PIERRE CARTIER

Fluctuations dans les suites de variables aléatoires indépendantes

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 241, p. 7-24

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__7_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 241

Décembre 1962

FLUCTUATIONS DANS LES SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES

par Pierre CARTIER

I. Historique.

1. Le jeu à deux personnes.

Nous commencerons notre historique en rappelant les principaux résultats sur cette question classique et très étudiée du calcul des probabilités (*). On trouvera un très bon exposé dans le livre de FELLER ([7], chap. 12 à 14) ; il est à noter que, malgré le caractère élémentaire de la question, certains résultats importants n'ont été obtenus que très récemment.

Nous supposons que deux joueurs, nommés A et B, disputent une série de n parties indépendantes $(n > 0)$; de plus, à chacune des parties, on suppose que les chances de gagner sont égales pour A et pour B ; le règlement est le suivant : à la fin de chaque partie, le vaincu verse un certain enjeu, que l'on prendra pour unité, au vainqueur. Soit S_n le gain de A à la fin de la série, c'est-à-dire la différence $A_n - B_n$ où A_n (resp. B_n) est le nombre des parties gagnées par A (resp. B) ; on a évidemment $A_n + B_n = n$, et il y a 2^n déroulements possibles de la série. La probabilité que l'on ait $S_n = k$ est donnée par la formule

$$(1) \qquad \Pr\{S_n = k\} = \begin{cases} 2^{-n}\binom{n}{j} & \text{si } k = n - 2j \text{ avec } 0 \leqslant j \leqslant n \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ceci est encore valable pour $n = 0$ avec la convention $S_0 = 0$.

D'après la loi des grands nombres, le gain moyen par partie jouée, soit S_n/n, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini ; sous la forme faible, cette loi s'exprime ainsi :

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \Pr\{|S_n/n| < a\} = 1 \qquad \text{pour tout } a > 0 \quad .$$

Par conséquent, pour n très grand, A_n/n et B_n/n sont très voisins de $1/2$, sauf dans un ensemble de cas de probabilité très petite. On peut préciser cette tendance vers l'équilibre à la limite ; en effet S_n est de l'ordre de grandeur

(*) Le lecteur non spécialisé trouvera dans l'Appendice un dictionnaire permettant de traduire un énoncé de calcul des probabilités en un énoncé de la théorie de la mesure.

de $n^{1/2}$, et le rapport $S_n/n^{1/2}$ suit à la limite la loi des erreurs de Laplace-Gauss :

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \Pr\{a < S_n/n^{1/2} < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(-t^2/2)\, dt \qquad (a < b) \quad .$$

Une question importante est celle des retours à l'équilibre. Il y a retour à l'équilibre ou égalisation en n parties si $S_n = 0$; ceci ne peut avoir lieu que pour n pair ; si l'on pose

$$u_n = \Pr\{S_n = 0\} \qquad (n \leqslant 0) \quad ,$$

on aura alors :

$$(4) \qquad u_{2m} = 2^{-2m}\binom{2m}{m} = (-1)^m \binom{-1/2}{m} \qquad (n \leqslant 0) \quad ,$$

quantité asymptotiquement égale à $(\pi m)^{-1/2}$; on en déduit

$$\sum_{n\geqslant 1} u_n = \infty \quad ,$$

et la théorie des processus de Markov montre immédiatement qu'il y aura presque sûrement (c'est-à-dire avec probabilité 1) une infinité de retours à l'équilibre si l'on continue le jeu indéfiniment. Les instants $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_k < T_{k+1}$ de ces retours à l'équilibre sont naturellement aléatoires ; soit $Y_k = T_k - T_{k-1}$ pour $k \geqslant 2$ et $Y_1 = T_1$; on peut montrer que les variables aléatoires Y_k sont indépendantes dans leur ensemble et qu'elles suivent toutes une même loi ; si l'on note f_p la probabilité qu'il faille jouer p parties jusqu'à la première égalisation, on a $f_p = 0$ si p est impair et

$$(5) \qquad f_{2m} = (-1)^{m+1} \binom{1/2}{m} = u_{2m-2} - u_{2m} \qquad (m \geqslant 1) \quad .$$

Il n'est pas difficile d'en déduire la formule

$$(6) \qquad \Pr\{T_k = 2m\} = 2^{k-2m}\binom{2m-k}{m} \frac{k}{2m-k} \qquad (m \geqslant k)$$

qui donne la probabilité d'attendre la partie de rang $2m$ pour obtenir la k-ième égalisation. Une circonstance insolite est que la valeur moyenne du temps qui s'écoule entre deux égalisations successives est infinie ; on doit relier ceci à un théorème de P. Lévy qui s'énonce :

(7) $$\lim_{k\to\infty} \Pr\{T_k < k^2 a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a^{-1/2}}^{+\infty} \exp(-t^2/2)\, dt \quad .$$

Une forme équivalente est la suivante ; soit P_n le nombre (aléatoire) d'égalisations réalisées dans une série de n parties ; alors P_n est de l'ordre de $n^{1/2}$ et non de n comme on pourrait le penser, et de plus $P_n/n^{1/2}$ a une loi limite qui est celle de la valeur absolue d'une variable aléatoire suivant la loi de Laplace-Gauss.

On a aussi beaucoup étudié le problème de la ruine ; supposons que B ait un capital initial c et que le capital de A soit illimité ; l'instant où B se ruine est le plus petit entier n tel que $S_n = c$ (on suppose que le jeu se poursuit tant qu'il n'y a pas ruine). On peut montrer que la probabilité que B se ruine est égale à 1 ; de plus un argument combinatoire simple, dû à D. ANDRÉ, montre que la probabilité que le jeu s'arrête à la n-ième partie par la ruine de B est égale à $\frac{c}{n} \Pr\{S_n = c\}$; on en déduit que la durée du jeu est une variable aléatoire D_c qui suit la même loi que $T_c - c$.

Mais ce n'est que récemment que l'on s'est intéressé aux oscillations autour de l'équilibre, et la manière dont s'effectuent ces retours. Supposons que A et B disputent une série de n parties, et que le règlement soit effectué à la fin de chaque partie ; nous noterons N_n le temps pendant lequel B se trouve en déficit, c'est-à-dire le nombre des entiers i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ avec $S_i > 0$ ou bien $S_i = 0$ et $S_{i-1} > 0$. En 1937, P. LÉVY [10] a établi la loi de l'arc sinus :

(8) $$\lim_{n\to\infty} \Pr\{N_n < na^2\} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,sin} a \qquad (0 \leqslant a \leqslant 1) \quad .$$

En particulier, il y a environ deux chances sur dix pour que B se trouve en déficit pendant 9/10 du temps de la partie pourvu que l'on ait $n \geqslant 50$; sur vingt parties, la probabilité que l'un des deux joueurs A et B ait été en déficit au moins seize fois est égale à 0, 68. Ceci n'exclut pas les retours à l'équilibre, mais montre qu'il est très peu probable de rester longtemps autour de l'équilibre. En 1949, K. CHUNG et W. FELLER [4] ont donné une formule exacte pour un nombre fini de parties

(9) $$\Pr\{N_{2m} = 2r\} = (-1)^m \binom{-1/2}{r}\binom{-1/2}{m-r} = u_{2r}\, u_{2m-2r} \quad .$$

Un passage à la limite facile permet de déduire la loi de l'arc sinus de la formule (9). Par ailleurs, soit C_n le nombre de changement de signes, c'est-à-dire le nombre (aléatoire) des entiers k tels que $1 \leq k \leq n$ avec $S_{k-1} < 0$ et $S_k \geq 0$, ou bien $S_{k-1} \geq 0$ et $S_k < 0$. Si p est la partie entière de $(n-k)/2$, on a $\Pr\{C_n = k\} = 2^{-n}\binom{n}{p}$ d'après FELLER.

2. Résultats généraux.

A partir de 1947, on a commencé à obtenir des résultats portant sur des processus aléatoires plus généraux. Supposons donnée une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi ; on pose

$$S_o = 0 \quad \text{et} \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \qquad ;$$

enfin, on note N_n le nombre d'indices i tels que $1 \leq i \leq n$ et $S_i \geq 0$; si les X_n ont une moyenne nulle et un second moment fini, P. ERDÖS et M. KAC [6] ont montré que la loi de l'arc sinus est valable pour N_n. Un peu plus tard, S. ANDERSEN [1] établit le même résultat sous l'hypothèse que la loi des X_n a une densité f paire $(f(-x) = f(x))$; mais, à l'inverse de P. ERDÖS et M. KAC, S. ANDERSEN déduit le théorème limite d'une expression exacte dans le cas fini, et montre que la probabilité de $N_m = r$ est donnée par la quantité $u_{2r}\, u_{2m-2r}$ sous la seule hypothèse d'une densité paire pour la loi des X_n. S. ANDERSEN étendit lui-même ses résultats en supprimant toute restriction sur la loi des X_n et obtint :

$$(10) \qquad \sum_{k,n\geq 0} t^n\, u^k . \Pr\{N_n = k\} = \exp\Big[\sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k}\big(u^k . \Pr\{S_k \geq 0\} + \Pr\{S_k < 0\}\big)\Big] \qquad .$$

Les résultats obtenus ensuite concernent la distribution du maximum

$$(11) \qquad M_n = \sup\,(S_0\,, \dots , S_n)$$

et du rang de ce maximum, c'est-à-dire de l'entier aléatoire L'_n égal au plus grand indice i pour lequel $M_n = S_i$; le principe d'équivalence de S. Andersen s'énonce :

$$(12) \qquad \Pr\{L'_n = k\} = \Pr\{N_n = k\} \qquad .$$

Mais ce fut la formule de F. SPITZER [11]

$$(13) \qquad \sum_{n\geq 0} t^n.E\{\exp i\lambda M_n\} = \exp[\sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k} . E\{\exp i\lambda S_k^+\}]$$

(on pose $\max(0\,,\,x) = x^+$ pour tout nombre réel x) qui occasionna le plus grand nombre de recherches ultérieures. La démonstration de SPITZER s'appuie sur un lemme combinatoire dont on a cherché à se débarrasser par divers moyens. En particulier, J. WENDEL [12] montra que la formule (13) est liée à une décomposition de l'algèbre des transformées de Fourier des mesures bornées en somme directe de deux sous-algèbres ; un grand nombre de travaux ont utilisé à ce propos la décomposition d'une fonction f d'une variable réelle en produit $f(x) = f^+(x)\, f^-(x)$ où f^+ (resp. f^-) se prolonge en une fonction holomorphe de $z = x + iy$ pour $y \geq 0$ (resp. $y \leq 0$) (théorème de Wiener-Hopf).

Les recherches ultérieures ont porté sur deux questions. Tout d'abord, soient $R_{no}\,,\, R_{n1}\,,\, \dots\,,\, R_{nn}$ les variables aléatoires $S_o\,,\, S_1\,,\, \dots\,,\, S_n$ rangées par ordre croissant. J. WENDEL [13] et D. DARLING [5] ont étudié respectivement la loi de la variable R_{nk} et celle de l'indice (aléatoire) L_{nk} égal au plus petit entier m tel que $R_{nk} = S_m$. Par ailleurs, on a étendu les résultats de SPITZER au cas d'un processus stochastique $(S_t)_{t\geq 0}$ stationnaire à accroissements indépendants (G. BAXTER et M. DONSKER [3]) ; c'est d'ailleurs dans un problème de ce genre que P. LÉVY avait rencontré la loi de l'arc sinus. Les résultats sur le nombre de changements de signe sont encore fragmentaires.

Un exposé récent assez synthétique est dû à G. BAXTER [2]. Dans une note présentée lors d'un Séminaire tenu cet été à Aarhus (Danemark), D. DARLING donne une formule générale qui contient comme cas particulier presque toutes les formules connues actuellement. Nous ne traiterons pas des lois limites, car la meilleure méthode pour les obtenir fait intervenir le processus de Wiener-Lévy.

II. Exposé des résultats.

1. Opérations sur les mesures.

On notera $\underset{\sim}{R}^n$ l'espace numérique réel à n dimensions. Quand on parlera d'une mesure sur $\underset{\sim}{R}^n$, il s'agira d'une mesure de Radon réelle bornée, de signe quelconque. Si μ est une telle mesure, et f une fonction borélienne bornée sur $\underset{\sim}{R}^n$, l'intégrale

$$\langle \mu\,,\, f\rangle = \int f(x)\, d\mu(x)$$

est définie.

a. Produit tensoriel. - Si μ est une mesure sur $\underset{\sim}{R}^m$ et ν une mesure sur $\underset{\sim}{R}^n$, il existe une mesure π sur $\underset{\sim}{R}^{m+n} = \underset{\sim}{R}^m \times \underset{\sim}{R}^n$ et une seule telle que

$$\pi(A \times B) = \mu(A)\ \nu(B)$$

pour des parties boréliennes A de $\underset{\sim}{R}^m$ et B de $\underset{\sim}{R}^n$; on dit que π est le produit tensoriel de μ et ν, noté $\mu \otimes \nu$; on a le théorème de Lebesgue-Fubini :

(14) $$\int f(z)\ d\pi(z) = \int \left[\int f(x\,,\,y)\ d\mu(x)\right] d\nu(y)$$

où $z = (x\,,\,y)$ est la variable dans $\underset{\sim}{R}^{m+n}$ et f est borélienne et bornée sur $\underset{\sim}{R}^{m+n}$.

b. Image d'une mesure. - Soient μ une mesure sur $\underset{\sim}{R}^m$ et F une application borélienne de $\underset{\sim}{R}^m$ dans $\underset{\sim}{R}^n$; il y a une mesure ν sur $\underset{\sim}{R}^n$ caractérisée par

$$\nu(B) = \mu(F^{-1}(B))$$

pour B borélien dans $\underset{\sim}{R}^n$. On dit que ν est l'image de μ par F ; on la notera $F(\mu)$. On a la formule

(15) $$\int_{\underset{\sim}{R}^n} f(y)\ d\nu(y) = \int_{\underset{\sim}{R}^m} f(F(x))\ d\mu(x)$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur $\underset{\sim}{R}^n$.

c. Produit d'une mesure par une fonction. - Sur $\underset{\sim}{R}^m$ on suppose donnée une mesure μ et une fonction borélienne bornée g ; il existe une mesure μ' et une seule sur $\underset{\sim}{R}^m$ telle que :

(16) $$\int f(x)\ d\mu'(x) = \int f(x)\ g(x)\ d\mu(x)$$

pour f borélienne bornée. La mesure μ' s'appelle le produit de g par μ et se note $g.\mu$.

d. Produit de convolution. - Soient μ et ν deux mesures sur $\underset{\sim}{R}^n$; soit S l'application de $\underset{\sim}{R}^n \times \underset{\sim}{R}^n$ dans $\underset{\sim}{R}^n$ définie par $S(x\,,\,y) = x + y$. On posera $\mu\nu = S(\mu \otimes \nu)$, produit de convolution de μ et ν. On a donc par définition :

$$(17) \qquad \int f(z)\ d(\mu\nu)(z) = \int \left[\int f(x+y)\ d\mu(x)\right] d\nu(y)$$

pour f borélienne bornée. Pour le produit de convolution, l'ensemble des mesures sur $\underset{\sim}{R}^n$ est une algèbre associative et commutative sur le corps $\underset{\sim}{R}$, admettant pour unité la mesure de Dirac ε définie par

$$\int f(x)\ d\varepsilon(x) = f(0) \quad .$$

On définit trois ensembles de nombres réels $D_o = \{0\}$, $D_+ =]0, +\infty[$ et $D_- =]-\infty, 0[$; l'indice u aura toujours l'une des valeurs $0, +, -$. On note θ_u la fonction sur $\underset{\sim}{R}$ définie par $\theta_u(x) = 1$ ou 0 selon que l'on a $x \in D_u$ ou $x \notin D_u$; ces fonctions sont boréliennes et bornées, donc $\theta_u . \mu$ est défini pour toute mesure μ sur $\underset{\sim}{R}$; on note $\mathfrak{M}_u$ l'ensemble des μ telles que $\mu = \theta_u . \mu$; comme les ensembles D_o, D_+ et D_- forment une partition de $\underset{\sim}{R}$, l'espace vectoriel $\mathfrak{M}$ des mesures sur $\underset{\sim}{R}$ est somme directe de $\mathfrak{M}_o$, $\mathfrak{M}_+$ et $\mathfrak{M}_-$. Chacun des ensembles D_u est stable par addition ; il en résulte que l'on a

$$\theta_u(x+y)\ \theta_u(x)\ \theta_u(y) = \theta_u(x)\ \theta_u(y) \quad \text{pour } x, y \text{ dans } \underset{\sim}{R} \quad ,$$

et de (16) on déduit alors que chaque ensemble $\mathfrak{M}_u$ est stable pour le produit de convolution. Il est immédiat que $\mathfrak{M}_o$ se compose des mesures $c.\varepsilon$ avec c réel.

2. Définitions.

Soit donné un entier $n \geqslant 1$. Nous définirons d'abord un certain nombre de fonctions sur $\underset{\sim}{R}^n$. On note $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur arbitraire dans $\underset{\sim}{R}^n$.

$S_o(x) = 0$; $S_i(x) = x_1 + \dots + x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

$M_n(x) = \sup\ (S_0(x), \dots, S_n(x))$

$L_n(x)$ (resp. $L'_n(x)$) plus petit (resp. plus grand) des entiers i tels que $0 \leqslant i \leqslant n$ et $M_n(x) = S_i(x)$.

$N_n^u(x)$ nombre d'entiers i tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ pour lesquels la somme $S_i(x)$ a le signe u (i. e. appartient à D_u).

Il existe une permutation σ de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ telle que $i < j$ soit équivalente à $S_{\sigma.i}(x) < S_{\sigma.j}(x)$, ou bien $S_{\sigma.i}(x) = S_{\sigma.j}(x)$ et $\sigma.i < \sigma.j$;

cette permutation est unique, mais dépend de x . On pose

$$L_{n,i}(x) = \sigma\cdot i \quad \text{et} \quad R_{n,i}(x) = S_{\sigma\cdot i}(x) \qquad .$$

On a alors les propriétés :

$$R_{n,o}(x) \leqslant R_{n,1}(x) \leqslant \cdots \leqslant R_{n,n}(x) = M_n(x)$$

$$L_{n,n}(x) = L'_n(x) \qquad .$$

La relation $L_{n,i}(x) = 0$ équivaut à $N_n^-(x) = i$.

Nous définirons maintenant un certain nombre de mesures dépendant d'une mesure μ sur $\underset{\sim}{R}$:

$\mu_n = \mu \otimes \cdots \otimes \mu$ (n facteurs), mesure sur $\underset{\sim}{R}^n$.

$\alpha_n^u = \theta_u\cdot(\mu \cdots \mu)$ (n facteurs pour le produit de convolution), mesure sur $\underset{\sim}{R}$. On a donc la formule :

$$(18) \quad \int_{\underset{\sim}{R}} f(c)\, d\alpha_n^u(c) = \int_{\underset{\sim}{R}^n} \theta_u(x_1 + \cdots + x_n)\, f(x_1 + \cdots + x_n)\, d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n)$$

pour f borélienne bornée sur $\underset{\sim}{R}$.

β_n^u mesure sur $\underset{\sim}{R}$ définie par la relation (f borélienne bornée)

$$(19) \qquad \int_{\underset{\sim}{R}} f(c)\, d\beta_n^u(c) = \int_{A_n^u} f(x_1 + \cdots + x_n)\, d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n)$$

où les ensembles A_n^u se composent des vecteurs suivants de $\underset{\sim}{R}^n$:

A_n^+ : ensemble des x tels que $S_i(x) > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$

A_n^- : ensemble des x tels que $S_i(x) < 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$

A_n^o : ensemble des x tels que $S_i(x) \leqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $S_n(x) = 0$.

On pose aussi $\beta_o^u = \varepsilon$.

Nous utiliserons couramment par la suite des séries formelles à coefficients dans l'algèbre $\mathfrak{M}$ des mesures sur $\underset{\sim}{R}$, en des indéterminées t , t' , ... On donne deux séries $U(t)$ et $V(t)$ à coefficients dans $\mathfrak{M}$; si le terme constant de U est 0 et celui de V est ε , on posera :

$$\exp U(t) = \sum_{n\geqslant 0} U(t)^n/n \qquad \log V(t) = -\sum_{k\geqslant 1} (\varepsilon - V(t))^k/k \qquad .$$

Le terme constant de $\exp U(t)$ est ε et celui de $\log V(t)$ est nul, et l'on a :

$$\exp \log V(t) = V(t) \qquad \log \exp U(t) = U(t) \quad .$$

3. Les théorèmes fondamentaux.

THÉORÈME 1. – Soient p, q et r trois entiers positifs et $n = p + q + r$; on suppose $n \geq 1$. Si $B_{p,q,r}$ est l'ensemble des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ tels que $L_n(x) = p$ et $L'_n(x) = p + q$, on a la formule :

$$\langle \beta_p^+ \beta_q^o \beta_r^- , f\rangle = \int_{B_{p,q,r}} f(x_1 + \dots + x_n)\, d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \tag{20}$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur $\mathbb{R}$. De plus, on a la formule :

$$\log(\varepsilon + \sum_{n\geq 1} t^n \beta_n^u) = - \theta_u . \log(\varepsilon - t.\mu) \quad . \tag{21}$$

Supposons d'abord les entiers p, q, r non nuls. L'ensemble $B_{p,q,r}$ se compose des vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$S_i(x) < S_p(x) \quad \text{pour} \quad 0 \leq i < p$$

$$S_j(x) \leq S_p(x) = S_{p+q}(x) \quad \text{pour} \quad p + 1 \leq j \leq p + q$$

$$S_k(x) < S_{p+q}(x) \quad \text{pour} \quad p + q + 1 \leq k \leq p + q + r = n \quad .$$

On voit immédiatement que ces conditions équivalent à

$$U = (x_p , \dots , x_1) \in A_p^+ \qquad V = (x_{p+1} , \dots , x_{p+q}) \in A_q^o$$

$$W = (x_{p+q+1} , \dots , X_{p+q+r}) \in A_r^- \quad .$$

En utilisant la définition du produit de convolution, la formule (19) et le théorème de Lebesgue-Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned}\langle \beta_p^+ \beta_q^o \beta_r^- , f\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} f(u + v + w)\, d\beta_p^+(u)\, d\beta_q^o(v)\, d\beta_r^-(w) \\ &= \int_{A_p^+ \times A_q^o \times A_r^-} f(S_p(U) + S_q(V) + S_r(W))\, d\mu_p(U)\, d\mu_q(V)\, d\mu_r(W) \\ &= \int_{B_{p,q,r}} f((x_p + \dots + x_1) + (x_{p+1} + \dots + x_{p+q}) + (x_{p+q+1} + \dots + x_n))\, d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) \quad .\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité (20). Supposons un seul des entiers p , q , r nul : comme on a fait la convention $\beta_0^u = \varepsilon$, le facteur correspondant peut être omis dans le produit $\beta_p^+ \beta_q^o \beta_r^-$; la démonstration est alors analogue à la précédente, mais avec des intégrales doubles et non des intégrales triples. Enfin, lorsque deux des entiers p , q , r sont nuls, la formule (20) se réduit à la définition des mesures β_n^u .

Introduisons l'indéterminée t ; multiplions les deux membres de (20) par t^{p+q+r} et sommons par rapport aux triples (p , q , r) d'entiers positifs non tous 3 nuls; pour $n \geq 1$ fixé, les ensembles $B_{p,q,r}$ avec $p + q + r = n$ forment une partition de $\underset{\sim}{R}^n$, et de plus, on a par définition du produit de convolution :

$$\int_{\underset{\sim}{R}^n} f(x_1 + \dots + x_n)\, d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n) = \langle \mu^n , f \rangle \quad .$$

On obtient finalement la formule :

$$\prod_u (\varepsilon + \sum_{n\geq 1} \beta_n^u . t^n) = \sum_{n\geq 0} \mu^n . t^n = (\varepsilon - t.\mu)^{-1} \tag{22}$$

puis, en prenant les logarithmes des deux membres, on trouve :

$$\sum_u \log(\varepsilon + \sum_{n\geq 1} \beta_n^u\, t^n) = - \log(\varepsilon - t.\mu) \quad . \tag{23}$$

Comme $S_n(x)$ a le signe u pour x dans A_n^u , les fonctions $f \circ S_n$ et $(\theta_u . f) \circ S_n)$ sont égales dans A_n^u ; la formule (19) montre alors que la mesure β_n^u est dans $\mathfrak{M}_u$ pour $n \geq 1$; comme $\mathfrak{M}_u$ est un espace vectoriel stable par multiplication, la définition de la série log montre que les coefficients de la série $\log(\varepsilon + \sum_{n\geq 1} \beta_n^u\, t^n)$ sont dans $\mathfrak{M}_u$. La formule (23) exprime donc la décomposition de $- \log(\varepsilon - t.\mu)$ selon $\mathfrak{M}_+$, $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_-$, d'où (21).

C. Q. F. D.

Si l'on explicite la formule (21), on voit qu'il existe une formule polynomiale <u>indépendante de</u> μ , donnant β_n^u en fonction de $\alpha_1^u , \dots , \alpha_n^u$; on a en effet :

$$\beta_n^u = \Sigma^* (\alpha_1^u)^{k_1} \dots (\alpha_n^u)^{k_n} / k_1! \dots k_n!\, 1^{k_1}\, 2^{k_2} \dots n^{k_n} \tag{24}$$

où le signe Σ^* indique une sommation par rapport aux systèmes d'entiers positifs $(k_1 , \dots , k_n)$ tels que $1.k_1 + 2.k_2 + \dots + n.k_n = n$; le produit est le produit de convolution. Soit a_n^u la masse totale de α_n^u, c'est-à-dire la mesure pour μ_n de l'ensemble des $x \in \underset{\sim}{R}^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n$ soit de signe u ; la masse totale b_n^u de β_n^u est la mesure pour μ_n du cône polyèdral A_n^u. Prenant les masses totales des mesures écrites dans (24), on trouve :

$$(25) \qquad b_n^u = \Sigma^*(a_1^u)^{k_1} \dots (a_n^u)^{k_n} / k_1! \dots k_n! \, 1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n} \quad .$$

THÉORÈME 2. – Soit n un entier $\geqslant 1$. Etant donnés des entiers positifs k, ℓ, m avec $\ell + m = n$ et $k \leqslant n$, nous noterons $C_{k,\ell,m}$ l'ensemble des vecteurs x de $\underset{\sim}{R}^n$ pour lesquels $L_{n,k}(x) = \ell$. Il existe alors une mesure $\gamma_{k,\ell,m}$ sur $\underset{\sim}{R}^2$ caractérisée par la formule :

$$(26) \quad \langle \gamma_{k,\ell,m}, g \rangle = \int_{C_{k,\ell,m}} g(x_1 + \dots + x_\ell ; x_{\ell+1} + \dots + x_{\ell+m}) \, d\mu_n(x)$$

pour toute fonction borélienne bornée g sur $\underset{\sim}{R}^2$. Nous poserons aussi

$$\gamma_{o,o,o} = \varepsilon \quad \text{et} \quad B^u(t) = \sum_{n \geqslant 0} \beta_n^u . t^n$$

pour $u = +, o, -$. On a alors la formule :

$$(27) \quad \Sigma \gamma_{k,\ell,m} \, t^k \, t'^{\ell} \, t''^{m} = [B^+(tt') \, B^o(tt') \, B^-(t')] \circledast [B^+(t'') \, B^o(t'') \, B^-(tt'')] \quad .$$

L'existence des mesures $\gamma_{k,\ell,m}$ résulte du n° II, § 1.

Lorsque p et q sont des entiers positifs de somme n, on note $D_{p,q}$ le sous-ensemble de $\underset{\sim}{R}^n$ formé des x tels que $N_n^-(x) = q$; les ensembles $D_{p,q}$ forment une partition de $\underset{\sim}{R}^n$ et d'après le n° II, § 1, il existe des mesures δ_{pq} sur $\underset{\sim}{R}$ caractérisées par :

$$(28) \qquad \langle \delta_{p,q}, f \rangle = \int_{D_{p,q}} f(x_1 + \dots + x_n) \, d\mu_n(x)$$

pour f borélienne bornée sur $\underset{\sim}{R}$. On posera $\delta_{o,o} = \varepsilon$.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\underset{\sim}{R}^n$; nous poserons :

$$U = (x_\ell, \dots, x_1) \qquad V = (x_{\ell+1}, \dots, x_n) \quad .$$

La relation $L_{n,k}(x) = \ell$ signifie que parmi les entiers $0, 1, \dots, n$, il y en a k qui vérifient $S_i(x) < S_\ell(x)$ ou bien $i < \ell$ et $S_i(x) = S_\ell(x)$, c'est-à-dire l'une des conditions :

$$i < \ell \quad \text{et} \quad S_i(x) \leqslant S_\ell(x) \; ; \qquad i > \ell \quad \text{et} \quad S_i(x) < S_\ell(x) \quad .$$

Ceci se traduit par $N_\ell^+(U) + N_\ell^o(U) + N_m^-(V) = k$; une condition équivalente est qu'il existe des entiers positifs a , b , c , d avec $U \in D_{a,b}$, $V \in D_{c,d}$ satisfaisant aux relations :

$$(29) \qquad a + b = \ell \qquad c + d = m \qquad a + d = k \quad .$$

En utilisant la définition (28) de $\delta_{p,q}$ et en posant $g(u , v) = g'(u) \, g''(v)$ dans (26), on obtient immédiatement :

$$\gamma_{k,\ell,m} = \sum_{a,b,c,d} \delta_{a,b} \otimes \delta_{c,d}$$

où a , b , c , d sont soumis aux restrictions (29) ; ceci se traduit par la formule

$$(30) \qquad \sum_{k,\ell,m} \gamma_{k,\ell,m} \, t^k \, t'^{\ell} \, t''^{m} = \delta(tt' \, , \, t') \otimes \delta(t'' \, , \, tt'')$$

au moyen de la série $\delta(t \, , \, t') = \sum_{a,b} \delta_{a,b} \, t^a \, t'^b$.

Il reste à déterminer la série $\delta(t \, , \, t')$. Supposons $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$; l'ensemble $D_{p,q}$ se compose des $x = (\overline{x} \, , \, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ (avec $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$) qui vérifient l'une des relations suivantes (qui s'excluent) :

$$S_n(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N_{n-1}^-(\overline{x}) = q \; ; \qquad S_n(x) < 0 \quad \text{et} \quad N_{n-1}^-(\overline{x}) = q - 1 \quad .$$

Il en résulte que l'intégrale (28) est la somme des intégrales :

$$\int_{D_{p-1,q} \times \mathbb{R}} ((1 - \theta_-) \cdot f)(x_1 + \cdots + x_n) \, d\mu_n(x)$$

$$\int_{D_{p,q-1} \times \mathbb{R}} (\theta_- \cdot f)(x_1 + \cdots + x_n) \, d\mu_n(x)$$

d'où immédiatement la relation :

$$(31) \qquad \delta_{p,q} = (1 - \theta_-) \cdot (\delta_{p-1,q} \cdot \mu) + \theta_- \cdot (\delta_{p,q-1} \cdot \mu)$$

On montre immédiatement que cette relation est encore valable si p ou q est nul en convenant que $\delta_{p,q} = 0$ si $p = -1$ ou $q = -1$. Au moyen de la série $\delta(t, t')$, on traduit comme suit la formule (31) :

$$(32) \qquad \delta(t, t') = t.(1-\theta_-).[\mu\delta(t, t')] + t'.\theta_-[\mu\delta(t, t')] + \varepsilon$$

ou encore :

$$(33) \qquad (1-\theta_-)[\delta - t\mu\delta] + \theta_-[\delta - t'\mu\delta] = \varepsilon \quad .$$

La relation (31) jointe à $\delta_{o,o} = \varepsilon$ caractérise entièrement les $\delta_{p,q}$ par récurrence sur $p+q$, et par conséquent la relation (33) caractérise la série δ.

D'après la formule (22), on a

$$B^+(t).B^o(t).B^-(t) = (\varepsilon - t.\mu)^{-1} \quad ;$$

en tenant compte de cette relation, de ce que $B^o(t)$ est multiple scalaire de ε, et de ce que $B^u(t)$ a ses coefficients dans le sous-espace $\mathfrak{M}_u$ de $\mathfrak{M}$ stable par multiplication, on montre facilement que l'on obtient une identité dans (33) en remplaçant $\delta(t, t')$ par $B^+(t).B^o(t).B^-(t')$; ces deux séries sont donc égales, et le théorème 2 résulte de la formule (30).

C. Q. F. D.

4. Interprétation probabiliste.

Nous supposons donnée une suite de v. a. X_n $(n \geqslant 1)$ de même loi m ; on suppose que pour tout $n \geqslant 1$, les v. a. $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. Toutes les fonctions définies sur $\underset{\sim}{R}^n$ au § 2 fournissent des v. a. par composition avec l'application $\omega \to (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ de Ω dans $\underset{\sim}{R}^n$; par abus de langage, on gardera les mêmes notations. Par ailleurs, nous poserons :

$$(34) \qquad F(t, \lambda) = \exp\left[\sum_{k\geqslant 1} \frac{t^k}{k} E\{(1-\theta_-(S_k)).\exp i\lambda S_k\}\right]$$

$$(35) \qquad G(t, \lambda) = \exp\left[\sum_{k\geqslant 1} \frac{t^k}{k} E\{\theta_-(S_k).\exp i\lambda S_k\}\right] \quad .$$

D'après (21), ces quantités sont les transformées de Fourier de $B^+(t)$ $B^o(t)$ et $B^-(t)$ respectivement. En prenant la transformée de Fourier des deux membres de (27), et en utilisant (26) pour $g(u\,,\,v) = \exp(i\lambda u + i\mu v)$, on trouve finalement la formule de D. Darling :

$$(36)\quad \begin{cases} \sum\limits_{n\geqslant 0} \sum\limits_{k,\ell=0}^{n} t^k\, t'^{\ell}\, t''^{n-\ell}\, E\{I(L_{n,k} = \ell)\ \exp(i\lambda S_\ell + i\mu(S_n - S_\ell))\} \\ \quad = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} t^k\, E\{t'^{L_{nk}}\, t''^{(n-L_{nk})}\ \exp(i\lambda R_{nk} + i\mu(S_n - R_{nk}))\} \\ \quad = F(tt'\,,\,\lambda)\ G(t'\,,\,\lambda)\ F(t''\,,\,\mu)\ G(tt''\,,\,\mu) \quad . \end{cases}$$

Cas particuliers :

a. Substitution $(t\,,\,t'\,,\,t'') \to (u\,,\,t\,,\,0)$.

$$(37)\qquad \sum_{0\leqslant k\leqslant n} t^n\, u^k E\{I(L_{n,k} = n)\ \exp i\lambda S_n\} = F(tu\,,\,\lambda)\ G(t\,,\,\lambda) \quad .$$

Mais l'événement $\{L_{n,k} = n\}$ signifie que le nombre des entiers i avec $0 \leqslant i \leqslant n$ et $S_i \leqslant S_n$ est égal à k ; si l'on change $(X_1\,,\,\ldots\,,\,X_n)$ en $(X_n\,,\,\ldots\,,\,X_1)$ on change $\{L_{n,k} = n\}$ en $\{N_n = k\}$, (on a posé $N_n = N_n^+ + N_n^o$). De (37), on déduit donc :

$$(38)\qquad \sum_{0\leqslant k\leqslant n} t^n\, u^k E\{I(N_n = k)\ \exp i\lambda S_n\} = F(tu\,,\,\lambda)\ G(t\,,\,\lambda) \quad .$$

En faisant $\lambda = 0$, on retrouve la formule (10) d'Andersen.

b. Substitution $(t\,,\,t'\,,\,t''\,,\,\lambda\,,\,\mu) \to (t'\,,\,tt''\,,\,t\,,\,\lambda\,,\,\lambda)$.

$$(39)\quad \sum_{n\geqslant 0} t^n \sum_{k,\ell=0}^{n} t'^k\, t''^\ell\, E\{I(L_{n,k} = \ell)\ \exp i\lambda S_n\}$$

$$= F(tt't''\,,\,\lambda)\ F(t\,,\,\lambda)\ G(tt'\,,\,\lambda)\ G(tt''\,,\,\lambda) \quad .$$

Comme le second membre est symétrique en t' et t'' , on obtient :

$$(40)\qquad E\{I(L_{n,k} = \ell).\exp i\lambda S_n\} = E\{I(L_{n,\ell} = k).\exp i\lambda S_n\} \quad .$$

Faisons $\lambda = 0$ et $k = n$ dans (40) ; on trouve

$$\Pr\{L_{n,n} = \ell\} = \Pr\{L_{n,\ell} = n\} \quad ;$$

mais on a

$$L_{n,n} = L'_n$$

et d'après ce que l'on a vu en (a), on a

$$\Pr\{L_{n,\ell} = n\} = \Pr\{N_n = \ell\}$$

On retrouve donc le principe d'équivalence de S. Andersen (formule (12)).

c. En remplaçant, dans (36), t' par tt' , t'' par tt'' et t par $1/t$, puis en faisant $t = 0$, on ne garde que les termes pour lesquels $k = n$; dans ces conditions, on a $L_{nk} = L'_n$ et $R_{nk} = M_n$, d'où :

$$(41) \quad \sum_{n \geqslant 0} E\{t'^{L'_n}\, t''^{(n-L'_n)} \exp(i\lambda M_n + i\mu(S_n - M_n))\} = F(t', \lambda)\, G(t'', \mu) \quad .$$

La formule (13) de Spitzer résulte alors de la substitution

$$(t', t'', \lambda, \mu) \to (t, t, \lambda, 0) \quad .$$

d. Faisons $t'' = t'$ et $\mu = 0$, on trouve une formule de Wendel :

$$(42) \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} t^k\, t'^n\, E\{\exp i\lambda R_{nk}\} = F(tt', \lambda)\, F(t', 0)\, G(t', \lambda)\, G(tt', 0) \quad .$$

e. Supposons que la mesure m_X ait une densité paire ; on aura alors

$$\Pr\{S_n = 0\} = 0$$

et par raison de symétrie

$$\Pr\{S_n \geqslant 0\} = \Pr\{S_n < 0\} = \frac{1}{2} \quad ,$$

d'où

$$F(t, 0) = G(t, 0) = (1 - t)^{-1/2} \quad .$$

Si l'on fait $\lambda = \mu = 0$ dans (36), on trouve facilement :

$$(43) \qquad \Pr\{L_{n,k} = \ell\} = (-1)^n \sum_{v} \binom{-1/2}{v} \binom{-1/2}{\ell - v} \binom{-1/2}{k-v} \binom{-1/2}{n-k-\ell+v} \quad .$$

Si l'on fait $\lambda = 0$ dans (38), on trouve

(44) $$\Pr\{N_n = k\} = (-1)^n \binom{-1/2}{k}\binom{-1/2}{n-k}$$

résultats indépendants de la mesure m_X .

APPENDICE

Le langage des probabilités [9]

A la base de la théorie se trouve un espace probabilisé $(\Omega , \mathcal{A} , \Pr)$; autrement dit, Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide de parties de Ω avec les propriétés suivantes ($\mathcal{A}$ est une tribu) :

a. Si $A_1 , A_2 , \ldots , A_n , \ldots$ sont dans $\mathcal{A}$, il en est de même de $\bigcap_{n\geq 1} A_n$.

b. Pour A dans $\mathcal{A}$, l'ensemble $\Omega - A$ est dans $\mathcal{A}$.

De plus, $\Pr$ est une fonction sur $\mathcal{A}$ à valeurs réelles positives telle que $\Pr\{\emptyset\} = 0$ et $\sum_{n\geq 1} \Pr\{A_n\} = 1$ pour toute partition $(A_n)_{n\geq 1}$ de Ω en ensembles a appartenant à $\mathcal{A}$.

Une partie A de Ω appartenant à $\mathcal{A}$ s'appelle un événement ; on dit qu'il est presque sûr si $\Pr\{A\} = 1$; une variable aléatoire (v. a.) réelle est une fonction réelle X sur Ω telle que l'ensemble $\{X < a\}$ des ω vérifiant $X(\omega) < a$ soit dans $\mathcal{A}$ pour tout a réel ; à tout événement A, on associe la v. a. $I(A)$ égale à 1 sur A et à 0 sur $\Omega - A$. On associe à toute v. a. positive X un nombre positif $E\{X\}$, fini ou non, caractérisé par les règles :

$$E\{\sum_{n\geq 1} X_n\} = \sum_{n\geq 1} E\{X_n\} \quad \text{et} \quad E\{I(A)\} = \Pr\{A\} \quad ;$$

on dit que $E\{X\}$ est la valeur moyenne ou espérance de X . Cette définition s'étend par linéarité au cas des v. a. réelles ou même complexes.

Un vecteur aléatoire X dans $\mathbb{R}^n$ est une suite $(X_1 , \ldots , X_n)$ de v. a. réelles ; la loi de X est la mesure positive m_X de masse totale 1 dans $\mathbb{R}^n$ définie par $m_X(B) = \Pr\{X^{-1}(B)\}$ pour B borélien dans $\mathbb{R}^n$. On dit que les v. a. X_i sont indépendantes si m_X est de la forme $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n$ pour des mesures m_i de masse totale 1 sur $\mathbb{R}$ (et alors $m_i = m_{X_i}$).

Critère d'indépendance :

$$\text{(A)} \quad E\{\exp i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)\} = \prod_{1 \leq k \leq n} E\{\exp it_k X_k\} \qquad (t_k \in \mathbb{R}) \quad .$$

Formule d'intégration :

$$\text{(B)} \quad E\{f(X_1 , \dots , X_n)\} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 , \dots , x_n)\, dm_X(x_1 , \dots , x_n)$$

pour f borélienne bornée sur $\mathbb{R}^n$.

Soient $X_1 , \dots , X_n , \dots$ et U des v. a. ; on dit que la suite (X_n) tend presque sûrement vers U si l'ensemble A des ω tels que $\lim X_n(\omega) = U(\omega)$ vérifie $\Pr\{A\} = 1$. On dit que (X_n) converge en loi vers U si la suite des mesures m_{X_n} sur $\mathbb{R}$ tend vaguement vers m_U .

Critères de convergence en loi :

a. Pour tout nombre réel t , on a

$$\lim_{n\to\infty} E\{\exp itX_n\} = E\{\exp itU\} \quad .$$

b. Pour tous les nombres réels a et b avec

$$a < b \quad \text{et} \quad \Pr\{U = a\} = \Pr\{U = b\} = 0$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\{a < X_n < b\} = \Pr\{a < U < b\} \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSEN (Erik Sparre). - On the number of positive sums of random variables, Skand. Aktuarietidskr., t. 32, 1949, p. 27-36.

[2] BAXTER (G.). - An analytic approach to finite fluctuation problems in probability, J. Anal. math., Jérusalem, t. 9, 1961, p. 31-70.

[3] BAXTER (G.) and DONSKER (M.). - On the distribution of the supremum functional for processes with stationary independant increments, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 73-87.

[4] CHUNG (K. L.) and FELLER (W.). - On fluctuations in coin-tossing, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 35, 1949, p. 605-608.

[5] DARLING (D. A.). – Sums of symmetrical random variables, Proc. Amer. math. Soc., t. 2, 1951, p. 511-517.

[6] ERDOS (P.) and KAC (M.). – On the number of positive sums of independant random variables, Bull. Amer. math. Soc., t. 53, 1947, p. 1011-1020.

[7] FELLER (William). – An introduction to probability theory and its applications, 2nd edition. – New York, J. Wiley and sons, 1957 (A Wiley Publication in mathematical Statistics).

[8] KAC (M.). – Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory, Duke math. J., t. 21, 1954, p. 501-509.

[9] KOLMOGOROV (A. N.). – Foundations of the theory of probability, 2nd edition. – New York, Chelsea publishing Company, 1956.

[10] LÉVY (Paul). – Sur certains processus stochastiques homogènes, Compositio Math., t. 7, 1939, p. 283-339.

[11] SPITZER (Franz). – A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 323-339.

[12] WENDEL (J. G.). – Spitzer's formula : a short proof, Proc. Amer. math. Soc., t. 9, 1958, p. 905-908.

[13] WENDEL (J. G.). – Order statistics of partial sums, Annals of math. Statist., t. 31, 1960, p. 1034-1044.