Pierre Cartier

Théorie analytique des formes quadratiques. I. Suites quasi-périodiques

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 309, p. 479-490

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__479_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 309 Juin 1966

THÉORIE ANALYTIQUE DES FORMES QUADRATIQUES

I. SUITES QUASI-PÉRIODIQUES

par Pierre CARTIER

Ce premier exposé est consacré à l'étude d'une classe particulière de suites qui interviennent de manière implicite dans la théorie des fonctions modulaires et leurs applications arithmétiques. L'interprétation adélique, et l'application aux formes quadratiques et hermitiennes est laissée aux exposés suivants.

1. Définitions.

On note $\underline{B}$ l'espace vectoriel des suites bornées $a = \{a(n)\}_{n\geq 0}$, à termes complexes, muni de la norme $\|a\| = \sup_{n\geq 0} |a(n)|$. Une suite a est <u>périodique</u> s'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $a(n+N) = a(n)$ pour tout n ; on la dira <u>quasi-périodique</u> si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 1$ avec $|a(n) - a(n')| \leq \varepsilon$ lorsque $n \equiv n'$ mod. N. Les suites quasi-périodiques forment un sous-espace vectoriel fermé $\underline{Q}$ de $\underline{B}$, adhérence de l'ensemble des suites périodiques. On dira que la suite a est <u>asymptotiquement périodique</u> si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux entiers $N \geq 1$ et n_0 tels que l'on ait $|a(n) - a(n')| \leq \varepsilon$ lorsque $n \geq n_0$, $n' \geq n_0$ et $n \equiv n'$ mod. N. On notera $\underline{A}$ l'ensemble des suites asymptotiquement périodiques ; c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\underline{B}$; on a $\underline{Q} \subset \underline{A} \subset \underline{B}$.

Toute suite asymptotiquement périodique est la somme d'une suite quasi-périodique et d'une suite tendant vers 0, et cette décomposition est unique. De manière plus précise, toute suite asymptotiquement périodique a admet une moyenne

$$(1) \qquad \underset{\sim}{M}[a] = \underset{\sim}{M}_n[a(n)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a(n)$$

et $\underset{\sim}{M}$ est une forme linéaire de norme 1 sur $\underline{A}$. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on peut définir la moyenne

(2) $$a_N(n) = \underset{\sim}{M}_{\nu}[a(n+\nu N)]$$

et la suite a_N admet la période N . Si a est quasi-périodique, on a

(3) $$\lim_{N|\infty} \| a_N - a \| = 0 ,$$

avec la signification suivante de la limite $\lim_{N|\infty} u_N = u$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $d \geqslant 1$ tel que l'on ait $|u_N - u| \leqslant \varepsilon$ lorsque N est multiple de d ([1]). Si a est seulement supposée asymptotiquement périodique, il existe une suite quasi-périodique q telle que $\lim_{N|\infty} \| a_N - q \| = 0$ et l'on a $a = q + c$ avec $\lim_{n \to \infty} c(n) = 0$.

2. Séries de Fourier.

On note en général ω une racine de l'unité ; on écrit $\sum_{\omega(q)}$ pour une sommation portant sur les racines q^e de l'unité et de même $\sum_{\rho(q)}$ pour les racines primitives q^e de l'unité. On pose $e_\omega(n) = \omega^{-n}$; la suite e_ω est périodique et les suites e_ω avec $\omega^N = 1$ forment une base de l'espace vectoriel des suites de période N ; la formule

(4) $$\underset{\sim}{M}_n [\omega^n \omega'^{-n}] = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega = \omega' \\ 0 & \text{si} \quad \omega \neq \omega' \end{cases}$$

([1]) Il revient au même de supposer que l'on a $\lim_{h \to \infty} u_{N(h)} = u$ pour toute suite $\{N(h)\}_{h \geq 0}$ ayant la propriété que tout entier donné en divise tous les termes à l'exception d'un nombre fini ; un exemple d'une telle suite est donné par $N(h) = h\,!$.

montre que les suites e_ω forment un système orthonormal et total dans $\underline{Q}$. Il s'impose donc de définir les coefficients de Fourier d'une suite quasi-périodique a par les formules :

$$\hat{a}_\omega = \underset{n}{\mathcal{M}}\left[\omega^n \cdot a(n)\right] \quad . \tag{5}$$

Par la suite, nous utiliserons le procédé de sommation $\sum\limits_\omega = \lim\limits_{N|\infty} \sum\limits_{\omega(N)}$ pour sommer sur l'ensemble des racines de l'unité. La formule

$$a_N(n) = \sum_{\omega(N)} \hat{a}_\omega \, \omega^{-n} \tag{6}$$

montre que l'on a

$$a(n) = \sum_\omega \hat{a}_\omega \cdot \omega^{-n} \tag{7}$$

lorsque a est quasi-périodique.

Nous ajouterons quelques remarques à propos de la formule (7). Tout d'abord, il arrivera fréquemment que l'on ait $\sum\limits_\omega |\hat{a}_\omega| < \infty$, auquel cas la série (7) est absolument convergente. S'il n'en est pas ainsi, on pourra souvent sommer par le procédé

$$a(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q(n) \tag{8}$$

avec $A_q(n) = \sum\limits_{\rho(q)} \hat{a}_\rho \cdot \rho^{-n}$; ce procédé est surtout intéressant lorsque $\hat{a}_\omega$ a la même valeur u_q pour toutes les racines ω primitives q^e de l'unité, auquel cas, on peut écrire

$$a(n) = \sum_{q=1}^{\infty} u_q \cdot c_q(n) \tag{9}$$

avec $c_q(n) = \sum\limits_{\rho(q)} \rho^n$ (somme de Ramanujan).

Par ailleurs, si a est quasi-périodique, la série $\sum\limits_\omega \hat{a}_\omega \cdot \omega^{-n}$ converge pour tout entier n ; la somme en sera encore notée $a(n)$ lorsque $n < 0$.

Enfin, si a est seulement supposée asymptotiquement périodique, on peut définir les coefficients de Fourier $\hat{a}_\omega$ par (5), et la série $\sum\limits_\omega \hat{a}_\omega \cdot \omega^{-n}$ converge, ayant pour somme la composante quasi-périodique $q(n)$ de $a(n)$; on a donc dans ce cas :

(10) $$\lim_{n\to\infty}\left[a(n) - \sum_{\omega} \hat{a}_{\omega}.\omega^{-n}\right] = 0 .$$

3. Série génératrice.

On note D (resp. C) l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z|<1$ (resp. $|z| = 1$). Soit $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n).z^n$ une fonction holomorphe dans D ; la condition

(11) $$F(z) = O((1-|z|)^{-k})$$

entraîne $a(n) = O(n^k)$ et est entraînée par $a(n) = O(n^{k-1})$; sous l'hypothèse (11), on peut donc définir la distribution f sur C par $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n).\zeta^n$; elle satisfait aux relations [1]

(12) $$f(\zeta) = \lim_{r\nearrow 1} F(r\zeta)$$ (limite dans l'espace des distributions sur C)

(13) $$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

(14) $$\overline{a(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta - z}\,d\zeta .$$

Lorsque $a(0) = 0$, on posera $h = f + \bar{f}$; on aura alors

(15) $$h(\zeta) = 2\lim_{r\nearrow 1} \operatorname{Re}\left[F(r\zeta)\right]$$

---

[1] On identifie une fonction intégrable f sur C à la distribution définie par $\langle f,\varphi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_C f(\underset{\sim}{e}(\vartheta))\,\varphi(\underset{\sim}{e}(\vartheta))\,d\vartheta$ pour toute fonction φ de classe C^{∞} sur C (on a posé $\underset{\sim}{e}(\vartheta) = e^{2\pi i\vartheta}$). La distribution δ_{ζ} est définie par $\langle\delta_{\zeta},\varphi\rangle = \varphi(\zeta)$. La valeur $\langle T,\varphi\rangle$ d'une distribution T sur une fonction φ de classe C^{∞} se note aussi $\frac{1}{2\pi i}\int_C T(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta}$.

(16) $$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \ .$$

Si la suite $\{a(n)\}_{n\geq 0}$ est quasi-périodique, on a alors

(17) $$F(z) = \sum_\omega \frac{\omega . \hat{a}_\omega}{\omega - z} \ .$$

Si l'on suppose de plus que $a(0) = 0$ et que $\hat{a}_\omega$ est réel pour tout ω, les relations (15) et (16) sont satisfaites avec $h = \sum_\omega \hat{a}_\omega . \delta_\omega$.

Hardy et Littlewood ont créé une méthode puissante pour prouver par l'étude de la fonction holomorphe F que la suite $\{a(n)\}_{n\geq 0}$ de ses coefficients est asymptotiquement périodique, la méthode des "petits arcs" et des "grands arcs" (cf. Landau [4], 2e partie). Un critère moins profond est le suivant : la suite $\{a(n)\}_{n\geq 0}$ sera asymptotiquement périodique si l'on a

(18) $$F(z) = \sum_\omega \frac{c_\omega}{\omega - z} + H(z)$$

avec $\sum_\omega |c_\omega| < \infty$ et $\sup_{0\leq r<1} \int_0^1 |H(r.\underset{\sim}{e}(\vartheta))|\,d\vartheta < \infty$ (ce qui a lieu par exemple si H est bornée). Cela résulte des propriétés des classes de Hardy (cf. Zygmund [7]).

4. Fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur.

Soit a une suite quasi-périodique ; les racines de l'unité étant les nombres $\underset{\sim}{e}(r)$ avec r rationnel, et $\underset{\sim}{e}(r) = \underset{\sim}{e}(r')$ équivalant à $r \equiv r'$ mod. 1 , on définit les coefficients de Fourier $c(r) = \underset{\sim}{M}_n [a(n)\underset{\sim}{e}(rn)]$ pour r rationnel. Pour simplifier, on suppose $\sum_{r \bmod. 1} |c(r)| < \infty$. Il existe alors, sur l'ensemble $\underset{\sim}{R}$ des nombres réels, une distribution σ caractérisée par chacune des formules suivantes

(19) $$\sigma(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\, \underset{\sim}{e}(nx)$$

$$\sigma(x) = \sum_r c(r)\ \delta(x-r)\ . \tag{20}$$

Soit alors f une fonction intégrable sur $\underset{\sim}{R}$, telle que $\sum_n |f(n)| < \infty$. On définit la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f par

$$\hat{f}(y) = \int f(x)\ \underset{\sim}{e}(-xy)\ dx \tag{21}$$

et l'on suppose que la série $\sum_n \hat{f}(y+n)$ converge uniformément sur $\underset{\sim}{R}$. On a alors la généralisation suivante de la formule de Poisson

$$\sum_n a(n)\ f(n) = \sum_r c(r)\ \hat{f}(r)\ . \tag{22}$$

Considérons alors un entier $k \geqslant 1$ et un nombre complexe $\tau = u + iv$ avec u réel, $v > 0$. On posera

$$\Phi_k(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n).n^{k-1}\ \underset{\sim}{e}(n\tau)\ . \tag{23}$$

La fonction Φ_k est holomorphe dans le demi-plan supérieur et se réduit à $F(\underset{\sim}{e}(\tau))$ pour $k = 1$ (avec les notations du n° 3). La "valeur au bord" de cette fonction s'obtient facilement ; si l'on suppose les $c(r)$ réels et, ou bien $k \geqslant 2$, ou bien $a(0) = 0$, $k = 1$, on a

$$\lim_{v \searrow 0} \operatorname{Re}\left[\Phi_k(u+iv)\right] = \frac{1}{2(2\pi i)^{k-1}}\left(\frac{d}{du}\right)^{k-1} \sigma(u) \tag{24}$$

au sens des distributions en u.

Par ailleurs, si l'on applique pour $k \geqslant 2$ la formule (22) avec

$$f(x) = \begin{cases} x^{k-1}\ \underset{\sim}{e}(\tau x) & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{25}$$

on obtient

$$\Phi_k(\tau) = \frac{(k-1)!}{(-2\pi i)^k} \sum_r c(r)\ (\tau - r)^{-k} \tag{26}$$

ce qui s'écrit encore

$$\Phi_k(\tau) = \frac{(k-1)!}{(-2\pi i)^k} \int_{\underset{\sim}{R}} \frac{\sigma(x)}{(\tau - x)^k}\ dx\ . \tag{27}$$

5. Formes modulaires.

On suppose $k \geqslant 3$ et $N \geqslant 1$. On notera Γ le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers et de déterminant 1, et $\Gamma(N)$ le sous-groupe défini par la condition $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mod. N. Le groupe Γ agit à droite dans l'espace vectoriel des fonctions holomorphes dans le demi-plan supérieur :

(28) $$\Phi^g(\tau) = \Phi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)(c\tau + d)^{-k}.$$

On dit qu'une fonction Φ holomorphe dans le demi-plan supérieur est une forme modulaire de dimension $-k$ et niveau N si elle est invariante par $\Gamma(N)$ et bornée dans tout demi-plan $\underset{\sim}{H}_\varepsilon = \{\tau = u + iv \mid v \geq \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$. S'il en est ainsi, avec tout g dans Γ, la fonction Φ^g est une forme modulaire et admet le développement de Fourier

(29) $$\Phi^g(\tau) = a_g + \sum_{n=1}^{\infty} a_g(n).n^{k-1}\, \underset{\sim}{e}(n\tau).$$

Les coefficients a_g s'appellent les "valeurs aux pointes" de Φ.

On montre que toute forme modulaire est de manière unique somme d'une forme parabolique et d'une série d'Eisenstein :

a) Φ est une forme parabolique si tous les a_g sont nuls. D'après un théorème de Hecke [3], il existe alors une constante $C > 0$ telle que

(30) $$|\Phi(u + iv)| \leq C.v^{-k/2}$$

(31) $$|a_g(n)| \leq C\, n^{1-k/2}.$$

b) Les séries d'Eisenstein sont définies par la formule

(32) $$E_\varphi(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(m_1,m_2)=1} \varphi(m_1,m_2)\ (m_1\tau + m_2)^{-k}$$

où φ est une fonction de deux entiers soumises aux hypothèses

$$(33)\qquad \begin{cases} \varphi(-m_1,-m_2) = (-1)^k\,\varphi(m_1,m_2) & \\ \varphi(m_1,m_2) = \varphi(n_1,n_2) & \text{si } m_1 \equiv n_1\ ,\ m_2 \equiv n_2 \text{ mod. } N \\ \varphi(m_1,m_2) = 0 & \text{si } m_1\ ,\ m_2\ ,\ N \text{ ont un divi-} \\ & \text{seur commun} > 1\ . \end{cases}$$

On a $a_g = \varphi(-c,a)$ pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, donc φ est bien définie par E_φ.

Les coefficients de Fourier $a(n)$ correspondant à $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont donnés par la formule

$$(34)\qquad a(n) = \sum_{\chi} L(\chi,k)^{-1} \sum_{d\delta = n} \pi_\chi(d,\delta)\, d^{1-k}$$

où χ parcourt l'ensemble des caractères modulo N, et $L(\chi,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n).n^{-s}$ est la série de Dirichlet classique. De plus, on a

$$(35)\qquad \pi_\chi(u_1,u_2) = \sum_{v \text{ mod. } N} \varphi_\chi(u_1,v)\, \underset{\sim}{e}\left(\frac{u_2 v}{N}\right)$$

avec

$$(36)\qquad \varphi_\chi(m_1,m_2) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\ell \text{ mod. } N} \chi(\ell)\, \varphi(\ell m_1, \ell m_2)\ .$$

En appliquant les résultats du n° 4, on voit que les coefficients $a(n)$ forment une suite quasi-périodique, donnée par

$$(37)\qquad a(n) = \sum_{r} \gamma(r)\, \underset{\sim}{e}\left(\frac{rn}{N}\right)$$

si $\gamma\left(\frac{a}{b}\right) = \varphi(b,-a).b^{-k}$ lorsque $(a,b) = 1$.

Un cas particulier intéressant est celui où $N = 1$. On a alors une seule série d'Eisenstein pour chaque entier $k \geqslant 3$, donnée par

$$G_k(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{(m_1,m_2)=1} (m_1\tau + m_2)^{-k}$$

$$= \zeta(k) + \frac{(-2\pi i)^k}{2(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, \underset{\sim}{e}(n\tau)$$

où $\sigma_{k-1}(n)$ est la somme des puissances $(k-1)^e$ des diviseurs de n. Les résultats généraux montrent que la suite $\frac{\sigma_k(n)}{n^k}$ est quasi-périodique pour $k \geqslant 2$, donnée par la formule de Ramanujan

$$\frac{\sigma_k(n)}{n^k} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-k-1} c_q(n) \ . \tag{38}$$

En combinant les résultats de a) et b), on voit que les coefficients de Fourier $a(n)$ d'une forme modulaire $a + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} a(n) \, \underset{\sim}{e}(n\tau)$ forment une suite <u>asymptotiquement périodique</u>.

6. <u>Application aux sommes de carrés</u> (cf. [2], chapitre IX).

On sait depuis Bachet et Fermat que tout nombre premier de la forme $4n+1$ est somme de deux carrés, et qu'aucun nombre premier de la forme $4n+3$ ne l'est. On sait par Gauss que les nombres $n > 0$ qui ne sont pas somme de trois carrés sont ceux de la forme $4^a(8m+7)$, et l'on sait par Lagrange que tout nombre $n > 0$ est somme de quatre carrés.

Les résultats quantitatifs analogues sont les suivants ; notons $r_f(n)$ le nombre de solutions de l'équation $x_1^2 + \dots + x_f^2 = n$ où les inconnues $x_1, \dots, x_f$ sont des entiers ; on a le tableau suivant, dû essentiellement à Jacobi (1829)

$$r_2(n) = 4 \sum_{d|n}{}' (-1)^{\frac{d-1}{2}} \tag{39}$$

$$r_4(n) = \begin{cases} 8 \displaystyle\sum_{d|n}{}' d & n \equiv 1 \text{ mod. } 2 \\ 24 \displaystyle\sum_{d|n}{}' d & n \equiv 0 \text{ mod. } 2 \end{cases} \tag{40}$$

$$r_6(n) = \begin{cases} 12 \displaystyle\sum_{d|n}{}' (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^2 & n \equiv 1 \text{ mod. } 4 \\ -20 \displaystyle\sum_{d|n}{}' (-1)^{\frac{d-1}{2}} d^2 & n \equiv 3 \text{ mod. } 4 \end{cases} \tag{41}$$

$$r_8(n) = \begin{cases} 16 \sum_{d|n}' d^3 & n \equiv 1 \mod. 2 \\ 16 \sum_{d|n} (-1)^d d^3 & n \equiv 0 \mod. 2 \end{cases} \tag{42}$$

[$\sum_d'$ est une somme portant sur d impair]. Pour $f < 8$ impair, les formules sont connues et beaucoup plus compliquées.

Le lien avec ce qui précède est le suivant. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_f(n)\, \underset{\sim}{e}(n\tau) = \vartheta(2\tau)^f \tag{43}$$

avec $\vartheta(\tau) = \sum_m \underset{\sim}{e}\left(\frac{m^2}{2}\tau\right)$; la formule de transformation de Hermite pour les séries ϑ prouve que ϑ^{2k} est une forme modulaire de dimension $-k$ et niveau 4. Les "valeurs aux pointes" sont faciles à déterminer, et l'on obtient

$$\vartheta(2\tau)^{2k} = \Theta_{2k}(\tau) + E(\tau) \tag{44}$$

où Θ_{2k} est une forme parabolique <u>nulle lorsque</u> $k \leq 4$. La série d'Eisenstein E est donnée par

$$E(\tau) = \frac{\pi^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}\, \delta_{2k}(n)\, \underset{\sim}{e}(n\tau) \tag{45}$$

avec la définition

$$\delta_{2k}(n) = \sum_{\substack{(a,b)=1 \\ b>0}} b^{-k}\, \omega(a,b)^k\, \underset{\sim}{e}\left(\frac{an}{b}\right) \tag{46}$$

avec $\omega(a,b)$ égal à 1 , 0 , -1 suivant que b est congru à 1 , 2 , 3 mod. 4 et à $-2i$ ou $2i$ si $b \equiv 0$ mod. 4 selon que a est congru à 1 ou 3 mod. 4 .

D'après le n° 5, on peut donc conclure que l'on a

$$r_{2k}(n) = \frac{\pi^k n^{k-1}}{(k-1)!}\, \delta_{2k}(n) + O(n^{k/2}) \tag{47}$$

le terme d'erreur étant nul pour $k \leqslant 4$. Les formules (39) à (42) sont des cas particuliers de (34), comme le montrent des calculs faciles. On peut de même donner une expression générale de $\delta_{2k}(n)$ comme somme portant sur les diviseurs de n (cf. [5], page 189), mais l'approximation fournie par la formule de Ramanujan (46) est très bonne dès que $k \geqslant 4$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. EICHLER - " Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen", Birkhäuser Verlag, Basel, 1963.

[2] G. H. HARDY - "Ramanujan", Chelsea Publishing Company, New York.

[3] E. HECKE - "Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik", Abhand. Math. Sem. Hamburg 5(1927) pp. 199-224.

[4] E. LANDAU - "Vorlesungen über Zahlentheorie", Chelsea Publishing Company, New York.

[5] S. RAMANUJAN - "Collected Papers", Chelsea Publishing Company, New York, 1962.

[6] C. L. SIEGEL - "Gesammelte Abhandlungen", en 3 tomes, Springer Verlag, Berlin, 1966.

[7] A. ZYGMUND - "Trigonometrical series", Dover Publications, New York, 1955.

-:-:-:-

ERRATA

p. 309-02, ligne 13. Ajouter "indiquer une sommation sur" entre "pour" et "les racines".

p. 309-07, ligne 8. Ajouter "si chacune des fonctions Φ^g (pour g dans Γ) est" après "et".

p. 309-08, formule (36). $\varphi(N)$ désigne le nombre d'entiers premiers à N dans l'intervalle [1, N - 1].

p. 309-10, ligne 17. Remplacer "avec" par "et l'on a".

p. 309-11, ligne 4. Remplacer "la formule" par "les premiers termes de la série".