parmi les groupes algébriques G dont $\mathfrak{g}$ est algèbre de Lie, un groupe G_0 dont tous les autres sont quotient par un sous-groupe fini du centre. Le centre Z de G_0 est fini : si **K** est algébriquement clos, $\mathfrak{g}$ de rang l, alors Z a l générateurs m_i soumis aux relations $\sum_i a_{ij} m_i = 0$ où les a_{ij} sont les entiers de Cartan. Si **K** est le corps des nombres complexes, on atteint ainsi par voie algébrique le centre d'un groupe compact simplement connexe, et l'on retrouve les résultats classiques de E. Cartan.

Enfin, on retrouve de façon naturelle les résultats de ([5]) sur les répliques lorsque **K** est de caractéristique zéro.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. — *Critère de stabilité pour des systèmes d'équations différentielles à coefficients constants complexes.* Note (*) de M. **HANS RUDOLF SCHWARZ**, présentée par M. Jean Leray.

Le procédé décrit complète une Note précédente ([1]) qui a traité le cas des coefficients constants réels. La méthode permet de répondre à la question de stabilité des solutions d'un système linéaire d'équations différentielles $y' = Ay$ à coefficients constants complexes à l'aide de transformations élémentaires appliquées à la matrice A, sans évaluer l'équation caractéristique.

1. *Critère de stabilité.* — La matrice $A = (a_{ik})$ d'ordre n à éléments complexes se laisse ramener à l'aide de transformations canoniques à la forme réduite suivante :

$$N = \begin{bmatrix} ib'_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & ib'_{22} & b_{23} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & ib'_{33} & b_{34} & \ldots & 0 & 0 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & ib'_{n-1\,n-1} & b_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & b_{nn} + ib'_{nn} \end{bmatrix}.$$

([4]) En particulier, si $\mathfrak{g}_2 = [\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}]$, la dualité de Tannaka vaut pour tout anneau de représentations de $\mathfrak{g}$.

([5]) *Cf.* IWAHORI NAGAYOSI, *J. Math. Soc. Jap.*, 6, 1954, p. 76-105.

(*) Séance du 9 janvier 1956.

([1]) *Comptes rendus*, 241, 1955, p. 15.