PIERRE CARTIER

Espaces de Poisson des groupes localement compacts

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 370, p. 107-127

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__107_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 370 Février 1970

ESPACES DE POISSON DES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

(d'après R. AZENCOTT [1])

par Pierre CARTIER

Introduction.

Dans deux mémoires importants, Furstenberg [3,4] a construit certaines compactifications d'un espace riemannien symétrique, et a donné une formule de représentation intégrale pour les fonctions harmoniques bornées sur de tels espaces, au moyen de leurs valeurs "à la frontière". Ces résultats généralisent la formule de Poisson valable pour les fonctions harmoniques dans le disque unité. Dans le cours de son étude, Furstenberg est amené à étudier les fonctions μ-harmoniques sur un groupe de Lie semi-simple G, c'est-à-dire les solutions boréliennes et bornées de l'équation intégrale

$$f(g) = \int_G f(gh)\, d\mu(h) \qquad (g \in G) ,$$

où μ est une mesure de probabilité sur G. Ces fonctions s'interprètent comme les fonctions invariantes pour le cheminement aléatoire de loi μ sur le groupe G, et Furstenberg utilise cette interprétation dans ses raisonnements.

Azencott a repris la question récemment, et étudié systématiquement les fonctions μ-harmoniques sur un groupe localement compact. Il clarifie complètement la relation entre la frontière de Furstenberg et la frontière de Martin, et caractérise presque complètement les groupes de Lie sur lesquels toute fonction μ-harmonique est constante (cf. cor. du th. 4). Nous n'étudierons pas ici la frontière de Martin qui nous obligerait à trop de préliminaires probabilistes. L'étude des fonctions harmoniques sur l'analogue p-adique des espaces riemanniens symétriques est à peine commencée (cf. [2] pour le cas de $SL(2, \mathbf{Q}_p)$) ; il serait souhaitable de la développer.

1. Notations.

G est un groupe localement compact à base dénombrable, d'élément neutre e ;

m est une mesure de Haar à droite sur G ;

μ est une mesure de probabilité étalée sur G .

Précisons qu'une mesure λ sur un espace topologique séparé T est une application λ de l'ensemble des parties boréliennes de T dans $[0,\infty]$ qui satisfait aux conditions suivantes :

a) si A est la réunion des ensembles boréliens disjoints A_n $(n \geq 1)$, on a $\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$;

b) l'espace T est réunion des ouverts U tels que $\lambda(U)$ soit fini ;

c) pour tout ensemble borélien $A \subset T$, le nombre $\lambda(A)$ est la borne supérieure des nombres $\lambda(K)$ où K parcourt l'ensemble des parties compactes de A .

On dit que λ est bornée si $\lambda(T)$ est fini, que c'est une mesure de probabilité si $\lambda(T) = 1$.

Un G-espace T est un espace topologique séparé T sur lequel G agit de sorte que l'application $(g,t) \mapsto gt$ de $G \times T$ dans T soit continue. Un élément g de G transforme une mesure λ sur T en la mesure $g\lambda$ telle que $(g\lambda)(A) = \lambda(g^{-1}A)$ pour $A \subset T$ borélien. On dit que la mesure λ sur T est quasi-invariante si $g\lambda$ est équivalente à λ pour tout $g \in G$; cela signifie que la classe des ensembles λ-négligeables est invariante par G . Si λ est une mesure bornée sur G et λ' une mesure bornée sur T , la mesure $\lambda * \lambda'$ est l'image de $\lambda \otimes \lambda'$ par l'application $(g,t) \mapsto gt$ de $G \times T$ dans T .

Le produit de convolution $\lambda * \lambda'$ de deux mesures bornées sur G est une mesure bornée sur G ; on note λ^n le produit de convolution de n mesures égales à λ (pour $n \geq 0$). Dire que μ est étalée. signifie par définition qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que μ^n ne soit pas singulière par rapport à m. Il existe alors un entier $p \geq 0$ et un ouvert non vide U de G tel que μ^p majore sur U un multiple constant $a.m$ (avec $a > 0$) de la mesure de Haar m ; on note S_μ la réunion de tous ces ouverts U. Alors S_μ est un semi-groupe (i.e. est stable par multiplication). On note aussi T_μ le plus petit semi-groupe fermé contenant e et le support de μ ; on a $S_\mu \subset T_\mu$ et $T_\mu S_\mu \subset S_\mu$.

Pour tout espace topologique séparé T, on note $\mathcal{C}(T)$ l'espace de Banach formé des fonctions réelles continues et bornées sur T, avec la norme $\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|$.

2. <u>Cheminement aléatoire de loi</u> μ.

Le <u>cheminement aléatoire de loi</u> μ est une suite $X = (X_n)_{n \geq 0}$ d'éléments aléatoires dans G avec la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $X_{n-1}^{-1} X_n$ a pour loi μ et elle est indépendante de $X_o, X_1, \ldots, X_{n-1}$. On peut construire X comme suit. Notons Ω l'espace produit $\prod_{n=0}^{\infty} G_n$ avec $G_n = G$ pour tout $n \geq 0$. Pour tout $g \in G$, on pose $\mathbb{P}^g = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \pi_n$ avec $\pi_o = \varepsilon_g$ et $\pi_n = \mu$ pour $n \geq 1$ (on note ε_g la masse unité en g). Enfin, X_n est l'application de Ω dans G qui transforme la suite $\omega = (g_p)_{p \geq 0}$ en $g_o g_1 \ldots g_n$. On dit qu'une partie de Ω est <u>négligeable</u> si elle est contenue dans une partie borélienne A telle que $\mathbb{P}^g(A) = 0$ pour tout $g \in G$. On note $\mathbb{E}^g$ l'intégrale correspondant à $\mathbb{P}^g$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathbb{E}_n$ l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $X_o, X_1, \ldots, X_n$. Si F est une fonction borélienne et bornée sur Ω , la fonction $\mathbb{E}_n[F]$ est de la forme $u(X_o,X_1,\dots,X_n)$ où u est borélienne et bornée sur G^{n+1} , et elle est caractérisée à un ensemble négligeable près par la relation $\mathbb{E}^g[F.H] = \mathbb{E}^g[\mathbb{E}_n[F].H]$ pour tout $g \in G$ et toute fonction H de la forme $H = v(X_o,X_1,\dots,X_n)$ où v est borélienne et bornée sur G^{n+1} . Une martingale est une suite $(H_n)_{n\geq 0}$ de fonctions boréliennes et bornées sur Ω telle que $H_n = \mathbb{E}_n[H_{n+1}]$ pour tout $n \geq 0$.

On note θ l'opérateur de décalage dans Ω transformant la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ en la suite $(h_n)_{n\geq 0}$ avec $h_o = g_og_1$ et $h_n = g_{n+1}$ pour $n \geq 1$; on a $X_n \circ \theta = X_{n+1}$ pour $n \geq 0$. On note A l'algèbre normée complète formée des fonctions (réelles) boréliennes et bornées F sur Ω qui sont invariantes (i.e. on a $F = F \circ \theta$), avec la norme $\|F\| = \sup_{\omega\in\Omega} |F(\omega)|$. Les fonctions nulles presque partout (pour toute mesure $\mathbb{P}^g$) appartenant à A forment un idéal fermé I , et l'on pose $\mathbb{A} = A/I$.

3. Fonctions μ-harmoniques.

Pour toute fonction (réelle) borélienne et bornée f sur G , on définit la fonction borélienne et bornée Qf par

(1) $$Qf(g) = \int_G f(gh)\, d\mu(h) \qquad (g \in G) .$$

On dit que f est μ-harmonique si elle est borélienne et bornée et satisfait à $Qf = f$. La propriété markovienne du processus X se traduit par la relation

(2) $$\mathbb{E}_n[f(X_{n+1})] = Qf(X_n) \ ;$$

par suite, f est μ-harmonique si et seulement si la suite $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale.

LEMME 1.- Toute fonction μ-harmonique est continue.

Comme μ est étalée, on peut choisir un entier $p \geq 1$ tel que la partie singulière σ de μ^p par rapport à m soit de norme < 1 . Pour tout entier $n \geq 1$, il existe alors une fonction m-intégrable $u_n \geq 0$ telle que $\mu^{np} = u_n.m + \sigma^n$. Supposons que f soit μ-harmonique ; on a $Q^{np}f = f$, d'où

$$f(g) = \int_G f(gh)\, u_n(h)\, dm(h) + \int_G f(gh)\, d\sigma^n(h) \qquad (g \in G) \quad ;$$

comme f est dans $\mathcal{L}^\infty(m)$ et u_n dans $\mathcal{L}^1(m)$, la première intégrale est fonction continue de g ; la seconde intégrale est majorée par $\|\sigma\|^n \|f\|$. Par suite, f est limite uniforme de fonctions continues, donc continue.

C.Q.F.D.

On note $\mathcal{H}$ le sous-espace fermé de $\mathcal{C}(G)$ formé des fonctions μ-harmoniques, et $\mathcal{H}^u$ le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ constitué par les fonctions μ-harmoniques uniformément continues à gauche.

4. Mesures μ-invariantes.

Soient T un G-espace compact et λ une mesure de probabilité sur T . On dit que λ est μ-invariante si l'on a $\mu * \lambda = \lambda$; l'existence d'une mesure μ-invariante résulte facilement du théorème de Markov-Kakutani. Pour toute fonction borélienne et bornée φ sur T , on définit une fonction borélienne et bornée $u_\lambda(\varphi)$ sur G par

$$(3) \qquad u_\lambda(\varphi)(g) = \int_T \varphi(gt)\, d\lambda(t) = \langle g\lambda, \varphi\rangle \qquad (g \in G) \quad ;$$

il est immédiat que $u_\lambda(\varphi)$ est uniformément continue à gauche si φ est continue. Un calcul facile montre ceci : si u_λ applique $\mathcal{C}(T)$ dans $\mathcal{H}^u$, alors λ est

μ-invariante ; réciproquement, si λ est μ-invariante, $u_\lambda(\varphi)$ est μ-harmonique pour toute fonction borélienne et bornée φ sur T .

LEMME 2.- Supposons que λ soit μ-invariante. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties boréliennes A de T telles que $\lambda(gA) = 0$ pour tout $g \in G$. Il existe une mesure quasi-invariante ε sur T telle que $\mathcal{N}$ se compose des ensembles boréliens ε-négligeables. Si π est une mesure bornée sur G , la mesure $\pi * \lambda$ sur T est absolument continue par rapport à ε .

Soient π_o une mesure de probabilité sur G , de support G , et $\varepsilon = \pi_o * \lambda$. Si A est une partie borélienne de T , la fonction $g \mapsto \lambda(g^{-1}A)$ est μ-harmonique, donc continue (lemme 1) ; on a $\varepsilon(A) = \int_G \lambda(g^{-1}A)\, d\pi_o(g)$, donc $\varepsilon(A) = 0$ équivaut à $\lambda(g^{-1}A) = 0$ pour tout $g \in G$ c'est-à-dire à $A \in \mathcal{N}$. Si π est une mesure bornée sur G , on a $(\pi * \lambda)(A) = \int_G \lambda(g^{-1}A)\, d\pi(g) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{N}$.

C.Q.F.D.

Le semi-groupe T_μ est le support de la mesure de probabilité $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}\mu^n$ et toute mesure μ-invariante est aussi π-invariante. Le raisonnement précédent montre alors que toute mesure μ-invariante est quasi-invariante lorsque $T_\mu = G$.

Supposons G transitif sur T , et soit $t_o \in T$. L'application $p : g \mapsto gt_o$ de G sur T est alors ouverte. Toutes les mesures quasi-invariantes sont équivalentes et ont pour support T ; leurs ensembles négligeables sont les parties A de T telles que $p^{-1}(A)$ soit m-négligeable.

LEMME 3.- Supposons que G soit transitif sur T et que λ soit μ-invariante. Il existe alors un ouvert non vide U de T tel que $T_\mu U \subset U$ et que λ coïncide sur U avec une mesure quasi-invariante.

On conserve les notations π et p. Comme λ est absolument continue par rapport à toute mesure quasi-invariante, un argument facile montre qu'il existe une fonction m-intégrable positive f sur G telle que $\lambda = p(f.m)$. D'autre part, au moyen d'une partition de l'unité, on construit une fonction continue bornée $\psi \geq 0$ sur G telle que $S_\mu = \{\psi > 0\}$ et $\pi \geq \psi.m$. De $\pi * \lambda = \lambda$, on déduit $\lambda \geq p(\psi.m * f.m)$; comme $T_\mu S_\mu \subset S_\mu$, on a $T_\mu V \subset V$, si V est l'ensemble des points de G où $\psi * f$ est > 0. Il suffit alors de poser $U = p(V)$.

C.Q.F.D.

5. Mesures contractiles.

Soient T un G-espace compact et λ une mesure de probabilité sur T. On dit que λ est contractile si toute mesure ponctuelle ε_t est adhérente à l'ensemble des mesures $g\lambda$ pour g parcourant G. Supposons qu'il en soit ainsi et que T soit métrisable, et soit $t \in T$. Soit $(V_n)_{n \geq 1}$ une suite fondamentale de voisinages de t ; il existe une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de points de G tels que $g_n\lambda$ tende vers ε_t. Après avoir au besoin extrait une suite partielle, on peut supposer qu'on a $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(T - g_n^{-1} V_n) < \infty$; d'après le lemme de Borel-Cantelli, l'ensemble N des points de T appartenant à une infinité des ensembles $T - g_n^{-1} V_n$ est alors λ-négligeable ; pour tout $t' \in T - N$, on a alors $\lim_{n \to \infty} g_n t' = t$.

Pour que la mesure λ soit contractile, il faut et il suffit que l'on ait $\|u_\lambda(\varphi)\| = \|\varphi\|$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(T)$. Cela résulte du lemme suivant appliqué au cas où S est l'adhérence de $G.\lambda$.

LEMME 4.- Soit S un ensemble fermé de mesures de probabilité sur T, tel que $\sup_{s \in S} |\langle s, \varphi \rangle| = \|\varphi\|$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(T)$. Alors S contient toutes les mesures ponctuelles.

Choisissons $t \in T$. Soit Φ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathcal{C}(T)$ comprises entre 0 et 1 et telles que $\varphi(t) = 1$. Pour tout $\varphi \in \Phi$, on a $\sup_{s \in S} \langle s,\varphi\rangle = \|\varphi\| = 1$, et S est compact ; l'ensemble $S_\varphi = \{s \in S \mid \langle s,\varphi\rangle = 1\}$ est donc compact et non vide. Comme on a $S_\varphi \subset S_{\varphi'}$ pour $\varphi \leq \varphi'$ et que Φ est stable par borne inférieure finie, il existe une mesure π appartenant à S_φ pour tout $\varphi \in \Phi$. Le support de la mesure de probabilité π est alors égal à $\{t\}$, d'où $\pi = \varepsilon_t$. C.Q.F.D.

6. Représentation intégrale des fonctions μ-harmoniques.

THÉORÈME 1.- a) Il existe un G-espace compact Π et une mesure de probabilité ν sur Π tels que u_ν soit un isomorphisme d'espaces normés de $\mathcal{C}(\Pi)$ sur $\mathcal{H}^u$

b) La propriété a) détermine le couple (Π,ν) à un isomorphisme près. De plus, la mesure ν sur Π est contractile et μ-invariante.

c) Supposons que G soit transitif sur Π . Si ε est une mesure quasi-invariante sur Π , alors u_ν est un isomorphisme d'espaces normés de $L^\infty(\Pi,\varepsilon)$ sur Π .

a) Soit F dans A . La fonction $f : g \mapsto \mathbb{E}^g[F]$ sur G est borélienne et bornée. Or on a $F \circ \theta^n = F$ car $F \in A$, et $\mathbb{E}_n[F \circ \theta^n] = f(X_n)$ d'après une formule classique. On en déduit que la suite $(f(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale, c'est-à-dire que f est μ-harmonique. D'après le théorème de Jessen, on a

$$(4) \qquad F = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_n[F] = \lim_{n\to\infty} f(X_n) \qquad \text{presque partout.}$$

Comme $f = 0$ dès que F est nulle presque partout, on a défini une application linéaire $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{H}$ de norme ≤ 1 .

Soit f' dans $\mathcal{H}$. Comme la suite $(f'(X_n))_{n \geq 0}$ est une martingale bornée, le théorème de convergence de Doob montre qu'il existe une fonction $F' \in A$ telle que $F' = \lim_{n\to\infty} f'(X_n)$ presque partout. D'après le théorème de convergence dominée et les relations $Qf' = f'$ et $\mathbb{E}^g[f'(X_n)] = Q^n f'(g)$, on a alors

$$f'(g) = \mathbb{E}^g[F'] \qquad (g \in G) . \tag{5}$$

D'après les formules (4) et (5), l'application linéaire $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{H}$ admet pour inverse l'application linéaire $\beta : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ de norme ≤ 1 qui transforme f' en la classe de F'. On a donc prouvé que α est un isomorphisme d'espaces normés.

Transportons à $\mathcal{H}$ par α la structure d'algèbre de $\mathcal{A}$. Le produit dans $\mathcal{H}$ est donné par $f_1 * f_2 = \lim_{n\to\infty} Q^n(f_1 f_2)$, soit plus explicitement par

$$(f_1 * f_2)(g) = \lim_{n\to\infty} \int_G f_1(gh) f_2(gh)\, d\mu^n(h) \qquad (g \in G) . \tag{6}$$

Cette formule montre que $\mathcal{H}^u$ est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{H}$, donc une C^*-algèbre commutative. Soit Π le spectre de cette algèbre ; l'ensemble des formes linéaires continues t sur $\mathcal{H}^u$ telles que $\|t\| = t(1) = 1$ est convexe et faiblement compact, et Π est l'ensemble faiblement compact de ses points extrémaux. On a un isomorphisme d'espaces normés $u : \mathcal{C}(\Pi) \to \mathcal{H}^u$ caractérisé par

$$\varphi(x) = \langle u(\varphi), x \rangle \qquad (\varphi \in \mathcal{C}(\Pi)\ ,\ x \in \Pi \subset (\mathcal{H}^u)'\ ) ; \tag{7}$$

la mesure de probabilité ν sur Π est caractérisée par $\int_\Pi \varphi\, d\nu = u(\varphi)(e)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}(\Pi)$. Comme $\mathcal{H}^u$ se compose de fonctions uniformément continues à gauche, on définit une représentation linéaire continue de G dans $\mathcal{H}^u$ par $(L_g f)(g') = f(g^{-1}g')$ pour f dans $\mathcal{H}^u$ et g, g' dans G ; l'action de G sur Π est définie par transposition. Un calcul trivial établit alors $u = u_\nu$.

b) L'unicité du couple (Π, ν) résulte facilement du résultat suivant : si T et T' sont deux espaces compacts, tout isomorphisme d'espaces normés de $\mathcal{C}(T)$ sur $\mathcal{C}(T')$ provient d'un homéomorphisme unique de T sur T'. Que ν

soit contractile et μ-invariante résulte des considérations des n^{os} 4 et 5.

c) Montrons d'abord que $u_\nu : L^\infty(\Pi, \varepsilon) \to \mathcal{H}$ est isométrique. Comme on a $u_\nu(1) = 1$ et $\|u_\nu\| \leq 1$, il s'agit de montrer que $u_\nu(\varphi) \geq 0$ entraîne $\varphi \geq 0$ ε-presque partout pour toute fonction borélienne et bornée φ sur Π. Choisissons $x_o \in \Pi$. Alors l'application $g \mapsto gx_o$ de G sur Π est ouverte ; par suite, la fonction $\varphi_f : x \mapsto \int_G f(g)\, \varphi(gx)\, dm(g)$ est continue sur Π pour $f \geq 0$ continue à support compact sur G. Un calcul facile donne alors $u_\nu(\varphi_f) \geq 0$, donc $\varphi_f \geq 0$ par a). Vu l'arbitraire de f, on a $\varphi(gx_o) \geq 0$ pour m-presque tout $g \in G$, donc $\varphi \geq 0$ ε-presque partout.

Montrons enfin que $u_\nu : L^\infty(\Pi,\varepsilon) \to \mathcal{H}$ est surjective [1]. Comme $\mathcal{H}$ se compose de fonctions continues (lemme 1), on peut le considérer comme un sous-espace du dual $L^\infty(G,m)$ de $L^1(G,m)$. Pour $f \in L^1(G,m)$, la mesure $f.m$ est bornée sur G ; alors (lemme 2), la mesure $(f.m) * \nu$ est absolument continue par rapport à ε, donc est égale à $v(f).\varepsilon$ avec $v(f) \in L^1(\Pi,\varepsilon)$. Ceci définit une application linéaire continue $v : L^1(G,m) \to L^1(\Pi,\varepsilon)$ et u_ν est transposée de v ; par suite, l'image par u_ν de la boule unité de $L^\infty(\Pi,\varepsilon)$ est faiblement compacte dans $L^\infty(G,m)$. Un argument de régularisation montre que tout élément de $\mathcal{H}$ est limite simple d'une suite uniformément bornée d'éléments de $\mathcal{H}^u$, et comme l'image de u_ν contient $\mathcal{H}^u$, elle est égale à $\mathcal{H}$. C.Q.F.D.

L'espace Π construit dans le théorème 1 s'appelle <u>l'espace de Poisson</u> de μ, et la mesure ν s'intitule le <u>noyau de Poisson de</u> μ. On ne sait vraiment étudier que le cas où Π est un espace homogène de G.

---

(1) Cette partie du raisonnement ne suppose pas que G est transitif sur Π, pourvu que ε soit choisie comme dans le lemme 2.

7. Caractérisation de l'espace de Poisson de μ .

Nous allons montrer que la mesure de Poisson est universelle parmi les mesures μ-invariantes et contractiles.

THÉORÈME 2.- *On suppose que* G *est transitif sur* Π , *et que* λ *est une mesure de probabilité* μ-*invariante et contractile sur un* G-*espace compact* T .

a) *Il existe une application équivariante continue* $p : \Pi \to T$ *et une seule telle que* $p(\nu) = \lambda$. *De plus,* p *est surjective, et* G *est transitif sur* T .

b) *Toute mesure* μ-*invariante sur* T *majorée par* λ *lui est proportionnelle.*

c) *Si* A *est une partie borélienne de* T *telle que* $T_\mu A \subset A$, *on a* $\lambda(A) = 0$ *ou* $\lambda(A) = 1$.

d) *Il existe un point* t *de* T *tel que* λ *soit la restriction à* $S_\mu.t$ *d'une mesure quasi-invariante sur* T . *Si* Σ *est le support de* λ , *on a* $\Sigma = \overline{S_\mu.x} = \overline{T_\mu.x}$ *pour tout* $x \in \Sigma$.

a) Par construction, Π est une partie du dual de $\mathcal{H}^u$ et u_λ applique $\mathcal{C}(T)$ dans $\mathcal{H}^u$. Pour tout $x \in \Pi$, on définit donc une mesure de probabilité $q(x)$ sur T par $\langle q(x) , \varphi\rangle = \langle u_\lambda(\varphi) , x\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(T)$. Alors, $q(\Pi)$ est un ensemble compact de mesures de probabilité sur T , et comme u_λ est une isométrie, le lemme 4 montre que $q(\Pi)$ contient des mesures ponctuelles. Comme q est équivariante et que G est transitif sur Π , il existe une application continue équivariante $p : \Pi \to T$ telle que $q(x) = \varepsilon_{p(x)}$ pour $x \in \Pi$.

On vérifie facilement qu'on a $\lambda = p(\nu)$ et $u_\lambda(\varphi) = u_\nu(\varphi \circ p)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}(T)$. Comme u_λ et u_ν sont isométriques, p est surjective. Enfin, si p' est une application équivariante de Π dans T telle que $p'(\nu) = \lambda$, on a $p(g\nu) = p'(g\nu)$ pour tout $g \in G$; par passage à la limite, on a $p(\varepsilon_x) = p'(\varepsilon_x)$

pour tout $x \in \Pi$ car ν est contractile ; finalement, on a $p = p'$.

b) Soit λ' une mesure μ-invariante sur T telle que $\lambda' \leq \lambda$. Pour tout $x \in \Pi$, on définit une mesure $q'(x)$ sur T par $\langle q'(x) , \varphi \rangle = \langle u_{\lambda'}(\varphi) , x \rangle$ pour $\varphi \in \mathcal{C}(T)$. On a évidemment $q'(x) \leq q(x) = \varepsilon_{p(x)}$; de plus, $q'(x)$ a même masse totale que λ' , soit c . On a donc $q'(x) = c.q(x)$, d'où $u_{\lambda'} = c.u_{\lambda}$ et finalement $\lambda' = c.\lambda$.

c) Supposons qu'on ait $\lambda(A) > 0$ et $T_{\mu}.A \subset A$. Soit λ' la restriction de λ à A ([1]) . On montre facilement que λ' est μ-invariante, et comme on a $\lambda'(A) = \lambda(A) > 0$, on a $\lambda' = \lambda$ par b). En particulier, on a $\lambda(A) = \lambda'(T) = \lambda(T) = 1$.

d) Soit U comme dans le lemme 3 et soit $t \in U$. Alors, $S_{\mu}t$ est un ouvert non vide de T contenu dans U , d'où $\lambda(S_{\mu}t) > 0$. Les assertions de d) résultent alors de c). C.Q.F.D.

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> μ' <u>une mesure de probabilité étalée sur</u> G <u>telle que</u> $T_{\mu'} = T_{\mu}$. <u>Soit</u> Π' <u>l'espace de Poisson de</u> μ' . <u>Si</u> G <u>est transitif sur</u> Π <u>et</u> Π' , <u>les</u> G-<u>espaces</u> Π <u>et</u> Π' <u>sont isomorphes</u>.

On a $T_{\mu'}\Sigma \subset \Sigma$, donc l'application $\pi \mapsto \mu' * \pi$ laisse invariant l'ensemble des mesures à support dans Σ ; d'après le théorème de Markov-Kakutani, il existe donc une mesure μ'-invariante $\pi \neq 0$ à support dans Σ . D'après le lemme 3, il existe un ouvert non vide U de Π tel que $T_{\mu}U = T_{\mu'}U \subset U$ et que π coïncide sur U avec une mesure quasi-invariante. Si t est comme dans d), on a $\Sigma = \overline{S_{\mu}t}$, donc l'ouvert $V = U \cap S_{\mu}t$ est non vide ; d'après c) et d), on a $\nu(V) = 1$. La restriction λ de π à V est alors équivalente à ν et elle est μ'-invariante

---

([1]) Nous entendons par là la mesure λ' telle que $\lambda'(B) = \lambda(A \cap B)$ pour B borélien dans T .

car $T_{\mu'}V \subset V$. On peut supposer $\lambda(\Pi) = 1$. Les considérations du début du n° 5 montrent alors que λ est contractile (car ν est contractile), d'où par a) une application équivariante continue $p' : \Pi' \to \Pi$ transformant en λ le noyau de Poisson ν' de μ' ; par le même raisonnement, on voit que p' a la propriété suivante :

<u>si</u> (g_n) <u>est une suite de points de</u> G <u>telle que</u> $g_n\nu'$ <u>tende vers</u> $\varepsilon_{x'}$, <u>alors</u> $g_n\nu$ <u>tend vers</u> $\varepsilon_{p'(x')}$.

On définit symétriquement une application équivariante et continue $p : \Pi \to \Pi'$ ayant une propriété analogue. Il n'est alors pas difficile de montrer que p et p' sont deux applications réciproques.

C.Q.F.D.

Disons avec Azencott que le groupe G est <u>de type</u> (T) si G est transitif sur l'espace de Poisson de toute mesure de probabilité étalée sur G . S'il en est ainsi, on voit que <u>l'espace de Poisson de</u> μ <u>ne dépend que du semi-groupe</u> T_μ . Furstenberg [3, th. 5.4] a prouvé que tout groupe de Lie semi-simple connexe et de centre fini est de type (T) . Dans ce cas, Azencott a déterminé complètement la relation entre Π et T_μ ; nous énonçons le résultat sans démonstration [1, prop. III.3 et III.4] :

Soit G un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, et soit $K.A.N$ une décomposition d'Iwasawa de G . On note M le centralisateur de A dans K , M_o sa composante neutre, et $\widetilde{N}$ le sous-groupe nilpotent de G opposé à N (correspondant aux racines négatives par rapport à A si N correspond aux racines positives). L'espace de Poisson Π de μ est alors isomorphe à $G/P_\mu AN$ où P_μ est un sous-groupe de M contenant M_o ; il n'y a donc qu'un nombre fini d'espaces de Poisson à isomorphisme près. Pour tout sous-groupe P de M

contenant M_o , les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) il existe $m \in M$ tel que $P_\mu \subset mPm^{-1}$;

b) il existe sur G/PAN une mesure de probabilité μ-invariante et contractile ;

c) il existe $k \in K$ et $n \in \tilde{N}$ tels que $kT_\mu k^{-1} n \subset \overline{\tilde{N}PAN}$;

d) il existe $k \in K$, $n \in \tilde{N}$ et $m \in M$ tels que $kT_\mu nm \subset \overline{\tilde{N}PAN}$.

De plus, pour tout sous-groupe P de M contenant M_o , il existe une infinité de mesures de probabilité μ étalées sur G et telles que Π soit isomorphe à G/PAN .

8. Périodes des fonctions μ-harmoniques.

Un élément h de G est appelé une μ-période à gauche (resp. à droite) si l'on a $f(hg) = f(g)$ (resp. $f(gh) = f(g)$) pour toute fonction μ-harmonique f et tout $g \in G$. En utilisant le théorème de représentation intégrale des fonctions μ-harmoniques, on obtient immédiatement les critères suivants :

a) le groupe Γ_μ des μ-périodes à gauche est l'intersection des stabilisateurs des points de Π ;

b) le groupe Δ_μ des μ-périodes à droite est le stabilisateur de la mesure ν sur Π ;

c) le groupe Γ_μ est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans Δ_μ .

Voici maintenant le théorème-clé pour la détermination des μ-périodes.

THÉORÈME 3.- Soit $h \in G$. On suppose que pour $\mathbb{P}^e$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite $X_n(\omega)^{-1} h X_n(\omega)$ a une valeur d'adhérence appartenant à $S_\mu S_\mu^{-1}$. Alors h est une μ-période à droite.

Comme l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions μ-harmoniques est stable par les translations à gauche, il suffit de prouver que l'on a $f(h) = f(e)$ pour $f \in \mathcal{H}$. Fixons f dans $\mathcal{H}$. La démonstration du théorème 1 montre qu'il existe une fonction borélienne et bornée F sur Ω telle que $F = \lim_{n\to\infty} [f(hX_n) - f(X_n)]$ $\mathbb{P}^e$-presque partout et qu'on a $f(h) - f(e) = \mathbb{E}^e[F]$. Il suffit donc de prouver $F = 0$. On fixe $\delta > 0$ dans la suite.

On pose $\pi = \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r-1}\mu^r$. On définit une fonction borélienne et bornée q sur G par

$$(8) \qquad q(x) = \int_G [f(xg) - f(x)]^2 \, d\pi(g) \qquad (x \in G) .$$

Comme f est μ^r-harmonique, on obtient de suite $q = \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r-1}[Q^r(f^2) - f^2]$, chaque terme de la somme étant positif. En particulier, on a $Q(f^2) \geq f^2$ et la suite des intégrales $\langle f^2 , \mu^n \rangle$ est donc croissante ; on en déduit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}^e[q(X_n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \langle q , \mu^n \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r-1}[r \lim_{n\to\infty} \langle f^2 , \mu^n \rangle - \langle f^2 , \mu^o + \dots + \mu^{r-1} \rangle]$$

$$\leq \sum_{r=0}^{\infty} r.2^{-r-1} \|f\|^2 = \|f\|^2 < \infty .$$

Par suite, la série $\sum_{n=0}^{\infty} q(X_n)$ converge $\mathbb{P}^e$-presque partout sur Ω. Pour tout $x \in G$, notons $A(x)$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $|f(xg) - f(x)| \leq \delta$. D'après l'inégalité de Čebicev, on a $\delta^2\pi(G - A(x)) \leq q(x)$, d'où la conclusion

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} \pi(A(X_n)) = 1 \qquad \mathbb{P}^e\text{-presque partout sur } \Omega .$$

Remplaçons f par la fonction μ-harmonique $g \mapsto f(hg)$ dans le raisonnement précédent. Il faut y remplacer $A(x)$ par l'ensemble $A_h(x)$ des $g \in G$ tels que $|f(hxg) - f(hx)| \leq \delta$; or on a $A_h(x) = x^{-1}h^{-1}xB(x)$, où $B(x)$ se compose des $g \in G$ tels que $|f(xg) - f(hx)| \leq \delta$. On a donc

$$(10) \qquad \lim_{n\to\infty} (X_n^{-1}hX_n\pi)(B(X_n)) = 1 \qquad \mathbb{P}^e\text{-presque partout sur } \Omega .$$

D'après l'hypothèse faite sur h et les formules (9) et (10), il existe un ensemble borélien Ω_δ dans Ω tel que $\mathbb{P}^e(\Omega_\delta) = 1$, qui possède les propriétés suivantes, où $\omega \in \Omega_\delta$, $x_n = X_n(\omega)$ et $y_n = x_n^{-1} h x_n$:

a) la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ a une valeur d'adhérence y appartenant à $S_\mu S_\mu^{-1}$;

b) on a $\lim\limits_{n\to\infty} \pi(A(x_n)) = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n\pi)(B(x_n)) = 1$.

Comme $S_\mu S_\mu^{-1}$ est ouvert, on peut trouver un ensemble infini L d'entiers positifs tel que $y_n \in S_\mu S_\mu^{-1}$ pour $n \in L$ et $\lim\limits_{n\in L} y_n = y$. Comme μ est étalée, il existe une fonction $\psi \geq 0$ continue et bornée sur G, telle que $\pi \geq \psi.m$ et $S_\mu = \{\psi > 0\}$ (cf. page 07) ; on définit une fonction continue $J > 0$ sur $S_\mu S_\mu^{-1}$ par (1)

$$J(x) = \int_G \inf(\Delta(x)\,\psi(x^{-1}g)\,,\,\psi(g))\,dm(g) \qquad (x \in S_\mu S_\mu^{-1}) .$$

Comme on a alors $\lim\limits_{n\in L} J(y_n) = J(y)$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $J(y_n) \geq \varepsilon$ pour $n \in L$. Quitte à retrancher un ensemble fini de L, on a alors les inégalités suivantes pour tout $n \in L$

$$\pi(A(x_n)) > 1 - \varepsilon/2 \quad , \quad (y_n\pi)(B(x_n)) > 1 - \varepsilon/2 \quad , \quad \|\inf(\pi, y_n\pi)\| \geq J(y_n) \geq \varepsilon \ ;$$

on en déduit facilement que $A(x_n)$ et $B(x_n)$ ont un point commun, d'où $|f(hx_n) - f(x_n)| \leq 2\delta$ pour tout $n \in L$. Passant à la limite sur n, on obtient $|F(\omega)| \leq 2\delta$ pour $\omega \in \Omega_\delta$, et finalement $F = 0$ vu l'arbitraire de δ.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE.- <u>On note</u> Z <u>le centre de</u> G. <u>On a alors</u> $\Gamma_\mu \cap Z = S_\mu S_\mu^{-1} \cap Z$. <u>Si de plus, on a</u> $T_\mu = G$, <u>alors toute classe de conjugaison compacte de</u> G <u>est contenue dans</u> Γ_μ, <u>et en particulier</u> Z <u>et tout sous-groupe invariant compact de</u> G <u>agissent trivialement sur</u> Π.

---

(1) La fonction continue Δ sur G est définie par $gm = \Delta(g)m$ pour $g \in G$.

Ce corollaire se déduit facilement du théorème 3 et du lemme suivant :

LEMME 5.- On a $\Gamma_\mu \subset S_\mu S_\mu^{-1}$.

On considère un élément h de G n'appartenant pas à $S_\mu S_\mu^{-1}$, donc tel que les ouverts S_μ et hS_μ soient disjoints. D'après le théorème de Markov-Kakutani, l'opérateur faiblement continu Q dans $L^\infty(G,m)$ laisse fixe un élément f de l'ensemble des fonctions comprises entre 0 et 1 , égales à 0 sur S_μ et à 1 sur hS_μ (m-presque partout sur G). On a alors $Qf = f$ m-presque partout. Raisonnant comme dans le lemme 1, on montre que $Q^{np}f$ tend en tout point de G vers une fonction f_1 telle que $Q^p f_1 = f_1$; alors $f_2 = \frac{1}{p}(f + Qf + \dots + Q^{p-1}f)$ est μ-harmonique, vaut 0 sur S_μ et 1 sur hS_μ . Donc $h \notin \Gamma_\mu$.

C.Q.F.D.

9. Application aux groupes de Lie.

Rappelons d'abord le théorème de Choquet-Deny : si G est un groupe localement compact commutatif et μ une mesure de probabilité sur G (étalée ou non), tout élément du support de μ est une période des fonctions μ-harmoniques. Le corollaire du théorème 3 permet d'obtenir facilement un résultat de ce type : si G est un groupe localement compact, connexe et nilpotent, et μ une mesure de probabilité étalée sur G , toute fonction μ-harmonique sur G est constante ([1], prop. IV.10).

On suppose désormais que G est un groupe de Lie connexe. On note $\underline{g}$ son algèbre de Lie, $\underline{r}$ le radical de $\underline{g}$, et R le sous-groupe distingué fermé de G d'algèbre de Lie $\underline{r}$ (le radical de G). Rappelons qu'on appelle frontière de G tout G-espace homogène compact sur lequel toute mesure de probabilité est contractile. D'après Furstenberg, on sait qu'il existe une frontière maximale $B(G)$, dont toute frontière soit un quotient et que R agit trivialement sur B(G) . En utilisant les méthodes de Furstenberg, on démontre aussi que, *si* G *est transitif sur* Π , alors Π est un revêtement fini de B(G) ; de là résulte immédiatement que R agit trivialement sur Π , et que Π peut être considéré comme l'espace de Poisson de l'image de la mesure μ dans le groupe semi-simple G/R . En particulier, R est contenu dans le groupe des μ-périodes (sous la même hypothèse).

Avant d'énoncer un des résultats fondamentaux d'Azencott, nous aurons besoin de deux définitions : un groupe localement compact G à base dénombrable est dit *de type* (T) s'il est transitif sur l'espace de Poisson de toute mesure de probabilité étalée sur G ; une algèbre de Lie réelle $\underline{h}$ est dite de *type imaginaire pur* si $ad_{\underline{h}}\, x$ a des valeurs propres imaginaires pures pour tout $x \in \underline{h}$.

THÉORÈME 4.- *Soient* G *un groupe de Lie connexe et* R *son radical.*

a) *Si* G *est de type* (T) , *l'algèbre de Lie de* R *est de type imaginaire pur.*

b) *Réciproquement, si l'algèbre de Lie de* R *est de type imaginaire pur et si* G/R *est compact, alors* G *est de type* (T) .

COROLLAIRE.- *Soit* G *un groupe de Lie résoluble connexe. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *Pour toute mesure de probabilité* μ *étalée sur* G , *les fonctions* μ-*harmoniques sont constantes.*

b) *L'algèbre de Lie de* G *est de type imaginaire pur.*

[N. B. - On conjecture en fait le résultat suivant, plus fort que le th. 4 : le groupe de Lie connexe G est de type (T) si et seulement si les valeurs propres de $ad_{\underline{r}}\, x$ sont imaginaires pures pour tout $x \in \underline{g}$.]

Esquissons la démonstration de a). Soient $\underline{z}$ le centre de $\underline{n} = [\underline{g}, \underline{r}]$ et $\underline{p} = [\underline{n}, \underline{n}] \cap \underline{z}$. On montre facilement que $\underline{p}$ n'est pas nul si l'algèbre de Lie $\underline{n}$ n'est pas commutative, et que $\underline{r}$ est de type imaginaire pur si et seulement s'il en est ainsi de $\underline{r}/\underline{p}$. Comme le quotient d'un groupe de type (T) est de type (T) (car toute mesure de probabilité étalée peut se remonter en une mesure étalée), une récurrence sur la dimension de G ramène au cas où $\underline{n}$ est commutative.

On utilise l'indice $_c$ pour désigner la complexification d'une algèbre de Lie réelle. Une forme linéaire complexe α sur $\underline{r}_c$ est une racine s'il existe $x \neq 0$ dans $\underline{n}_c$ avec $[y,x] = \alpha(y).x$ pour tout $y \in \underline{r}_c$. Supposons que $\underline{r}$ ne soit pas de type imaginaire pur ; il existe alors une racine α et un élément x_o de $\underline{n}_c$ tels que $\mathrm{Re}\,\alpha(x_o) < 0$. Notons E le sous-espace complexe de $\underline{r}_c$ engendré par $\underline{n}_c$ et x_o , et posons $F = \sum\limits_{y \in \underline{r}_c} (\mathrm{ad}\, y - \alpha(y))(\underline{n}_c)$. La représentation adjointe de G définit une représentation linéaire Φ de G dans $L = E/F$, et le sous-espace $Q = \underline{n}_c/F$ est invariant par G . On définit alors une action de G sur Q par $g.x = \Phi(g)(x + x_o) - x_o$. L'élément $g_o = \exp x_o$ de G agit comme l'homothétie de rapport $e^{\alpha(x_o)}$ de module < 1 sur Q . Soit K la boule unité fermée de rayon 1 pour une norme sur Q et soit U l'intérieur de K . L'ensemble S des $g \in G$ tels que $gK \subset U$ est un semi-groupe ouvert, non vide car $g_o \in S$. On peut alors trouver une mesure de probabilité étalée sur G de la forme $\mu = f.m$ avec $f \geq 0$ continue et $S = \{f > 0\}$. Comme on a $\bar{S}.K \subset K$, le théorème de Markov-Kakutani démontre l'existence d'une mesure de probabilité μ-invariante λ sur Q de support contenu dans K . Pour toute fonction continue φ à support compact sur Q , la fonction

$g \longmapsto \int_Q \varphi(g.x)\, d\lambda(x)$ est μ-harmonique, donc <u>invariante</u> par R . Ceci prouve que la mesure λ est invariante par R ; or les éléments de $\exp \underline{n} \subset R$ agissent par des translations sur Q , et l'un au moins n'agit pas trivialement. Comme λ est à support compact, aucune translation non nulle ne peut la laisser invariante, d'où une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT - Espaces de Poisson des groupes localement compacts, à paraître aux Lecture Notes in Mathematics, Springer, Heidelberg.

[2] P. CARTIER - Cheminements aléatoires dans les arbres, Séminaire de Probabilités de Strasbourg, 1969/70.

[3] H. FURSTENBERG - Poisson formula for semi-simple Lie groups, Ann. of Maths., 77 (1963), p. 335-386.

[4] H. FURSTENBERG - Non commuting random products, Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), p. 377-428.

Les résultats de Furstenberg sont exposés dans :

A. DELZANT - Séminaire de théorie du potentiel Brelot-Choquet-Deny, (1962/63), exposés 10 et 11.

G. SCHIFFMANN - Séminaire Bourbaki, 1963/64, exposé 268.

Pour les propriétés des mesures quasi-invariantes, on pourra consulter :

N. BOURBAKI - Intégration, chapitre 7, spécialement les pages 31 et 53 à 58.

Enfin, on trouvera une excellente discussion probabiliste du théorème de Choquet-Deny dans :

P. A. MEYER - Probabilités et potentiel, Hermann, Paris, 1966, pages 189 à 193.